Основы теории управления

Кафедра «Вычислительные системы и информационная безопасность»

Учебно-методический комплекс дисциплины

Составитель

к.т.н., доцент Цветкова О.Л.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Рабочая программа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Факультет Энергетика и системы коммуникаций
Кафедра Вычислительные системы и информационная безопасность

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по МР
________ Н.Н. Шумская
«28» 05 20 13 г
Рег. № 996

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

По дисциплине Б2.В.ОД.1 Основы теории управления

По направлению 230400 Информационные системы и технологии

Форма и срок освоения ООП очная нормативный, заочная нормативный, заочная сокращенный

Общая трудоемкость – 4 (з.е.)

Всего учебных часов – 144 час.

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ	СЕМЕСТР			
	Нормативный срок		Сокращенный срок	
	очная	заочная	очная	заочная
Экзамен	5	6		
Зачет				5
КР				
КП				

Адреса электронной версии программы__________

Ростов-на-Дону
20 13

Лист согласования

Рабочая программа по дисциплине «Основы теории управления» составлена в соответствии с требованиями основной образовательной программы, сформированной на основе Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 230400 Информационные системы и технологии, профиль «Информационные системы и технологии».

Дисциплина относится к обязательным дисциплинам вариативной части математического и естественнонаучного цикла (Б2).

Рабочая программа составлена к.т.н., доцентом Цветковой О.Л. и рассмотрена на заседании кафедры «Вычислительные системы и информационная безопасность».

Протокол № 9 от « 25 » марта 2013 г.

Зав. кафедрой «Вычислительные системы и информационная безопасность» ____________ В.А.Фатхи

Одобрена секцией по профилю научно-методического совета направления «Информационные системы и технологии»

Руководитель секции ____________ В.А. Фатхи

« 25 » 03 2013 г.

Руководитель ЦНМОиТОП ____________ В.В. Юрьева

« 26 » 03 2013 г.

2

Структура и содержание дисциплины

Раздел 1. Общие положения

1.1 Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

Целью изучения дисциплины «Основы теории управления» является обучение бакалавров методам и методикам математического описания и комплексного исследования систем управления, применяемых в технических устройствах различного назначения. При изучении данного курса у студентов формируются знания и навыки необходимые для проведения синтеза и анализа качества систем управления.

Задачи дисциплины:

1) изучение основных принципов построения систем автоматического управления (САУ);

2) изучение способов математического описания и ознакомление с задачами исследования линейных непрерывных САУ;

3) выработка навыков составления математических моделей САУ;

4) изучение методов анализа устойчивости и качества процессов управления в САУ;

5) изучение методов синтеза алгоритмов управления в непрерывных САУ;

6) выработка навыков линеаризации нелинейных систем;

7) изучение принципов модального управления, построения адаптивных систем;

8) выработка навыков применением ПЭВМ и пакетов прикладных программ при выполнении расчетов по анализу устойчивости и качества управления, синтезе систем управления.

1.2 Связь с предшествующими и последующими дисциплинами (модулями, практиками, научно-исследовательской работой (НИР)).

ВПК	Знать	Уметь	Владеть
Уровень 1	Основные принципы выбора исходных данных для проектирования систем управления	Проводить выбор исходных данных для проектирования систем управления	Способностью проводить выбор исходных данных для проектирования систем управления
Уровень 2	Принципы выбора исходных данных для проектирования систем управления, методы моделирования систем управления	Проводить выбор исходных данных для проектирования систем управления, осуществлять моделирование процессов и систем управления	Способностью проводить выбор исходных данных для проектирования систем управления, навыками использования средств моделирования процессов и систем управления
Уровень 3	Принципы выбора исходных данных для проектирования в зависимости от назначения и требуемых основных характеристик системы	Проводить аргументированный выбор исходных данных для проектирования систем управления, осуществлять моделирование процессов и систем	Способностью проводить выбор исходных данных для проектирования систем управления, навыками использования средств моделирования процессов и систем управления, навыками оценки качества

	управления, методы математического и компьютерного моделирования процессов и систем управления	управления, с последующей оценкой качества и точности работы спроектированной системы управления	и точности работы спроектированной системы управления

Для успешного усвоения данной дисциплины необходимо, чтобы студент владел знаниями, умениями и навыками, сформированными в процессе изучения дисциплин:

Математика» — знать основы дифференциального и интегрального исчисления, понятие «матрица», операции над матрицами, понятие линейных и нелинейных функций и уравнений.

«Физика» — знать основы теории электродинамики.

Дисциплина «Основы теории управления» является предшествующей для изучения дисциплины «Моделирование систем».

Раздел 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины и планируемые результаты обучения

Студенты, завершившие изучение дисциплины «Основы теории управления», должны обладать следующими вузовскими (обобщенными) компетенциями (ВК):

— профессиональными компетенциями (ВПК) — способность проводить выбор исходных данных для проектирования и моделирование процессов и систем управления.

Таблица соответствия ВК и компетенций по ФГОС

ВК	Код направления	Перечень компетенций направления (ОК или ПК)
ВПК	230400	Способность проводить выбор исходных данных для проектирования (ПК-4). Способность проводить моделирование процессов и систем (ПК-5).

Раздел 3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Тематический план дисциплины.

Раздел (название)	Тема, литература	Содержание
1. Введение в теорию автоматического управления. Устойчивость линейных непрерывных систем управления	1.1 Основные понятия теории автоматического управления (ТАУ) [6.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.3.1, 6.3.5]	Основные понятия теории автоматического управления (ТАУ) Принципы управления
	1.2 Классификация систем управления и история автоматического управления [6.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.3.1, 6.3.5]	Классификация систем управления История автоматического управления

	1.3 Режимы работы и передаточные функции систем управления [6.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.3.1, 6.3.5]	Статический и динамический режимы работы систем управления Передаточная функция системы управления
	1.4 Понятие временных и частотных характеристик систем управления [6.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.3.1, 6.3.5]	Типовые управляющие и возмущающие воздействия Понятие временных характеристик Понятие частотных характеристик
	1.5 Типовые динамические звенья. Эквивалентные преобразования структурных схем [6.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.3.5]	Типовые позиционные динамические звенья 1-го и 2-го порядков Типовые интегрирующие звенья и дифференцирующие звенья Эквивалентные преобразования структурных схем
	1.6 Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний) [6.1.3, 6.3.1, 6.3.5]	Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний) Методы решения уравнений состояния Связь передаточной функции и модели системы в переменных состояния
	1.7 Алгебраические критерии устойчивости линейных непрерывных систем управления	Корневой критерий устойчивости Алгебраический критерий устойчивости Гурвица
	1.8 Частотные критерии устойчивости линейных непрерывных систем управления [6.1.1—6.1.4]	Критерий устойчивости Михайлова Критерий устойчивости Найквиста Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам Понятие запаса устойчивости
2. Оценка качества и точности управления	2.1 Методы оценки качества управления [6.1.1—6.1.4]	Прямые методы оценки качества управления Косвенные методы оценки качества управления
	2.2 Методы оценки точности управления [6.1.1—6.1.4, 6.3.2, 6.3.5]	Передаточная функция системы управления по ошибке Установившаяся ошибка системы управления с обратной связью Коэффициенты ошибок
	2.3 Методы повышения точности управления [6.1.1, 6.1.2, 6.3.2, 6.3.5]	Методы повышения точности управления Инвариантность систем управления Комбинированное управление

	2.4 Управляемость и наблюдаемость, чувствительность и робастность систем управления [6.1.2, 6.1.3, 6.3.1, 6.3.5]	Управляемость и наблюдаемость систем управления Чувствительность и робастность систем управления
	2.5 Корректирующие устройства [6.1.1, 6.1.2, 6.3.2, 6.3.5]	О корректирующих средствах Последовательные корректирующие звенья Параллельные корректирующие звенья Обратные связи Типовые линейные законы управления
3. Дискретные системы управления. Импульсные системы управления	3.1 Классификация дискретных систем управления. Представление данных в импульсной форме [6.1.1—6.1.3, 6.3.3]	Типы сигналов и их преобразование Достоинства и классификация дискретных систем управления Решетчатые функции. Конечные разности решетчатых функций Виды импульсной модуляции
	3.2 Математическое описание импульсных систем управления [6.1.1—6.1.3, 6.3.3]	Передаточные функции импульсных систем управления Преобразования структурных схем импульсных систем управления Построение переходных процессов импульсных систем управления Уравнения состояния импульсных систем управления Решение уравнений состояния импульсных систем управления
	3.3 Анализ и синтез импульсных систем управления [6.1.1—6.1.3, 6.3.3]	Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления Частотный критерий устойчивости Найквиста импульсных систем управления Оценка точности импульсных систем управления Синтез импульсных систем управления

Распределение бюджета времени по видам занятий

3.2 Лекционные занятия.

№ рейтингового блока	№ темы	Объем времени, час			
		норм. срок обучения		сокращ. (ускорен.)	
		очная	заочная	очная	заочная
1	3	4	5	6	7
1	1.1	1	0,4		0,25
	1.2	1	0,4		0,25
	1.3	1	0,4		0,25
	1.4	1	0,4		0,25
	1.5	1	0,4		0,25

	1.6	1	0,4		0,25
	1.7	1	0,4		0,25
	1.8	1	0,4		0,25
2	*2.1*	1	0,4		0,25
	2.2	1	0,4		0,25
	2.3	1	0,4		0,25
	2.4	1	0,4		0,25
	2.5	1	0,4		0,25
	3.1	1	0,4		0,25
	3.2	2	0,2		0,25
	3.3	2	0,2		0,25
Итого		**18**	**6**		**4**

3.3 Лабораторные занятия.

№ рейтингового блока	Тема и содержание лабораторного занятия	№ темы из раздела 3	Объем времени, час			
			норм. срок обучения		сокращ. (ускорен.)	
			очная	заочная	очная	заочная
1	2	3	4	5	6	7
1	1. Моделирование динамических систем в пакете Matlab Simulink	1.3	2	2		2
	2. Построение структурных схем систем управления на основе систем дифференциальных уравнений	1.3	2			
	3. Построение временных и частотных характеристик звеньев	1.3, 1.4	2			
	4. Эквивалентные преобразования структурных схем систем управления	1.5	2			
	5. Математические модели систем в переменных состояния	1.6	4	2		2
	6. Анализ устойчивости линейной непрерывной системы управления алгебраическими методами	1.7	2			
	7. Анализ устойчивости линейной непрерывной системы управления частотными методами	1.8	2			
2	8. Анализ качества	2.1	4			

	линейной непрерывной системы управления					
	9. Оценка точности линейной непрерывной системы управления	2.2, 2.3	4			
	10. Оценка управляемости и наблюдаемости, чувствительности и робастности систем управления	2.4	4			
	11. Исследование характеристик типовых линейных законов управления	2.5	4	2		2
	12. Исследование импульсных систем управления	3.1—3.3	4	2		2
Итого			**36**	**8**		**8**

3.4 Самостоятельная работа студентов.

№ п.п.	Вид самостоятельной работы	Объем времени, час				Рекомендуемая литература
		норм. срок обучения		сокращ. (ускорен.)		
		очная	заочная	очная	заочная	
1	2	3	4	5	6	7
1	Усвоение текущего материала	10	10		12	[6.1.1—6.1.4, 6.3.1—6.3.5]
2	Самостоятельное изучение теоретического материала	24	40		40	[6.1.1—6.1.4, 6.3.1—6.3.5]
3	Выполнение курсовой работы					
4	Выполнение контрольной работы		44		44	[6.6.1—6.6.3]
5	Подготовка к практическим и лабораторным занятиям	20				[6.4.1—6.4.3]
6	Подготовка к экзамену	36	36		36	[6.1.1—6.1.4, 6.3.1—6.3.5]
Итого		**90**	**130**		**132**	

Контрольные работы для студентов заочной формы обучения.

Тема и содержание контрольной работы	№ темы из раздела 3
Часть № 1. Анализ устойчивости линейной непрерывной системы управления алгебраическими методами	1.7
Часть № 2. Анализ устойчивости линейной непрерывной системы управления частотными методами	1.8
Часть № 3. Анализ качества линейной непрерывной системы управления	2.1
Часть № 4. Оценка точности линейной непрерывной системы управления	2.2, 2.3

3.5 Распределение баллов за текущую работу.

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
Тестовый контроль	15
Выполнение лабораторных работ	35
Экзамен	50
Итого	**100**

Раздел 4. Образовательные технологии

Реализация программы предусматривает использование образовательных технологий, направленных на формирование элементов компетенций, в обеспечении которых участвует дисциплина «Основы теории управления». В процессе обучения реализуется лекционно-лабораторная система обучения, и используются следующие образовательные технологии:

— В ходе проведения лекционных занятий используется классическая методика с разбиением на 3 части: вводная, основная, заключительная. Во время лекций выделяется время для активных и интерактивных форм проведения занятий.

— В ходе проведения лабораторных занятий студенты проводят исследования на компьютерной технике по индивидуальному заданию. Используются активные и интерактивные технологии.

В процессе реализации указанных технологий выполняются следующие условия:

— Чтение лекций с использованием проекционной техники — 25 %.
— Проведение интерактивных занятий — 50 %.
— Занятия, проводимые в активных формах — 10 %.

Раздел 5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации и самоконтроля по итогам освоения дисциплины

Рабочая программа дисциплины обеспечена фондом оценочных средств для проведения текущего контроля, промежуточного контроля, экзаменов. Фонд включает:

— задания для текущего контроля, в том числе в тестовой форме;
— вопросы к экзаменам, в соответствии с рейтинговыми блоками;

— критерии для оценки достижения результатов освоения дисциплины в целом по каждому виду работ.

5.1 Перечень вопросов для подготовки к промежуточным аттестациям и экзаменам.

5 семестр

1 рейтинг

Раздел 1. Введение в теорию автоматического управления. Устойчивость линейных непрерывных систем управления

Основные понятия теории автоматического управления (ТАУ) Принципы управления
Классификация систем управления История автоматического управления
Статический и динамический режимы работы систем управления Передаточная функция системы управления
Типовые управляющие и возмущающие воздействия Понятие временных характеристик Понятие частотных характеристик
Типовые позиционные динамические звенья 1-го и 2-го порядков Типовые интегрирующие звенья и дифференцирующие звенья Эквивалентные преобразования структурных схем
Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний) Методы решения уравнений состояния Связь передаточной функции и модели системы в переменных состояния
Корневой критерий устойчивости Алгебраический критерий устойчивости Гурвица
Критерий устойчивости Михайлова Критерий устойчивости Найквиста Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам Понятие запаса устойчивости

2 рейтинг

Раздел 2. Оценка качества и точности управления

Прямые методы оценки качества управления Косвенные методы оценки качества управления
Передаточная функция системы управления по ошибке Установившаяся ошибка системы управления с обратной связью Коэффициенты ошибок
Методы повышения точности управления Инвариантность систем управления Комбинированное управление
Управляемость и наблюдаемость систем управления Чувствительность и робастность систем управления
О корректирующих средствах Последовательные корректирующие звенья Параллельные корректирующие звенья Обратные связи Типовые линейные законы управления

Раздел 3. Дискретные системы управления. Импульсные системы управления

Типы сигналов и их преобразование Достоинства и классификация дискретных систем управления Решетчатые функции. Конечные разности решетчатых функций Виды импульсной модуляции
Передаточные функции импульсных систем управления Преобразования структурных схем импульсных систем управления Построение переходных процессов импульсных систем управления Уравнения состояния импульсных систем управления Решение уравнений состояния импульсных систем управления
Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления Частотный критерий устойчивости Найквиста импульсных систем управления Оценка точности импульсных систем управления Синтез импульсных систем управления

5.2 Комплект тестовых заданий.
По дисциплине имеется комплект тестовых заданий.

5.3 Технические средства обучения и контроля, использование ЭВМ.
1. Компьютерные классы, оснащенные необходимым программным обеспечением.
2. Система тестирования «ЦДО-тест», разработка ДГТУ.
3. Сайт центра дистанционного обучения http://de.dstu.edu.ru

5.4 Уровни и критерии итоговой оценки результатов освоения дисциплины «Основы теории управления».

Уровни		Критерии выполнения заданий ОС	Итоговый семестровый балл	Итоговая оценка
Недостаточный		Имеет представление о содержании дисциплины, но не знает основные определения, не способен выполнить задание с очевидным решением.	Менее 41	Неудовлетворительно
Базовый		Знает основные определения и понятия теории автоматического управления, принципы работы замкнутых систем управления. Знает характерные особенности типовых динамических звеньев. Способен проводить эквивалентные преобразования структурных схем. Способен проводить оценку устойчивости линейных непрерывных систем управления с помощью алгебраических и частотных критериев Знает и умеет использовать прямые и косвенные методы оценки качества управления. Знает способы повышения точности управления. Знает классификацию дискретных систем управления.	41-60	Удовлетворительно
Повышенный	ПУ 1	Знает и понимает основные определения и понятия теории автоматического управления, принципы работы замкнутых систем управления. Знает и понимает характерные особенности типовых динамических звеньев. Способен проводить эквивалентные преобразования структурных схем. Способен составлять математические модели систем в переменных состояния. Имеет представление о способах оценки управляемости и наблюдаемости систем управления. Способен проводить оценку устойчивости линейных непрерывных систем управления с	61-80	Хорошо

		помощью алгебраических и частотных критериев Знает и умеет использовать прямые и косвенные методы оценки качества управления. Имеет представление о способах оценки чувствительности и робастности систем управления. Знает способы повышения точности управления. Знает классификацию дискретных систем управления и способы их математического описания.		
	ПУ 2 (повышенный)	Знает и понимает основные определения и понятия теории автоматического управления, принципы работы замкнутых систем управления. Знает и понимает характерные особенности типовых динамических звеньев. Способен проводить эквивалентные преобразования структурных схем. Способен составлять математические модели систем в переменных состояния. Умеет оценивать управляемость и наблюдаемость систем управления. Способен проводить оценку устойчивости линейных непрерывных систем управления с помощью алгебраических и частотных критериев Знает и умеет использовать прямые и косвенные методы оценки качества управления. Умеет оценивать чувствительность и робастность систем управления. Знает и понимает способы повышения точности управления. Знает классификацию дискретных систем управления и способы их математического описания. Понимает принципы составления передаточных функций импульсных систем управления.	81-100	Отлично

Раздел 6. Литература

Карта методического обеспечения дисциплины

№	Автор	Название	Издательство	Гриф издания	Год издания	Кол-во в библиотеке	Ссылка на электронный ресурс	Доступность
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.1 Основная литература								
6.1.1	Савин М.М.	Теория автоматического управления	Ростов н/Д: Феникс		2007	20		
6.1.2	Шишмарев В.Ю.	Основы автоматического управления	М.: Академия		2008	10		
6.1.3	Коновалов Б.И., Лебедев Ю.М.	Теория автоматического управления	СПб.: Лань	Допущено УМО	2010		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.1.4	Яковлев М.Н.	Теория автоматического управления	М.: Высшая школа		2005	10		
6.2 Периодическая литература								
6.3 Дополнительная литература								
6.3.1	Егунова Н.Д.	Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. Т.1.: Анализ и статическая динамика САУ	М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана		2000	10		
6.3.2	Егунова Н.Д.	Методы классической и современной теории	М.: Изд-во МГТУ		2000	10		

		автоматического управления: в 3 т. Т.2.: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления	им. Н.Э. Баумана					
6.3.3	Егунова Н.Д.	Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. Т.3.: Методы современной теории автоматического управления	М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана		2000	10		
6.3.4	Ощепков А. Ю.	Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB	СПб.: Лань	Допущено УМО	2013		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.3.5	Востриков А.С.	Теория автоматического регулирования	М.: Высш. Шк.		2004	15		
6.4 Практические (семинарские) и (или) лабораторные занятия								
6.4.1	Сост.: Д.Я. Паршин, О.Л. Цветкова	Методические указания к лабораторным работам № 1—5 по дисциплине «Теория автоматического управления»	РГАСХМ ГОУ, Ростов н/Д		2008	50		

6.4.2	Певзнер Л.Д.	Практикум по теории автоматического управления	М.: Высш. Шк.		2006	15		
6.4.3	Гайдук А. Р., Беляев В. Е., Пьявченко Т. А.	Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB	СПб.: Лань	Допущено УМО	2011		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.5 Курсовая работа								
6.6 Контрольные работы								
6.6.1	Сост.: О.Л. Цветкова	Теория автоматического управления: Методические указания к выполнению контрольных работ	РГАСХМ ГОУ, Ростов н/Д		2010	10 (на кафедре)		

6.6.2	Певзнер Л.Д.	Практикум по теории автоматического управления	М.: Высш. Шк.		2006	15		
6.6.3	Гайдук А. Р., Беляев В. Е., Пьявченко Т. А.	Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB	СПб.: Лань	Допущено УМО	2011		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.7 Программно-информационное обеспечение дисциплины, Интернет-ресурсы								
6.7.1 Пакет прикладных программ MathCad 6.7.2 Пакет прикладных программ MatLab 6.7.3 Официальный сайт программного продукта: MathCad — www.ptc.com/product/mathcad 6.7.4 Официальный сайт программного продукта: MatLab — www.mathworks.com								

Раздел 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины
(приборы, установки, стенды и т.д.)

7.1 Помещения для проведения лекционных и лабораторных занятий укомплектованы необходимой специализированной мебелью и техническими средствами для представления учебной информации студентам, включая проекционное оборудование. Кафедра располагает компьютерным классом с компьютерами, оснащенными операционной системой Windows XP и пакетами прикладных программ MathCad и Matlab.

Экспертное заключение

Секции по профилю научно-методического Совета направления 230400 Информационные системы и технологии по рабочей программе дисциплины «Основы теории управления», предусмотренной учебным планом подготовки бакалавров по направлению 230400 Информационные системы и технологии.

Рассмотрев структуру, содержание и качество оформления рабочей программы по дисциплине совет отмечает:

— рабочая программа соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования в части выполнения требований, предъявляемых к содержанию, уровню, профессиональной квалификации выпускников по соответствующему циклу дисциплин и по самой дисциплине, а так же требованиям «Положения об основной образовательной программе высшего профессионального образования»;

— соотношение объемов основных разделов выбрано логично в целесообразных пропорциях;

— бюджет времени, отводимый на различные виды аудиторных занятий согласуется с бюджетом времени, выделяемого для выполнения самостоятельной работы;

— объем и количество видов самостоятельной работы обоснованы, соответствуют фактическим трудозатратам на их выполнение;

— разработанные оценочные средства для контроля и самоконтроля позволяют оценить уровень освоения дисциплины.

Рекомендации Совета:

— подготовить заявку для регистрации конспекта лекций как электронного ресурса, издать учебное пособие.

На основании вышеизложенного секция по профилю научно-методического Совета направления 230400 Информационные системы и технологии предлагает утвердить рабочую программу по дисциплине «Основы теории управления», представленную на экспертизу.

Руководитель секции ____________ В.А. Фатхи

Члены экспертной группы: ____________ А.И. Зотов

____________ А.Р. Айдинян

16

Методические рекомендации по изучению дисциплины

Цели и задачи дисциплины «Основы теории управления»

Целями освоения дисциплины «Основы теории управления» является обучение бакалавров методам и методикам математического описания и комплексного исследования систем управления, применяемых в технических устройствах различного назначения. При изучении данного курса у студентов формируются знания и навыки необходимые для проведения синтеза и анализа качества систем управления.

Задачи дисциплины:

1) изучение основных принципов построения систем автоматического управления (САУ);

2) изучение способов математического описания и ознакомление с задачами исследования линейных непрерывных САУ;

3) выработка навыков составления математических моделей САУ;

4) изучение методов анализа устойчивости и качества процессов управления в САУ;

5) изучение методов синтеза алгоритмов управления в непрерывных САУ;

6) выработка навыков линеаризации нелинейных систем;

7) изучение принципов модального управления, построения адаптивных систем;

8) выработка навыков применением ПЭВМ и пакетов прикладных программ при выполнении расчетов по анализу устойчивости и качества управления, синтезе систем управления.

Описание последовательности изучения УМК

Учебно-методический комплекс (УМК) призван помочь студентам в организации самостоятельной работы по освоению курса «Основы теории управления». Дисциплина «Основы теории управления» относится к обязательным дисциплинам вариативной части математического и естественнонаучного цикла (Б2) и изучается в 5 семестре. В течение семестра предлагается тест текущего контроля знаний, завершающим этапом изучения дисциплины является сдача экзамена.

Комплекс содержит рабочую программу дисциплины, составленную в строгом соответствии с учебным планом по специальности и государственным образовательным стандартом ВПО. Учебно-методические материалы по подготовке лекционных и лабораторных занятий в УМК представлены отдельно по каждому разделу курса «Основы теории управления» в соответствии с программой дисциплины и последовательностью изучения.

В каждом разделе даны:

1) учебно-методические материалы лекционного курса, включающие подробный план лекций по каждой изучаемой теме, вопросы и задания для самоконтроля, список основной и дополнительной литературы, с указанием конкретных разделов;

2) учебно-методические материалы по подготовке лабораторных занятий, содержащие планы проведения занятий с указанием последовательности рассматриваемых тем, задания для самостоятельной работы, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме, систему заданий для

самопроверки. Выполнение заданий даст возможность студентам глубже усвоить теоретический материал, применить полученные знания на практике, выработать прочные умения и навыки синтеза и анализа систем автоматического управления при решении практических задач профессиональной сферы в том числе и в кооперации с коллегами.

В комплексе представлены контрольные тесты по всем разделам курса «Основы теории управления», которые позволят проверить уровень усвоения изученного материала. Задания для самопроверки сопровождаются теоретическими справками и методическими рекомендациями.

Рекомендации изучения отдельных тем курса:

Материал курса разбит на 3 раздела.

При изучении первого раздела «Введение в теорию автоматического управления. Устойчивость линейных непрерывных систем управления» следует обратить внимание на: основные понятия теории автоматического управления; типовые динамические звенья; математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний); алгебраические и частотные критерии устойчивости линейных непрерывных систем управления.

Для изучения первого раздела предусмотрены лабораторные работы, на которых изучаются: способы моделирования динамических систем в пакете Matlab Simulink; методы построения математических моделей систем в переменных состояния; анализ устойчивости линейной непрерывной системы управления алгебраическими и частотными методами. Студенты для выполнения лабораторных работ должны использовать пакеты Matlab и MathCad. Каждый студент выполняет свой вариант задания.

При изучении второго раздела «Оценка качества и точности управления» необходимо освоить: прямые и косвенные методы оценки качества управления; методы оценки точности управления; методы повышения точности управления.

Для изучения второго раздела предусмотрены лабораторные работы, на которых проводится: анализ качества линейной непрерывной системы управления; оценка точности линейной непрерывной системы управления. Каждый студент выполняет свой вариант задания.

При изучении третьего раздела «Дискретные системы управления. Импульсные системы управления» необходимо изучить: классификацию дискретных систем управления и их математическое описание; способы представления данных в импульсной форме; составление передаточных функций импульсных систем управления; методы анализа импульсных систем управления; методы синтеза импульсных систем управления.

Для изучения третьего раздела предусмотрены лабораторные работы, на которых проводится исследование импульсных систем управления.

Особенности самостоятельного изучения курса.

Советы для подготовки к рейтинговому контролю и экзамену

Прежде чем приступить к выполнению заданий для самоконтроля, студентам необходимо изучить материал лекций и сопоставить его с трактовками, предлагаемыми в рекомендуемой по каждой теме литературе.

На дневном отделении в качестве основных элементов учебного процесса выступают проблемно-ориентированные лекции с объяснением и иллюстрированием ключевых понятий и категорий. Лабораторные занятия организованы в компьютерных классах по выполнению конкретных практических задач. Ход и уровень усвоения материала студентами очного отделения оцениваются с помощью рейтинговой шкалы. Максимальная сумма, которую можно набрать, успешно выполнив все тесты (включая итоговый), составляет 100 баллов.

Распределение балов за текущую работу

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
Тестовый контроль	15
Выполнение лабораторных работ	35
Экзамен	50
Итого	**100**

Для студентов особое значение приобретает самостоятельная проработка материала курса по учебникам и пособиям, в том числе и кафедральным.

Общий список учебной, учебно-методической и научной литературы представлен в рабочей программе, курсе лекций и методических рекомендациях по каждой тематике.

Следует учитывать тот факт, что отводимые на изучение курса «Основы теории управления» часы не позволяют в полной мере охватить все разделы, отведенные к данному курсу. Более подробно, некоторые разделы курса «Основы теории управления» предлагается студентам изучить индивидуально. Индивидуальная работа студента предполагает самостоятельное составление конспекта и изучение рекомендуемой литературы. Работу следует начинать с прочтения материала с целью уяснения его содержания, основной идеи, выделения выводов и аргументов автора. Конспектировать рекомендуется лишь при повторном чтении.

Особое внимание следует обращать на определение основных понятий дисциплины. Студент должен подробно разбирать приведенные примеры на лекциях, лабораторных и практических работах и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Это является одним из важных условий усвоения дисциплины.

Все пропущенные лабораторные занятия подлежат отработке. Форма отработки — сдача задания по теме. В рамках самостоятельной работы организуется проведение консультаций, на которых будет осуществляться обсуждение прошедших заданий, а также прием отработки пропущенных занятий и лабораторных работ. На консультациях же вы сможете получить ответы на любые вопросы, возникшие по ходу освоения курса в целом и по выполнению заданий.

Распределение времени для самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов

№ п.п.	Вид самостоятельной работы	Объем времени, час				Рекомендуемая литература
		норм. срок обучения		сокращ. (ускорен.)		
		очная	заочная	очная	заочная	
1	2	3	4	5	6	7
1	Усвоение текущего материала	10	10		12	[6.1.1—6.1.4, 6.3.1—6.3.5]
2	Самостоятельное изучение теоретического материала	24	40		40	[6.1.1—6.1.4, 6.3.1—6.3.5]
3	Выполнение курсовой работы					
4	Выполнение контрольной работы		44		44	[6.6.1—6.6.3]
5	Подготовка к практическим и лабораторным занятиям	20				[6.4.1—6.4.3]
6	Подготовка к экзамену	36	36		36	[6.1.1—6.1.4, 6.3.1—6.3.5]
Итого		**90**	**130**		**132**	

Для контроля самостоятельной работы студентов используется экзамен. Экзамен проводится в устной форме, вопросы по подготовки к экзамену составлены с учетом всех тем курса в соответствии с программой. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса.

