ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Вычислительные системы и информационная безопасность»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Автор
Полуян А.Ю.

Ростов-на-Дону, 2014

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения лабораторных работ по дисциплине " Вычислительная математика " (для студентов второго курса специальностей 220201, 230400, 090900, 230201 направлений подготовки и форм обучения). Содержит общие сведения методов интерполирования, позволяет освоить: основные приемы интерполяции. Лабораторная работа включает набор заданий, методические указания к ним и контрольные вопросы по изучаемой теме. Методические рекомендации могут быть использованы для самостоятельной работы.

Автор

к.т.н. Полуян А.Ю.

Оглавление

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ «ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Получение навыков использования методов интерполирования функции.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Аппроксимация - это замена одной функции другой близкой к исходной и обладающей "хорошими" свойствами, позволяющими легко производить над ней те или иные аналитические или вычислительные операции.

Простейшая задача интерполирования: на отрезке [a,b] задана (n+1) точка, эти точки называются узлами интерполирования, и (n+1) значение функции в этих точках. Требуется построить функцию F(x), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполирования те же значения, что и f(x), т.е.

$$F(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n}.$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую некоторого определенного типа, проходящую через систему заданных точек. Это задача становится однозначной, если вместо произвольной функции строить полином $P_n(x)$ степени n такой, что

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n},$$

тогда внутри промежутков (x_i, x_{i+1}) построенный полином будет приближенно описывать функцию f(x).

Полученную интерполяционную формулу обычно используют для нахождения приближенного значения функции f(x) в точках, отличных от узлов интерполирования.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть на отрезке [a,b] заданы (n+1) точка $x_0, x_1, \dots, x_n$ и значения функции f в этих точках.

Будем строить интерполяционный многочлен вида $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\Phi_j(x)$, где $\Phi_j(x),\ j = \overline{0,n}$ - многочлены степени n, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } & i \neq j; \\ 1, \text{ при } & i = j, \end{cases}$$

так как требуем, чтобы значения интерполяционного многочлена и значения функции f(x) совпадали в узлах интерполяции i, т.е. $P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0,n}$.

Тогда $\Phi_j(x)$ можно искать в виде:

$$\Phi_j(x) = A_j(x - x_0)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)$$

где A_j - некоторая константа, которую найдем из условия $\Phi_j(x_j) = 1$, тогда

$$\Phi_j(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)}$$

Если обозначить $\omega_n = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ и продифференцировать это выражение по x, полагая $x=x_j$, то последнее выражение можно записать в виде:

$$\Phi_j(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)},$$

где $\omega'_n(x_j) = (x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_n)$

Таким образом, получим многочлен

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)},$$

который называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Пусть узлы интерполирования являются равноотстоящими, т.е. $x_i - x_{i-1} = h$, если ввести новую переменную $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, то многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов запишется в виде

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{j=0}^{n} f(x_0 + jh)\frac{(-1)^{n-j}t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-j)\,j!(n-j)!},$$

т.к.

$$\Phi_j(x) = \Phi_j(x_0 + th) = (-1)^{n-j}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-j)\,j!(n-j)!},\ j = \overline{0,n}.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет существенный недостаток: если при выбранном числе узлов выяснилось, что интерполяционный многочлен недостаточно точно находит значение функций в заданной точке, то при добавлении одного или нескольких узлов все вычисления необходимо проводить заново. В этом случае, когда требуется найти не аналитическое выражение, а лишь его значение в некоторой точке, от этого недостатка можно избавиться, воспользовавшись интерполяционной схемой Эйткена. По этой схеме значение интерполяционного многочлена Лагранжа находится путем последовательного применения единообразного процесса

0	y_0	x_0-x				
1	y_1	x_1-x	$L_{01}(x)$			
2	y_2	x_2-x	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
	…	…	…	…	…	…
n	y_n	x_n-x	$L_{n-1n}(x)$	$L_{n-2n-1n}(x)$	$L_{n-3\ldots n}(x)$…	$L_{01\ldots n}(x)$

где $y_i = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$,

$$L_{ii+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix},$$

$$L_{ii+1i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i}\begin{vmatrix} L_{ii+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix},$$

$$L_{ii+1\ldots i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i}\begin{vmatrix} L_{i\ldots i+k-1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1\ldots i+k}(x) & x_{i+k} - x \end{vmatrix}.$$

Применяя эту схему, можно постепенно подключать все новые и новые узлы до тех пор, пока желаемая точность не будет достигнута.