Рекомендации по работе с литературой

При изучении дисциплины особое внимание следует обратить на следующие литературные источники:

№	Автор	Название	Издательство	Гриф издания	Год издания	Кол-во в библиотеке	Ссылка на электронный ресурс	Доступность
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.1 Основная литература								
6.1.1	Савин М.М.	Теория автоматического управления	Ростов н/Д: Феникс		2007	20		
6.1.2	Шишмарев В.Ю.	Основы автоматического управления	М.: Академия		2008	10		
6.1.3	Коновалов Б.И., Лебедев Ю.М.	Теория автоматического управления	СПб.: Лань	Допущено УМО	2010		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.1.4	Яковлев М.Н.	Теория автоматического управления	М.: Высшая школа	Учеб. для вузов	2005	10		
6.2 Периодическая литература								
6.3 Дополнительная литература								
6.3.1	Егунова Н.Д.	Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. Т.1.: Анализ и статическая динамика САУ	М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана	Учебное пособие	2000	10		
6.3.2	Егунова Н.Д.	Методы классической	М.: Изд-	Учеб. для	2000	10		

		и современной теории автоматического управления: в 3 т. Т.2.: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления	во МГТУ им. Н.Э. Баумана	вузов				
6.3.3	Егунова Н.Д.	Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. Т.3.: Методы современной теории автоматического управления	М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана	Учеб. для вузов	2000	10		
6.3.4	Ощепков А. Ю.	Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB	СПб.: Лань	Допущено УМО	2013		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.3.5	Востриков А.С.	Теория автоматического регулирования	М.: Высш. Шк.	Учеб. для вузов	2004	15		
6.4 Практические (семинарские) и (или) лабораторные занятия								
6.4.1	Паршин Д.Я., Цветкова О.Л.	Методические указания к лабораторным работам № 1—5 по дисциплине «Теория автоматического управления»	РГАСХМ ГОУ, Ростов н/Д	МУ	2008	50		

6.4.2	Певзнер Л.Д.	Практикум по теории автоматического управления	М.: Высш. Шк.	Учеб. для вузов	2006	15		
6.4.3	Гайдук А. Р., Беляев В. Е., Пьявченко Т. А.	Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB	СПб.: Лань	Допущено УМО	2011		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.5 Курсовая работа								
6.6 Контрольные работы								
6.6.1	Цветкова О.Л.	Теория автоматического управления: Методические указания к выполнению контрольных работ	РГАСХМ ГОУ, Ростов н/Д	МУ	2010	10 (на кафедре)		
6.6.2	Певзнер Л.Д.	Практикум по теории автоматического управления	М.: Высш. Шк.	Учеб. для вузов	2006	15		
6.6.3	Гайдук А. Р., Беляев В. Е., Пьявченко Т. А.	Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB	СПб.: Лань	Допущено УМО	2011		http://e.lanbook.com	С любой точки доступа для авторизированных пользователей
6.7 Программно-информационное обеспечение дисциплины, Интернет-ресурсы								
6.7.1 Пакет прикладных программ MathCad 6.7.2 Пакет прикладных программ MatLab 6.7.3 Официальный сайт программного продукта: MathCad — www.ptc.com/product/mathcad 6.7.4 Официальный сайт программного продукта: MatLab — www.mathworks.com								

КУРС ЛЕКЦИЙ

Лекция № 1
Основные понятия теории автоматического управления (ТАУ)

1. **Основные понятия теории автоматического управления (ТАУ)**
2. **Принципы управления**

1. Основные понятия теории автоматического управления (ТАУ)

Автоматика — это отрасль науки и техники, которая занимается теорией и построением систем управления, работающих без участия человека. Основой этой отрасли является *теория автоматического управления*. Следует отметить, что термин «автоматика» используется иногда и в более узком смысле, как совокупность механизмов и устройств, действующих автоматически.

Предметом изучения теории автоматического управления (ТАУ) являются свойства, методы расчета и конструирования систем автоматики. Она имеет дело не с реальными объектами, а с их моделями. Они выражаются математическим языком в виде дифференциальных уравнений.

Проблемы ТАУ: устойчивость, качество переходных процессов, статическая и динамическая точность, автоколебания, оптимизация, синтез.

Автоматизация производства — это этап производства, характеризуемый освобождением человека от непосредственного управления производственным процессом и передачей этих функций автоматическим устройствам. В современной технике используются разнообразные автоматические устройства и системы, отличающиеся друг от друга физической природой, принципом действия, схемным и конструктивным решениями. Все эти устройства и системы предназначены для выполнения следующих основных задач: контроля, сигнализации, защиты или управления.

Автоматический контроль выполняет измерение различных параметров технологического процесса и их регистрацию с помощью измерительных приборов.

Автоматическая сигнализация предназначена для оповещения обслуживающего персонала о предельных или аварийных значениях каких-либо физических параметров, о месте и характере нарушений технологического процесса.

Автоматическая защита представляет собой совокупность технических средств, которые при возникновении ненормальных и аварийных режимов либо прекращают производственный процесс, либо устраняют ненормальные режимы.

Автоматическое управление — это управление объектами без участия обслуживающего персонала. Совокупность технических устройств и объекта управления называется *системой автоматического управления* (САУ).

Автоматическое регулирование — это процесс поддержания какого-либо параметра на заданном уровне или изменение его по определенному закону без участия человека. Совокупность устройств, обеспечивающих автоматическое регулирование, называется *системой автоматического регулирования* (САР).

Автоматизированное управление — это управление, при котором сбор, обработка информации о состояния объекта производятся автоматически (с помощью вычислительных машин), а принятие решений и выдача команд управления осуществляются человеком. Человеко-машинная система, осуществляющая такое управление, называется *автоматизированной системой управления* (АСУ).

Воздействия. Физические величины, значения которых требуется поддерживать постоянными или изменять в соответствии с технологическими процессами, называются *регулируемыми* (*управляемыми*, *выходными*) величинами.

Переменные величины, оказывающие влияние на регулируемую величину, называются *воздействиями*. Различают управляющие, задающие, регулирующие и возмущающие воздействия.

Управляющее воздействие представляет собой внешнее воздействие, поступающее на систему через задающий элемент. Оно исходит от человека или управляющего устройства.

Задающее воздействие формируется задающим элементом в соответствии с требуемым законом изменения регулируемой величины.

Регулирующее воздействие создается регулятором с целью устранения отклонения регулируемой величины от заданного значения.

Возмущающие воздействия — это внешние воздействия на объект регулирования, вызывающие нарушения требуемой функциональной связи между задающим воздействием и регулируемой величиной.

Основные элементы систем управления. *Объект управления* (ОУ) — устройство или процесс, поведение которого нас не устраивает по каким-либо причинам. Объекты управления характеризуются самовыравниванием (саморегулированием), емкостью (аккумулирующая способность) и запаздыванием.

Самовыравниванием (*саморегулированием*) называется свойство объекта управления при изменении нагрузки приходить к новому установившемуся значению соответствующему новой нагрузке.

Примером объекта с самовыравниванием может служить резервуар, в котором сверху поступает жидкость, а снизу через отверстие свободно вытекает. При равенстве притока и расхода жидкости уровень ее остается постоянным. Если приток жидкости увеличивается, то уровень ее будет увеличиваться до тех пор, пока вследствие повышения давления расход не сравняется с притоком, после чего он будет оставаться неизменным.

Если объект лишен самовыравнивания, то при наличии разности между притоком и расходом рабочей среды регулирования величина неограниченно возрастает или уменьшается до нуля.

Примером объекта без самовыравнивания может служить резервуар со строго постоянным расходом жидкости. Тогда, если приток жидкости больше расхода, уровень ее неограниченно возрастает, если меньше — уменьшается до нуля. Если приток равен расходу, будет сохраняться неизменным любое значение уровня, при котором это равенство установилось.

Способность объектов к самовыравниванию определяется *степенью самовыравнивания*.

Самовыравнивание облегчает задачу автоматической стабилизации управляемой величины, а в некоторых случаях оно бывает настолько велико, что объект в специальных средствах стабилизации не нуждается.

Емкость объектов регулирования (*аккумулирующая способность*) — это способность объектов накапливать вещество или энергию (например, уровень жидкости, количество тепла, давление газа, влажность среды, концентрацию растворов и другие параметры, по которым осуществляется автоматическое регулирование объектов). Чем меньше емкость объекта, тем больше скорость регулируемой величины при нарушении равновесия между притоком и расходом вещества или энергии.

Мера емкости объекта выражается *постоянной времени* (*инерционным запаздыванием*).

Емкостью обладают все элементы систем автоматического управления, однако в некоторых случаях их емкостью можно пренебрегать по сравнению с емкостью объектов управления.

Запаздывания наблюдаются во многих объектах регулирования и характеризуются задержкой во времени передачи воздействия от входа на выход. Запаздывания разделяются на передаточные и переходные.

Передаточное (*транспортное*, *чистое*) *запаздывание* характеризуется временем, в течение которого регулируемая величина, несмотря на происшедшее возмущение, все же не изменяется.

Переходное запаздывание характеризуется временем, которое потребуется для перехода регулируемого параметра к новому установившемуся значению, соответствующему новому значению воздействия.

Сумма времени передаточного и переходного запаздываний называется *временем полного запаздывания*. Запаздывания, в объектах отрицательно сказываются на качестве регулирования.

Регулятор (*корректирующее устройство* (КУ), *управляющее устройство* (УУ)) — элемент системы, с помощью которого осуществляется формирование управляющего сигнала для объекта управления, и обеспечиваются требуемые характеристики системы в целом.

Измерительное устройство служит для определения действительного значения регулируемой величины и сравнения его с заданным значением. Оно вырабатывает *сигнал ошибки* (*рассогласования*), пропорциональный разности измеренного и заданного значений регулируемой величины. Измерительное устройство состоит из чувствительного, задающего и сравнивающего элементов.

Чувствительный элемент (*датчик*) выполняет функции источника информации о действительном значении регулируемой величины.

Задающий элемент служит для введения в систему требуемого закона изменения регулируемой величины.

Элемент сравнения осуществляет сопоставление измеренного и заданного значений регулируемой величины и формирование сигнала ошибки.

Исполнительное устройство — это элемент системы, который непосредственно оказывает воздействие на регулирующий орган объекта с целью восстановления требуемого значения регулируемой величины.

Выходной сигнал измерительного устройства в большинстве случаев не может быть непосредственно использован для управления исполнительным устройством системы из-за малой мощности или несовпадения по физической природе. Поэтому между измерительным и исполнительным устройствами включаются промежуточные элементы. *Промежуточные элементы* преобразуют выходной сигнал измерительного устройства по виду и величине. К ним относятся усилители, обеспечивающие усиление сигнала по величине или мощности, и преобразователи, осуществляющие преобразование сигнала по виду или по требуемому функциональному закону.

Отдельные элементы, входящие в состав автоматической системы, определенным образом связаны между собой. Связь, обеспечивающая передачу сигналов между элементами в направлении объекта управления, называется *прямой*, а связь выхода объекта управления со входом регулятора называется *главной обратной связью* системы.

Обратная связь служит для сравнения действительного значения регулируемой величины с заданным. Различают положительную и отрицательную обратные связи. *Отрицательная обратная связь* обеспечивает вычисление разницы задающего сигнала и сигнала обратной связи. Положительная обратная связь увеличивает рассогласование, то есть, стремится «раскачать» систему. На практике положительная обратная связь применяется, например, в генераторах для поддержания незатухающих электрических колебаний.

Наряду с главной обратной связью в системе могут иметь место *местные обратные связи*, которые охватывают отдельные элемента или группу элементов. В зависимости от характера действия обратная связь может быть гибкой и жесткой. *Жесткая обратная связь* действует в установившемся и в переходном режимах работы, а *гибкая* — только в переходном режиме.

На рис. 1 представлена обобщенная функциональная схема системы управления.

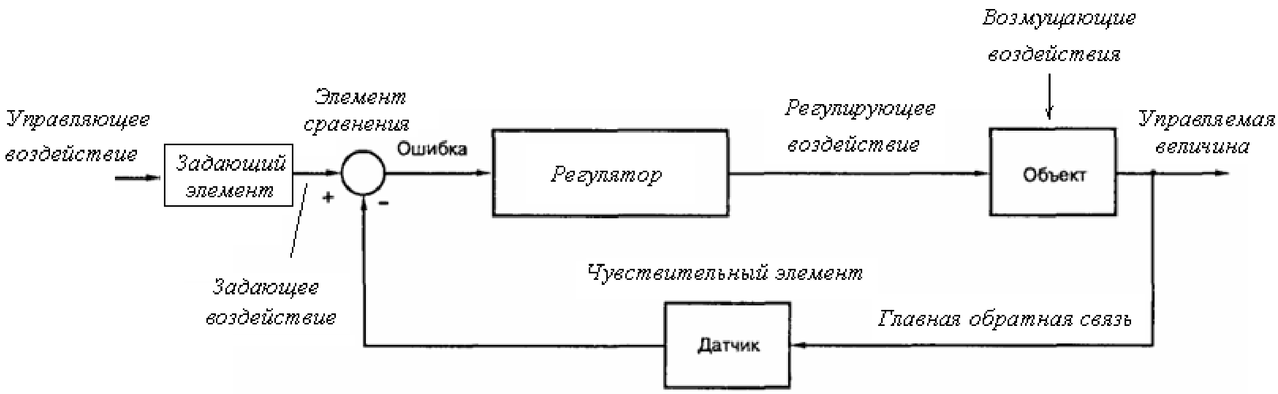


Рис. 1. Обобщенная функциональная схема системы управления

Такая схема называется *функциональной схемой*, ее элементы называются *функциональными звеньями*. Звенья изображаются прямоугольниками, в которых записывается функция преобразования входной величины в выходную (рис. 2, *а*).

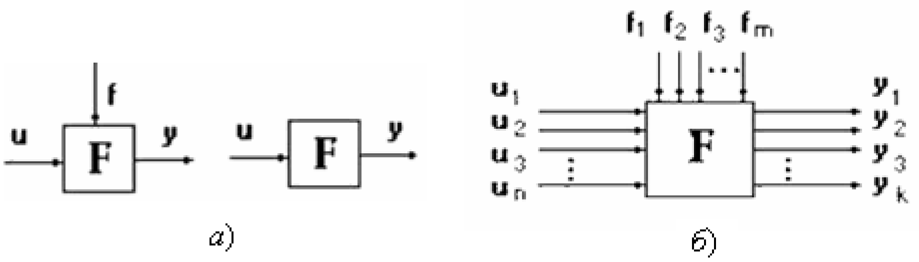


Рис. 2. Функциональные звенья

Величина $f(t)$, подаваемая на второй вход звена, называется *возмущением*. Она отражает влияние на выходную величину $y(t)$ окружающей среды, нагрузки и т. п.

В общем случае функциональное звено может иметь несколько входов и выходов (рис. 2, *б*). Здесь $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — входные (управляющие) воздействия; $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — возмущающие воздействия; $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — выходные величины.

Принцип работы функциональных звеньев может быть различным, поэтому функциональная схема не дает представление о принципе действия конкретной системы, а показывает лишь пути прохождения и способы обработки и преобразования сигналов.

Сигнал — это информационное понятие, соответствующее на схеме физическим величинам. Пути его прохождения указываются направленными отрезками. Точки разветвления сигнала называются *узлами*. Суммирование сигналов осуществляется в *сумматоре*, вычитание — в *сравнивающем устройстве* (рис. 3).

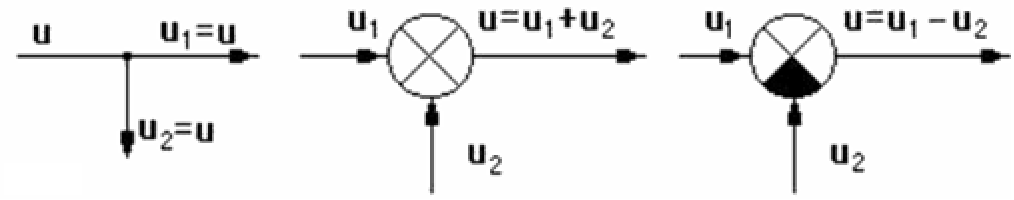


Рис. 3. Узел, сумматор, сравнивающее устройство

2. Принципы управления

Различают три фундаментальных принципа управления: принцип разомкнутого управления, принцип компенсации (управление по возмущению), принцип замкнутого управления (обратной связи, управление по отклонению).

Сущность *принципа разомкнутого управления* состоит в том, что регулятор не получает никакой информации о реальном состоянии объекта, поэтому должно быть точно известно, как этот объект себя ведет (рис. 1). Только тогда можно заранее рассчитать, как им нужно управлять (построить требуемую программу управления). Цепь (систему) из последовательно соединенных звеньев называют *разомкнутой системой*.

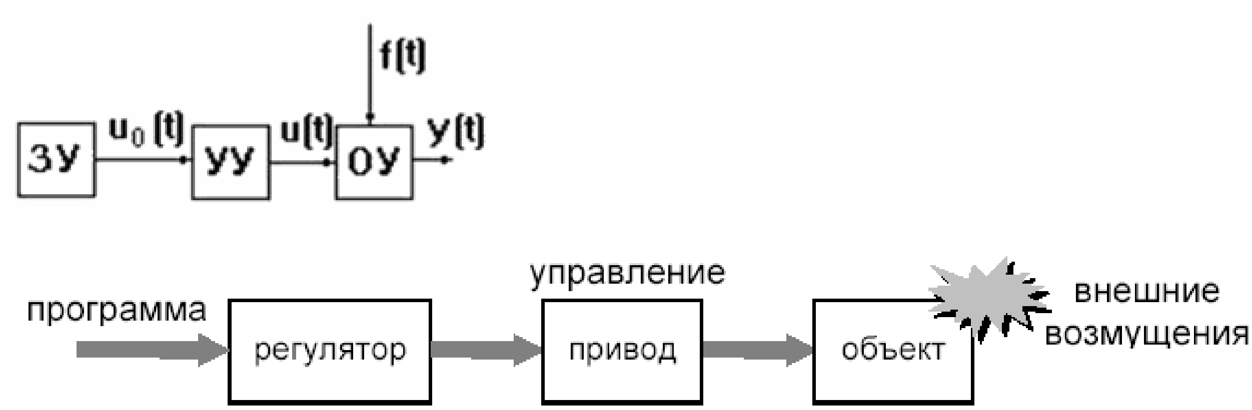


Рис. 1. Разомкнутая система

Слепой и глухой водитель тоже может вести машину. Некоторое время. Пока он помнит дорогу и сможет правильно рассчитать свое место. Пока на пути не встретятся пешеходы или другие машины, о которых он заранее не может знать. Из этого простого примера ясно, что без обратной связи (информации с датчиков) невозможно учесть влияние неизвестных факторов, неполноту знаний.

Несмотря на эти недостатки, разомкнутые системы применяются на практике. Например, информационное табло на вокзале. Или простейшая система управления двигателем, в которой не требуется очень точно поддерживать частоту вращения.

Если возмущающий фактор искажает выходную величину до недопустимых пределов, то применяют *принцип компенсации* (*управление по возмущению*) (рис. 2).

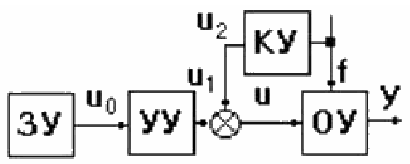


Рис. 2. Система с компенсацией возмущений

Пусть y_0 — значение выходной величины, которое требуется обеспечить согласно программе. На самом деле из-за возмущения f на выходе регистрируется значение y. Величина $\varepsilon = y_0 - y$ называется *отклонением от заданной величины* (*ошибка регулирования*). Если каким-то образом удается измерить величину f, то можно откорректировать управляющее воздействие u на входе ОУ, суммируя сигнал УУ u_1 с корректирующим воздействием u_2, пропорциональным возмущению f и компенсирующим его влияние.

Примеры систем компенсации:

— биметаллический баланс в часах. *Баланс* — это центральный узел, регулирующий ход колебательной системы. Баланс заменил маятники, которые зависели от сил гравитации, обеспечивающих им колебания, а их точность — от температуры окружающей среды и даже атмосферного давления. По существу, часы должны были быть неподвижными, т.е. настольными, напольными или настенными. Для компенсации атмосферного влияния применялись сложные температурные и барометрические компенсаторы (маятники Гарсиона, Грагама или Рифлера). Именно замена маятников на балансы позволила выпускать малогабаритные механизмы, т.е. наконец-то часы стали переносными, а также отпала необходимость строго позиционировать часы в пространстве для обеспечения условий колебания маятника.

Для того чтобы достичь оптимального, постоянного вращения баланса и, следовательно, постоянства погрешности хода, необходимо минимизировать расширение и сжатие обода баланса при изменении температуры окружающей среды. Это достигается путем применения специального бериллиево-бронзового сплава, известного под названием *глюсидур* (glucydur). Более ранняя альтернатива такому решению — и поэтому менее эффективный способ компенсировать ошибки, возникающие при изменении температуры окружающей среды, — создание баланса с разрезным биметаллическим ободом из слоя стали, наложенного на слой латуни. При изменении температуры меняется размер обода и волоска, а следовательно и момент инерции, влияющий на период колебания баланса и, как следствие, на ход, но из-за различных коэффициентов теплового расширения стали и латуни, обод деформируется в обратную сторону, что приводит к поправке момента инерции. Таким образом, происходит автоматическая регулировка хода часов в зависимости от изменения температуры окружающей среды. Недостатки такого обода также очевидны: сложность и дороговизна изготовления, разрезной обод все же испытывает большее сопротивление воздуха, чем монометаллический. Кроме того, пара сталь-латунь хороша не во всех температурных диапазонах из-за некоторой нелинейности характеристик.

В особо точных часах в 40-х годах XX века начали применять биметаллические балансы, постепенно вытесненные балансами, с ободами, изготовленными из бериллиево-бронзового сплава или глюсидура. Этот тип баланса — сейчас он так же популярен, как и в то время, когда он появился — создал практически идеальный механизм регулировки хода часов. Комбинацию глюсидурового обода и спирали можно встретить практически во всех качественных механических часах.

— компенсационная обмотка двигателя постоянного тока.

Достоинством принципа компенсации является быстрота реакции на возмущения, он более точен, чем принцип разомкнутого управления. Недостатком является невозможность учета подобным образом всех возможных возмущений.

Наибольшее распространение в технике получило *замкнутое управление* (*управление с обратной связью*) (рис. 3). Здесь управляющее воздействие корректируется в зависимости от выходной величины y. И уже не важно, какие возмущения действуют на ОУ. *Замкнутую систему* получают путем замыкания разомкнутой системы обратной связью. Участок цепи, по которому сигнал идет в противоположном направлении по отношению к системе в целом (то есть с выхода на вход) называется *цепью обратной связи*.

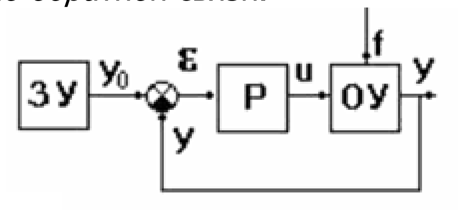


Рис. 3. Замкнутая система

ЗУ формирует требуемое значение выходной величины y_0, которое сравнивается с действительным значением на выходе системы y. Отклонение $\varepsilon = y_0 - y$ с выхода сравнивающего устройства подается на вход *регулятора* (Р). Регулятор формирует управляющее воздействие u. Так как на регулятор подается разность сигналов, то такая обратная связь называется *отрицательной*, в отличие от *положительной обратной связи*, когда сигналы складываются.

Недостатком принципа обратной связи является инерционность системы. Поэтому часто применяют *комбинацию данного принципа с принципом компенсации*, что позволяет объединить достоинства обоих принципов: быстроту реакции на возмущение принципа компенсации и точность регулирования независимо от природы возмущений принципа обратной связи.

Примеры замкнутых систем управления.

Система управления автомобилем с помощью рулевого механизма. Многие автомобили оснащены гидроусилителями руля и тормозов с целью обеспечения мгновенной реакции на действия водителя. Функциональная схема системы управления движением автомобиля изображена на рис. 1. Желаемое направление движения сравнивается с результатом измерения действительного направления и в итоге образуется ошибка. Информация о действительном направлении поставляется за счет визуальной и тактильной обратной связи. Дополнительная обратная связь образуется ощущением рулевого колеса руками водителя (датчиком).

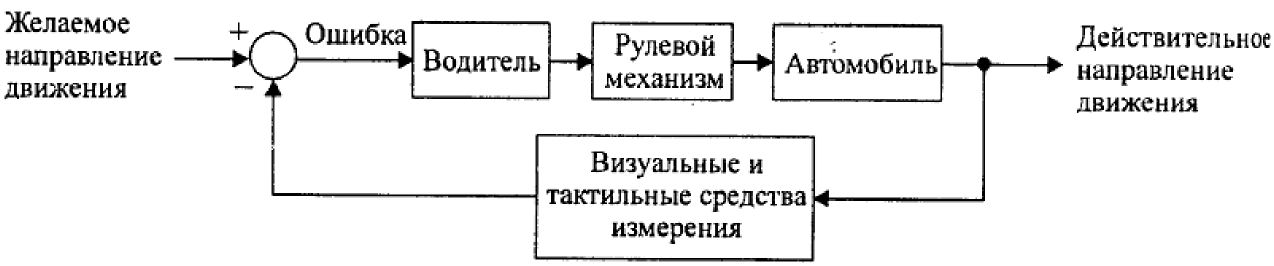


Рис. 1. Функциональная схема системы управления движением автомобиля

Система управления посадкой самолета. В этом случае пилот решает три основные задачи. Во-первых, самолет должен приближаться к аэродрому, выдерживая курс по центру посадочной полосы, как показано на рис. 1. На этом рисунке также показана и вторая задача пилота — соблюдение надлежащей глиссады. Третьей задачей является выдерживание правильной скорости.

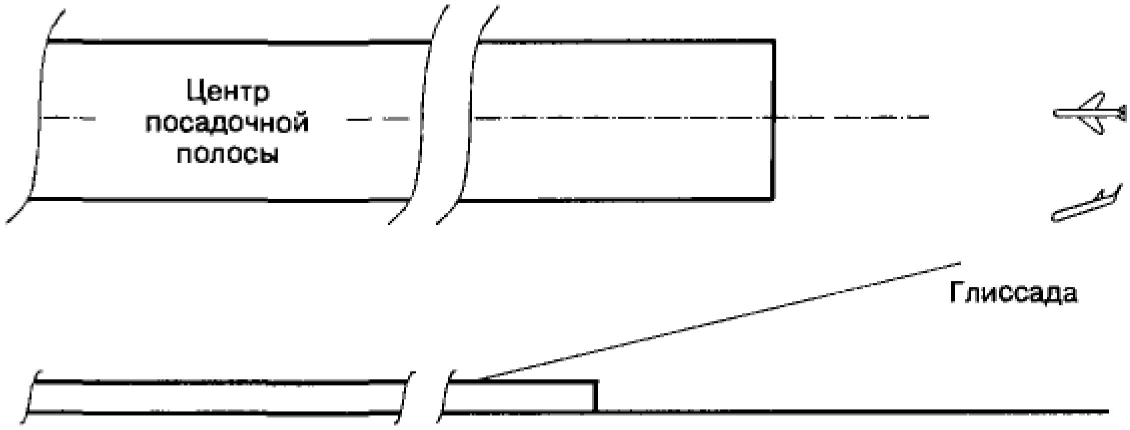


Рис. 1. Приземление самолета

Мы рассмотрим только одну из этих задач — задачу удержания самолета по центру посадочной полосы (задачу управления горизонтальным положением самолета). Функциональная схема системы, решающей данную задачу, приведена на рис. 2. Предполагается, что горизонтальное положение самолета регулируется с помощью элеронов, специальных плоскостей в задней части каждого крыла. На самом деле для управления горизонтальным положением используется также руль поворота, но мы для простоты ограничимся только элеронами. Элероны в совокупности с механизмами, изменяющими угол их наклона, образуют исполнительное устройство системы управления.

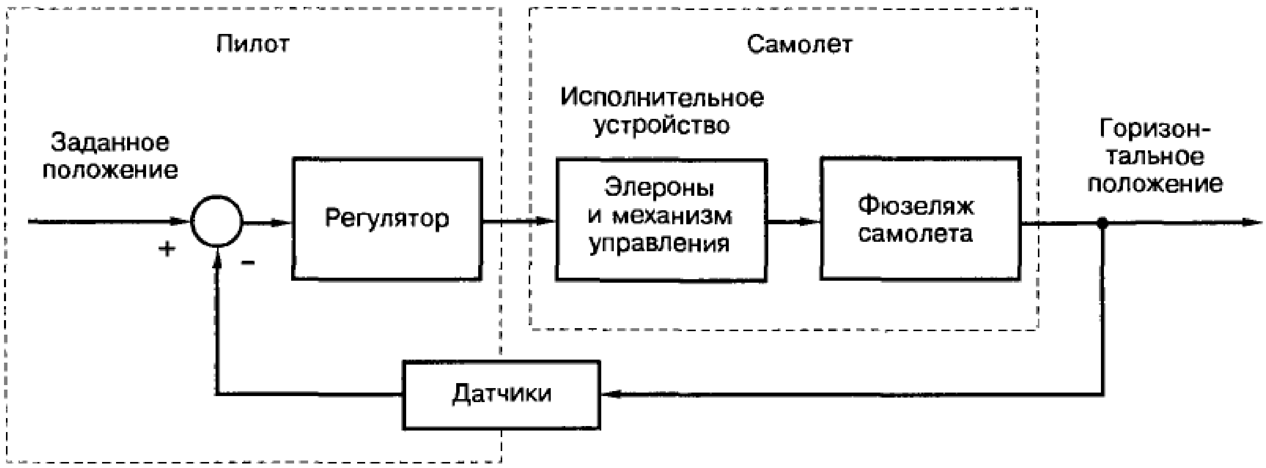


Рис. 2. Система управления посадкой самолета

В данной системе пилот использует несколько датчиков для определения горизонтального положения самолета. Он может сделать это с помощью прибора на панели управления в кабине самолета. Кроме того, пилот обычно визуально наблюдает посадочную полосу и может оценить положение самолета относительно ее центра. Таким образом, пилот знает желаемое горизонтальное положение самолета и имеет информацию о действительном положении. Он управляет элеронами так, чтобы самолет занял желаемое горизонтальное положение. Разность между желаемым и действительным положением называется *ошибкой системы*.

В данной системе функции регулятора выполняет пилот, который также выступает в качестве датчика и одновременно управляет элеронами. Оценивая положение самолета, пилот управляет элеронами таким образом, чтобы свести ошибку к нулю. Качество выполнения пилотом этих действий определяется степенью его тренированности. Например, для большого пассажирского лайнера действия пилота должны быть совершенно иными, нежели для небольшого одномоторного самолета. То есть, мы можем сказать, что функции регулятора заложены в сознании пилота и являются результатом интенсивной тренировки. Цель ее в том, чтобы при каждой посадке при одних и тех же обстоятельствах предпринимались одни и те же действия.

Рассмотрим теперь автоматическую систему посадки самолета, в которой пилот не принимает участия.

Система автоматической посадки также может быть представлена схемой на рис. 2. Однако элеронами здесь управляет автопилот, который в свою очередь является замкнутой системой управления. Роль датчика обычно выполняет радар, который определяет положение самолета относительно центра посадочной полосы. Функции регулятора выполняет цифровой компьютер, который решает систему уравнений и вырабатывает команды, подаваемые на автопилот.

Отметим также, что очень часто человек, выполняющий определенные действия, является частью замкнутой системы управления. Когда мы управляем автомобилем, то постоянно контролируем его положение и направление движения. Если мы считаем, что эти параметры нас не удовлетворяют, то предпринимаем действия, чтобы исправить их. Иными словами, мы пытаемся устранить ошибку системы. Второй простой пример — это процесс рисования. Мы постоянно следим за положением карандаша на бумаге, пытаясь минимизировать разность между желаемым и действительным положением. (Если вы сомневаетесь, что процесс рисования — разновидность управления с обратной связью, то попытайтесь нарисовать что-нибудь с закрытыми глазами.) Еще один пример: чтобы поймать летящий мяч, мы следим за его движением и управляем положением рук до тех пор, пока мяч не попадет в них.

Система регулирования температуры. Примером биологической системы управления является система регулирования температуры человеческого тела. Эта система стремится поддерживать постоянное значение температуры. Окружающая среда пытается повлиять на эту температуру и отклонить ее от желаемого значения. Тело реагирует на отклонение (ошибку) изменением ритма дыхания, ускорением или замедлением потока крови, дрожью и т. д. Эта система имеет одну особенность, не свойственную системам управления, создаваемым человеком: она обычно нормально функционирует более 70 лет. И наоборот, биологическая система имеет другую особенность, которая в равной мере присуща и системам управления, создаваемым человеком: если величина ошибки становится слишком большой, то работа системы нарушается.

Рассмотрим систему регулирования температуры в микротеплице. Ученые используют такую теплицу для изучения влияния температуры на рост растений. Функциональная схема системы регулирования температуры приведена на рис. 3. Температура в теплице измеряется с помощью *термистора* (резистора, сопротивление которого зависит от температуры). Выходной сигнал преобразователя имеет малую величину (милливольты), поэтому необходим усилитель, чтобы довести напряжение до приемлемого уровня. Вообще многие преобразователи характеризуются очень малым выходным напряжением, поэтому датчики систем управления очень часто укомплектовываются встроенными усилителями.

Тиристор — полупроводниковый прибор, обладающий в прямом направлении двумя устойчивыми состояниями — состоянием низкой проводимости (тиристор заперт) и состоянием высокой проводимости (тиристор открыт). В обратном направлении тиристор обладает только запирающими свойствами. Перевод тиристора из закрытого состояния в открытое в электрической цепи осуществляется внешним воздействием на прибор: либо воздействие напряжением (током), либо светом (*фототиристор*).

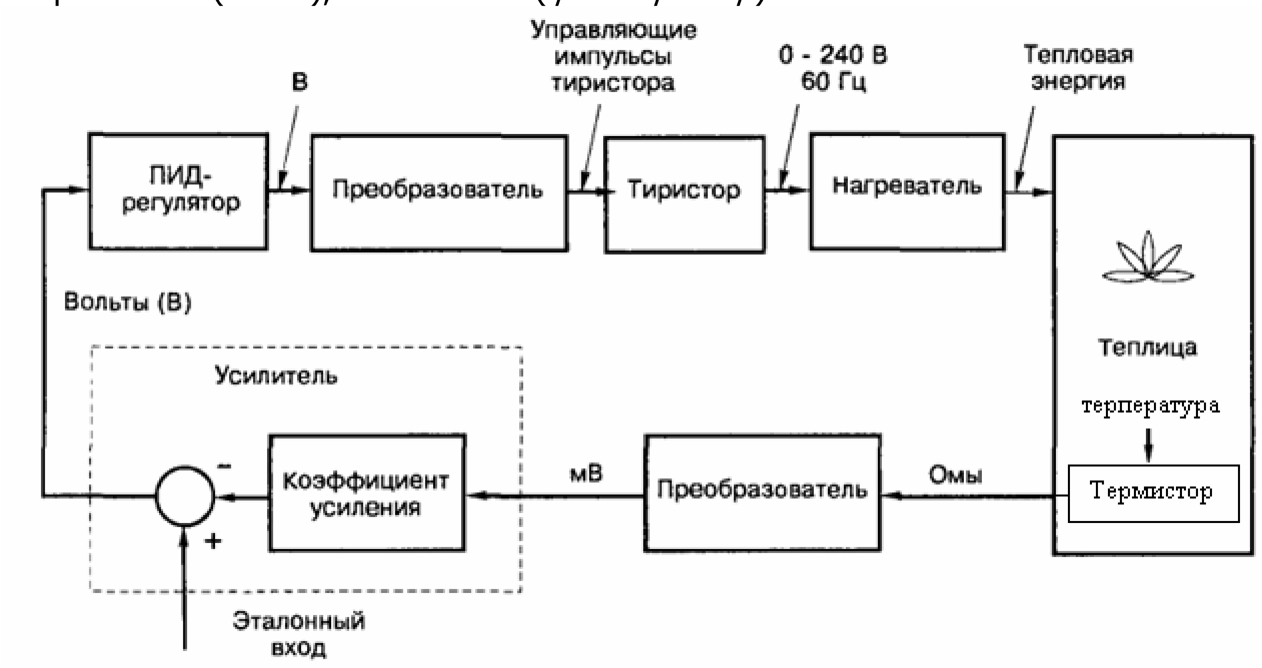


Рис. 3. Функциональная схема системы регулирования температуры в теплице

Желаемая температура в теплице также задается в виде напряжения. Разность между желаемой температурой (напряжение) и действительной температурой (тоже напряжение) есть сигнал ошибки. Увеличение напряжения приводит к увеличению температуры, а уменьшение напряжения — к уменьшению температуры. Напряжение, подаваемое на нагреватель, регулируется тиристором, который в свою очередь управляется сигналом ошибки, преобразованным в импульсную форму.

Система управления статьей дохода национального бюджета. Большой интерес представляют попытки построения моделей процессов с обратной связью, имеющих место в социальной, экономической и политической сферах. Эти методы разработаны пока недостаточно, но, скорее всего, будут востребованы в ближайшие годы. Любая общественная формация состоит из множества систем с обратной связью и органов управления, руководящих движением общества в желаемом направлении. На рис. 1 изображена обобщенная модель системы управления статьей дохода национального бюджета. Подобная модель помогает аналитику лучше понять роль правительства в управлении экономикой и динамику государственных расходов.

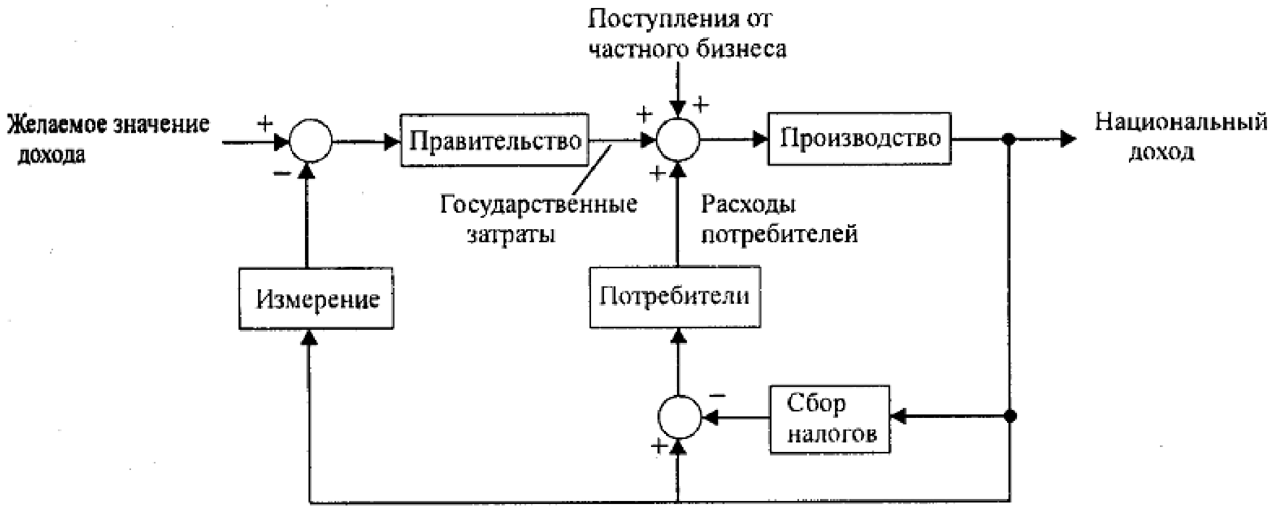


Рис. 1. Система управления статьей дохода национального бюджета в виде модели с обратной связью

Лекция № 2
Классификация систем управления и история управления

1. Классификация систем управления
2. История автоматического управления

1. Классификация систем управления

1. По типу решаемой задачи различают системы: *стабилизации*, *программные*, *следящие*.

В *системах стабилизации* (*стабилизирующие системы*) поддерживается постоянное значение управляемой величины при изменяющихся возмущающих воздействиях (стабилизация температуры, давления, напряжения, углового положения летательного аппарата и т.п.).

В *программных системах* обеспечивается изменение управляемой величины по заранее заданной программе. Такая задача возникает, например, при выводе ракеты на заданную траекторию, при развороте зеркала телескопа с целью компенсации вращения Земли, в бытовой технике (например, в стиральной машине) и т.д.

Различают *системы с временной программой*, обеспечивающие $y = f(t)$, и *системы с пространственной программой*, в которых $y = f(x)$, применяемые там, где на выходе САУ важно получить требуемую траекторию в пространстве, а закон движения во времени роли не играет.

Следящие системы отличаются от программных лишь тем, что программа $y = f(t)$ или $y = f(x)$ заранее неизвестна, управляемая величина воспроизводит произвольно изменяющееся задающее воздействие. В качестве задающего устройства выступает устройство, следящее за изменением какого-либо внешнего параметра. Эти изменения и будут определять изменения выходной величины САУ. Например, рука робота, повторяющая движения руки человека, антенна радиолокатора, следящая за маневрирующей целью, фреза копировально-фрезерного станка, воспроизводящая движение щупа по копиру.

Все три рассмотренные вида САУ могут быть построены по любому из трех фундаментальных принципов управления. Для них характерно требование совпадения выходной величины с некоторым предписанным значением на входе САУ, которое само может меняться. То есть в любой момент времени требуемое значение выходной величины определено однозначно.

2. По обеспечению оптимального управления: *оптимальные* и *неоптимальные системы*.

Оптимальной называется такая *система управления*, которой тем или иным способом приданы наилучшие качества в каком-либо определенном смысле. Так, например, система, обеспечивающая максимально возможную точность управления объектом, является *оптимальной в смысле минимума ошибки*. Система, которая переводит объект из заданного начального состояния в конечное за минимально возможное время, является *оптимальной по быстродействию*. Система, решающая ту же задачу за заданное время при минимально возможных затратах энергии, является *оптимальной в смысле минимального расхода энергии на управление*. Эти системы могут работать в соответствии с любым из трех фундаментальных принципов управления.

3. По обеспечению возможности адаптивного управления: *неадаптивные и адаптивные системы*, которые в свою очередь делятся на *экстремальные* и *самонастраивающиеся системы*.

В *адаптивных системах* предусмотрена возможность автоматической перенастройки параметров или изменения принципиальной схемы САУ с целью приспособления к изменяющимся внешним условиям.

В *экстремальных системах* требуется, чтобы выходная величина всегда принимала экстремальное значение из всех возможных, которое заранее не определено и может непредсказуемо изменяться. Для его поиска система выполняет небольшие пробные движения и анализирует реакцию выходной величины на эти пробы. После этого вырабатывается управляющее воздействие, приближающее выходную величину к экстремальному значению. Процесс повторяется непрерывно. Так как в данных САУ происходит непрерывная оценка выходного параметра, то они выполняются только в соответствии с третьим принципом управления: принципом обратной связи.

Экстремальное управление может применяться, например, для поддержания наиболее экономичной скорости полета самолета, соответствующей минимальному секундному расходу топлива при изменяющейся высоте полета, массе самолета, скорости и направлении ветра. При этом будет достигнута и максимальная дальность полета при заданном запасе топлива.

В тех случаях, когда закон изменения параметров объекта во времени заранее хорошо известен, можно рассчитать, как и когда нужно менять параметры управляющего устройства, чтобы качество работы автоматической системы в целом оставалось неизменно хорошим. Так делается, например, в некоторых системах управления ракетами, у которых в процессе полета из-за выгорания топлива изменяется масса, а из-за изменения плотности атмосферы — эффективность исполнительных органов. Если же составление такой программы оказывается невозможным вследствие незнания истинного закона изменения хотя бы некоторых параметров объекта, то прибегают к построению так называемой *самонастраивающейся системы*. Для этого в систему вводятся дополнительные автоматические устройства, которые определяют отклонение какого-либо показателя качества от его требуемого значения и изменяют параметры управляющего устройства или даже его структуру с целью минимизации указанного отклонения.

У подвижного объекта (корабля, самолета, ракеты) с течением времени вследствие выгорания топлива происходит изменение массы и моментов инерции. Если объект при своем движении меняет скорость и высоту, то возможно изменение его аэродинамических коэффициентов. Вследствие этого движение такой системы описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными во времени коэффициентами. Система управления тогда называется системой с *переменными параметрами*.

4. Для повышения показателей работы САУ применяется *одно- и многоконтурное регулирование*.

5. *По математическому описанию различают*:

— линейные системы;

— нелинейные системы.

К *линейным системам* применим принцип суперпозиции, в соответствии с которым выходной сигнал линейной системы на любое произвольное входное воздействие можно определить через ее реакцию на определенное типовое воздействие.

К *нелинейным системам* относятся системы, у которых хотя бы один элемент имеет нелинейную зависимость между входной и выходной величинами. Нелинейные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Закон управления в такой системе представляет собой нелинейную функцию.

6. *По виду используемой энергии*:

— электрические системы;

— пневматические системы;

— гидравлические системы;

— электропневматические системы;

— электрогидравлические системы.

7. *По количеству входов и выходов системы*, то есть по количеству регулируемых величин системы могут быть *одномерными* или *многомерными*.

Одномерные системы имеют один вход и один выход и соответственно обеспечивают регулирование одной величины. Однако на практике при управлении системами требуется отслеживание и регулирование нескольких величин, тогда система является многомерной.

Исследование многомерных систем — достаточно сложная задача. Поэтому в инженерных расчетах стараются иногда упрощенно представить многомерную систему как несколько одномерных.

8. *По поведению параметров системы во времени*. Если в период эксплуатации параметры являются неизменными, то система считается *стационарной*, в противном случае — *нестационарной*.

9. В зависимости *от характера внешних воздействий* (задающего и возмущающего) различают детерминированные и стохастические системы. В *детерминированных* системах внешние воздействия имеют вид постоянных функций времени. В *стохастических (вероятностных) системах* внешние воздействия имеют вид случайных функций.

Например, для исследования качки корабля на первом этапе можно считать, что волна имеет форму синуса известной амплитуды и частоты. Это детерминированная модель. С помощью такого подхода можно получить только приближенные, грубые результаты. По современным представлениям форма волны приближенно описывается как сумма синусоид, которые имеют *случайные*, то есть неизвестные заранее, частоты, амплитуды и фазы.

Помехи, шум измерений — это тоже случайные сигналы.

Теория стохастических систем позволяет получать только вероятностные результаты. Например, нельзя гарантировать, что отклонение корабля от курса всегда будет составлять не более 2°, но можно попытаться обеспечить такое отклонение с некоторой *вероятностью*.

10. *По характеру сигналов* системы могут быть:

— *непрерывными*, в которых выходные сигналы всех элементов являются непрерывными функциями входных сигналов;

— *дискретными*, в которых хотя бы один элемент имеет дискретную зависимость между входной и выходной величинами;

— *непрерывно-дискретными*, в которых есть как непрерывные, так и дискретные сигналы.

Непрерывные (или *аналоговые*) системы описываются дифференциальными уравнениями, и не содержат компьютеры и другие элементы дискретного действия (микропроцессоры, логические интегральные схемы).

Микропроцессоры и компьютеры — это дискретные системы, поскольку в них вся информация хранится и обрабатывается в дискретной форме. Компьютер не может обрабатывать непрерывные сигналы, поскольку работает только с последовательностями чисел. Примеры дискретных систем можно найти в экономике (период отсчета — квартал или год) и в биологии (модель «хищник-жертва»). Для их описания применяют разностные уравнения.

Существуют также и гибридные *непрерывно-дискретные* системы, например, компьютерные системы управления движущимися объектами (кораблями, самолетами, автомобилями и др.). В них часть элементов описывается дифференциальными уравнениями, а часть — разностными. С точки зрения математики это создает большие сложности для их исследования, поэтому во многих случаях непрерывно-дискретные системы сводят к упрощенным чисто непрерывным или чисто дискретным моделям.

11. Если динамика всех звеньев системы описывается обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то систему называют *обыкновенной линейной системой* (*системой с сосредоточенными параметрами*). Системой автоматического управления с *распределенными параметрами* называется такая система, среди уравнений которой кроме обыкновенных дифференциальных уравнений имеются уравнения в частных производных. Физически это соответствует учету волновых явлений или гидравлического удара в трубопроводах, учету волновых процессов в длинных электрических линиях при передаче по ним воздействий от одного звена системы автоматического управления к другому или же при управлении процессами в самих трубопроводах или длинных линиях.

Этот вопрос приобретает практическое значение чаще всего в некоторых системах управления, включающих в себя водяные, масляные или газовые трубопроводы (либо в объекте, либо в управляющем устройстве), реже — в некоторых системах телерегулирования (телеуправления) и т. д.

2. История автоматического управления

Самое раннее из известных устройств с обратной связью относится ко II веку до нашей эры. Это так называемые *водяные часы*. Время измерялось с помощью капель воды, падающих с постоянной скоростью через сопло из резервуара. Чтобы обеспечить постоянную скорость истечения воды, необходимо было поддерживать постоянный уровень воды в резервуаре, а для этого требовалось автоматическое регулирование. Интересно, что задача поддержания постоянного уровня жидкости в сосуде до сих пор сохраняет актуальность.

Одна из возможных конструкций водяных часов показана на рис. 1. Плавающий клапан в верхнем сосуде, одновременно выполняющий роль датчика и исполнительного устройства системы регулирования, служит для поддержания постоянного уровня воды в этом сосуде. Когда уровень воды соответствует заданному значению, клапан закрывает питающую магистраль. Если же уровень меньше заданного, то клапан открывает магистраль, что приводит к повышению уровня. Обратите внимание, что действие этого механизма аналогично работе сливного бачка в туалете. Вода через сопло капает в нижний сосуд, снабженный проградуированной шкалой. Уровень воды в нем точно указывает промежуток времени с того времени, когда сосуд был пуст. Фактически накопление воды в нижнем резервуаре является операцией интегрирования (суммирования). Аналогичная процедура (суммирование) используется при численном интегрировании в цифровых компьютерах. Эта процедура использовалась 22 столетия назад, и в наши дни данный принцип лежит в основе работы современных компьютеров.

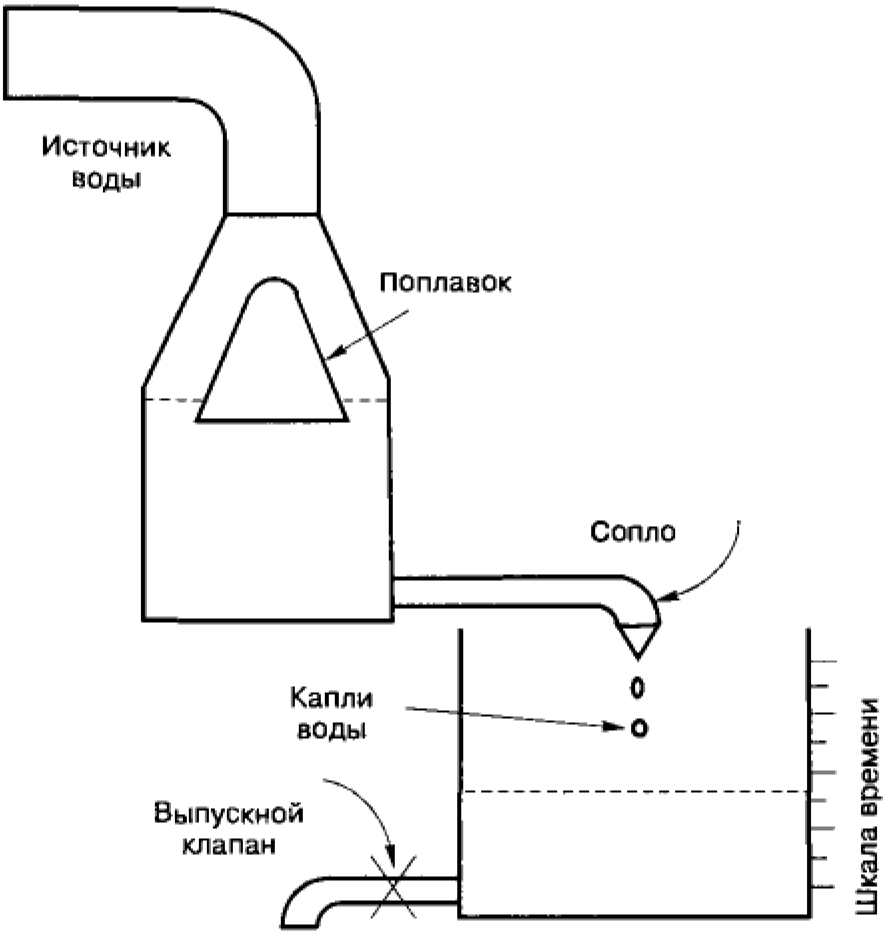


Рис. 1. Водяные часы

Голландский механик и химик Корнелиус Дреббель (1572—1633) изобрел *регулятор температуры*, который он использовал в своих химических опытах и в инкубаторах для выведения цыплят. Этот регулятор содержал устройство, позволявшее выпускать нагретый воздух из камеры, когда температура в ней достигала желаемого значения. Его можно сравнить с системой автоматического регулирования температуры в жилом помещении; разница лишь в том, что в этой системе нагретый воздух начинал циркулировать, когда температура опускалась ниже заданного значения.

Американец Уильям Генри (1729—1786) изобрел *регулятор температуры*, в котором использовалась заслонка, автоматически управлявшая сгоранием топлива и, следовательно, температурой. Принцип действия датчика температуры и исполнительного устройства был основан на давлении нагретого воздуха при его расширении. Расширение воздуха приводило к закрытию заслонки и уменьшению сгорания топлива, а сжатие воздуха стремилось открыть заслонку.

Главным изобретением в области управления скоростью ветряных мельниц и паровых машин был *центробежный регулятор* Томаса Мида (1787 г.). В 1788 г. Мэтью Болтон и Джеймс Уатт предложили конструкцию *центробежного регулятора скорости*, изображенную на рис. 2. При увеличении скорости вращения машины шарики за счет центробежной силы расходились, что, в свою очередь, приводило к перемещению втулки вверх по оси машины. При этом с помощью клапана, управляемого рычажным механизмом, уменьшалась подача пара и, следовательно, скорость вращения. Уменьшение скорости вращения приводило к обратному эффекту.

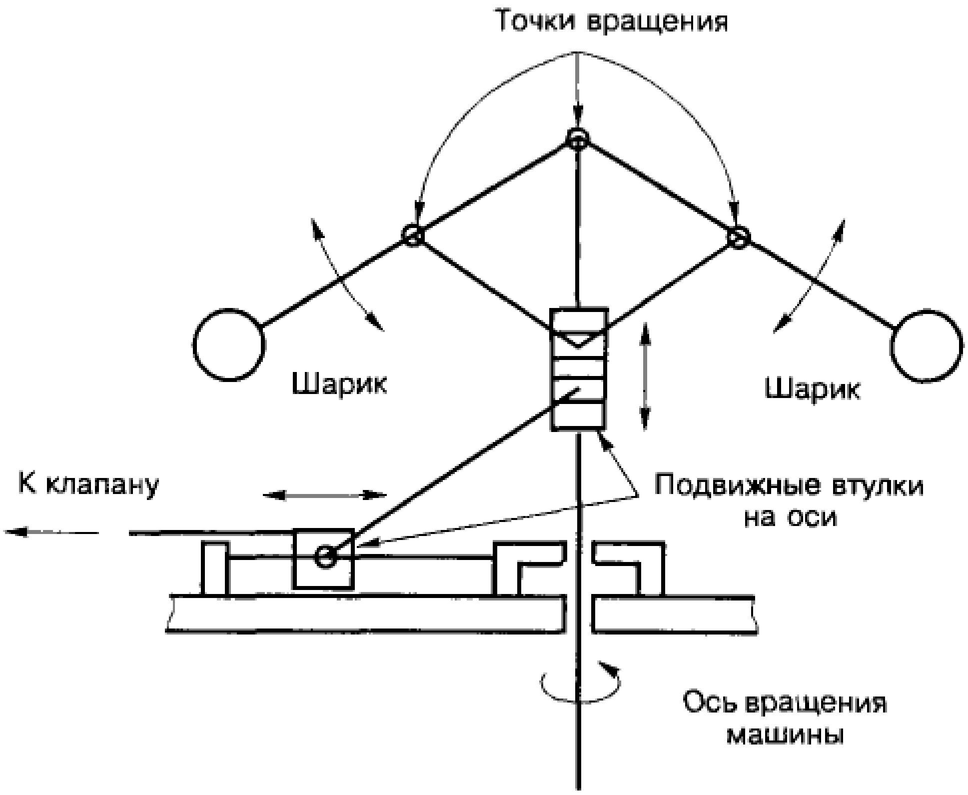


Рис. 2. Регулятор скорости вращения паровой машины

Рассмотренные выше устройства работали приблизительно так, как было описано. Однако во многих случаях регулятор вместо того, чтобы поддерживать постоянное значение выходной переменной, позволял ей совершать небольшие колебания относительно заданного значения. Этот эффект часто называли «*рысканием*». Чтобы устранить подобную неустойчивость, потребовалось создание математических моделей физических устройств, т. е. уравнений, решение которых описывало бы поведение этих устройств. В результате появились современные математические методы моделирования, анализа и синтеза систем управления.

В разработку этих методов внесли свой вклад очень многие ученые.

Пьер Симон Лаплас (1749—1827) — преобразование (названное впоследствии его именем), являющееся основой большинства методов анализа и синтеза систем управления.

Исаак Ньютон (1642—1727) — математическое моделирование и анализ.

Брук Тейлор — математический анализ (ряды Тейлора).

Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879) — математическое моделирование и анализ.

Эдвард Джон Раус (1831—1907) — критерий Рауса.

Оливер Хевисайд (1850—1925) — математический анализ.

Чарльз П. Стейнметц (1865—1923) — анализ частотных характеристик с помощью комплексных переменных.

Гарри Найквист (1889—1976) — критерий Найквиста.

Хендрик У. Боде (1905—1982) — диаграмма Боде.

Гарольд С. Блэк (1898—1981) — усилители с отрицательной обратной связью.

У. Р. Эванс — корневой годограф.

Джон фон Нейман (1903—1957) — принцип действия цифрового компьютера.

Этот список ни в коей мере не является исчерпывающим как в персональном плане, так и в плане достижений в отдельных областях.

Лекция № 3
Режимы работы и передаточные функции систем управления

1. Статический и динамический режимы работы систем управления
2. Передаточная функция системы управления

1. Статический и динамический режимы работы систем управления

Режим работы системы, в котором управляемая величина и все промежуточные величины не изменяются во времени, называется *установившимся*, или *статическим режимом*. Любое звено в данном режиме описывается *уравнениями статики* вида $y = F(u, f)$, в которых отсутствует время t. Соответствующие им графики называются *статическими характеристиками*.

Установившийся режим не является характерным для систем, так как на управляемый процесс действуют различные возмущения, отклоняющие управляемый параметр от заданной величины. Процесс установления требуемого значения управляемой величины называется *регулированием*.

Поведение системы в динамических режимах характеризуется *уравнением динамики* $y(t) = F(u, f, t)$, которое описывает изменение величин во времени. Как правило, это дифференциальное уравнение. Порядок дифференциальных уравнений может быть довольно высоким, то есть зависимостью связаны как сами входные и выходные величины $u(t)$, $f(t)$, $y(t)$, так и скорости их изменения, ускорения и т. д. Поэтому уравнение динамики в общем виде можно записать так:

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, u, u', u'', \ldots, u^{(m)}, f, f', f'', \ldots, f^{(k)}\right) = 0.$$

Рассмотрим систему, находящуюся в установившемся режиме, характеризующемся значением выходной величины $y = y_0$. Пусть в момент $t = 0$ на объект воздействовал какой-либо возмущающий фактор, отклонив значение регулируемой величины. Через некоторое время регулятор вернет систему к первоначальному состоянию. Если регулируемая величина изменяется во времени по апериодическому закону, то процесс регулирования называется *апериодическим* (рис. 1).

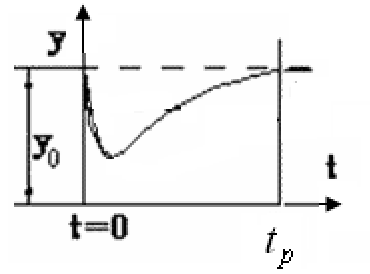


Рис. 1. Апериодический процесс регулирования

Возможны: *колебательный затухающий* процесс (рис. 2, *а*); *незатухающий колебательный* процесс (рис. 2, *б*); *расходящийся колебательный* процесс (рис. 2, *в*).

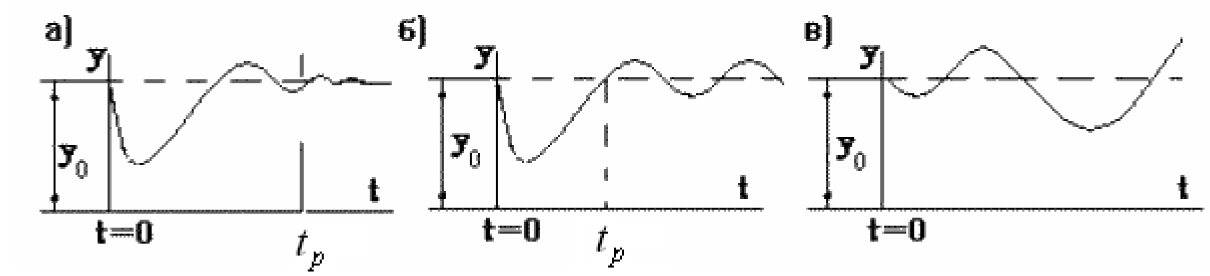


Рис. 2. Колебательные процессы регулирования: *а* — затухающий; *б* — незатухающий; *в* — расходящийся

Таким образом, основным режимом работы системы считается *динамический режим*, характеризующийся протеканием в ней *переходных процессов*. На рис. 1 и рис. 2 время t_p — это время регулирования, по истечении которого, система вернется в установившееся положение.

Дополнительная информация. Преобразование Лапласа.

Под *операционным исчислением* понимают методы решения задач, основанные на следующих этапах:

— от искомых функций переходят к некоторым другим функциям — их изображениям;

— над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциями над самими функциями (отсюда название — операционное исчисление);

— произведя действия над изображениями и получив некоторый результат, возвращаются к самим функциям.

Преобразование Лапласа устанавливает соответствие между оригиналами $f(t)$ функций и их изображениями $F(s)$.

Оказывается, что определенным действиям, производимым над оригиналами, будут соответствовать некоторые действия, производимые над их изображениями, причем, как правило, действия над изображениями будут проще, чем над оригиналами.

В этом проявляется полная аналогия с основной идеей применения логарифмов в элементарной математике. Роль оригиналов там играют числа, а роль изображений — их логарифмы. Действию умножения чисел соответствует сложение их логарифмов, действию возведения числа в степень соответствует умножение логарифма этого числа на показатель степени и т. д. Таким образом, более сложные действия над числами заменяются более простыми действиями над их логарифмами, и схема применения логарифмов выглядит примерно так. Чтобы, скажем, перемножить числа, мы сначала по таблице находим их логарифмы и складываем их. Найдя логарифм произведения, мы снова, пользуясь таблицами, возвращаемся к числу и получаем искомый результат.