Если все вычисления проведены точно, то интерполяционный многочлен Лагранжа совпадает с заданной функцией в узлах интерполирования. Однако он будет отличен от нее в остальных точках. Исключением является случай, когда сама функция f(x) является многочленом степени не выше n.

Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция f(x) имеет на [a,b] непрерывные производные (n+1)-го порядка, имеет вид $f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$,

где ξ - некоторая точка [a,b] или

$$\left|f(x)-L_n(x)\right| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_n(x)\right|, \text{ где } M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Это выражение может служить оценкой отклонения полинома Лагранжа от f(x) в том случае, когда можно оценить $f^{(n+1)}(x)$.

Интерполяционная формула Ньютона

Запишем интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ в другой форме:

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \ldots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]$$

где разность $L_k(x) - L_{k-1}(x),\ k=\overline{1,n}$, есть многочлен степени k, обращающийся в нуль в точках $x_0,\ldots,x_{k-1}$. Поэтому можно записать

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = B(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})$$

Константу B найдем, полагая $x=x_k$, т.е.

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = B(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1}) \Rightarrow$$

$$B = \sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_k)} = f(x_0,x_1,\ldots,x_k)$$

где $f(x_0,x_1,\ldots,x_k)$ - есть разностное отношение k-го порядка .

Учитывая выражение для B интерполяционный многочлен можно представить в виде

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_1) + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$$

Эта форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа носит название интерполяционного многочлена Ньютона для неравных промежутков. Многочлен Ньютона имеет степень равную n и удовлетворяет условию

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i=\overline{0,n}.$$

Формула Ньютона имеет более сложное строение, чем формула Лагранжа, и требует составления разностных отношений $f(x_0,x_1,\ldots,x_k)$, $k=\overline{1,n}$. Несмотря на это, она более удобна для вычислений, т.к. при добавлении нового узла все проделанные вычисления сохраняются, а в формуле добавляется еще одно слагаемое $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f(x_0,x_1,\ldots,x_{n+1})$.

Это позволяет не задавать заранее число узлов интерполирования, а постепенно увеличивать точность результата, добавляя последовательно по одному новому узлу.

Остаточный член формулы Ньютона совпадает с остаточным членом формулы Лагранжа, т.е.

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

где ξ - точка отрезка, содержащего узлы интерполирования и точку x. Из свойств разностных отношений следует

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f(x, x_0, \dots, x_n).$$

Тогда для остаточного члена имеем:

$$R_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n)\omega_n(x).$$

Интерполяционные и экстраполяционные формулы при равноотстоящих значениях аргумента

Пусть все узлы интерполирования x_i принадлежат отрезку [a,b], причем $a=x_0$, $b=x_n$.

Если точка интерполирования x принадлежит отрезку [a,b], то формула, приближающая функцию f в точке x, называется интерполяционной, а если x не принадлежит отрезку [a,b], то формула называется экстраполяционной.

Узлы интерполирования, лежащие ближе к точке интерполирования, оказывают большее влияние на интерполяционный многочлен, чем узлы, лежащие дальше. Поэтому целесообразно за x_0 и x_1 брать ближайшие к x узлы интерполирования и проводить сначала линейную интерполяцию по этим узлам, а затем постепенно привлекать следующие узлы таким образом, чтобы они возможно симметричнее располагались относительно точки. Полученные при этом поправки будут незначительными.

Пусть узлы интерполирования определены на [a,b] равномерно и заданы значения интерполируемой в этих узлах функции.

Формула Ньютона для интерполирования вперед и экстраполирования назад

Пусть точка интерполирования x находится ближе к левому концу отрезка [a,b] или слева от него. Тогда интерполяционная формула Ньютона для интерполирования вперед и экстраполирования назад примет вид

$$P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ - новая переменная, $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, k = 1,2,\ldots,\ \Delta^0 y_i = y_i$ - конечная разность k - го порядка.

Связь разностных соотношений и конечных разностей:

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_0, x_0 + h) = \frac{\Delta y_0}{1!h},$$

$$f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} \text{ и т.д.}$$

Остаток в этом случае имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Формула Ньютона для интерполирования назад и экстраполирования вперед

Пусть точка интерполирования x находится ближе к правому концу отрезка [a,b] или справа от него. За первый узел интерполирования примем ближайший и обозначим его через x_k. Тогда интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад и экстраполирования вперед примет вид

$$P(x) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $t = \dfrac{x - x_n}{h}$ - новая переменная.

Связь разностных соотношений и конечных разностей:

$$f(x_n) = y_n,\ f(x_n, x_n - h) = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h},$$

$$f(x_n, x_n - h, x_n - 2h) = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} \text{ и т.д.}$$

Остаток в этом случае имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Правило определения максимального порядка разностей, которые ведут себя правильно:

если $\max\limits_i \left|\Delta^j y_i\right| \ge 2^j \varepsilon$, а $\max\limits_i \left|\Delta^{j+1} y_i\right| < 2^{j+1} \varepsilon$, то максимальный порядок разностей, которые ведут себя правильно, равен j. Использование разности порядка (j+1) приведет к искажению результата. Здесь ε - абсолютная погрешность вычисленных значений y_i.

Интерполяционные формулы Гаусса

Пусть узлы интерполирования x_0, x_1, ..., x_n равноотстоящие и точка интерполирования x находится в середине отрезка [a,b] "вблизи" узла x_k, причем $x>x_k$. Для построения интерполяционной формулы необходимо привлекать узлы интерполирования в следующем порядке: x_k, x_k+h, x_k-h, ..., x_k+ih, x_k-ih. Обозначив $t = \dfrac{x - x_k}{h}$ и вводя конечные разности по формулам:

$$f(x_k) = y_k,\ f(x_k, x_k + h) = \frac{\Delta y_k}{1!h},$$

$$f(x_k - h, x_k, x_k + h) = \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{2!h^2} \text{ и т.д.,}$$

то для интерполирования вперед формула Гаусса примет вид

$$P(x_k + th) = y_k + \frac{t}{1!}\Delta y_k + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{k-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!}\Delta^3 y_{k-1} + \ldots +$$
$$+ \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)}{(2i-1)!}\Delta^{2i-1} y_{k-i+1} +$$
$$+ \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)(t-i)}{(2i)!}\Delta^{2i} y_{k-i}$$

Если точка интерполирования $x<x_k$, то узлы для построения следует привлекать в следующем порядке: x_k, x_k-h, x_k+h, ..., x_k-ih, x_k+ih.

Формула Гаусса для интерполирования назад имеет вид

$$P(x_k + th) = y_k + \frac{t}{1!}\Delta y_{k-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{k-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!}\Delta^3 y_{k-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)}{(2i-1)!}\Delta^{2i-1} y_{k-i} +$$

$$+ \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(i-1)^2)(t+i)}{(2i)!}\Delta^{2i} y_{k-i}$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами интерполирования функции.
2. Ознакомиться с инструкцией к ПДП.
3. Ознакомиться с методом использования ПДП для нахождения интерполяционных многочленов на демонстрационных примерах.
4. Для заданной таблично функции построить все возможные интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа максимальной степени, пригодные для определения значения функции в указанных промежуточных точках xTi.

Варианты задания выбрать из табл. 1. Для всех вариантов $x0 = 0$, $x1 = b/4$, $x2 = b/2$, $x3 = 0{,}75b$, $x4 = b$, $xTi = xi + b/8$.

5. Вычислить значения функции в указанных промежуточных точках, используя найденные многочлены. Сравнить значения, полученные по разным интерполяционным формулам.