Именно, если имеется некоторое сложное соотношение между оригиналами, то при помощи преобразования Лапласа мы будем получать значительно более простое соотношение между изображениями. Например, вместо дифференциального уравнения относительно оригинала будет получаться алгебраическое уравнение относительно изображения. Решив это последнее и перейдя затем от изображения назад к оригиналу, мы и получим решение исходного дифференциального уравнения.

Приведенную аналогию с логарифмами можно продолжить. Ведь главное при действиях с логарифмами — это хорошо знать свойства логарифмов и правила логарифмирования. Само же соответствие между числами и логарифмами устанавливается при помощи таблиц логарифмов, и можно превосходно владеть методами вычислений, совершенно не зная, как фактически составлялись логарифмические таблицы. Точно так же обстоит дело и здесь. После того как установлены основные правила действия над преобразованиями Лапласа и составлена таблица соответствия между оригиналами и изображениями (своего рода «аналог» таблицы логарифмов), нам уже не придется больше вычислять интеграл Лапласа для различных оригиналов $f(t)$, и переход от оригинала к изображению и обратно — от изображения к оригиналу будет осуществляться при помощи этой таблицы.

Функция действительного переменного $f(t)$ называется *функцией оригиналом в преобразовании Лапласа*, если она удовлетворяет трем условиям:

— функция задана только на положительной полуоси, на отрицательной она равна нулю:

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ при } t<0,\\ f(t), \text{ при } t\ge 0;\end{cases}$$

— на любом конечном отрезке функция удовлетворяет *условиям Дирихле*.

Примечание. Условия Дирихле:

а) интервал, на котором функция определена, может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(t)$ непрерывна и монотонна.

Функция $f(t)$ называется *непрерывной функцией* в точке $t=a$, если число a принадлежит к области ее задания и предел $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ существует и равен $f(a)$. Если функция задана и непрерывна для всех значений t в интервале от a до b, то она называется непрерывной в этом интервале. Функция, заданная и непрерывная для всех точек числовой оси, называется непрерывной всюду.

Монотонная функция — функция, удовлетворяющая при любых $t_2>t_1$, входящих в область задания, условию $f(t_2)\ge f(t_1)$ (монотонно возрастающая функция), или $f(t_2)\le f(t_1)$ (монотонно убывающая функция).

б) во всякой точке разрыва $f(t)$ существуют $f(t+0)$ и $f(t-0)$.

Для тех значений a, которые находятся внутри или на границе области задания функции и в которых она не определена, или значение $f(a)$ не совпадает со значением предела $\lim\limits_{t\to a} f(t)$, или $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ не существует, функция имеет *разрыв* (*точки разрыва*).

Если $f(t)$ непрерывна во всех точках некоторого интервала за исключением конечного числа отдельных его точек, в которых $f(t)$ имеет *конечные разрывы* (значение функции в этих точках не бесконечно), то такая функция называется *кусочно-непрерывной*; ее график состоит из нескольких отрезков кривых линий.

— функция $f(t)$ ограниченного роста $|f(t)| \le Me^{\sigma_0 t}$ (растет по модулю не быстрее экспоненты), где σ_0 — показатель роста; M — некоторая постоянная.

Соотношение:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

называют *прямым преобразованием Лапласа*.

Комплексная переменная $s = \beta_0 + j\omega$ называется *оператором Лапласа*, где ω — угловая частота; β_0 — некоторое положительное постоянное число.

Функция комплексной переменной $F(s)$ называется *изображением функции* $f(t)$ *по Лапласу*.

Операция определения изображения по оригиналу сокращенно записывается в следующем виде:

$$F(s) = L\{f(t)\},$$

где L — символ прямого преобразования Лапласа.

На практике для выполнения прямого и обратного преобразований Лапласа используются таблицы изображений (табл. 1).

Таблица 1

Таблица изображений по Лапласу основных типовых функций

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s)$
1.	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2.	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{s \mp \alpha}$
3.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
4.	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Свойства преобразования Лапласа

5. Изображение по Лапласу производной от функции (теорема дифференцирования оригинала).

Если функция $f(t)$ имеет изображение $F(s)$, то изображение производной равно:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

Доказательство.

$$L\{f'(t)\}=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{интегрирование по частям}\\ \int udv=uv-\int vdu\\ u=e^{-st},\ du=-se^{-st}dt\\ dv=f'(t)dt,\ v=f(t)\end{array}\right|=$$

$$=e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=sF(s)-f(0).$$

Рассматривая изображения производных 2, 3… порядков можно показать, что:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

При нулевых начальных условиях $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$:

$$L\{f'(t)\}=sF(s),$$

$$L\{f''(t)\}=s^2F(s),$$

$$\ldots$$

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^nF(s).$$

Таким образом, операция дифференцирования в области действительного аргумента t при нулевых начальных условиях заменяется операцией умножения изображения данной функции на комплексную переменную s в соответствующей степени. Это свойство — важнейшее свойство, которое используется в операционном исчислении, оно позволяет заменить нахождение решения дифференциального уравнения на нахождение решения алгебраического уравнения.

6. Изображение по Лапласу интеграла от функции (теорема интегрирования оригинала).

Если функция $f(t)$ имеет изображение $F(s)$, то изображение интеграла равно:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s}.$$

Доказательство.

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau dt=\left|\begin{array}{l}\text{интегрирование по частям}\\ \int udv=uv-\int vdu\\ u=\int_0^t f(\tau)d\tau,\ du=f(t)dt\\ dv=e^{-st}dt,\ v=-\dfrac{e^{-st}}{s}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(\tau)d\tau\Bigg|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\frac{F(s)}{s}.$$

Аналогично можно показать, что преобразование Лапласа от многократного интеграла:

$$L\left\{\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t f(\tau)d^n\tau\right\}=\frac{F(s)}{s^n}.$$

Таким образом, операция интегрирования в области действительного аргумента заменяется операцией деления изображения данной функции на комплексную переменную s в соответствующей степени s^n (n— кратность интеграла). Это свойство позволяет свести решение интегрального уравнения к решению алгебраического уравнения.

Математические модели систем управления могут быть получены теоретически из законов физики. Эти модели описывают внутренние связи в объекте и, как правило, наиболее точны. Другой способ это построение математической модели в результате наблюдения за объектом при различных входных сигналах (этим занимается *теория идентификации*). Объект рассматривается как «черный ящик», то есть, его внутреннее устройство неизвестно. Мы смотрим, как он реагирует на входные сигналы, и стараемся подстроить модель так, чтобы выходы модели и объекта совпадали как можно точнее при разнообразных входах.

2. Передаточная функция системы управления

Пусть некоторая система описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x(t)=b_m\frac{d^mg}{dt^m}+\ldots+b_0g(t),$$

где $x(t)$ — регулируемая, или выходная величина системы (реакция системы на входное воздействие); $g(t)$ — входной сигнал, вызывающий реакцию системы.

В ТАУ используют понятие *дифференциального оператора* (*оператор дифференцирования*) $p=\dfrac{d}{dt}$ так, что, $\dfrac{dy}{dt}=py$, а $\dfrac{d^n}{dt^n}=p^n$, позволяющего записывать дифференциальные уравнения в операторной форме как алгебраические.

Оператор дифференцирования — это идеальный (физически нереализуемый) оператор, его невозможно реализовать на практике, поскольку при мгновенном изменении сигнала его производная (скорость возрастания) будет равна бесконечности, а никакое реальное устройство не может работать с бесконечными сигналами. Обратная дифференцированию операция интегрирования записывается как $\dfrac{1}{p}$.

В операторной форме исходное дифференциальное уравнение:

$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0)x = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)g\,.$$

В ТАУ используется понятие *передаточной функции* — отношение операторов правой и левой частей дифференциального уравнения:

$$W(p) = M(p)/D(p) = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)/(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0)\,.$$

Полагая, что имеют место нулевые начальные условия, то есть что система до момента приложения воздействия находилась в состоянии покоя, преобразуем обе части дифференциального уравнения по Лапласу и из полученного уравнения в изображениях:

$$X(s)(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0) = G(s)(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0)$$

найдем отношение изображения реакции системы $X(s)$ к изображению входного сигнала $G(s)$:

$$W(s) = \frac{\overbrace{X(s)}^{\text{выход}}}{\underbrace{G(s)}_{\text{вход}}} = \frac{\overbrace{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}^{\text{вход}}}{\underbrace{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}_{\text{выход}}}\,.$$

При нулевых начальных условиях обе формы записи совпадают так как:

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = L[px(t)] = sX(s),\ldots,L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = L[p^n x(t)] = s^n X(s),$$

$$L\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = L[pg(t)] = sG(s),\ldots,L\left[\frac{d^m g(t)}{dt^m}\right] = L[p^m g(t)] = s^m G(s),$$

и оператор Лапласа s может быть отождествлен с оператором дифференцирования p.

Передаточной функцией звена называется отношение изображений по Лапласу выходной переменной к входной при нулевых начальных условиях.

Передаточная функция определяет отношение выходной величины звена к входной в каждый момент времени, поэтому ее еще называют *динамическим коэффициентом усиления*.

В установившемся режиме $d/dt = 0$, то есть $p = 0$ (и соответственно можно сказать, что $s = 0$), и передаточная функция превращается в *коэффициент усиления* $k = W(0) = b_0/a_0$ (отношение свободных членов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы). Таким образом, коэффициент усиления — это коэффициент пропорциональности между постоянным входным сигналом и установившимся значением выходного сигнала (если оно существует). Когда входная и выходная величины имеют разную природу, его называют *коэффициентом передачи*.

Знаменатель передаточной функции $D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$ называют *характеристическим полиномом* (*уравнением*). Его корни, то есть значения s, при которых знаменатель $D(s)$ обращается в ноль, а $W(s)$ стремится к бесконечности, называются *полюсами передаточной функции*.

Числитель $M(s)=b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0$ называют *операторным коэффициентом передачи*. Его корни, при которых $M(s)=0$ и $W(s)=0$, называются *нулями передаточной функции*.

Порядок (*звена*) *системы* — это наивысшая степень производной в дифференциальном уравнении, которое описывает систему или порядок полинома знаменателя передаточной функции.

Физически нереализуемым звеном является звено, у которого степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя, т. е. $m>n$, поскольку в этом случае звено осуществляет дифференцирование входного сигнала.

Звено с известной передаточной функцией называется *динамическим звеном*. Оно изображается прямоугольником, внутри которого записывается выражение передаточной функции. Схема, составленная из динамических звеньев, называется *структурной схемой*.

Звено называется *минимально-фазовым*, если все нули и полюса его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части.

Звено называют *неминимально-фазовым*, если хотя бы один ноль или полюс его передаточной функции имеет положительную вещественную часть.

Теперь к классификации систем автоматического управления можно добавить, что системы делятся на *статические* и *астатические*. Такое деление производится по характеру установившейся ошибки в системе при ступенчатом (скачкообразном) воздействии.

Установившаяся ошибка системы управления при скачкообразном изменении входной величины называется *статической ошибкой*.

Системы управления, статическая ошибка которых не равна нулю, называются *статическими системами*. Соответственно, системы автоматического управления, установившаяся ошибка которых равна нулю, называются *астатическими системами*.

Чтобы определить, к статической или астатической системе относится система автоматического управления, не обязательно решать дифференциальное уравнение замкнутой системы при скачкообразном воздействии. Достаточно иметь выражение передаточной функции разомкнутого контура управления исследуемой замкнутой системы управления.

Признаком астатической системы управления является наличие в разомкнутом контуре управления интегрирующего (астатического) звена, то есть звена с передаточной функцией: $W(s)=\dfrac{1}{s^{\nu}}$, где ν — порядок астатизма. Если в разомкнутом контуре системы управления отсутствует интегрирующее звено, то она относится к статическим системам.

Лекция № 4
Понятие временных и частотных характеристик систем управления

1. Типовые управляющие и возмущающие воздействия
2. Понятие временных характеристик
3. Понятие частотных характеристик

1. Типовые управляющие и возмущающие воздействия

Для оценки динамических свойств системы исследуют ее реакцию на *типовые входные воздействия*, которые наиболее полно отражают особенности реальных возмущений. Во-первых, это позволяет сравнивать отдельные элементы между собой с точки зрения их динамических свойств. Во-вторых, зная реакцию системы на типовые воздействия, можно судить о том, как она будет вести себя при сложных изменениях входной величины.

Наиболее распространенными типовыми воздействиями являются: *ступенчатое*, *импульсное* и *гармоническое* воздействия.

Первое воздействие — *ступенчатое воздействие* (*единичная ступенчатая функция*, *функция Хевисайда*) (рис. 1):

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t \geq 0, \\ 0, \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

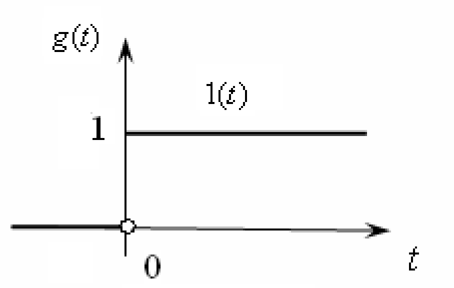


Рис. 1. Единичная ступенчатая функция

Другим распространенным типовым воздействием является *дельта-функция* (δ-*функция*, *функция Дирака*). Дельта-функция физически представляет собой импульс с единичной площадью, с бесконечно малой длительностью и амплитудой (высотой) стремящейся к бесконечности (рис. 2):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } t \neq 0, \\ \infty, \text{ при } t = 0. \end{cases}$$

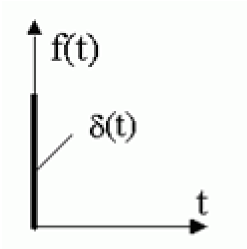


Рис. 2. Дельта-функция

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

— поскольку производная от единичной функции при $t = 0$ равна бесконечности $\left.\frac{d1(t)}{dt}\right|_{t=0} = \infty$, то интеграл в бесконечных пределах от δ-функции равен единице $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$. Отсюда следует утверждение о том, что δ-функция имеет единичную площадь;

— фильтрующие свойства: $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$.

2. Понятие временных характеристик

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие (зависимость изменения выходной величины системы от времени при подаче на ее вход единичного ступенчатого воздействия при нулевых начальных условиях) называется *переходной характеристикой системы* (*переходным процессом*) и обозначается $h(t)$.

Зная передаточную функцию системы $W(s)$, выражение для переходного процесса можно записать следующим образом:

$$h(s) = W(s)L[1(t)],$$

где $L[1(t)] = 1/s$ — преобразование Лапласа единичной ступенчатой функции.

Тогда $h(s) = W(s) \cdot 1/s$.

Далее взяв обратное преобразование Лапласа, находится функция переходного процесса от времени:

$$h(t) = L^{-1}[h(s)].$$

Импульсная переходная характеристика (*весовая функция*, *функция веса*) описывает реакцию системы на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях, обозначают $w(t)$.

Единичная импульсная функция, или $\delta-$ функция, представляет собой производную от единичной ступенчатой функции:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t).$$

Таким образом, взяв производную от переходной функции можно получить выражение для импульсной переходной функции системы $w(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}$.

Дельта-функция тождественно равна нулю во всех точках, кроме $t = 0$, где она стремится к бесконечности. Основное свойство дельта-функции:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1,$$

то есть она имеет единичную площадь.

Нетрудно установить, что изображение по Лапласу дельта-функции:

$$\delta(s) = L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s \times \frac{1}{s} = 1.$$

Тогда изображение по Лапласу импульсной переходной функции системы определяется как:

$$L\{w(t)\} = w(s) = W(s)\cdot\delta(s) = W(s).$$

Таким образом, справедливо выражение:

$$w(t) = L^{-1}\{w(s)\} = L^{-1}\{W(s)\}.$$

Переходная и импульсная переходная характеристики называются *временными характеристиками*. По ним с использованием интеграла Дюамеля можно определить выходную величину при произвольном входном воздействии.

Интеграл Дюамеля позволяет определять реакцию системы на входное воздействие $x(t)$ в текущем времени (в реальном, замедленном или ускоренном масштабе, в зависимости от мощности вычислительного инструмента и желания исследователя) по ее переходной функции $h(t)$:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau)\frac{d}{d\tau}x(\tau)d\tau + y(0).$$

Как видно, интеграл Дюамеля оперирует с сигналами, начавшимися в нулевой момент времени или позднее и может учитывать одно начальное условие (выходной сигнал в начальный момент времени), но не значения младших производных выходного сигнала в нулевой момент времени, которые предполагаются нулевыми.

Моделирующие программы, например Mathcad, довольно долго вычисляют интеграл Дюамеля, поскольку он требует выполнять большой объем вычислительной работы на каждом шаге.

Интеграл свертки можно рассматривать как вариант интеграла Дюамеля, в котором под интегралом проведено интегрирование по частям. Это позволяет выразить выходной сигнал системы через ее весовую функцию $w(t)$:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

Смысл интеграла свертки состоит в том, что здесь входной сигнал представляется последовательностью плотно следующих друг за другом коротких импульсов, амплитуды (точнее, площади) которых равны значению сигнала в моменты их следования и длительность которых устремляется к нулю. При этом последовательность импульсов стремится к последовательности дельта-функций с площадями, равными площадям соответствующих импульсов. Реакция системы находится как сумма реакций на каждый импульс, составляющий входное воздействие, т. е. как взвешенная сумма сдвинутых весовых функций $w(t-\tau)$.

Методы интегралов Дюамеля и свертки способны решать задачи в текущем времени потому, что текущим временем t является верхний предел этих интегралов. Интегралы Дюамеля и свертки трактуют решение как сумму элементарных переходных процессов, а, следовательно, как перманентный переходный процесс. Поэтому даже если система работает в установившемся режиме, интегралы Дюамеля и свертки формально рассматривают этот режим как переходный.

3. Понятие частотных характеристик

Если подать на вход системы с передаточной функцией $W(s)$ гармонический сигнал:

$$u(t) = U_m e^{j\omega t} = U_m(\cos\omega t + j\sin\omega t),$$

то после завершения переходного процесса на выходе установятся гармонические колебания:

$$y(t) = Y_m e^{j(\omega t+\varphi)} = Y_m e^{j\omega t}e^{j\varphi}$$

с той же частотой ω, но другими амплитудой и фазой, зависящими от частоты ω входного сигнала. По ним можно судить о динамических свойствах системы.

Зависимости, связывающие амплитуду и фазу выходного сигнала с частотой входного сигнала, называются *частотными характеристиками* (ЧХ). Анализ ЧХ системы с целью исследования ее динамических свойств называется *частотным анализом*.

Подставим выражения для $u(t)$, $y(t)$ в уравнение динамики:

$$(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0) y = (b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0) u .$$

Учтем, что

$$su = sU_m e^{j\omega t} = U_m j\omega e^{j\omega t} = j\omega u$$ **(**производную находим),

а значит

$$s^n u = s^n U_m e^{j\omega t} = U_m (j\omega)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n u .$$

По аналогии с передаточной функцией можно записать:

$$y = \frac{b_m (j\omega)^m + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0} u = W(j\omega) \cdot u .$$

$W(j\omega)$, равная отношению выходного сигнала к входному при изменении входного сигнала по гармоническому закону, называется *частотной передаточной функцией*. Она может быть получена путем простой замены $s = j\omega$ в выражении $W(s)$.

$W(j\omega)$ — комплексная функция, поэтому:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega)$ — *вещественная частотная характеристика* (ВЧХ); $Q(\omega)$ — *мнимая частотная характеристика* (МЧХ); $A(\omega)$ — а*мплитудно-частотная характеристика* (АЧХ); $\varphi(\omega)$ — *фаза-частотная характеристика* (ФЧХ).

АЧХ дает отношение амплитуд выходного и входного сигналов и показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты. ФЧХ дает сдвиг по фазе выходной величины относительно входной и показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах:

$$A(\omega) = \frac{Y_m}{U_m} = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = |W(j\omega)|,$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = \arg(W(j\omega)) \cdot \frac{180}{\pi} .$$

По форме АЧХ различают несколько основных типов звеньев:

1) *фильтр низких частот* – пропускает низкочастотные сигналы примерно с одинаковым коэффициентом усиления, блокирует высокочастотные шумы и помехи;
2) *фильтр высоких частот* – пропускает высокочастотные сигналы, блокирует сигналы низкой частоты;
3) *полосовой фильтр* – пропускает только сигналы с частотами в полосе от ω_1 до ω_2;
4) *полосовой режекторный фильтр* – блокирует только сигналы с частотами в полосе от ω_1 до ω_2, остальные пропускает.

На рис .1 показаны амплитудные частотные характеристики идеальных фильтров этих четырех типов:

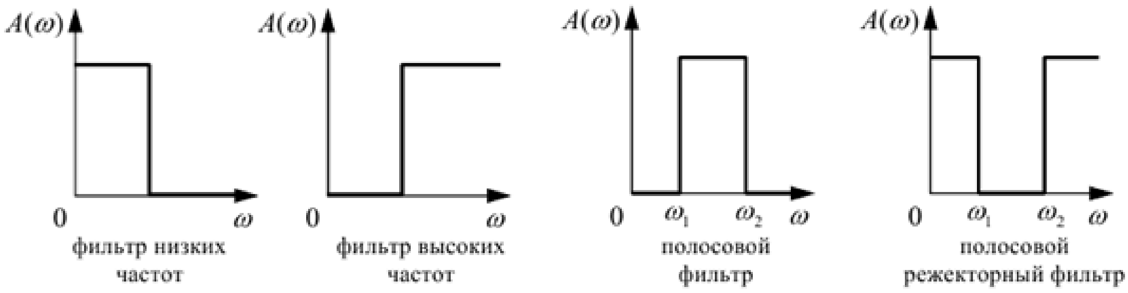


Рис. 1.

В радиотехнике используется понятие *полосы пропускания* – это ширина полосы частот, в которой значение АЧХ больше, чем $1/\sqrt{2}$ от ее максимального значения.

Переходной процесс можно построить по вещественной или мнимой характеристикам системы:

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}(W_{\text{зам}}(j\omega))\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega,$$

$$h(t) = \mathrm{Re}(W_{\text{зам}}(0)) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}(W_{\text{зам}}(j\omega))\frac{\cos\omega t}{\omega}d\omega,$$

где $\mathrm{Re}(W_{\text{зам}}(j\omega))$ — вещественная частотная характеристика замкнутой системы (ВЧХ); $\mathrm{Im}(W_{\text{зам}}(j\omega))$ — мнимая частотная характеристика замкнутой системы (МЧХ).

Если $W(j\omega)$ изобразить вектором на комплексной плоскости, то при изменении ω от 0 до $+\infty$ его конец будет вычерчивать кривую, называемую *годографом вектора* $W(j\omega)$, или *амплитудно-фазовую частотную характеристику* (АФЧХ) (рис. 2, 3). Ветвь АФЧХ при изменении ω от $-\infty$ до 0 можно получить зеркальным отображением данной кривой относительно вещественной оси.

Длина вектора, проведенного из начала координат в точку АФЧХ, соответствующую какой-то выбранной частоте, равна модулю частотной передаточной функции. Угол между вектором и положительным направлением вещественной оси, отсчитываемом против часовой стрелки, равен аргументу или фазе частотной передаточной функции. Таким образом, АФЧХ дает возможность наглядно представить для каждой частоты входного воздействия звена отношение амплитуд выходной и входной величин и сдвиг фаз между ними.

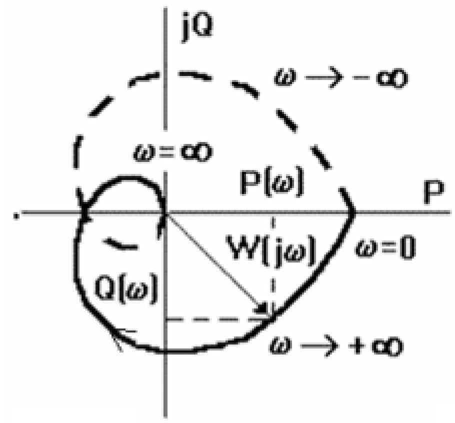


Рис. 2. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

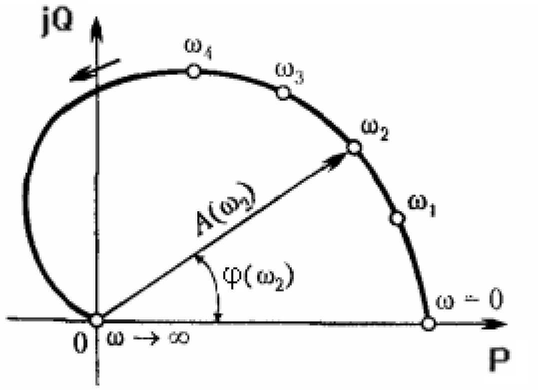


Рис. 3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Частотные характеристики достаточно сложно строить вручную. В 60-е годы, когда развивалась классическая теория управления, не было мощных компьютеров, поэтому наибольшую популярность приобрели приближенные методы, которые позволяли проектировать регуляторы с помощью ручных вычислений и построений. Один из таких подходов основан на использовании *логарифмических частотных характеристик*.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) $L(\omega)$ и *логарифмическая фазовая частотная характеристика* (ЛФЧХ) $\varphi(\omega)$ получаются путем логарифмирования передаточной функции:

$$\ln\big(W(j\omega)\big)=\ln\Big(A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\Big)=\ln\big(A(\omega)\big)+\ln\Big(e^{j\varphi(\omega)}\Big)=\ln\big(A(\omega)\big)+\varphi(\omega).$$

ЛАЧХ получают из первого слагаемого, которое из соображений масштабирования умножается на 20, и используют не натуральный логарифм, а десятичный, то есть $L(\omega)=20\lg\big(|W(j\omega)|\big)=20\lg\big(A(\omega)\big)$. Величина $L(\omega)$ откладывается по оси ординат в *децибелах* (дБ).

По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе. Единицей отсчета на логарифмической оси частот является *декада* — диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу $\lg(10)=1,\ \ \lg(100)=2$).

ЛФЧХ, получаемая из второго слагаемого, отличается от ФЧХ только масштабом по оси ω. Величина $\varphi(\omega)$ откладывается по оси ординат в градусах или радианах.

Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются *логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (ЛАФЧХ) или *диаграммой Боде*.

Логарифмические характеристики обладают двумя ценными свойствами:

1. ЛАЧХ и ЛФЧХ для произведения $W_1(s)W_2(s)$ вычисляются как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев:

$$20\lg\big(A(\omega)\big) = 20\lg\big(A_1(\omega)\big) + 20\lg\big(A_2(\omega)\big),$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$

2. В области высоких и низких частот ЛАЧХ асимптотически приближаются к прямым, наклон которых составляет ± 20 дБ/дек (децибел на декаду), ± 40 дБ/дек и т. д.

В классической теории управления хорошо разработаны методы анализа и синтеза систем на основе асимптотических ЛАЧХ, которые представляют собой ломаные линии и легко строятся вручную. С появлением компьютерных средств расчета практическая ценность ЛАФЧХ несколько снизилась, однако они по сей день остаются простейшим инструментом приблизительных расчетов для инженера.

Построение ЛАФЧХ сложных звеньев. Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков. Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики. При этом асимптотическую ЛАЧХ можно легко построить вручную.

Рассмотрим звено второго порядка с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{k(T_2 s - 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}.$$

Здесь $T_i (i = 1,\ldots 3)$ — положительные постоянные времени. Для определенности примем $T_1 > T_2 > T_3$.

Представим передаточную функцию в виде произведения:

$$W(s) = k \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot (T_2 s - 1) \cdot \frac{1}{T_3 s + 1}.$$

Таким образом, это звено представляет собой последовательное соединение усилителя, двух апериодических звеньев и усилителя с дифференцированием (его передаточная функция $T_2 s - 1$).

Как следует из свойств ЛАФЧХ, для построения ЛАЧХ системы с передаточной функцией $W(s)$ достаточно сложить ЛАЧХ всех ее сомножителей.

На низких частотах, до первой *сопрягающей частоты* $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}$, «работает» только усилитель, и асимптотическая ЛАЧХ идет на постоянном уровне $20\lg k$ (рис. 4).

Сопрягающая частота (*частота сопряжения*) — частота, на которой происходит сопряжение низкочастотной и высокочастотной асимптотических составляющих ЛАЧХ.

Начиная с частоты $\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}$ первое апериодическое звена дает наклон ЛАЧХ -20 дБ/дек, а с частоты $\omega_{c2} = \frac{1}{T_2}$ звено $T_2 s - 1$ восстанавливает нулевой наклон.

На частотах выше $\omega_{c3} = \dfrac{1}{T_3}$ включается второе апериодическое звено, которое определяет наклон -20 дБ/дек оставшейся высокочастотной части ЛАЧХ.

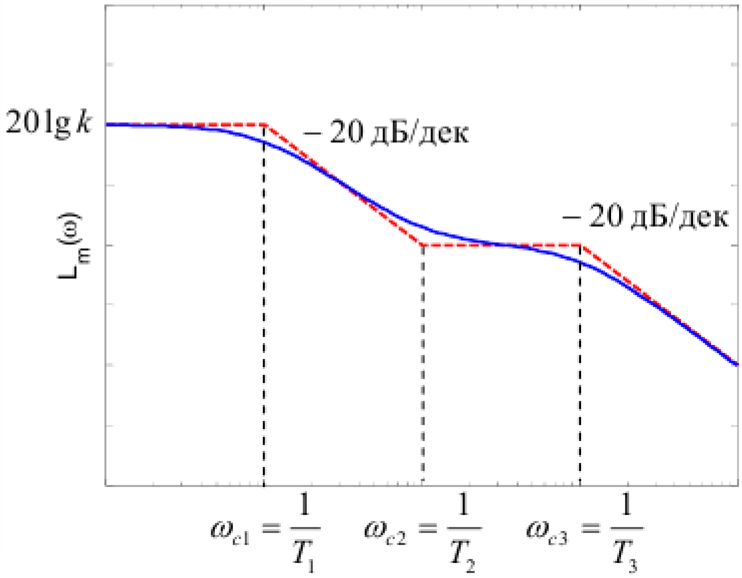


Рис. 4.

Для построения фазовой характеристики желательно использовать компьютерные программы. Однако принцип остается тот же, что и для ЛАЧХ: полная фазовая характеристика равна сумме фазовых характеристик отдельных звеньев, входящих в произведение.

Лекция № 5

Типовые динамические звенья. Эквивалентные преобразования структурных схем

1. Типовые позиционные динамические звенья 1-го и 2-го порядков

2. Типовые интегрирующие звенья и дифференцирующие звенья

3. Эквивалентные преобразования структурных схем

1. Типовые позиционные динамические звенья 1-го и 2-го порядков

Позиционные динамические звенья 1-го порядка

Пропорциональное звено (*усилительное*, *безинерционное*). В ответ на единичное ступенчатое воздействие сигнал на выходе мгновенно достигает величины в k раз большей, чем на входе и сохраняет это значение. При $k = 1$ звено никак себя не проявляет, а при $k = -1$ — инвертирует входной сигнал.

Уравнение, описывающее звено:

$$x(t) = ku(t),$$

где k — коэффициент усиления; $x(t)$ — выходной сигнал звена; $u(t)$ — входной сигнал звена.