Таблица 1

№ варианта	b	$y0$	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$
1	4,4	–14,6	1,1	0,7	13,5	5,6
2	4,8	8,6	–12,2	–2,8	2,7	–5,3
3	5,2	–9,0	9,1	–0,2	–10,4	–12,1
4	5,6	4,3	–1,3	4,7	0,2	–13,6
5	6,0	–3,6	12,1	4,9	7,9	–7,4
6	6,4	4,6	0,2	–6,5	11,4	–7,9
7	6,8	–9,5	–1,4	–9,0	–1,0	–13,6
8	7,2	–11,8	11,9	–12,6	–2,6	7,4
9	7,6	–1,1	4,8	5,4	2,3	14,8

10	8,0	–7,9	5,4	12,3	–10,9	–2,7
11	8,4	9,2	2,3	–6,0	–1,3	14,2
12	8,8	8,3	1,1	8,9	–5,5	–11,3
13	9,2	–11,2	–11,9	–9,8	–2,7	–14,2
14	9,6	6,8	8,1	–13,4	–13,9	–11,9
15	10,0	12,8	3,9	–11,2	–1,4	9,9
16	10,4	10,7	–13,7	–5,5	–1,8	9,5
17	10,8	–9,4	–12,8	–8,7	–0,4	1,1
18	11,2	–11,2	–4,5	10,0	5,5	–14,2
19	11,6	–10,2	13,0	8,4	0,1	8,4
20	12,0	–13,9	–8,6	11,1	11,9	1,2

6. Результаты вычисления занести в табл. 2.

Таблица 2.

i	xTi	$y(xTi)$	Вид многочлена
			(1-я Ньютона $n = 4$)
			(Лагранжа)
			(1-я Ньютона $n = 3$)
			(2-я Ньютона $n = 2$)
			(Лагранжа)

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

1. Таблицу значений заданной функции и обоснование выбора степени многочленов для промежуточных точек.
2. Найденные интерполяционные многочлены.
3. Значения функции в промежуточных точках, вычисление с помощью найденных многочленов.
4. Мотивированный вывод об окончательном выборе значения функции в промежуточных точках.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как ставится задача интерполяции?
2. В чем отличие интерполирования от экстраполирования?
3. Какие формулы используются для интерполирования в равноотстоящих узлах, а какие в неравноотстоящих?
4. Что такое узлы интерполяции?
5. Чем отличаются первая и вторая формулы Ньютона?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ «МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков решения уравнений численными методами.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задача решения уравнения чаще всего встречается при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в инженерной практике. Отыскать точное значение корня уравнения можно лишь в некоторых частных случаях. Кроме того, точное значение корня часто все равно приходится заменить приближенным (например, при решении уравнения $3x=1$). Поэтому при решении уравнения широко используются методы, позволяющие получать приближенное решение с любой заданной степенью точности.

Задача о нахождении приближенных значений действительных корней уравнения f(x)=0 предусматривает предварительное отделение корня, т.е. установление промежутка, в котором других корней данного уравнения нет. Мы будем предполагать, что функция f(x) в промежутке [a, b] непрерывна вместе со своими производными f(x) и f'(x), значения f(a) и f(b) функции на концах промежутка имеют разные знаки, т. е. f(a)*f(b)<0, и обе производные f(x) и f"(x) сохраняют знак во всем промежутке [a, b].

Так как действительными корнями уравнения f(x)=0 являются абсциссы точек пересечения кривой y=f(x) с осью Ox, то отделение корня можно произвести графически. Вместо уравнения y=f(x) можно взять уравнение y =k*f(x), где k— постоянная величина, отличная от нуля, так как уравнения f(x)=0 и kf(x)=0 равносильны.

Постоянной величиной можно распорядиться так, чтобы ординаты точек графика не были чрезмерно большими или, наоборот, чтобы график не был слишком близок от оси Ox. Иногда бывает полезно уравнение f(x)=0 записать в виде φ(x)=ψ(x). Действительными корнями исходного уравнения будут абсциссы точек пресечения графиков функций y =φ(x) и y =ψ(x).

1. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Требуется вычислить действительный корень уравнения f(x)=0, изолированный на отрезке [a.b]. Рассмотрим график функции y=f(x). Пусть f(a)<0 и f(b)>0. Точки графика A[a;f(a)] и B [b; f(b)] соединим хордой. За приближенное значение искомого корня примем абсциссу x_1 точки пересечения хорды AB с осью Ox. Это приближенное значение найдется по формуле

$$x_1 = a - \frac{(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

где x принадлежит интервалу (a, b). Пусть, например, $f(x_1)<0$, тогда за новый (более узкий) интервал изоляции корня можно принять $[x_1, b]$. Соединив точки A_1 $[x_1;\ f(x_1)]$ и B[b; f(b)], получим в точке пересечения хорды с осью Ox второе приближение x_2, которое вычислим по формуле

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

и т. д.

Последовательность чисел a, x_1, x_2,... стремится к искомому корню уравнения f(x)=0. Вычисление приближенных значений корней уравнения следует вести до тех пор, пока не перестанут изменяться те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т. е. пока не будет достигнута заданная степень точности). Если $\bar{x}$ — точный корень уравнения f(x)=0, изолированный на отрезке [a, b], а ε— приближенное значение этого корня, найденное по способу хорд, то оценка погрешности этого приближенного значения может быть выполнена при помощи неравенства

$$|\bar{x} - \xi| < -\frac{f(a) - f(b)}{2}\max_{a \le x \le b}\left|\frac{f''(x)}{|f'(x)|^2}\right|$$

2. Способ касательных (Ньютона). Пусть действительный корень уравнения f(x)=0 изолирован на отрезке [a, b]. Будем предполагать, что все ограничения, сформулированные во введении относительно f(x), сохраняют силу и сейчас. Возьмем на отрезке [a, b] такое число x_0, при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $f'(x_0)$, т. е. такое, что $f(x_0)f'(x_0)>0$ (в частности, за x_0 , может быть принят тот из концов отрезка [a, b], в котором соблюдено это условие). Проведем в точке M_0 $[x_0;f(x_0)]$ касательную к кривой y=f(x). За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox. Это приближенное значение корня найдется по формуле:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Применив этот прием вторично в точке M_1 $[x_1;f(x_1)]$, получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т. д. Полученная таким образом последовательность x_0, x_1, x_2... имеет своим пределом искомый корень. Для оценки погрешности приближенного значения корня, найденного по способу Ньютона, может быть использовано неравенство

$$|\bar{x} - \xi| < -\frac{[f(\bar{x})]^2}{2} \max_{a \le x \le b} \left| \frac{f''(x)}{|f'(x)|^3} \right|$$

3. Комбинированное применение способов хорд и касательных. Требуется найти действительный корень уравнения f(x)=0, изолированный на отрезке [a.b]. Предполагается, что f(a) и f(b) имеют разные знаки, а каждая из производных сохраняет определенный знак на отрезке изоляции. Возьмем на отрезке [a,b] такую точку x_0, что f(x) и $f(x_0)$ (при x, принадлежащем промежутку изоляции) имеют одинаковые знаки. Воспользуемся формулами способов хорд и касательных;

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{12} = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Величины x_{11} x_{12} принадлежат промежутку изоляции, причем $f(x_{11})$ и $f(x_{12})$ имеют разные знаки. Построим новую пару приближений к корню:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})}$$

$$x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12} - x_{11})f(x_{11})}{f(x_{12}) - f(x_{11})}$$

Точки x_{21} и x_{22} на числовой оси расположены между точками x_{11} x_{12}, причем $f(x_{21})$ и $f(x_{22})$ имеют разные знаки. Вычислим теперь значения:

$$x_{31} = x_{21} - \frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})}$$

$$x_{32} = x_{21} - \frac{(x_{22} - x_{21})f(x_{21})}{f(x_{22}) - f(x_{21})}$$

и т. д. Каждая из последовательностей

$$x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, \dots$$
$$x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}, \dots$$

стремится к искомому корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая монотонно убывает. Пусть, например, $x_{n1}<x<x_{n2}$, тогда $0 < \bar{x} - x_{n-1} < x_{n2} - x_{n1}$ Задав заранее достаточно малое ε, мы можем, увеличивая n, добиться выполнения неравенстве $x_{n2} - x_{n1} < \varepsilon$ следовательно, при этом же значении n будет выполняться неравенство $\bar{x} - x_{n1} < \varepsilon$.