Передаточная функция:

$$W(s) = k.$$

Примеры пропорциональных звеньев:

— все безынерционные усилители, в частности операционные без емкости и индуктивности;

— делитель напряжения;

— рычажные и зубчатые передачи.

Апериодическое звено 1-го порядка (*инерционное*). Переходная характеристика имеет вид экспоненты, по которой можно определить передаточный коэффициент k, равный установившемуся значению переходного процесса $h(t)$, и постоянную времени T по времени t, соответствующему точке пересечения касательной к кривой в начале координат с ее асимптотой.

Дифференциальное уравнение:

$$T\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=ku(t).$$

Передаточная функция:

$$W(s)=\frac{k}{Ts+1}.$$

Примеры апериодических звеньев 1-го порядка:

— интегрирующая цепь для высоких частот;

— генератор постоянного тока после линеаризации;

— двигатели постоянного и переменного тока (вход — напряжение якоря двигателя постоянного тока или напряжение управления двухфазного двигателя, выход — угловая скорость);

— операционный усилитель.

В табл. 1 приведены переходные процессы, а в табл. 2 частотные характеристики позиционных динамических звеньев 1-го порядка.

Таблица 1

Переходные процессы позиционных динамических звеньев 1-го порядка

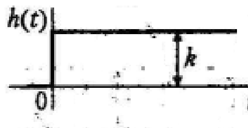
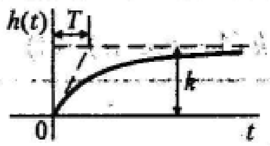
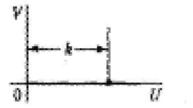
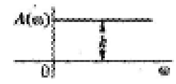
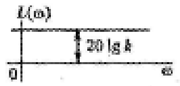
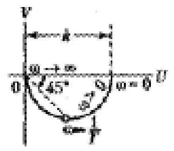
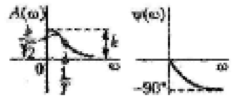
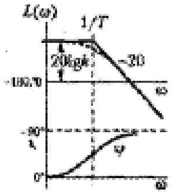
Тип звена и его передаточная функция	Переходная функция $h(t)$
Безынерционное $W(p) = k$	 $h(t) = k$
Апериодическое 1-го порядка $W(p) = k/1+Tp$	 $h(t)=k\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right).$

Таблица 2

Частотные характеристики позиционных динамических звеньев 1-го порядка

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Безынерционное $W(j\omega) = k$		 $A(\omega) = k,\ \psi = 0$	
Апериодическое 1-го порядка $W(j\omega) = \dfrac{k}{1 + j\omega T}$		 $A(\omega) = \dfrac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}},\quad \psi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega T$	

Позиционные динамические звенья 2-го порядка

Общее дифференциальное уравнение:

$$T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = ku(t),$$

где ξ — степень затухания.

Передаточная функция звеньев:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}.$$

Влияние ξ на характер переходного процесса:

$\xi \geq 1$ — апериодическое звено 2-го порядка;

$0<\xi<1$ — колебательное звено;

$\xi=0$ — консервативное звено;

$-1<\xi<0$ — незатухающее колебательное звено.

Примеры позиционных звеньев 2-го порядка:

— автогенератор гармонических колебаний (консервативное звено);

— цепь *RLC*.

В табл. 3 приведены переходные процессы, а в табл. 4 частотные характеристики позиционных динамических звеньев 2-го порядка.

Таблица 3

Переходные процессы позиционных динамических звеньев 2-го порядка

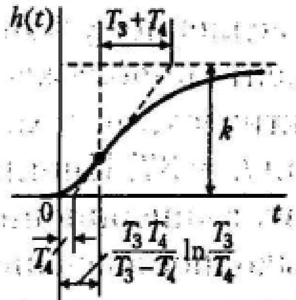
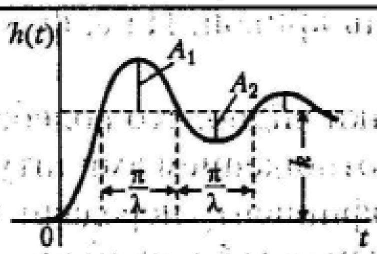
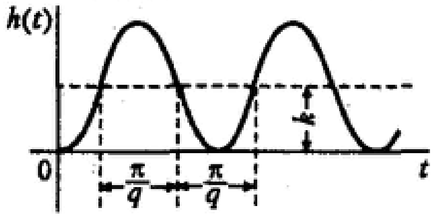
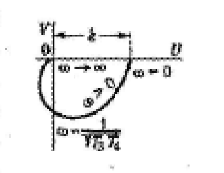
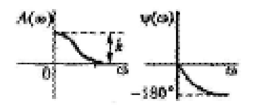
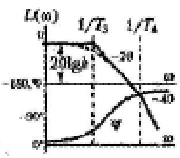
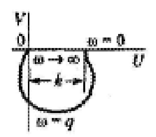
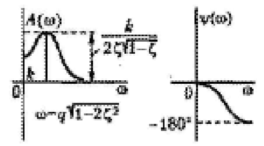
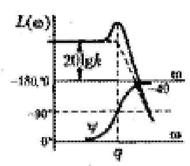
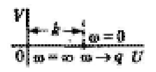
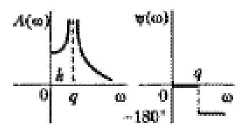
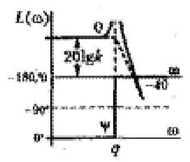
Апериодическое 2-го порядка $W(p)=\frac{k}{1+T_1p+T_2^2p^2}=\frac{k}{(1+T_3p)(1+T_4p)}$; $T_{3,4}=\frac{T_1}{2}\pm\sqrt{\frac{T_1^2}{4}-T_2^2}$	 $h(t)=k\left(1-\frac{T_3}{T_3-T_4}e^{-\frac{t}{T_3}}+\frac{T_4}{T_3-T_4}e^{-\frac{t}{T_4}}\right)\cdot 1(t)$
Колебательное $W(p)=\frac{k}{1+2\zeta Tp+T^2p^2}$	 $\lambda=\frac{1}{T}\sqrt{1-\zeta^2}$; $\gamma=\frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{A_1}{A_2}$;
Консервативное $W(p)=\frac{k}{1+T^2p^2}=\frac{k}{1+\frac{p^2}{q^2}}$; $q=\frac{1}{T}$	 $h(t)=k\,(1-\cos qt)$

Таблица 4

Частотные характеристики позиционных динамических звеньев 2-го порядка

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Апериодическое 2-го порядка $W(j\omega)=\frac{k}{(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4)}$		 $A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T_3^2}\sqrt{1+\omega^2T_4^2}}$, $\psi(\omega)=-\mathrm{arctg}\,\omega T_3-\mathrm{arctg}\,\omega T_4$	
Колебательное $W(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega 2\zeta T-\omega^2T^2}=$ $=\frac{k}{1+j\frac{\omega^2\zeta}{q}-\frac{\omega^2}{q^2}}$		 $A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}}$; $\psi(\omega)=-\mathrm{arctg}\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}$	
Консервативные $W(j\omega)=\frac{k}{1-\omega^2T^2}=\frac{k}{1-\frac{\omega^2}{q^2}}$		 $A(\omega)=\frac{k}{\lvert 1-\omega^2T^2\rvert}$; $\psi=0°$ при $0<\omega<q$; $\psi=-180°$ при $\omega>q$	

2. Типовые интегрирующие звенья и дифференцирующие звенья

Интегрирующие звенья

Идеальное интегрирующее звено. При $k=1$ звено представляет собой «чистый» интегратор. Введение его в систему превращает ее в астатическую, то есть ликвидирует статическую ошибку.

Дифференциальное уравнение:

$$x(t)=k\int u(t)dt \text{ или } \frac{dx(t)}{dt}=ku(t).$$

Передаточная функция:

$$W(s)=\frac{k}{s}.$$

Интегрирующее звено с замедлением. Дифференциальное уравнение:

$$T\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}=ku(t).$$

Передаточная функция:

$$W(s)=\frac{k}{s(Ts+1)}.$$

***Примеры интегрирующих звеньев*:**

— интегрирующий операционный усилитель;

— вал любого двигателя является интегрирующим звеном, если входной величиной считать угловую скорость, а выходной — угол поворота.

Изодромное звено. Дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ku(t) + kT\frac{du(t)}{dt}, \quad sx = ku(1+Ts).$$

Передаточная функция такого звена:

$$W(s) = \left(\frac{k}{s}\right)(Ts+1).$$

Переходная характеристика:

$$h(t) = k(t+T).$$

В табл. 1 приведены переходные процессы, а в табл. 2 частотные характеристики интегрирующих звеньев.

Таблица 1

Переходные процессы интегрирующих звеньев

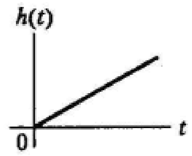
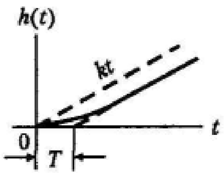
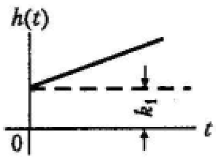
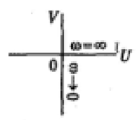
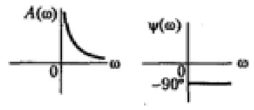
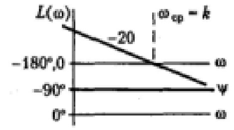
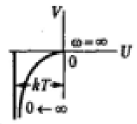
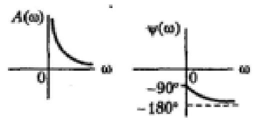
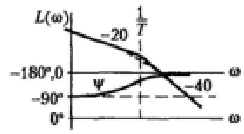
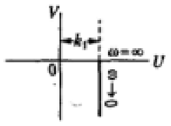
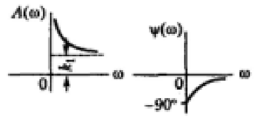
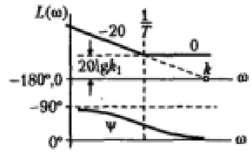
Тип звена и передаточная функция	Переходная функция
Идеальное $W(p)=\dfrac{k}{p}$	 $h(t)=kt$
С замедлением $W(p)=\dfrac{k}{p(1+Tp)}$	 $h(t)=k[t-T(1-e^{-t/T})]$
Изодромное $W(p)=\dfrac{k}{p}+k_1=\dfrac{k(1+Tp)}{p}$, $T=\dfrac{k_1}{k}$	 $h(t)=k(t+T)$

Таблица 2

Частотные характеристики интегрирующих звеньев

Тип звена и частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Идеальное $W(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega}$			
Интегрирующее с замедлением $W(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega(1+j\omega T)}$			
Изодромное $W(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega}+k_1=\dfrac{k(1+j\omega T)}{j\omega}$, $T=\dfrac{k_1}{k}$			

Дифференцирующие звенья

Идеальное дифференцирующее звено. Идеальное дифференцирующее звено реализовать невозможно, так как величина всплеска выходной величины при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия всегда ограничена (производная ступенчатой функции — бесконечный импульс, который реализовать невозможно). Дифференциальное уравнение:

$$x(t)=k\frac{du(t)}{dt}.$$

Передаточная функция:

$$W(s)=ks.$$

Примеры дифференцирующих звеньев:

— операционный усилитель;

— тахогенератор. Его входная величина α — угол поворота, выходная величина ЭДС $e=k\dfrac{d\alpha}{dt}$;

— индуктивность;

— емкость.

Дифференцирующее звено с замедлением. На практике используют реальные дифференцирующие звенья, осуществляющие приближенное дифференцирование входного сигнала. При подаче на вход единичного ступенчатого воздействия выходная величина оказывается ограничена по величине и растянута во времени. По переходной характеристике, имеющей вид экспоненты, можно определить коэффициент передачи k и постоянную времени T.

Дифференциальное уравнение:

$$T\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=k\frac{du(t)}{dt}.$$

Передаточная функция звена:

$$W(s)=\frac{ks}{Ts+1}.$$

Примеры дифференцирующих звеньев с замедлением:

— дифференцирующая цепь;

— операционный усилитель;

— трансформатор;

— гидромеханическое устройство (x и y — перемещения цилиндра и поршня соответственно).

В табл. 3 приведены переходные процессы, а в табл. 4 дифференцирующих звеньев.

Таблица 3

Переходные процессы дифференцирующих звеньев

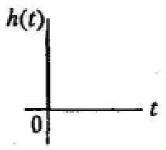
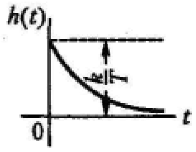
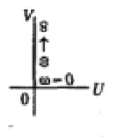
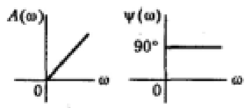
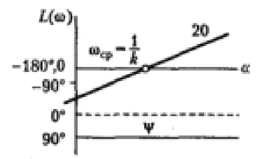
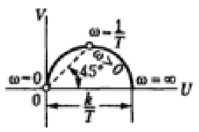
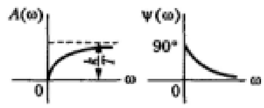
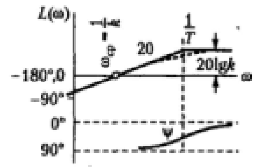
Тип звена и его передаточная функция	**Переходная функция**
Идеальное дифференцирующее $W(p)=kp$	 $h(t)=k\delta(t)$
Дифференцирующее с замедлением $W(p)=\dfrac{kp}{1+Tp}$	 $h(t)=\dfrac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$

Таблица 3

Частотные характеристики дифференцирующих звеньев

Тип звена и его частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
Идеальное дифференцирующее $W(j\omega)=kj\omega$			
Дифференцирующее с замедлением $W(j\omega)=\dfrac{kj\omega}{1+j\omega T}$			

3. Эквивалентные преобразования структурных схем

Структурная схема системы автоматического управления строится из элементарных динамических звеньев. Но несколько элементарных звеньев могут быть заменены одним звеном со сложной передаточной функцией. Для этого существуют *правила эквивалентного преобразования структурных схем*.

1. *Последовательное соединение* — выходная величина предшествующего звена подается на вход последующего (рис. 1). При этом можно записать:

$$y_1=W_1y_0,\; y_2=W_2y_1,\ldots,y_n=W_ny_{n-1},$$

$$y_n=W_1W_2\ldots W_ny_0=W_{\text{экв}}y_0.$$

где $W_{\text{экв}}=W_1W_2\ldots W_n=\prod\limits_{i=1}^{n}W_i$.

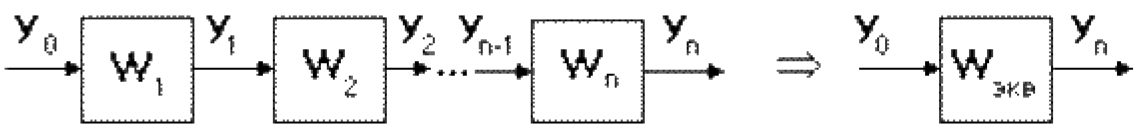


Рис. 1. Последовательное соединение звеньев

То есть цепочка последовательно соединенных звеньев преобразуется в эквивалентное звено с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций отдельных звеньев.

2. *Параллельное соединение* — на вход каждого звена подается один и тот же сигнал, а выходные сигналы складываются (рис. 2). Тогда:

$$y=y_1+y_2+\ldots+y_n=(W_1+W_2+\ldots+W_n)y_0=W_{\text{экв}}y_0,$$

где $W_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{n} W_i$.

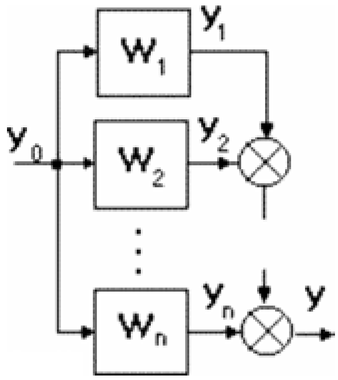


Рис. 2. Параллельное соединение звеньев

То есть цепочка звеньев, соединенных параллельно, преобразуется в звено с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций отдельных звеньев.

3. *Обратная связь* с передаточной функцией обратной связи $W_{\text{ос}}$ (рис. 3, *а*). При этом для отрицательной обратной связи:

$$y = W_n u,\ \ y_1 = W_{\text{ос}} y,\ \ u = y_0 - y_1,$$

следовательно:

$$y = W_n y_0 - W_n y_1 = W_n y_0 - W_n W_{\text{ос}} y,$$
$$y(1 + W_n W_{\text{ос}}) = W_n y_0,$$
$$y = W_{\text{экв}} y_0.$$

где $W_{\text{экв}} = \dfrac{W_n}{1 + W_n W_{\text{ос}}}$.

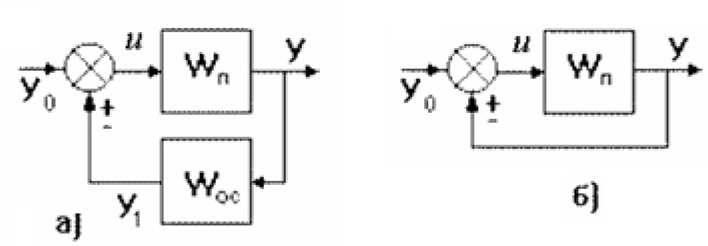


Рис. 3. Обратная связь

Аналогично: $W_{\text{экв}} = \dfrac{W_n}{1 - W_n W_{\text{ос}}}$ — для положительной обратной связи.

Если $W_{\text{ос}} = 1$ (рис. 3, *б*), то обратная связь называется *единичной*, тогда $W_{\text{экв}} = \dfrac{W_n}{1 \pm W_n}$.

Обычно в обратной связи находится датчик, который обладает намного меньшей инерционностью по сравнению с объектом (рис. 4, *а*). Иначе говоря, полоса пропускания датчика много больше полосы пропускания объекта. По этой причине датчик может быть смоделирован в виде идеального коэффициента усиления, который обозначим $k_{\text{ос}}$ (рис. 4, *б*). Тогда передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид:

$$W_{\text{экв}} = \frac{W_n}{1 \pm k_{\text{ос}} W_n}.$$

На рис. 4, *в* приведена структурная схема системы с единичной обратной связью соответствующая схеме на рис. 4, *б* с неединичной обратной связью.

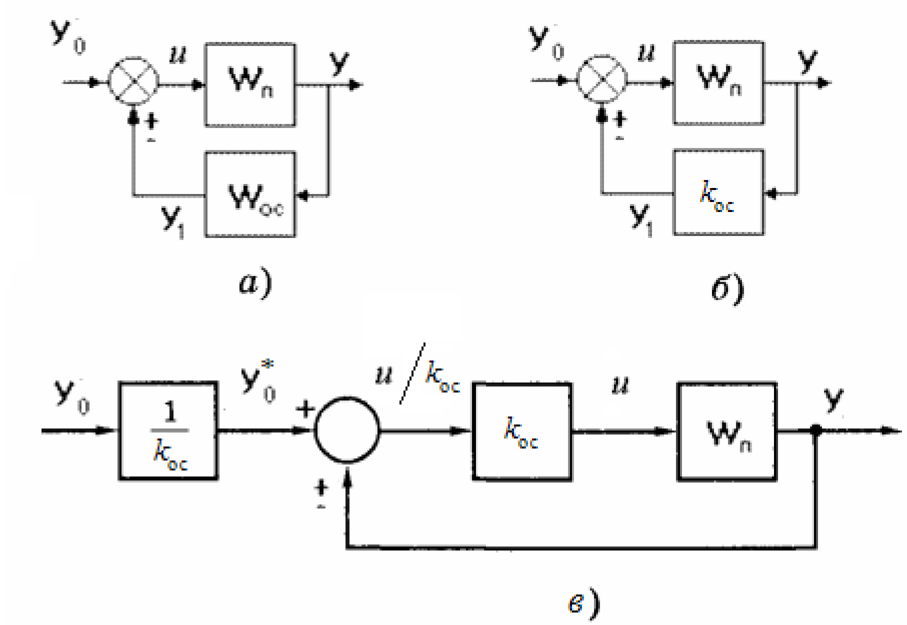


Рис. 4. Переход от системы с неединичной обратной связью к системе с единичной обратной связью

4. *Передаточная функция по возмущающему воздействию* (рис. 5).

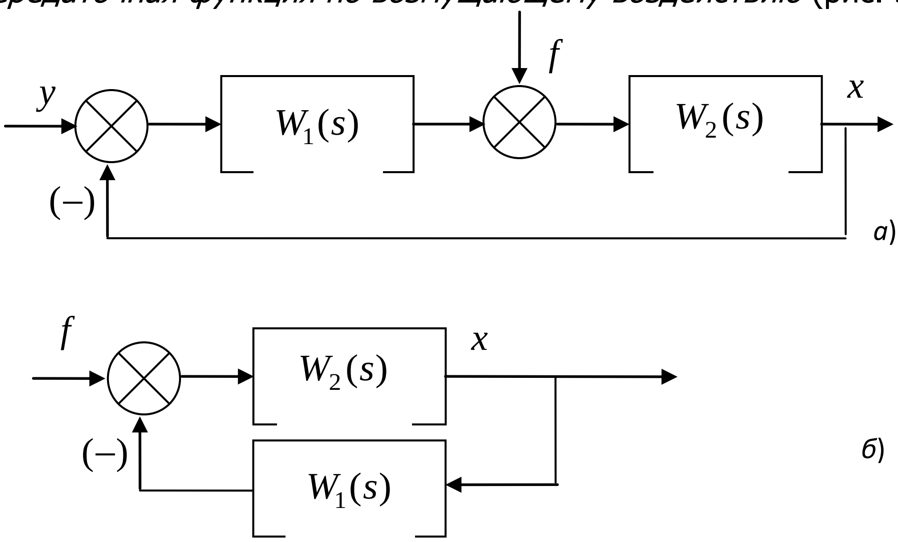


Рис. 5. Определение передаточной функции по возмущению f

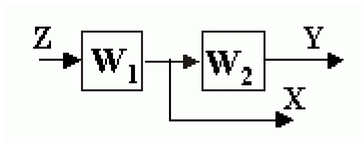
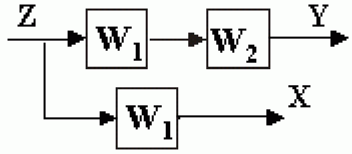
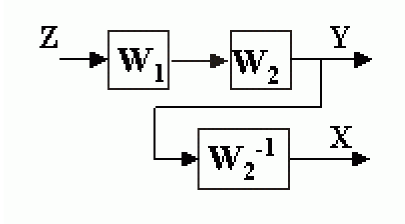
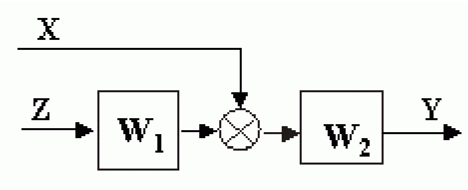
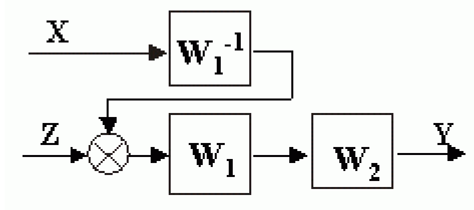
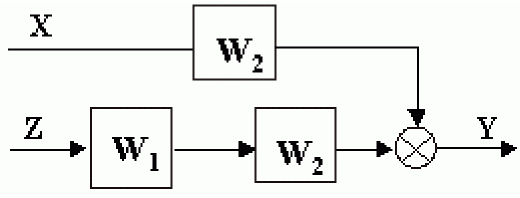
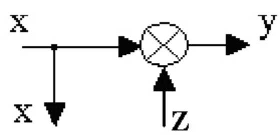
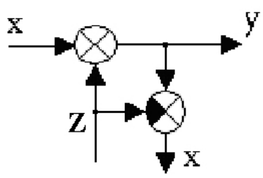
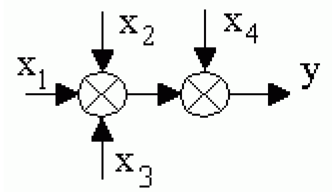
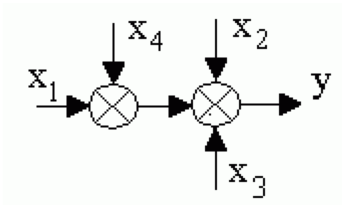
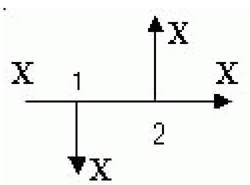
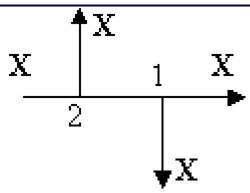
Передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию *y*: $W^{y}_{\text{раз}}(s) = \dfrac{X(s)}{Y(s)} = W_1(s)W_2(s)$, передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию *f*: $W^{f}_{\text{раз}}(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = W_2(s)$.

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию *f* (рис. 5, *б*): $W^{f}_{\text{зам}}(s) = \dfrac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \dfrac{W^{f}_{\text{раз}}(s)}{1 + W^{y}_{\text{раз}}(s)}$.

Дополнительные правила эквивалентного преобразования структурных схем приведены в табл. 1.

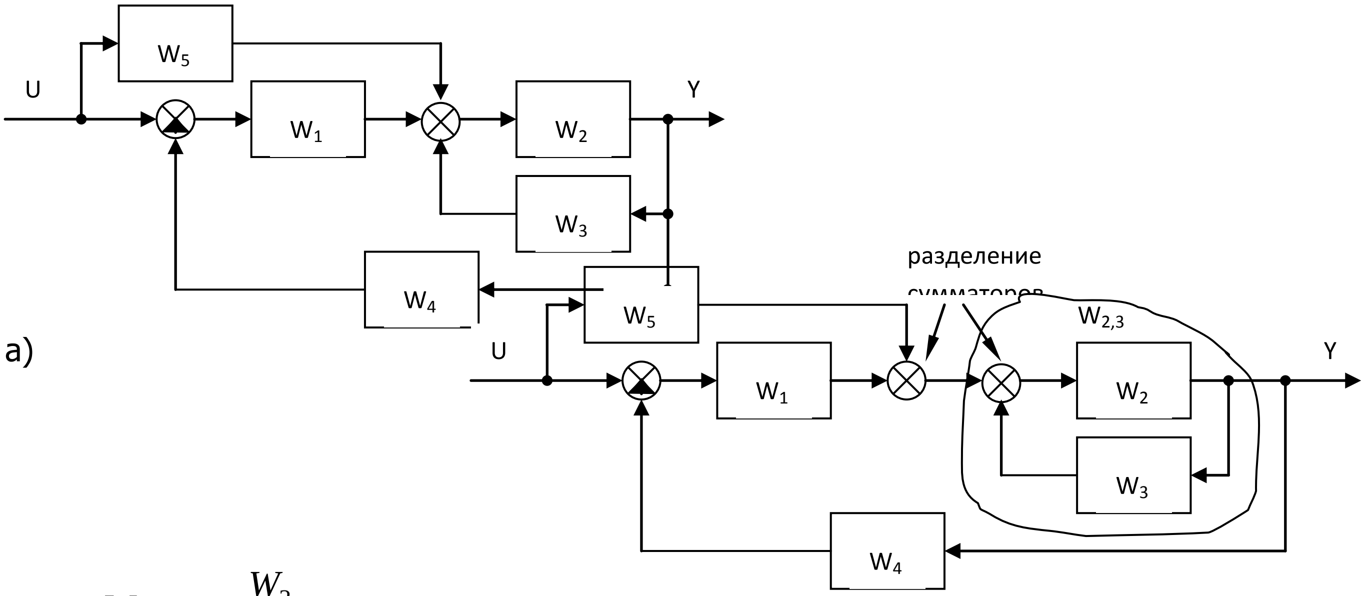
Таблица 1

Правила эквивалентного преобразования структурных схем

Преобразование	**Структурная схема**	
	Исходная	Эквивалентная
Перенос узла через элемент	 $X = Z \cdot W_1$ $Y = Z \cdot W_1 \cdot W_2$	 
Перенос сумматора через элемент	 $Y = (Z \cdot W_1 + X) \cdot W_2$	 $Y = (Z + X \cdot W_1^{-1}) \cdot W_1 \cdot W_2$  $Y = Z \cdot W_1 \cdot W_2 + X \cdot W_2$
Перемена мест узла и сумматора	 $Y = X + Z$	 $X = Y - Z$
Перенос сумматора через сумматор	 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$	
Перенос узла через узел		

Пример 1. Определить передаточную функцию системы заданной структуры путем эквивалентных преобразований к одному звену.

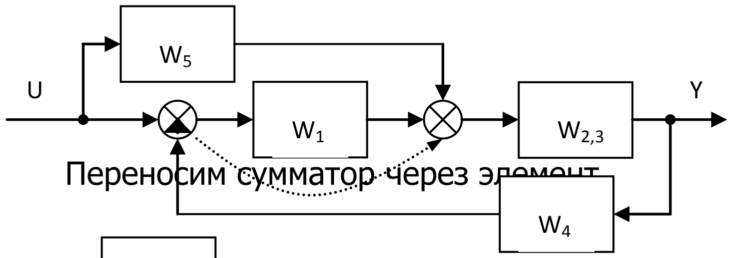
Исходная структурная схема:



а)

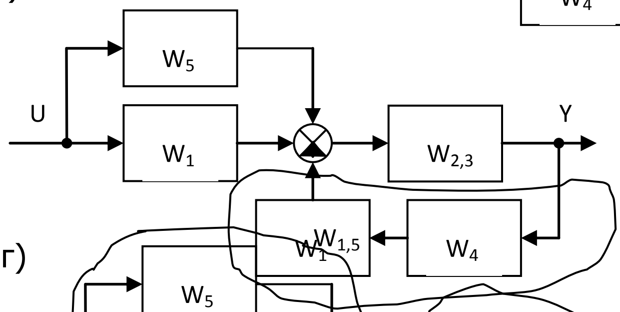
$$W_{2,3}=\frac{W_2}{1-W_2W_3}$$

б)

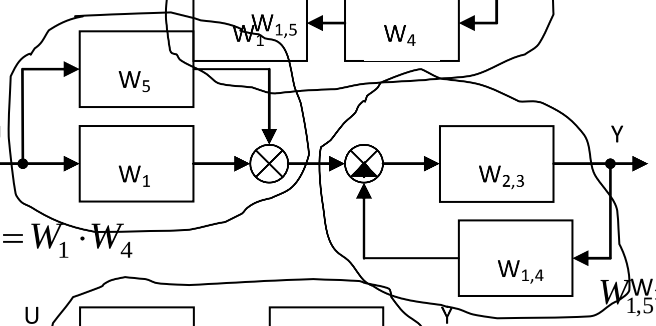


Переносим сумматор через элемент

в)



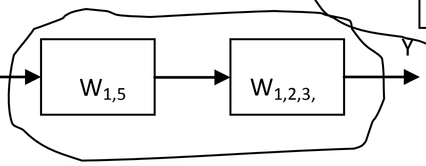
г)



$$W_{1,4}=W_1\cdot W_4$$

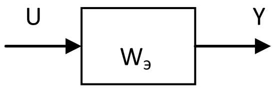
$$W_{1,5}=W_1+W_5$$

д)



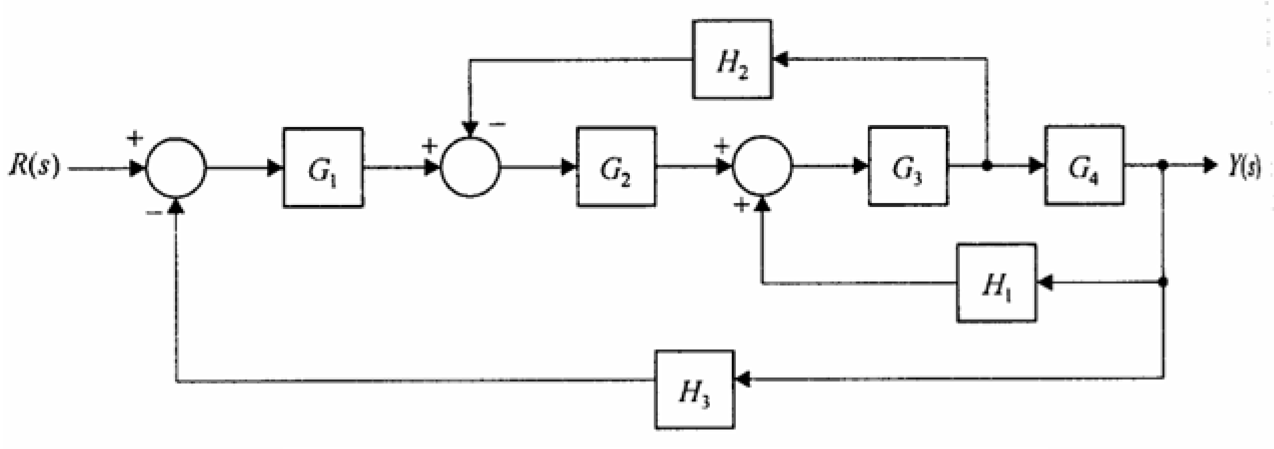
$$W_{1,2,3,4}=\frac{W_{2,3}}{1+W_{2,3}\cdot W_{1,4}}$$

е)

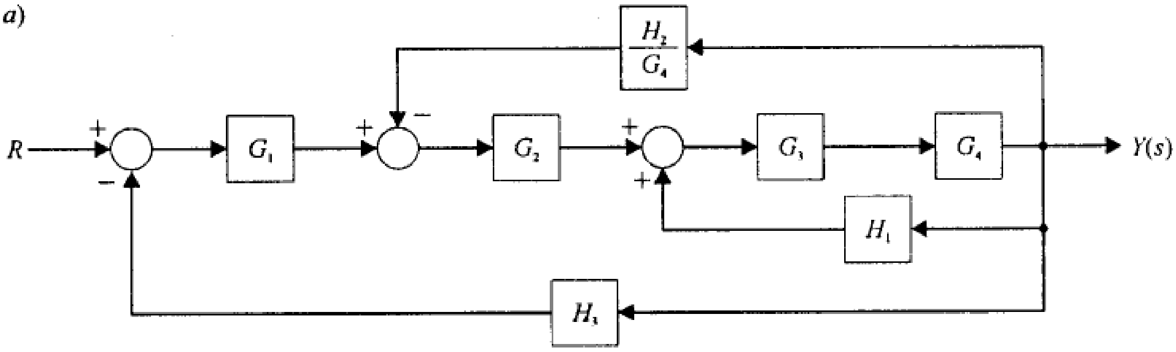


$$W_э=W_{1,5}\cdot W_{1,2,3,4}$$

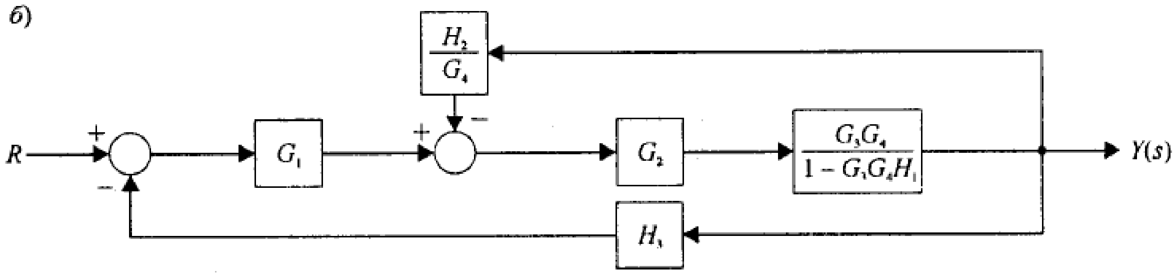
Пример 2. Упростить структурную схему.



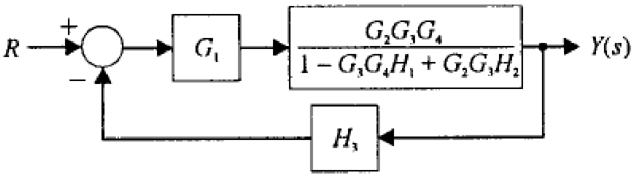
а)



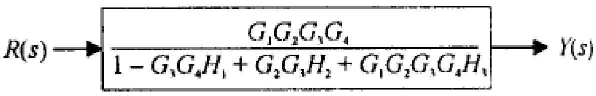
б)



в)



г)



Пример 3.

Преобразовать структурную схему (рис. 7) и записать передаточную функцию. Считается, что известны передаточные функции отдельных элементов и входной сигнал.

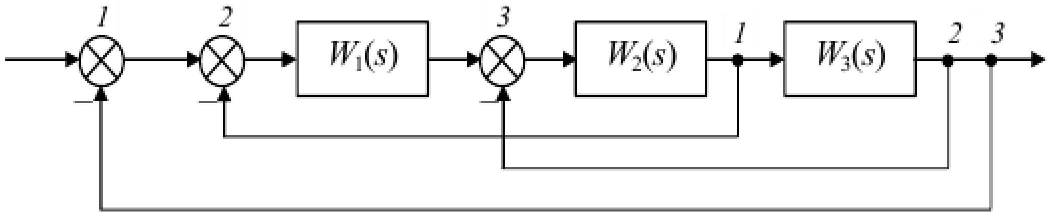


Рис. 7 Структурная схема

Для записи передаточной функции сложной структурной схемы ее необходимо преобразовать в соответствии с правилами преобразования структурных схем. Для того чтобы развязать перекрестные связи в заданной структурной схеме, перенесем узел *1* через звено с передаточной функцией $W_3(s)$ и через узел *2* в соответствии с правилами преобразования структурных схем. В результате проведенных преобразований получаем структурную схему (рис. 8), в которой четко прослеживаются основные типы соединений: последовательное соединение и вложенные друг в друга соединения с обратной связью.

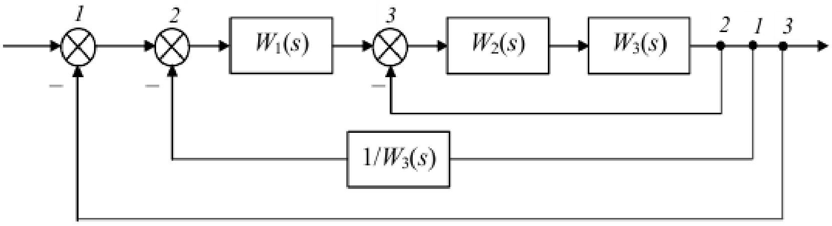


Рис. 8 Преобразованная структурная схема

Записывая последовательно передаточные функции отдельных элементов схемы, придем к выражению передаточной функции всей схемы:

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s) + W_2(s)W_3(s) + W_1(s)W_2(s)W_3(s)}.$$

Лекция № 6
Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний)

1. Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний)

2. Методы решения уравнений состояния

3. Связь передаточной функции и модели системы в переменных состояния

1. Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний)

Модель в переменных состояния (*модель в пространстве состояний*) имеет вид дифференциальных уравнений, но записанных в специальной форме — как система уравнений первого порядка. Обычно модель в переменных состояния представляют в *векторно-матричной форме*.

Смысл модели в переменных состояния заключается в том, что она сохраняет соотношение между входом и выходом системы (т. е. передаточную функцию), но в то же время позволяет перейти от одного дифференциального уравнения n-го порядка к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка. Преимущество такого представления в том, что кроме двух внешних переменных (входной и выходной), в модели отражаются и все внутренние переменные системы. Дополнительными аргументами в пользу моделирования системы в переменных состояния являются следующие:

— модель в переменных состояния для системы высокого порядка позволяет легко решать задачи анализа и синтеза с помощью цифрового компьютера, тогда как использование для тех же целей передаточной функции может оказаться безуспешным из-за трудностей вычислительного характера;

— имея модель в переменных состояния, мы получаем больше информации об объекте управления (о его внутренних переменных); следовательно, процедура проектирования системы управления может быть выполнена более эффективно, нежели при использовании передаточной функции;

— почти все методы проектирования систем управления, дающие «наилучшее» решение, основаны на использовании моделей в переменных состояния. Под «наилучшей» системой мы подразумеваем такую систему, в которой минимизируется (или максимизируется) значение некоторой функции, принятой за критерий качества;

— при имитационном моделировании (решение дифференциальных уравнений на цифровом компьютере) система должна быть представлена в виде своей модели в переменных состояния.

Состояние системы в любой момент времени t_0 — это количество информации, которое вместе со всеми входными переменными однозначно определяет поведение системы при всех $t \ge t_0$.

Уравнения состояния линейной непрерывной системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ — производная по времени от вектора $x(t)$; $x(t)$ — вектор состояния размерности $(n \times 1)$, компонентами которого являются переменные состояния системы n-го порядка; A — матрица коэффициентов системы размерности $(n \times n)$; B — матрица входа размерности $(n \times r)$; $u(t)$ — вектор входа размерности $(r \times 1)$, компонентами которого являются входные переменные системы; $y(t)$ — вектор выхода размерности $(p \times 1)$, компонентами которого являются выходные переменные системы; C — матрица выхода размерности $(p \times n)$; D — матрица обхода, определяющая прямую зависимость выхода от входа размерности $(n \times r)$.

Все векторы (сигналы) можно представить в развернутом виде:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \; x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{pmatrix}, \; y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{pmatrix}.$$

Первое из уравнений системы (1) — это матричное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Оно называется *уравнением «вход-состояние»*, а решением его является вектор состояния $x(t)$.

Второе уравнение системы (1) называется *уравнением «вход-состояние-выход»*. Смысл такого названия в том, что оно позволяет определить выход $y(t)$ по известным вектору входа $u(t)$ и вектору состояния $x(t)$.

Матрица D обычно равна нулю, т. к. в физических системах во всех каналах между входами и выходами, как правило, присутствуют динамические звенья. Если матрица D отлична от нуля, это указывает на то, что, по крайней мере, один прямой путь от входов к выходам представлен обычным коэффициентом передачи.

Левая часть дифференциальных уравнений относительно $\dot{x}(t)$ всегда представлена только первыми производными переменных состояния, правая же часть не должна содержать никаких производных. В уравнении относительно выхода $y(t)$ также не должно быть никаких производных.

Уравнения состояния (1) записаны в предположении, что у системы имеется несколько входных и выходных переменных. Такие системы принято называть *многомерными*. Если у системы имеется только один вход, то матрица B имеет вид столбца, а вектор $u(t)$ превращается в скалярную переменную. Если у системы только один выход, то вектор $y(t)$ превращается в скалярную переменную, а матрица C принимает вид строки.

Пример 1. Составить уравнения состояния для многомерной системы, описываемой дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{y}_1 + k_1\dot{y}_1 + k_2 y_1 = u_1 + k_3 u_2,$$

$$\dot{y}_2 + k_4 y_2 + k_5\dot{y}_1 = k_6 u_1,$$

где u_1, u_2 — входные переменные, y_1, y_2 — выходные переменные. Зависимость переменных от времени для удобства опущена. За переменные состояния мы можем принять выходы системы и, если понадобится, их производные:

$$x_1 = y_1,$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1,$$

$$x_3 = y_2,$$

$$\dot{x}_3 = \dot{y}_2.$$

Тогда исходную систему уравнений можно представить в виде:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 x_1 - k_1 x_2 + u_1 + k_3 u_2,$$

$$\dot{x}_3 = -k_5 x_2 - k_4 x_3 + k_6 u_1.$$

К ним добавляются уравнения для выходных переменных:

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_3.$$

Эти уравнения можно записать в векторно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_3 \\ k_6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Представьте себе, что уравнения, приведенные в рассмотренном примере, представляют собой модель механической системы с линейным перемещением. Допустим, что y_1, y_2 — это текущее положение некоторых элементов системы. Тогда $x_2 = \dot{y}_1$, есть скорость движения системы. Следовательно, все переменные состояния соответствуют реальным физическим переменным системы: x_1, x_3 —

это перемещения, а x_2 — скорость. Вообще говоря, желательно (но не обязательно), чтобы в качестве переменных состояния выступали реальные физические переменные.

2. Методы решения уравнений состояния

Метод преобразования Лапласа. Для решения уравнений $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ воспользуемся преобразованием Лапласа. В матричной форме можно записать:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s),$$

где $x(0) = \left(x_1(0) \quad x_2(0) \quad \ldots \quad x_n(0)\right)^T$.

Решим это уравнение относительно $X(s)$:

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s). \quad (1)$$

Теперь необходимо выделить множитель $X(s)$ в левой части уравнения. Для этого сначала представим член $sX(s)$ как $sEX(s)$, где E — единичная матрица. Тогда

$$sEX(s) - AX(s) = (sE - A)X(s) = x(0) + BU(s). \quad (2)$$

Этот дополнительный шаг понадобился потому, что вычитание матрицы A из скалярной переменной s не определено; мы не можем выразить $X(s)$ непосредственно из (1). Из уравнения (2) получим:

$$X(s) = (sE - A)^{-1}x(0) + (sE - A)^{-1}BU(s), \quad (3)$$

а вектор состояния $x(t)$ будет обратным преобразованием Лапласа от $X(s)$.

Чтобы получить общее выражение для решения, введем понятие *переходной матрицы состояния* (*матрица перехода*):

$$\Phi(t) = L^{-1}\left\{(sE - A)^{-1}\right\}. \quad (4)$$

Эту матрицу называют также *фундаментальной матрицей*. Заметим, что для системы n-го порядка матрица перехода имеет размерность $(n \times n)$. Обратное преобразование Лапласа для матрицы определяется путем применения обратного преобразования Лапласа к каждому элементу этой матрицы.

Решение уравнений состояния можно получить несколько иным способом. Второе слагаемое в правой части уравнения (3) представляет собой произведение двух изображений по Лапласу. Поэтому обратное преобразование Лапласа для этого члена имеет вид интеграла свертки:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Сверткой двух функций называется определенный интеграл вида:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)d\tau.$$

Изображение по Лапласу свертки функции равно произведению изображений этих функций:

$$L\left\{\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s).$$

По теореме свертки это решение можно записать иначе:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau. \quad (5)$$

Мы видим, что решение состоит из двух слагаемых. Первое из них представляет собой свободное движение системы, возникающее только за счет начальных условий (при отсутствии входного сигнала). Второе слагаемое соответствует вынужденному движению системы, обусловленному входным воздействием (при этом начальные условия полагаются нулевыми).

Как следует из (5), центральную роль в решении уравнений состояния играет матрица перехода. Этот вид решения сопряжен с трудностями вычислительного характера, если только речь не идет о простейших системах.

Подводя итоги, можно сказать, что решение уравнений состояния получается либо с помощью преобразования Лапласа, либо с помощью комбинации этого преобразования и интеграла свертки. В любом случае процедура является длинной, отнимает много времени и может привести к появлению ошибок. Поэтому на практике следует отдать предпочтение анализу динамики системы с помощью моделирования.

Метод разложения в бесконечный ряд. Один из методов решения дифференциальных уравнений заключается в следующем. Считают, что решение имеет вид бесконечного ряда с неизвестными коэффициентами. Этот ряд подставляют в дифференциальное уравнение и таким образом определяют неизвестные коэффициенты. Воспользуемся данным методом для нахождения матрицы перехода. В предположении, что все входные переменные системы равны нулю, уравнения состояния принимают вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (6)$$

а их решение, на основании (5),

$$x(t) = \Phi(t)x(0).$$

Поскольку искомым является вектор $x(t)$, представим его в виде ряда:

$$x(t) = \left(K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots\right)x(0) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i t^i x(0) = \Phi(t)x(0), \quad (7)$$

где все матрицы K_i размерности $(n \times n)$ считаются неизвестными, а t — скалярная переменная (время).

Дифференцируя это выражение, получим:

$$\dot{x}(t) = \left(K_1 + 2K_2 t + 3K_3 t^2 + \ldots\right)x(0). \quad (8)$$

Подставим (7) и (8) в (6):

$$\left(K_1 + 2K_2 t + 3K_3 t^2 + \ldots\right)x(0) = A\left(K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots\right)x(0). \quad (9)$$

Далее выполним следующие операции. Сначала вычислим (9) при $t = 0$. Затем продифференцируем (9) и найдем результат при $t = 0$. Еще раз продифференцируем выражение и подставим $t = 0$. Повторяя эти действия, каждый раз будем получать уравнение относительно неизвестных матриц K_i. В итоге образуется система уравнений:

$$\begin{aligned} K_1 &= AK_0, \\ 2K_2 &= AK_1, \quad (10) \\ 3K_3 &= AK_2, \ldots \end{aligned}$$

Вычисление (7) при $t = 0$ дает результат $K_0 = E$. Тогда другие матрицы определяются из уравнений (10):

$$K_1 = A,$$

$$K_2 = \frac{A^2}{2!},$$

$$K_3 = \frac{A^3}{3!},\ldots$$

Следовательно, матрица перехода, представленная в (7) в виде бесконечного ряда, может быть записана как:

$$\varPhi(t) = E + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}t^n \quad (11)$$

Сравнивая это выражение с разложением в ряд Тейлора скалярной экспоненты:

$$e^{kt} = 1 + kt + \frac{k^2}{2!}t^2 + \frac{k^3}{3!}t^3 + \ldots,$$

приходим к выводу, что матрицу перехода можно представить как экспоненциальную функцию матрицы A:

$$\varPhi(t) = e^{At}. \quad (12)$$

Представление $\varPhi(t)$ в виде бесконечного ряда имеет преимущества, когда матрица перехода вычисляется на компьютере для нескольких значений времени t. Разложение в ряд также оказывается удобным при анализе цифровых систем управления.

3. Связь передаточной функции и модели системы в переменных состояния

Переход от передаточной функции к модели системы в переменных состояния. Пусть объект имеет передаточную функцию вида:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0},$$

где $m < n$.

Представим это выражение в виде произведения двух передаточных функций:

$$W(s) = \frac{1}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0), \quad (1)$$

Структурную схему этой системы можно представить в виде двух последовательно соединенных звеньев (рис. 1). Такому представлению соответствует модель в переменных состояния, которая называется *канонической формой*.

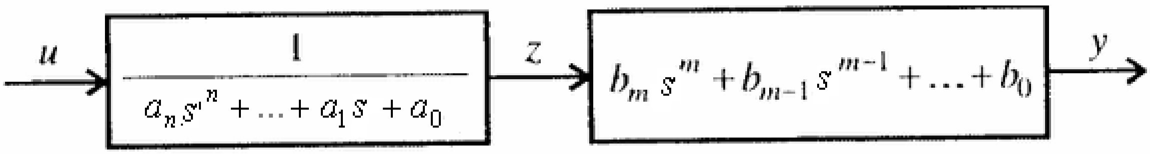


Рис. 1. Структурное представление системы (1)

Для каждого звена системы запишем соответствующее операторное уравнение:

$$\begin{cases}(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0) z = u, \\ (b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0) z = y.\end{cases}$$

В качестве переменных состояния примем z и ее производные до n-го порядка:

$$\begin{aligned} &x_1 = z, \\ &x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}, \\ &x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{z}, \\ &\ldots \\ &x_n = z^{(n-1)}, \\ &\dot{x}_n = z^{(n)}. \end{aligned}$$

Это позволяет записать дифференциальные уравнения состояния и уравнение выхода системы в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \ldots \\ \dot{x}_n = -\dfrac{1}{a_n}\left(a_{n-1}x_n + \ldots + a_1 x_2 + a_0 x_1\right) + \dfrac{u}{a_n}, \\ y = b_m x_{m+1} + \ldots + b_1 x_2 + b_0 x_1. \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \ldots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \dfrac{1}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times 1},$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{1\times n}.$$

Переход от модели в переменных состояния к передаточной функции системы. Для системы с одним входом и одним выходом уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ &y(t) = Cx(t). \end{aligned} \qquad (2)$$

Матрица D здесь отсутствует, потому что она обычно нулевая. Преобразование по Лапласу первого уравнения системы (2) при нулевых начальных условиях дает:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s).$$

Это уравнение можно привести к виду:

$$(sE - A)X(s) = BU(s),$$

и решить относительно $X(s)$:

$$X(s) = (sE - A)^{-1} BU(s). \text{ (3)}$$

Преобразуя по Лапласу второе уравнение из (2), получим:

$$Y(s) = CX(s). \text{ (4)}$$

Подстановка (3) в (4) дает:

$$Y(s) = C(sE - A)^{-1} BU(s) = W(s)U(s),$$

следовательно, передаточная функция системы равна:

$$W(s) = C(sE - A)^{-1} B = C\Phi(s)B.$$

Если $D \neq 0$, то передаточная функция имеет выражение:

$$W(s) = C(sE - A)^{-1} B + D.$$

Характеристическое уравнение системы можно найти, если известна матрица A в следующем виде:

$$D(s) = |sE - A|.$$

Для многомерных систем (систем с более чем одним входом и/или более чем одним выходом) $U(s)$ есть вектор размерности $(r \times 1)$, а $Y(s)$ — вектор размерности $(p \times 1)$. Все предыдущие рассуждения остаются в силе, но теперь $W(s)$ является матрицей размерности $(p \times r)$. Каждый из элементов матрицы $W(s)$ представляет собой передаточную функцию, связывающую вход системы с номером j с выходом с номером i: $W_{ij}(s) = \dfrac{Y_i(s)}{U_j(s)}$.

Лекция № 7
Алгебраические критерии устойчивости линейных непрерывных систем управления

1. Корневой критерий устойчивости

2. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Под *устойчивостью системы* понимается способность ее возвращаться к состоянию установившегося равновесия после снятия возмущения, нарушившего это равновесие. *Неустойчивая система* непрерывно удаляется от равновесного состояния или совершает вокруг него колебания с возрастающей амплитудой (рис. 1).

Рис. 1. Устойчивость систем

Виды устойчивости. *Устойчивость «вход-выход»*. Обычно для инженеров практиков в первую очередь важно, чтобы система не «пошла вразнос», то есть, чтобы управляемая величина не росла неограниченно при всех допустимых входных сигналах. Если это так, говорят, что система обладает устойчивостью «вход-выход» (при ограниченном входе выход также ограничен). Заметим, что при этом нас не интересует, как меняются внутренние переменные объекта, важен только вход и выход.

Рассмотрим ванну, которая наполняется водой из крана. Модель этой системы — интегрирующее звено. При постоянном (ограниченном по величине!) входном потоке уровень воды в ванне будет неограниченно увеличиваться (пока вода не польется через край), поэтому такая системе не обладает устойчивостью «вход-выход».

«Техническая» устойчивость. В отличие от устойчивости «вход-выход», понятие «техническая устойчивость» относится к автономной системе, у которой все входные сигналы равны нулю. *Положением равновесия* называют состояние системы, которая находится в покое, то есть, сигнал выхода $y(t)$ — постоянная величина, и все его производные равны нулю.

Систему выводят из положения равновесия и убирают все возмущения. Если при этом с течением времени (при $t \to \infty$) система возвращается в положение равновесия, она называется *устойчивой*. Если выходная координата остается ограниченной (не уходит в бесконечность), система называется *нейтрально устойчивой*, а если выход становится бесконечным — *неустойчивой*.

Если вернуться к примеру с ванной, становится понятно, что эта система — нейтрально устойчива, потому что уровень воды остается постоянным, когда мы перекроем кран. С одной стороны, уровень воды не возвращается к предыдущему значению, а с другой — не растет бесконечно (система не является неустойчивой).

Внутренняя (*математическая*) *устойчивость* означает, что не только выход, но и все внутренние переменные (переменные состояния) приближаются к своим значениям в положении равновесия.

Система автоматического управления может быть неустойчивой по двум причинам: неподходящий состав динамических звеньев и неподходящие значения параметров звеньев.

Правила, позволяющие судить об устойчивости системы, называются *критериями устойчивости*. Их можно разделить на *алгебраические* (основаны на составлении по характеристическому уравнению по определенным правилам алгебраических выражений, по которым можно судить об устойчивости системы управления) и *частотные* (основаны на исследовании частотных характеристик).

1. Корневой критерий устойчивости

Решение дифференциального уравнения ищется в виде:

$$y(t) = y_{\text{вын}}(t) + y_{\text{св}}(t).$$

Здесь $y_{\text{св}}(t)$ — *решение однородного дифференциального уравнения*, то есть уравнения с нулевой правой частью:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0.$$

Физически это означает, что все внешние воздействия сняты и система абсолютно свободна, ее движения определяются лишь собственной структурой. Поэтому решение данного уравнения называется *свободной составляющей общего решения*.

$y_{\text{вын}}(t)$ — *частное решение неоднородного дифференциального уравнения*, под которым понимается уравнение с ненулевой правой частью. Физически это означает, что к системе приложено внешнее воздействие $u(t)$. Поэтому вторая составляющая общего решения называется *вынужденной*. Она определяет вынужденный установившийся режим работы системы после окончания переходного процесса.

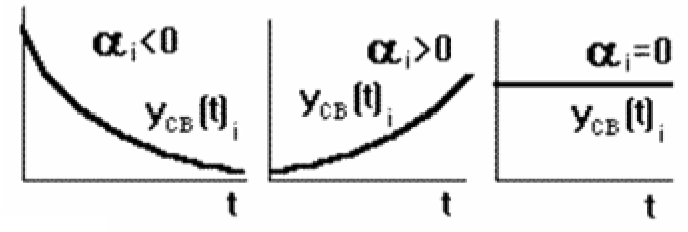
Свободная составляющая представляет собой сумму из n отдельных составляющих:

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t},$$

где s_i — корни характеристического уравнения.

Корни могут быть либо вещественными, либо комплексно сопряженными $s_i = \alpha_i + j\beta_i$. Постоянные интегрирования A_i определяются исходя из начальных условий, подставляя в общее решение значения u, y и их производные в моменты времени $t = 0$ и $t \to \infty$.

Каждому отрицательному вещественному корню соответствует экспоненциально затухающая во времени составляющая $y_{\text{св}}(t)_i$, каждому положительному — экспоненциально расходящаяся, каждому нулевому корню соответствует $y_{\text{св}}(t) = const$ (рис. 2).



$$\alpha := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t := 0, 0.1..2$$

$$y(t, \alpha) := e^{\alpha \cdot t}$$

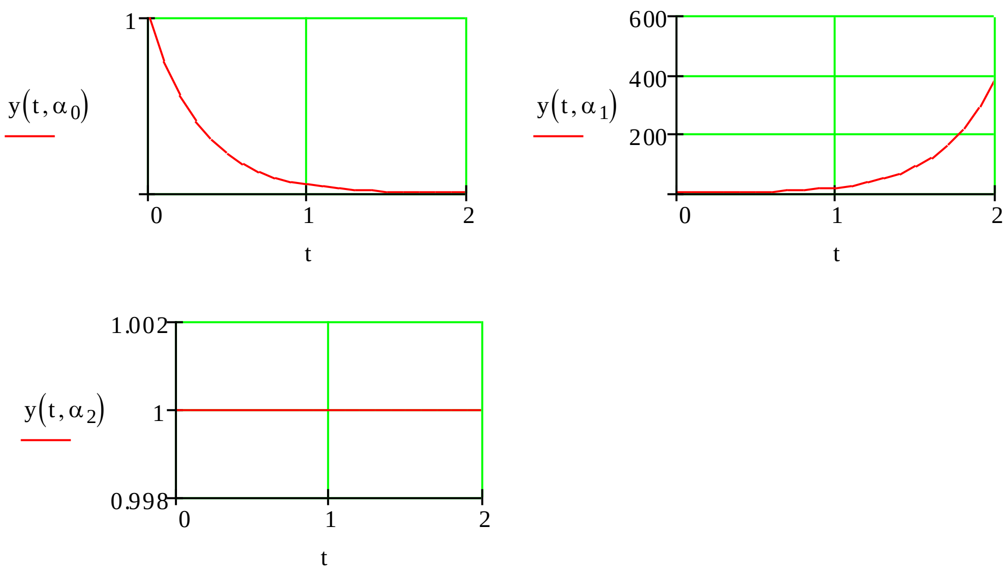
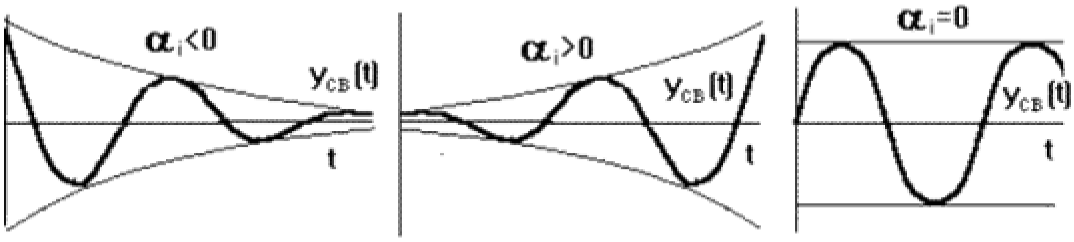


Рис. 2. Вид свободного решения уравнения при действительных корнях

Пара комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью определяет затухающие колебания, при положительной вещественной части — расходящиеся колебания, при нулевой — незатухающие (рис 3).

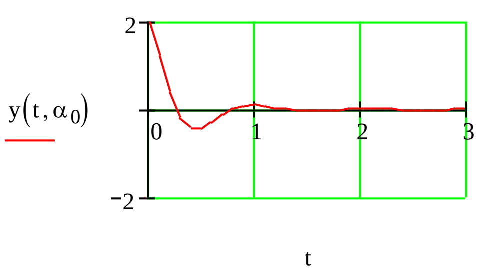


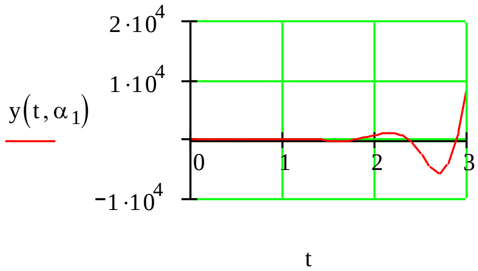
$$j := \sqrt{-1} \qquad \alpha := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta := 6$$

$$t := 0, 0.1 .. 3$$

$$y(t,\alpha) := e^{(\alpha + j\cdot\beta)\cdot t} + e^{(\alpha - j\cdot\beta)\cdot t}$$





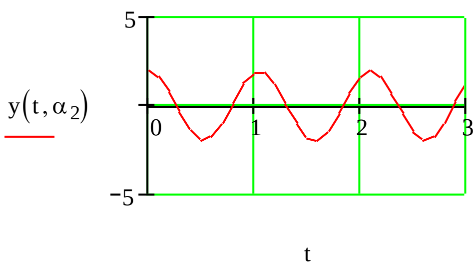


Рис. 3. Вид свободного решения уравнения при комплексно-сопряженных корнях

Так как после снятия возмущения $y_{\text{вын}}(t) = 0$, то устойчивость системы определяется только характером свободной составляющей $y_{\text{св}}(t)$. Поэтому *условие устойчивости систем по А.М. Ляпунову* формулируется так: в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики, должна стремиться к нулю, то есть затухать.