Таким образом, x_{n1} будет приближенным значением корня $\bar{x}$, вычисленным с погрешностью, не превышающей ε. Так, например, для нахождения приближенного значения $\bar{x}$ с точностью до 0,001 нужно определить n таким образом, чтобы значения x_{n1} и x_{n2}, вычисленные с точностью до 0,001, совпадали.

4. Метод итераций. Если данное уравнение приведено к виду x =φ(x), где $|\varphi'(x)| \le r \le 1$ всюду на отрезке [a, b], на котором исходное уравнение имеет единственный корень, то исходя из некоторой начального значения x_0, принадлежащего отрезку [a,b] можно построить такую последовательность:

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1})$$

Пределом последовательности x_1, x_2, ...,x_n является единственный корень уравнения f(x)=0 на отрезке [a, b]. Погрешность приближенного значения x_n корня $\bar{x}$, найденного методом итерации, оценивается неравенством

$$|\bar{x} - x_n| < \frac{r}{r-1} |x_n - x_{n-1}|$$

Для нахождения приближенного значения корня с погрешностью, не превышающей ε, достаточно n определить так, чтобы выполнилось неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{r-1}{r} \varepsilon$$

5. Способ проб. Интервал изоляции действительного корня всегда можно уменьшить путем деления его, например, пополам, определяя, на границах какой из частей первоначального интервала функция f(x) меняет знак. Затем полученный интервал снова делят на две части и т. д. Такой процесс проводится до тех пор, пока не перестанут изменяться сохраняемые в ответе десятичные знаки.

6. Обобщение способа Ньютона для приближенного решения уравнений.

а) Метод Чебышева. Требуется найти вещественный корень уравнения f(x)=0, изолированный в интервале (a, b). Функция f(x) предполагается непрерывной вместе с производными до n-го порядка включительно, причем в интервале (a,b) f'(x)≠0. Рассмотрим кривую $x = \varepsilon + A_1 y + A_2 y^n + \ldots + A_n y^n$. Распорядимся параметрами ε, A_1, A_2,...,A_n так, чтобы кривые y=f(x) и

$$x = \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$$

в точке с абсциссой x_0 из интервала (a,b) имели касание n-го порядка. Говорят, что кривые y=f(x) и y=φ(x) в точке с абсциссой x_0 имеют касание n-го порядка, если

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0), \quad f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0)$$

Геометрически точка касания n-го порядка является предельным положением (n+ 1) точек пересечения кривых y=f(x) и y=φ(x) при стремлении этих точек пересечения к точке с абсциссой x_0. В данном случае кривая y =φ(x) неявно определяется уравнением

$$x = \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$$

При таком выборе параметров ε, A_1, A_2, ..., A_n за приближенное значение искомого корня можно принять абсциссу точки пересечения кривой

$$x = \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$$

с осью Ox т. е. число ε.

Если n=1, то $\xi = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (способ Ньютона)

Если n=2, то $\xi = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \dfrac{[f(x_0)]^2 * f''(x_0)}{2![f'(x_0)]^3}$ (1)

Если n=3,
то

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 * f''(x_0)}{2![f'(x_0)]^3} - \frac{[f(x_0)]^3}{3!} * \frac{3[f''(x_0)]^2 - f'(x_0) * f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5} \quad (2)$$

Если n=4,

то

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 * f''(x_0)}{2![f'(x_0)]^3} - \frac{[f(x_0)]^3}{3!} * \frac{3[f''(x_0)]^2 - f'(x_0) * f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5} - \frac{[f(x_0)]^4}{4!}$$

$$* \frac{[f'(x_0)]^2 * f^{IV}(x_0) - 10 f'(x_0) f''(x_0) f'''(x_0) + 15[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^7} \qquad (3)$$

Приведем оценки погрешности значений корней, найденных по формулам (1) и (2). Для формулы (1) при n = 2

$$|\bar{x} - \xi| < \frac{[f(x_0)]^3}{3!} \max_{a \le x \le b} \left| \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x) f'''(x)}{[f'(x)]^5} \right|$$

для формулы (2) при n=3

$$|\bar{x} - \xi| < \frac{[f(x_0)]^4}{4!} \max_{a \le x \le b} \left| \frac{3[f''(x)]^2 f^{IV}(x) - 10 f'(x) f''(x) f'''(x) + 15[f''(x)]^3}{[f'(x)]^7} \right|$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами приближенного вычисления корней уравнений.

2. В соответствии с вариантом разработать алгоритм и программу на языке ABC PASCAL.

3. С помощью дополнительных программ отделить наименьший по модулю корень заданного уравнения. Вариант задания выбрать из табл. 1.

4. Вычислить с помощью программы значение отдельного корня четырьмя различными методами. При использовании метода простых итераций найти решение при разных начальных приближениях. Результаты вычислений занести в табл. 2.

Таблица 1.

№ п/п	Дифференциальное уравнение или система	Пределы изменения переменой	Начальные условия	Шаг интегрирования
1	$\dot{\alpha} = -\frac{\cos t}{t+0{,}1}\Psi + 0{,}73\cdot\alpha$ $\dot{\Psi} = t^2\cdot\Psi + 7{,}37\cdot\alpha$	t∈[0;0.3]	$\alpha_0=0$ $\psi_0=3{,}2$	0,004
2	$\ddot{y} = 0.71\cdot\sin\dot{y} + 0.35\cdot\sqrt{x}$	x∈[0;0.5]	$y_0 = 0$ $\dot{y}_0 = 0$	0,02
3	$\dot{y} = 0.49\cdot y/x + \sin x/x$ $\dot{z} = -0.27\cdot z + \sqrt{x}\cdot y$	x∈[0;0.7]	$y_0=2.8$ $z_0=0$	0.001
4	$7.1\ddot{y} = e^{\sqrt{x}}/\sqrt{x}\cdot\dot{y} - 0.47$	x∈[0;0.5]	$y_0 = 0$ $\dot{y}_0 = -1{,}37$	0.01
5	$\dot{\varphi} = -0.33\cdot\Psi + 0.14\cdot t\cdot\varphi$ $\dot{\Psi} = (t+1)\cdot\Psi + 0.15\cdot\varphi$	t∈[0;0.08]	$\varphi_0=0$ $\psi_0=-0.17$	0,008
6	$\ddot{y} = t^3/5\cdot\dot{y} - t/5\cdot\sin t\cdot y$	T∈[0;0.44]	$y_0 = 0$ $\dot{y}_0 = -3{,}41$	0.02
7	$\dot{s} = (+0.1)^2\cdot 5 + 2.73\cdot t$ $\dot{v} = s\cdot t + v/s$	T∈[0;0.44]	$S_0=0$ $V_0=0$	0.05
8	$\ddot{v} = -t\cdot\dot{v}/\sin t + 0.9v + t\cdot\sin t$	T∈[0;0.28]	$y_0 = 0{,}14$ $\dot{y}_0 = 0$	0,07
9	$\ddot{p}\cdot 0.7 = -x^3\cdot\dot{p} + 0.25p\cdot x + \sqrt{x}$	t∈[0;0.44]	$p_0 = 0{,}1$ $\dot{p}_0 = -0.3$	0.07
10	$\ddot{y}\cdot 7 = -\frac{t\cdot\dot{y}}{\sqrt{t-1}} - \frac{4.027\cdot t\cdot y}{\sqrt{t}} + 0.4\cdot t^2$	t∈[0;0.44]	$y_0 = 0$ $\dot{y}_0 = -3{,}41$	0,005

Таблица 2.

Метод 1		Метод 2		Метод 3		Метод 4	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

1. График исследуемой функции с интервалами отделения корней.
2. Таблицы пошаговых расчетов корня уравнения.
3. Обоснованное заключение о преимуществах и недостатках использования исследованных методов решения применительно к заданному уравнению.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как и зачем выполняется отделение корня?
2. Каково условие сходимости метода хорд?
3. Чем отличаются итерационные методы хорд и секущих?
4. Какие методы предпочтительнее воспользоваться для решения уравнений $2x2 + \sin(0,5x) - 5 = 0$, $2-x - x = 0$?
5. В чем заключается условие сходимости метода простых итераций?
6. В чем отличие методов касательной и секущей, и что у них общего?