Тогда *корневой критерий устойчивости*: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (знаменателя передаточной функции замкнутой системы) имели отрицательные вещественные части (на комплексной плоскости были левыми). Если хотя бы один корень правый, то система неустойчива. Если один из корней равен нулю, а остальные левые, то система находится на *границе апериодической устойчивости*. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно-сопряженных корней, то система находится на *границе колебательной устойчивости*.

Для нахождения корней характеристического полинома $D(s)$ в Mathcad имеется встроенная функция **polyroots(v)**.

Вектор ν будет иметь вид:

$$v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$D(s) := T1 \cdot T2 \cdot s^3 + (T1 + T2) \cdot s^2 + (1 + k1 \cdot k2 \cdot k_p \cdot T_p) \cdot s + k1 \cdot k2 \cdot k_p$$

$$v(T_p, k_p) := \begin{pmatrix} k1 \cdot k2 \cdot k_p \\ 1 + k1 \cdot k2 \cdot k_p \cdot T_p \\ T1 + T2 \\ T1 \cdot T2 \end{pmatrix}$$

$$r := \mathrm{polyroots}(v(T_p, k_p))$$

$$r = \begin{pmatrix} -1.343 \\ -0.078 + 0.54i \\ -0.078 - 0.54i \end{pmatrix}$$

Вектор r содержит корни характеристического уравнения.

Необходимое условие устойчивости. Характеристическое уравнение системы с помощью теоремы Виета может быть записано в виде:

$$D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n(s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) = 0,$$

где s_i — корни уравнения.

Если система устойчива, значит все корни левые, то есть вещественные части всех корней отрицательны, что можно записать как $\alpha_i = -|\alpha_i| < 0$. Подставим их в уравнение:

$$a_n(s + |\alpha_1|)(s + |\alpha_2| - j\beta_2)(s + |\alpha_2| + j\beta_2)\ldots = 0.$$

Перемножая комплексно-сопряженные выражения, получим:

$$a_n(s + |\alpha_1|)(s^2 + 2s|\alpha_2| + |\alpha_2|^2 + \beta_2^2)\ldots = 0.$$

После раскрытия скобок получится выражение:

$$a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Так как в скобках нет ни одного отрицательного числа, то ни один из коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ не будет отрицательным. Поэтому *необходимым условием устойчивости системы автоматического управления* является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения: $a_0 > 0,\ a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$.

Для систем первого и второго порядков это условие одновременно является и *достаточным*. Однако для более высоких порядков положительность коэффициентов не гарантирует отрицательность корней характеристического полинома.

2. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пусть характеристическое уравнение имеет вид: $a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$.

Из коэффициентов характеристического уравнения строится *матрица Гурвица* по алгоритму:

— по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от a_{n-1} до a_0;

— в каждом столбце вниз от диагонали записывают коэффициенты при возрастающих степенях оператора s, вверх — при убывающих степенях s;

— на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Например, для системы 4-го порядка матрица Гурвица будет иметь вид:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Критерий Гурвица: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные определители матрицы Гурвица имели положительные значения:

$$\Delta_1 = \det[a_{n-1}] > 0,\ \Delta_2 = \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0,\ \dots,\ \Delta_n = \det[\Delta] > 0.$$

Если один из определителей равен нулю, то существует хотя бы один нулевой корень, т. е. система находится на границе устойчивости.

Критерий Гурвица применяют при $n \le 4$. При больших порядках возрастает число определителей, и процесс становится трудоемким. Имеется ряд модификаций данного критерия, расширяющие его возможности. *Недостаток критерия Гурвица* — малая наглядность. *Достоинство* — удобен для реализации на ЭВМ. Его часто используют для определения влияния одного из параметров системы управления на ее устойчивость.

Лекция № 8

Частотные критерии устойчивости линейных непрерывных систем управления

1. Критерий устойчивости Михайлова

2. Критерий устойчивости Найквиста

3. Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

4. Понятие запаса устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем по виду их частотных характеристик. Их *достоинство* в простой геометрической интерпретации, наглядности и в отсутствии ограничений на порядок дифференциального уравнения. К этой группе относятся критерии Михайлова, Найквиста, критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.

1. Критерий устойчивости Михайлова

Общей базой для частотных критериев устойчивости является *принцип аргумента*.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n(s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) = 0.$$

При изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ каждый сомножитель характеристического уравнения с устойчивым корнем дает поворот своей комплексной частотной характеристики на $+\dfrac{\pi}{2}$ (против часовой стрелке, положительное направление) (рис. 1, *а*).

С неустойчивым корнем на $-\dfrac{\pi}{2}$ (по часовой стрелке, отрицательное направление) (рис. 1, *б*).

Сомножители с корнями, имеющими нулевую вещественную часть не изменяют фазу своей характеристики.

А при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый сомножитель характеристического уравнения с устойчивым корнем дает поворот своей комплексной частотной характеристики на $+\pi$ (против часовой стрелке, положительное направление). С неустойчивым корнем на $-\pi$ (по часовой стрелке, отрицательное направление).

$j := \sqrt{-1} \qquad \omega := 0, 0.1 .. 100$

$\lambda1 := -2 + j \cdot 8 \qquad \lambda2 := -2 - j \cdot 8 \qquad\qquad \lambda3 := 2 + j \cdot 8 \qquad \lambda4 := 2 - j \cdot 8$

$D1(s) := (s - \lambda1)\cdot(s - \lambda2) \qquad\qquad D2(s) := (s - \lambda3)\cdot(s - \lambda4)$

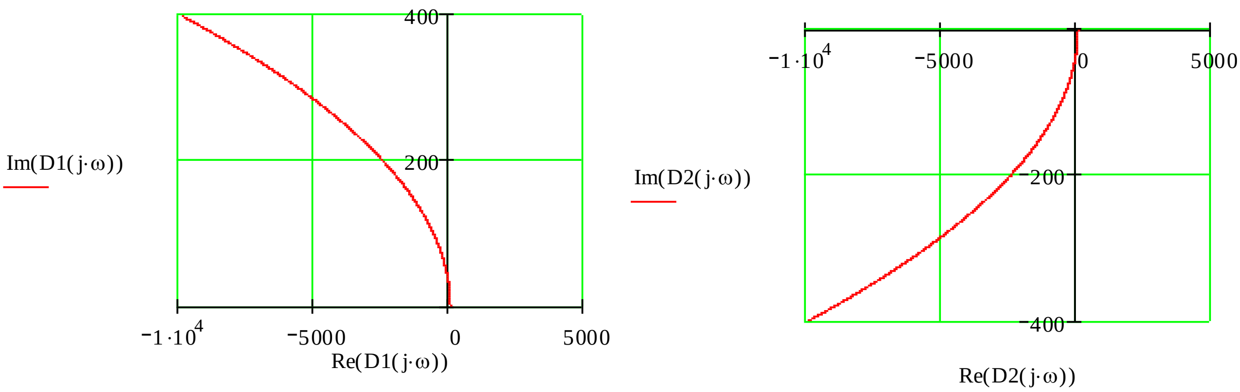


Рис. 1.

Так как для устойчивой системы управления число правых корней $g = 0$, то угол поворота вектора $D(j\omega)$ (характеристический полином замкнутой системы) составит:

$$\arg(D(j\omega))\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2},$$

где n — порядок системы (число корней характеристического уравнения).

То есть система управления будет устойчива, если вектор $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ повернется на угол $n\frac{\pi}{2}$.

При этом конец вектора опишет кривую, называемую *годографом Михайлова*.

Годограф (от др.-греч. путь, движение, направление и пишу) в механике — кривая, представляющая собой геометрическое место концов переменного (изменяющегося со временем) вектора, значения которого в разные моменты времени отложены от общего начала. Понятие годографа было введено английским ученым У. Гамильтоном. Годограф дает наглядное геометрическое представление о том, как изменяется со временем физическая величина, изображаемая переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к годографу.

Критерий устойчивости Михайлова: для устойчивой замкнутой системы годограф Михайлова должен начинаться на положительной полуоси, так как $D(0) = a_0$, и последовательно проходить против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, затем уходить в бесконечность в n-ом квадранте, где n — порядок системы (рис. 2, *а*).

Если это правило нарушается (например, число проходимых кривой квадрантов не равно n, или нарушается последовательность прохождения квадрантов (рис. 2, *б*)), то такая система управления неустойчива.

При четном n, годограф стремится к ∞ параллельно оси $\mathrm{Re}(D(j\omega))$; при нечетном n, годограф стремится к ∞ параллельно оси $\mathrm{Im}(D(j\omega))$.

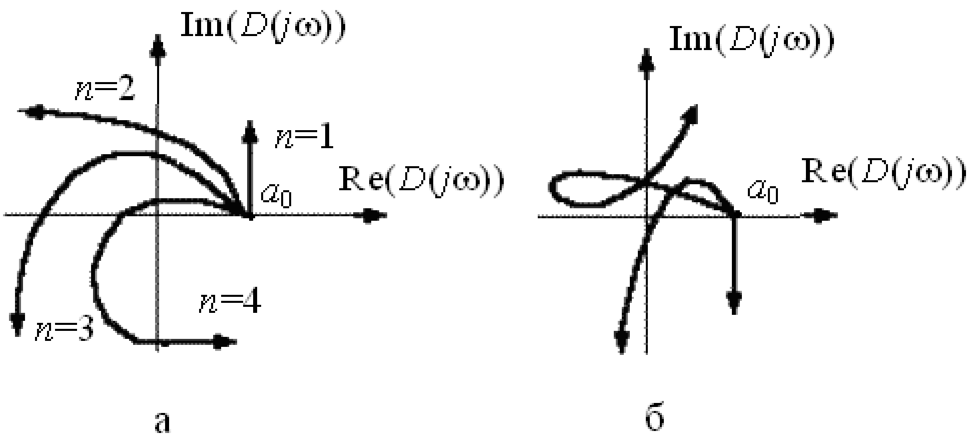


Рис. 2. Годограф Михайлова

Достоинством критерия является его наглядность. Так, если кривая проходит вблизи начала координат, то система управления находится вблизи границы устойчивости и наоборот.

2. Критерий устойчивости Найквиста

Наиболее удобным является критерий устойчивости Найквиста. С его помощью можно оценить устойчивость замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы. Для построения АФЧХ определяется частотная передаточная функция разомкнутой системы путем формальной замены $W_{\text{раз}}(j\omega) = W_{\text{раз}}(s)\big|_{s=j\omega}$. По оси ординат откладывается мнимая часть частотной передаточной функции $\mathrm{Im}(W_{\text{раз}}(j\omega))$, а по оси абсцисс — вещественная часть $\mathrm{Re}(W_{\text{раз}}(j\omega))$.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{\text{раз}}(s) = \frac{B_{\text{раз}}(s)}{A_{\text{раз}}(s)},$$

передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{\text{зам}}(s) = \frac{W_{\text{раз}}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \frac{B_{\text{раз}}(s)}{A_{\text{раз}}(s) + B_{\text{раз}}(s)},$$

где $A_{\text{зам}}(s) = A_{\text{раз}}(s) + B_{\text{раз}}(s)$ — характеристическое уравнение замкнутой системы.

Вводится вспомогательная функция, представляющая собой АФЧХ разомкнутой системы, сдвинутую на единицу вправо:

$$F(s) = 1 + W_{\text{раз}}(s) = \frac{A_{раз}(s) + B_{раз}(s)}{A_{раз}(s)} = \frac{A_{зам}(s)}{A_{раз}(s)}.$$

Ее числитель представляет собой характеристическое уравнение замкнутой системы, а знаменатель — характеристическое уравнение разомкнутой системы. Полиномы числителя и знаменателя имеют одинаковый порядок, равный n.

Получим выражение для вспомогательной частотной характеристики:

$$F(j\omega) = \frac{A_{\text{зам}}(j\omega)}{A_{\text{раз}}(j\omega)}.$$

Рассмотрим результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞, используя те же соотношения, что и при доказательстве критерия Михайлова.

Если замкнутая система устойчива, то приращение фазы числителя будет равно: $\varphi_{\text{зам}}(\omega) = n\frac{\pi}{2}$. При устойчивой разомкнутой системе фаза знаменателя определяется выражением: $\varphi_{\text{раз}}(\omega) = n\frac{\pi}{2}$. Результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет равен разности фаз:

$$\varphi_F(\omega) = \varphi_{\text{зам}}(\omega) - \varphi_{\text{раз}}(\omega) = 0.$$

Таким образом, для устойчивости замкнутой системы при устойчивой разомкнутой должно выполняться это соотношение. Это свойство имеет простую геометрическую интерпретацию: вспомогательная частотная характеристика $F(j\omega)$ не должна охватывать точку начала координат.

Так как $F(j\omega)$ отличается от $W_{\text{раз}}(j\omega)$ на единицу, то можно строить АФЧХ.

Тогда для систем, содержащих в разомкнутом варианте только устойчивые звенья (разомкнутая система устойчива), принята *упрощенная формулировка признака устойчивости:* замкнутая система будет устойчива, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами (–1; *j*0).

На рис. 1 показаны АФЧХ устойчивых разомкнутых систем. Первая система будет устойчива в замкнутом состоянии, а вторая — нет.

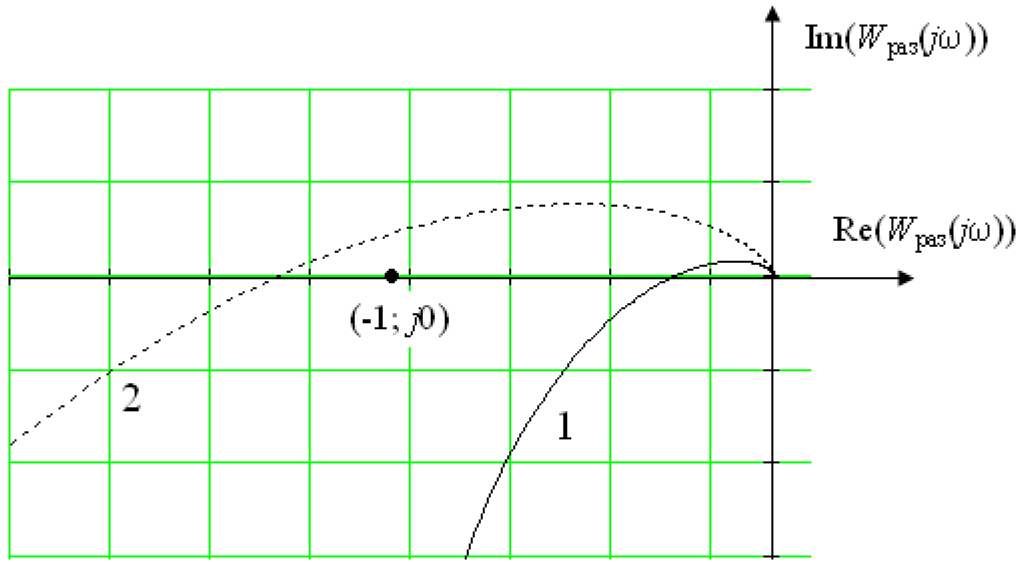


Рис. 1. АФЧХ разомкнутых систем

Рассмотрим случай, когда разомкнутая система неустойчива и имеет g неустойчивых корней (с положительной вещественной частью). Тогда фаза знаменателя определяется выражением:

$$\varphi_{раз}(\omega) = -\frac{g\pi}{2} + (n-g)\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - g\pi = (n-2g)\frac{\pi}{2}.$$

Если замкнутая система устойчива, то приращение фазы числителя будет равно: $\varphi_{зам}(\omega) = n\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет равен разности фаз:

$$\varphi_F(\omega) = \varphi_{зам}(\omega) - \varphi_{раз}(\omega) = n\frac{\pi}{2} - (n-2g)\frac{\pi}{2} = \frac{g}{2}2\pi.$$

Тогда можно сформулировать критерий Найквиста для общего случая, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы n-го порядка содержит g неустойчивых корней: если разомкнутая система неустойчива и имеет g правых корней (неустойчивых), то для того, чтобы замкнутая система была устойчива необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ вспомогательная частотная характеристика $F(j\omega)$ должна охватывать в положительном направлении (против часовой стрелки) $\frac{g}{2}$ раз точку начала координат, или АФЧХ разомкнутой системы должна охватывать в положительном направлении (против часовой стрелки) $\frac{g}{2}$ раз точку (–1, j0).

Если g нечетное, то строят от $-\infty$ до $+\infty$, и должна охватывать g раз.

Годограф $W(j\omega)$ всегда начинается на действительной оси, так как $W(j\omega)\big|_{\omega=0} = \frac{b_0}{a_0} = k$. Но при порядке астатизма равном ν, по причине устремления $W(j\omega)$ к ∞ (при $\omega \to 0$ возникает деление на 0), видимая часть годографа появляется только в квадранте $\nu + 1$, отсчитанном по часовой стрелке.

На рис. 2, *а* приведены АФЧХ разомкнутых систем управления, устойчивых в замкнутом состоянии, на рис. 2, *б* — замкнутая система неустойчива.

На рис. 2, *в*, *г* показаны АФЧХ разомкнутых астатических систем управления, соответственно устойчивых и неустойчивых в замкнутом состоянии. Их особенность в том, что АФЧХ при $\omega \to 0$ уходит в бесконечность. В этом случае при использовании критерия Найквиста ее мысленно замыкают на вещественную ось по дуге окружности бесконечно большого радиуса.

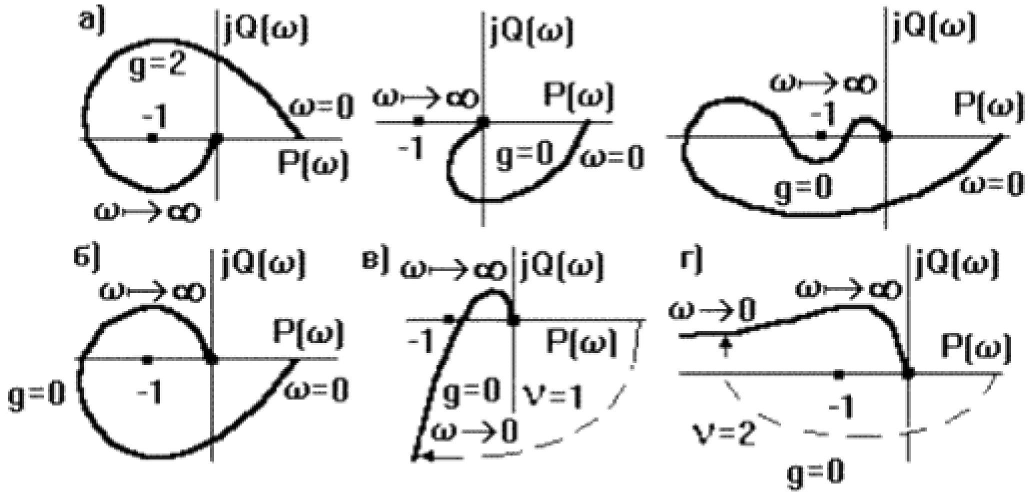


Рис. 2. АФЧХ разомкнутых систем

При сложной форме $W(j\omega)$ могут возникнуть затруднения при определении числа ее оборотов вокруг точки (–1, *j*0). В этом случае удобно применять *правило переходов*, предложенное Цыпкиным Я.З.

Назовем переход $W(j\omega)$ через вещественную ось при возрастании ω *положительным*, если он проходит сверху вниз, и *отрицательным*, если он происходит снизу вверх. Если $W(j\omega)$ начинается или заканчивается на оси, то она совершает полперехода. Тогда критерий Найквиста можно сформулировать следующим образом.

Если разомкнутая система управления неустойчива, то для того чтобы замкнутая была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ через отрезок вещественной оси $(-\infty; -1)$ при изменении частоты от 0 до ∞ была равна $\frac{g}{2}$, где g — число правых корней характеристического уравнения.

В качестве примера на рис. 3 изображена АФЧХ разомкнутой системы: число правых корней $g = 2$, число переходов — два положительных, один отрицательные, их разность равна $l = \frac{g}{2} = 1$, следовательно, замкнутая система устойчива.

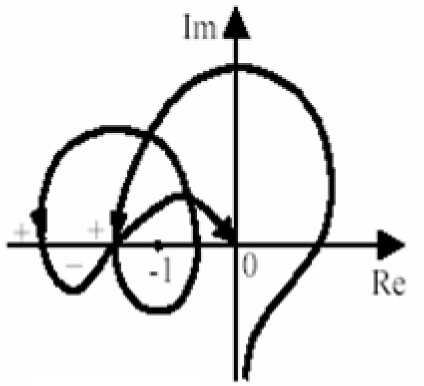


Рис. 3.

Передаточную функцию разомкнутой системы в некоторых случаях удобно представлять в следующем виде:

$$W_{\text{раз}}(s) = kW_{\text{раз}0}(s) = k\frac{B_{\text{раз}0}(s)}{A_{\text{раз}0}(s)},$$

где $k = \dfrac{b_0}{a_0}$ — коэффициент передачи разомкнутой системы.

Передаточную функцию $W_{\text{раз}0}(p)$ назовем *нормированной*.

Рассмотрим функцию:

$$\Delta(s) = \frac{1}{k} + W_{\text{раз}0}(s) = \frac{A_{\text{раз}0}(s) + kB_{\text{раз}0}(s)}{kA_{\text{раз}0}(s)},$$

числитель которой — характеристический полином замкнутой системы.

Для устойчивости замкнутой системы нормированная АФЧХ $W_{\text{раз}0}(j\omega)$, должна $g/2$ раз охватывать точку $(-1/k, j0)$ против часовой стрелки.

Такая формулировка является *модифицированным критерием Найквиста*, которая упрощает исследование зависимости устойчивости замкнутой системы от коэффициента передачи k контура. При изменении k нормированная АФЧХ не изменяется, а критическая точка $(-1/k, j0)$ превращается в критический отрезок (луч).

Критерий Найквиста позволяет установить для систем с неустойчивой разомкнутой цепью, будет ли система устойчива при замыкании обратной связи.

3. Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

ЛАЧХ разомкнутой системы строится по следующему выражению: $L(\omega) = 20\lg(|W_{\text{раз}}(j\omega)|)$, ЛФЧХ: $\varphi(\omega) = \arg(W_{\text{раз}}(j\omega))\cdot\dfrac{180}{\pi}$. По оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе.

Каждой точке АФЧХ разомкнутой системы соответствуют определенные точки ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Пусть известны частотные характеристики двух разомкнутых систем управления (1 и 2), отличающихся друг от друга только коэффициентом передачи $K_1 < K_2$. Пусть первая система устойчива в замкнутом состоянии, вторая нет (рис. 1).

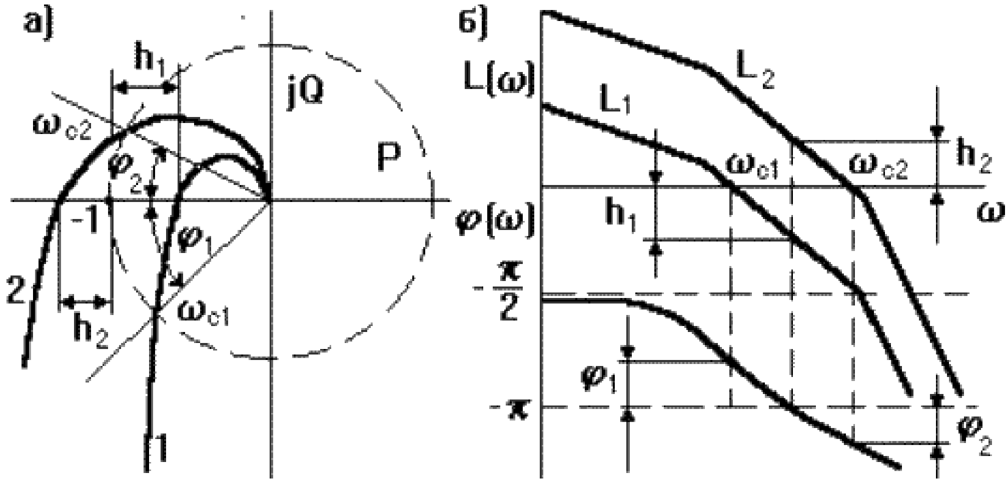


Рис. 1.

Если $W_1(s)$ — передаточная функция первой системы, то передаточная функция второй: $W_2(s) = KW_1(s)$, где $K = K_2/K_1$.

Особыми точками являются точки пересечения АФЧХ с единичной окружностью. Частоты ω_{c1} и ω_{c2} при которых это происходит, называют *частотами среза*.

В этих точках $A(\omega) = 1 \Rightarrow L(\omega) = 0$ — ЛАЧХ пересекает горизонтальную ось. Амплитуда $A_1(\omega) < 1$ соответствует на ЛАЧХ значениям $L_1(\omega) = 20\lg A_1(\omega) < 0$, а амплитуда $A_2(\omega) > 1$ соответствует на ЛАЧХ значениям $L_2(\omega) > 0$.

Пересечениям АФЧХ вещественной оси соответствует значение фазы $\varphi = -\pi$.

Если при частоте среза фаза АФЧХ $\varphi_{c1} > -\pi$ (рис. 1, *а*, кривая 1), то замкнутая система устойчива. На рис. 1, *б* это выглядит так, что пересечению ЛАЧХ горизонтальной оси соответствует точка ЛФЧХ, расположенная выше линии $\varphi = -\pi$. И, наоборот, для неустойчивой замкнутой системы (рис. 1, *а* кривая 2) $\varphi_{c2} < -\pi$, поэтому при $\omega = \omega_{c2}$ ЛФЧХ проходит ниже линии $\varphi = -\pi$.

Таким образом, *критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутых систем* можно сформулировать следующим образом: система, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если ЛАЧХ пересекает ось абсцисс (в последний раз) раньше, чем ЛФЧХ пересечет (в последний раз) ординату $-\pi$.

На рис. 2 показаны ЛАЧХ и ЛФЧХ устойчивой разомкнутой системы, которая также будет устойчива и в замкнутом состоянии.

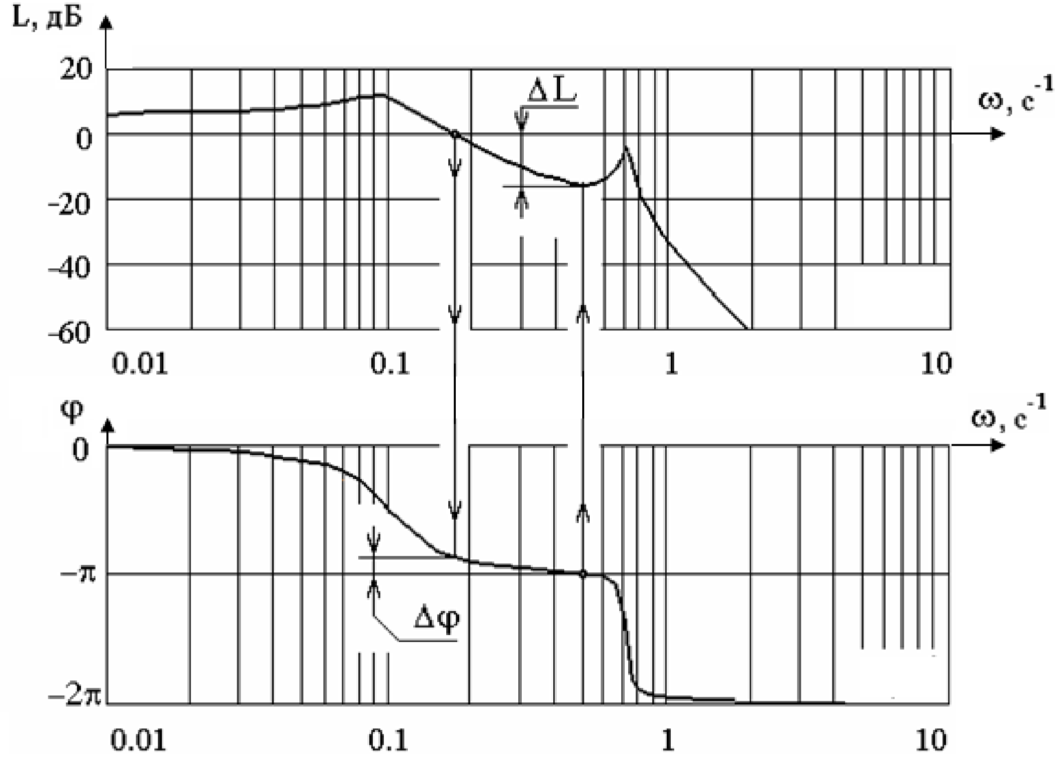


Рис. 2. ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы

4. Понятие запаса устойчивости

В условиях эксплуатации параметры системы по тем или иным причинам могут меняться в определенных пределах (старение, температурные колебания и т. п.). Эти колебания параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости. Поэтому стремятся спроектировать систему управления так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости. Степень этого удаления называют *запасом устойчивости*.

Согласно критерия Найквиста, чем дальше АФЧХ от критической точки (–1, *j*0), тем больше запас устойчивости.

Запас устойчивости по усилению Δh характеризует удаление годографа АФЧХ разомкнутой системы от критической точки в направлении вещественной оси (рис. 1, *а*). По физическому смыслу он показывает, насколько должно увеличиться усиление на данной частоте, чтобы система оказалась на границе устойчивости.

При использовании ЛАЧХ и ЛФЧХ вместо запаса устойчивости по усилению на той же частоте определяется *запас устойчивости по модулю* ΔL, который показывает во сколько раз или на сколько децибел можно увеличить коэффициент усиления при неизменной фазе, сохраняя устойчивость системы (с увеличением k ЛАЧХ поднимается и точка пересечения оси абсцисс смещается вправо) (см. рис. 2, в предыдущем разделе).

Зная Δh запас устойчивости по модулю можно вычислить по следующей формуле: $\Delta L = 20\lg(1-\Delta h)$.

Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ характеризует удаление годографа от критической точки по дуге окружности единичного радиуса и определяется углом $\Delta\varphi$ между отрицательным направлением вещественной полуоси и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения годографа с единичной окружностью (рис. 1, *а*).

При использовании ЛАЧХ и ЛФЧХ *запас устойчивости по фазе* $\Delta\varphi$ показывает, на какой угол может быть смещена фазовая характеристика при неизменной амплитудной с сохранением устойчивости (см. рис. 2, в предыдущем разделе).

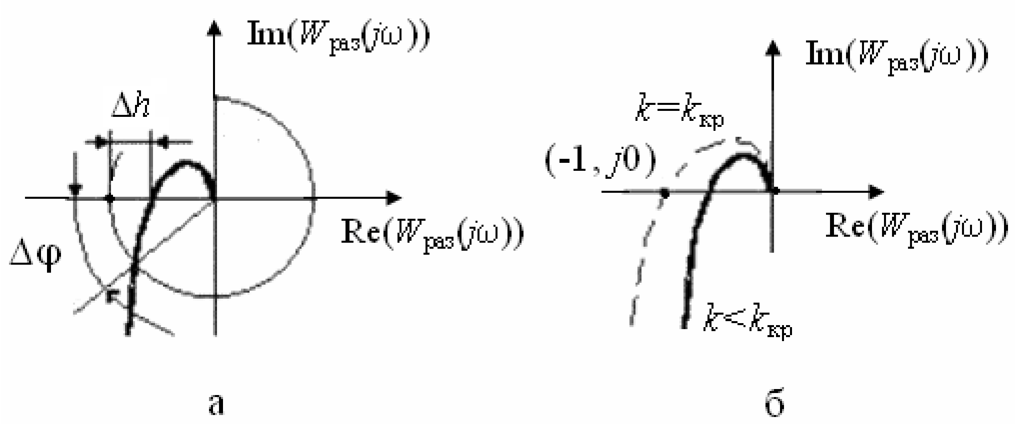


Рис. 1. Определение запасов устойчивости по АФЧХ разомкнутой системы

С ростом коэффициента передачи k разомкнутой системы растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении $k = k_{кр}$ АФЧХ пройдет через критическую точку и попадет на границу устойчивости, а при $k > k_{кр}$ замкнутая система станет неустойчивой ($k = b_0/a_0$ — отношение свободных членов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы) (рис. 1, *б*).

В табл. 1 приведены требуемые запасы устойчивости для систем различных порядков.

Таблица 1

Требуемые запасы устойчивости

Порядок системы, n	Запас устойчивости по модулю ΔL, дБ	Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$, град.
Статическая система		
<3	7—10	35—45
3—6	10—15	45—60
>6	>15	>60
Астатическая система 1-го порядка		
<3	10—15	45—60
3—6	15—20	60—90
>6	>20	>90
Астатическая система 2-го порядка		
<3	15—20	60—90
3—6	20—25	90—120
>6	>25	>120

Лекция № 9
Методы оценки качества управления

1. Прямые методы оценки качества управления
2. Косвенные методы оценки качества управления

Устойчивость САУ является необходимым, но не достаточным условием для ее эффективного функционирования. Важное значение имеет *качество управления* — степень удовлетворения требований к форме переходного процесса, который определяет пригодность системы для конкретных условий работы.

Методы анализа качества управления делятся на *прямые методы* анализа по кривой переходного процесса и *косвенные методы* (частотные, корневые, интегральные методы).

1. Прямые методы оценки качества управления

Переходная характеристика (процесс) $h(t)$ (рис. 1) — это реакция системы на единичную ступенчатую функцию:

$$1(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

Построение переходного процесса:

$$h(t)=L^{-1}\{W_{\text{зам}}(s)\cdot L[1(t)]\},$$

где $L[1(t)]=1/s$ — преобразование Лапласа единичной ступенчатой функции.

В случае, когда система описывается дифференциальным уравнением высокого порядка и обратное преобразование Лапласа от передаточной функции $W_{\text{зам}}(s)$ затруднено, построение переходного процесса можно проводить по следующим формулам:

$$h(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}(W_{\text{зам}}(j\omega))\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega,$$

$$h(t)=\mathrm{Re}(W_{\text{зам}}(0))+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}(W_{\text{зам}}(j\omega))\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega,$$

где $\mathrm{Re}(W_{\text{зам}}(j\omega))$ — вещественная частотная характеристика замкнутой системы (ВЧХ); $\mathrm{Im}(W_{\text{зам}}(j\omega))$ — мнимая частотная характеристика замкнутой системы (МЧХ).

Показатели качества по переходному процессу:

1. *Время регулирования* $t_{\text{р}}$ — это время когда переходной процесс входит в *N % зону* (*трубку*) *регулирования* и в дальнейшем из нее не выходит. Время регулирования оценивает быстродействие системы.

Обычно зона регулирования задается в процентах от установившегося значения выходной величины $\Delta=0{,}05$, 5 %.

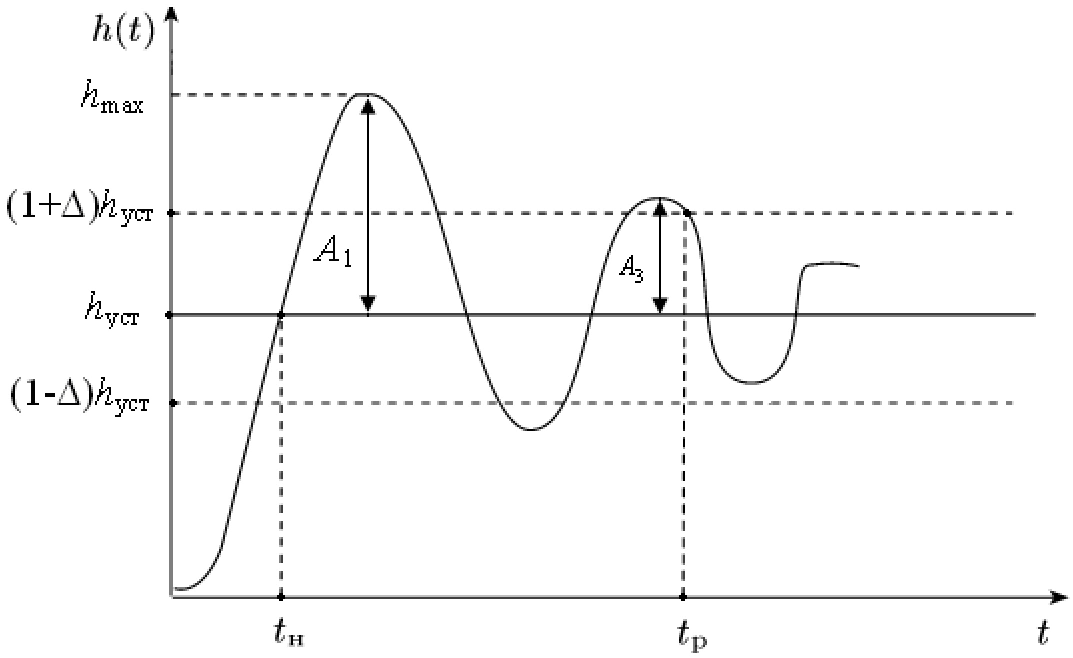


Рис. 1. Переходной процесс замкнутой системы

2. *Перерегулирование* σ — максимальное отклонение переходного процесса от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%,$$

где h_{max} — значение максимума переходного процесса.

При больших перерегулированиях могут возникнуть значительные динамические усилия в механической части системы, электрические перенапряжения. Допустимое значение σ определяется из опыта эксплуатации, обычно оно составляет 0,1—0,3, иногда допускается до 0,7. Величина перерегулирования отражает динамическую точность системы, то есть точность системы в процессе ее перехода из одного состояния в другое.

3. Для колебательных процессов существенным является показатель Ψ — *интенсивность затухания* (*степень затухания*, *затухание*):

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1},$$

где A_1, A_3 — амплитуды первого и третьего (положительных) всплесков переходного процесса относительно установившегося значения.

4. *Статическая ошибка* $e = h_{жел} - h_{уст}$ — это разность между заданным (желаемым) и действительным значением управляемой величины в установившемся режиме. Для статических систем статическая ошибка отлична от нуля и пропорциональна величине возмущающего фактора f (в линейных системах) и коэффициенту передачи системы по данному возмущению, а для астатических — равна нулю.

5. *Время нарастания* $t_н$ — время достижения переходным процессом в первый раз своего установившегося состояния.

6. *Частота колебаний* $\omega = 2\pi/T$, где T — период колебаний.

7. *Число колебаний* n за время регулирования $t_{\text{р}}$.

При создании системы допустимые значения показателей качества оговариваются техническими условиями, что представляется в виде *диаграммы показателей качества*. Это область, за границы которой не должна выходить переходная характеристика.

2. Косвенные методы оценки качества управления

Оценка качества управления по частотным характеристикам.

1. *Запасы устойчивости по модулю и по фазе* определяются по ЛАЧХ и ЛФЧХ или по АФЧХ разомкнутой системы.

Для построения *АФЧХ* определяется частотная передаточная функция разомкнутой системы путем формальной замены $W_{\text{раз}}(j\omega)=W_{\text{раз}}(s)\big|_{s=j\omega}$. По оси ординат откладывается мнимая часть частотной передаточной функции $\operatorname{Im}(W_{\text{раз}}(j\omega))$, а по оси абсцисс — вещественная часть $\operatorname{Re}(W_{\text{раз}}(j\omega))$.

ЛАЧХ разомкнутой системы строится по следующему выражению: $L(\omega)=20\lg\left(\left|W_{\text{раз}}(j\omega)\right|\right)$, *ЛФЧХ*: $\varphi(\omega)=\arg\left(W_{\text{раз}}(j\omega)\right)\cdot\dfrac{180}{\pi}$. По оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе.

Показатели качества по амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) замкнутой системы, которая представляет собой зависимость $A(\omega)=\left|W_{\text{зам}}(j\omega)\right|$ от частоты ω:

Начальное значение АЧХ:

$$A(0)=\begin{cases}1 & \text{для астатической САР,}\\ \dfrac{K}{K+1}\approx 1 & \text{для статической САР.}\end{cases}$$

2. *Резонансная частота системы* $\omega_{\text{р}}$ — это частота, при которой колебания проходят через систему с наибольшим усилением, а АЧХ замкнутой системы достигает максимума.

3. *Полоса пропускания системы* ω_B — это частота, при которой мощность сигнала на выходе уменьшается в 2 раза по сравнению с ее максимальным значением на низких частотах.

4. *Частота среза* $\omega_{\text{ср}}$ — частота, при которой ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс, а АЧХ замкнутой системы принимает значение равное значению $A(0)$, то есть $A(\omega_{\text{ср}})=A(0)$. По ней можно судить о быстродействии системы.

Частота среза $\omega_{\text{ср}}$ во многих случаях близка к резонансной частоте $\omega_{\text{р}}$ системы. Так как резонансная частота приблизительно соответствует частоте колебаний замкнутой системы в переходном процессе, то время достижения первого максимума на переходном процессе может быть определено по приближенной зависимости:

$$t_{\text{м}}\approx\frac{\pi}{\omega_{\text{р}}}\approx\frac{\pi}{\omega_{\text{ср}}}.$$

Если переходной процесс в системе заканчивается за 1—2 колебания (это одно из требований к системам управления, выведенное на основе эксплуатации), то время регулирования можно определить по приближенной зависимости:

$$t_{\text{р}} \approx \frac{(1\ldots2)\cdot 2\pi}{\omega_{\text{р}}} \approx \frac{(1\ldots2)\cdot 2\pi}{\omega_{\text{ср}}}.$$

5. *Частотный показатель колебательности* M — это отношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы к ее значению при $\omega = 0$: $M = A(\omega_{\text{р}})/A(0)$ (рис. 2).

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Допустимое значение показателя колебательности определяется на основании опыта эксплуатации систем управления: это значение должно быть в пределах 1,1—1,5, хотя в некоторых случаях можно допускать величины до 2—2,5.

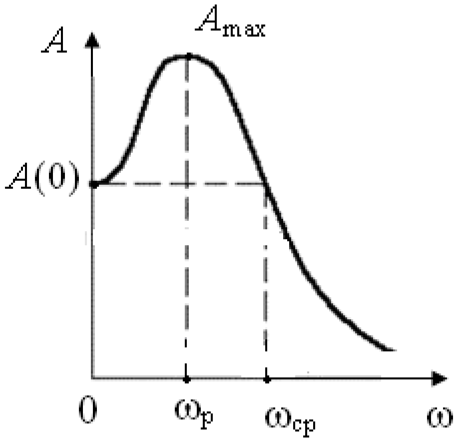


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы

Соотношения между вещественной частотной характеристикой замкнутой системы (ВЧХ), которая представляет собой зависимость вещественной части $P(\omega) = \mathrm{Re}(W_{\text{зам}}(j\omega))$ частотной передаточной функции замкнутой системы от частоты ω и *переходным процессом*:

1. Начальное значение ВЧХ $P(0)$ равно установившемуся значению переходной характеристики $P(0) = h(\infty) = h_{\text{уст}}$. Конечное значение ВЧХ соответствует начальному значению переходного процесса $P(\infty) = h(0)$.

2. Система с вогнутой ВЧХ (рис. 3, *а*, кривая 1) не имеет перерегулирования, то есть ей соответствует монотонная переходная характеристика (рис. 3, *б*, кривая 1).

3. Система с трапециидальной ВЧХ (рис. 3, *а*, кривая 2) имеет апериодическую переходную характеристику (рис. 3, *б*, кривая 2), причем величина перерегулирования σ не превышает 18 %.

4. Кривые 3 и 4 на рис. 3, *а* соответствуют колебательной переходной характеристике (рис. 3, б, кривая 3). Наличие отрицательного экстремума у ВЧХ (кривая 4) свидетельствует о повышенной колебательности системы.

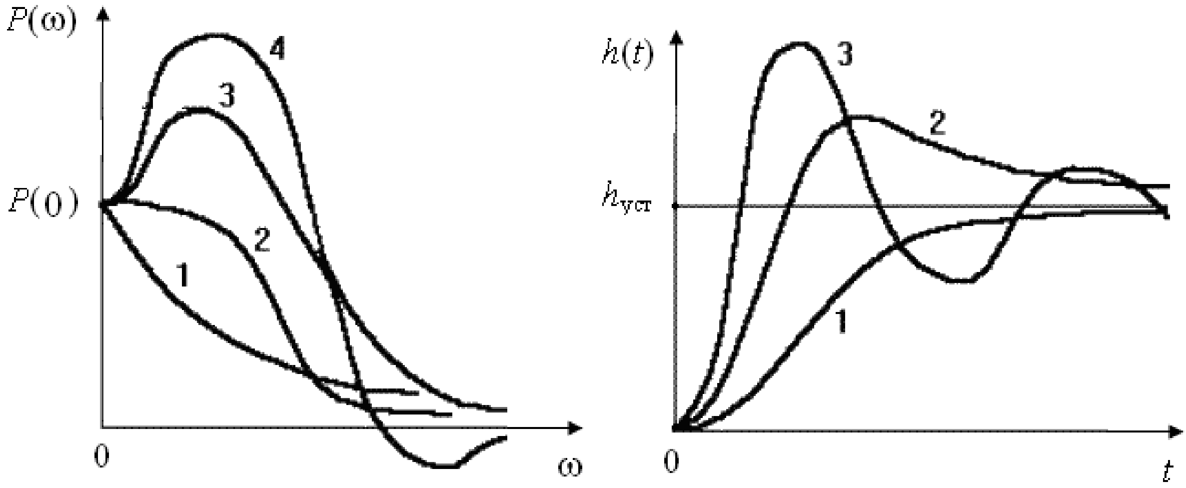


Рис. 3. ВЧХ (*а*) и переходные процессы (*б*) замкнутых систем

Корневой метод оценки качества управления. Это косвенный метод, основанный на определении границ области расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, что дает возможность приблизительно оценить качество управления (свойства переходного процесса).

Для нахождения корней характеристического полинома $D(s)$ в Mathcad имеется встроенная функция **polyroots(v)**.

Вектор ν будет иметь вид:

$$v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$D(s) := T_1 \cdot T_2 \cdot s^3 + (T_1 + T_2) \cdot s^2 + (1 + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p \cdot T_p) \cdot s + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p$$

$$v(T_p, k_p) := \begin{pmatrix} k_1 \cdot k_2 \cdot k_p \\ 1 + k_1 \cdot k_2 \cdot k_p \cdot T_p \\ T_1 + T_2 \\ T_1 \cdot T_2 \end{pmatrix}$$

$$r := \mathrm{polyroots}(v(T_p, k_p))$$

$$r = \begin{pmatrix} -1.343 \\ -0.078 + 0.54i \\ -0.078 - 0.54i \end{pmatrix}$$

Вектор r содержит корни характеристического уравнения.

1. *Среднегеометрический корень*. Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид: $a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$.

Используя понятие *среднегеометрического корня*:

$$\Omega_0 = \sqrt[n]{|s_1 s_2 .. s_n|} = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}, \ (1)$$

где s_i — корни характеристического уравнения, можно перейти к новой комплексной величине q путем подстановки $s = \Omega_0 q$. В результате получим уравнение:

$$a_n \Omega_0^n q^n + \ldots + a_1 \Omega_0 q + a_0 = 0$$

или

$$\frac{a_n \Omega_0^n}{a_0} q^n + \ldots + \frac{a_1 \Omega_0}{a_0} q + 1 = 0.$$

Введем коэффициенты:

$$A_k = \frac{a_k \Omega_0^k}{a_0},$$

тогда можно записать:

$$A_n q^n + \ldots + A_1 q + 1 = 0. \quad (2)$$

Исходное характеристическое уравнение при возвращении к прежней комплексной величине получает вид (подставим $q = \dfrac{s}{\Omega_0}$):

$$A_n {\Omega_0}^{-n} s^n + \ldots + A_1 {\Omega_0}^{-1} s + 1 = 0$$

или

$$A_n s^n + \ldots + A_1 {\Omega_0}^{n-1} s + {\Omega_0}^n = 0. \quad (3)$$

Среднегеометрический корень Ω_0 может служить мерой быстроты протекания переходных процессов. Если в уравнении (3) увеличить Ω_0, например, в 10 раз, то переходный процесс, оставаясь подобным сам себе, будет протекать в 10 раз быстрее.

В связи с этим можно рассматривать (2) как *нормированное характеристическое уравнение*, которому соответствует переходной процесс, построенный для времени $\tau = \Omega_0 t$. Если качество переходного процесса является приемлемым, то требуемая быстрота протекания переходного процесса может быть обеспечена соответствующим выбором величины Ω_0.

Для увеличения величины Ω_0, как следует из (1), необходимо увеличивать свободный член характеристического уравнения a_0. Для статической разомкнутой системы, имеющей свободный коэффициент знаменателя $a_{0\_раз}$, при замыкании обратной связи свободный коэффициент будет равен $a_0 = a_{0\_раз} + k$, а для астатической $a_0 = k$, где k — коэффициент передачи разомкнутой системы. Следовательно, повышение быстродействия может осуществляться за счет увеличения коэффициента передачи k. Однако, при этом уменьшается запас устойчивости замкнутой системы и в результате переходной процесс становится более колебательным.

2. *Степенью устойчивости* η называется абсолютная величина вещественной части корня, расположенного ближе всех остальных к мнимой оси. Термин «степень устойчивости» не является удачным, и его следовало заменить термином «*степень быстродействия*». Это объясняется тем, что степень

устойчивости никак не связана с удалением системы от границы устойчивости. Таким образом, η показывает *быстродействие системы*.

Длительность переходного процесса определяется в основном свободной составляющей, имеющей наименьшее затухание, то есть наименьшее абсолютное значение вещественной части соответствующего полюса. Если изобразить все полюса в комплексной плоскости корней, то данный полюс (или пара комплексно сопряженных полюсов) будет наиболее близко расположен к мнимой оси (рис. 1).

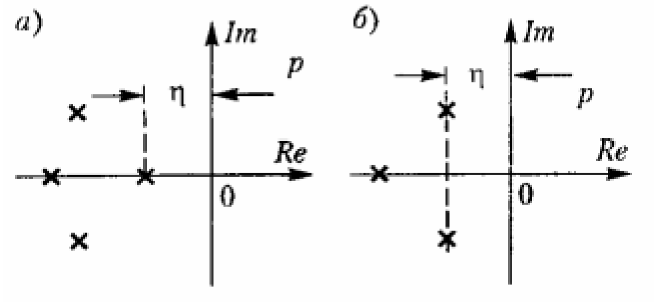


Рис. 1.

Если ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, то составляющая в переходном процесс определяемая этим корнем, будет иметь вид:

$$x_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t}.$$

Положив в конце переходного процесса $x_\eta(t_p) = \Delta C_\eta$, где $\Delta = 0{,}01 \ldots 0{,}05$ (таким образом, после окончания переходного процесса статическая ошибка будет в пределах 1—5 % от C_η) и, прологарифмировав левую и правую части выражения, получим:

$$\ln x_\eta(t) = \ln C_\eta e^{-\eta t},$$

$$\ln \Delta C_\eta = \ln C_\eta e^{-\eta t},$$

$$\ln \Delta = -\eta t.$$

Тогда можно получить приближенную зависимость между степенью устойчивости и временем регулирования:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}.$$

Так, например, если принять $\Delta = 0{,}05$, то время регулирования составит:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0{,}05} \approx \frac{3}{\eta},$$

а если $\Delta = 0{,}01$, то время регулирования составит:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0{,}01} \approx \frac{5}{\eta}.$$

Таким образом, можно считать, что: $t_p \approx \dfrac{3 \ldots 5}{\eta}$.

Если ближайшей к мнимой оси является пара комплексных корней $-\eta \pm j\beta$, то составляющая в переходном процессе, определяемая этими корнями, будет:

$$x_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t} \sin(\beta t + \psi).$$

Положив в этом случае $x_\eta(t_p)=\Delta C_\eta$, нельзя в общем виде определить время регулирования, так как для этой цели потребовалось бы решить трансцендентное уравнение. Однако можно найти верхнюю границу времени регулирования, положив в этом уравнении $\sin(\beta t+\psi)=1$. Тогда получим выражение:

$$t_p \le \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{\Delta} \le \frac{3...5}{\eta}.$$

Таким образом, и в этом случае величина степени устойчивости будет в какой-то мере определять быстроту затухания переходного процесса.

3. *Корневой показатель колебательности* (*колебательность*). Склонность системы к колебаниям будет наблюдаться, если в решении характеристического уравнения будут присутствовать комплексные корни вида $\lambda=-\alpha\pm j\beta$.

Модуль отношения мнимой части корня (угловой частоты колебаний) β к вещественной (коэффициенту затухания) α в той паре комплексно-сопряженных корней, которые дают наибольший угол 2φ, называется *колебательностью* μ (характеризует колебательность переходного процесса и величину перерегулирования) (рис. 2):

$$\mu=|\beta/\alpha|=|\mathrm{tg}\varphi|.$$

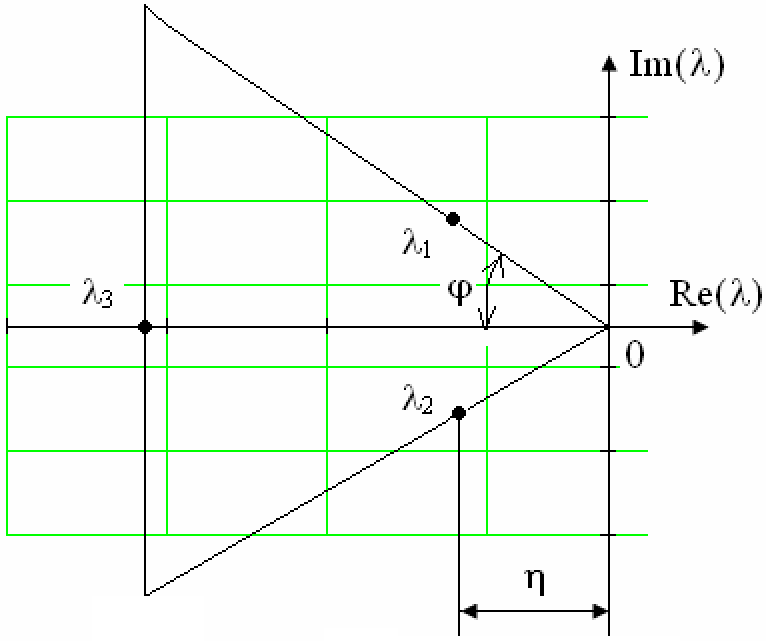


Рис. 2. Расположение полюсов передаточной функции на комплексной плоскости

Чем больше величина μ, тем более колебательный характер будут иметь переходные процессы и наоборот. Если $\mu=0$ $(\beta=0)$ все корни характеристического уравнения будут вещественными, и в системе будут возникать апериодические переходные процессы. Если $\mu=\infty$ $(\alpha=0)$ корни системы будут чисто мнимыми, и в системе будут наблюдаться незатухающие колебательные переходные процессы.

4. *Интенсивность затухания* (*степень затухания*, *затухание*). Комплексные сопряженные корни дают в выражении для переходного процесса член вида:

$$x(t)=Ce^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi).$$

Найдем затухание амплитуды синусоидального колебания за один период. При некотором времени $t = t_1$ эта амплитуда равна:

$$C_1 = Ce^{-\alpha t_1}.$$

Через один период $T = 2\pi/\beta$:

$$C_2 = Ce^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = C_1 e^{-2\pi\frac{\alpha}{\beta}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Затуханием называют величину:

$$\psi = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{C_2}{C_1}.$$

Эта величина обычно выражается в процентах. Подставляя значение амплитуды C_2, получаем:

$$\psi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}},$$

или

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln\frac{1}{1-\psi}}.$$

Обычно в системах управления допускается затухании за один период не менее чем 90—98 %. Так, например, если $\psi = 98\,\%$, то допустимая колебательность при этом составит:

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln 50} \approx \frac{\pi}{2} = 1{,}57.$$

Соответственно $\psi = 90\,\%$ при получаем $\mu = 2{,}72$.

Интегральный метод оценки качества управления. В новейшей литературе, посвященной автоматическому управлению, подчеркивается важность математической формулировки понятия качества системы управления и методов его оценки. Современная теория управления предполагает, что инженер способен количественно определить требуемое качество системы. Количественная оценка качества крайне важна для работы адаптивных систем управления, для автоматической оптимизации параметров систем управления и для синтеза оптимальных систем.

Оценка качества — это численный показатель качества системы, который выбирается так, чтобы подчеркнуть наиболее важное требование, предъявляемое к системе.

Система считается *оптимальной системой управления*, если ее параметры выбраны таким образом, что оценка качества принимает экстремальное (обычно минимальное) значение. Чтобы оценка качества имела реальный смысл, она должна представлять собой число, которое всегда положительно или равно нулю. Тогда наилучшей системой будет та, в которой эта оценка имеет минимальное значение.

В общем случае интеграл, оценивающий качество системы, имеет вид:

$$I = \int_0^\infty f\big(e(t), g(t), y(t), t\big)dt,$$

где f — функция ошибки $e(t)$, входного $g(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов, а также времени.

Используя различные комбинации переменных системы и времени, можно получить много разных оценок качества.

Верхний предел интегрирования выбирается достаточно произвольно, так, чтобы интеграл стремился к конечному значению (обычно удобно выбирать его равным времени регулирования $t_р$).

Рассмотрим наиболее употребляемые интегральные оценки.

Линейная интегральная оценка численно равна площади, ограниченной ошибкой регулирования $e(t) = h_{жел} - h(t)$. Определяется она выражением:

$$I_0 = \int_0^\infty e(t)dt. \quad (1)$$

Линейную интегральную оценку применяют только для монотонных переходных процессов, так как при колебательном переходном процессе ошибка в определении качества может быть недопустимой.

Для улучшения свойств предыдущего критерия используют *интеграл от модуля ошибки* (ИМО):

$$I_1 = \int_0^\infty |e(t)|dt. \quad (2)$$

Квадратичная интегральная оценка (*интеграл от квадрата ошибки*, ИКО) (*формула Рэлея*):

$$I_2 = \int_0^\infty e^2(t)dt. \quad (3)$$

Оценка (3) удобна в практическом применении, т. к. легко могут быть реализованы схемы возведения в квадрат.

Чтобы уменьшить вклад большой начальной ошибки в интеграл (2) и учесть ошибку, появляющуюся в дальнейшем, была предложена следующая оценка:

$$\text{ИВМО} = \int_0^\infty t|e(t)|dt,$$

которая определяется как *интеграл от взвешенного модуля ошибки* (ИВМО).

Весьма схожим показателем является *интеграл от взвешенного квадрата ошибки* (ИВКО):

$$\text{ИВКО} = \int_0^\infty te^2(t)dt.$$

Оценка качества ИВМО является наилучшей из рассмотренных, т. к. с ее помощью проще всего находить минимальное значение интеграла при изменении параметров системы.

Практическую ценность чаще всего представляют оценки ИМО и ИКО. Например, минимизация одной из оценок качества может быть непосредственно связана с минимизацией расхода топлива самолетом или космическим аппаратом.

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут отвечать разные формы переходного процесса, что создает некоторую неопределенность решения задачи.

Лекция № 10
Методы оценки точности управления

1. Передаточная функция системы управления по ошибке
2. Установившаяся ошибка системы управления с обратной связью
3. Коэффициенты ошибок

1. Передаточная функция системы управления по ошибке

Передаточная функция замкнутой системы (рис. 1):

$$W_{\text{зам}}(s) = \frac{W_{\text{раз}}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)}$$

устанавливает связь между управляемой величиной $y(t)$ (его изображением $Y(s)$) и задающим воздействием $g(t)$ (его изображением $G(s)$) при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$Y(s) = W_{\text{зам}}(s) \cdot G(s) = \frac{W_{\text{раз}}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s).$$

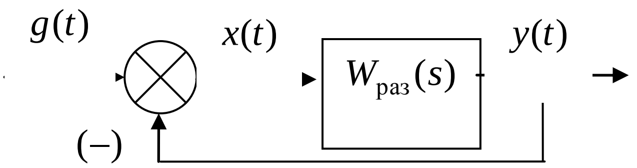


Рис. 1.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке:

$$W_{\text{зам}}(s)_X = 1 - W_{\text{зам}}(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{вывод} \\ y(t) = W_{\text{зам}}(s) \cdot g(t), \quad x(t) = g(t) - y(t) \Rightarrow y(t) = g(t) - x(t), \\ g(t) - x(t) = W_{\text{зам}}(s) \cdot g(t), \quad g(t) - W_{\text{зам}}(s) \cdot g(t) = x(t), \\ x(t) = (1 - W_{\text{зам}}(s)) \cdot g(t). \end{array}\right)$$

устанавливает связь между ошибкой $x(t)$ (ее изображением $X(s)$) и задающим воздействием $g(t)$ (его изображением $G(s)$) в замкнутой системе при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$X(s) = W_{\text{зам}}(s)_X \cdot G(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s).$$

2. Установившаяся ошибка системы управления с обратной связью

Установившаяся ошибка определяется выражением (по *теореме преобразования Лапласа о конечном значении функции*):

$$x_{ss} = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sG(s)}{1+W_{\text{раз}}(s)}, \ (1)$$

где $X(s) = W_{\text{зам}}(s)_X \cdot G(s) = \dfrac{1}{1+W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s)$.

Определим установившуюся ошибку системы для трех типовых входных сигналов.

Ступенчатый входной сигнал. При ступенчатом входном сигнале амплитуды A $g(t) = A$, установившаяся ошибка равна:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot A/s}{1+W_{\text{раз}}(s)} = \frac{A}{1+W_{\text{раз}}(0)},$$

где $L\{A\} = A/s$ — преобразование Лапласа от ступенчатого входного сигнала амплитуды A.

То есть она определяется передаточной функцией разомкнутой системы $W_{\text{раз}}(s)$, которая в общем случае записывается в виде:

$$W_{\text{раз}}(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N (a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N a_n \prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}.$$

Значение $W_{\text{раз}}(s)$ при $s \to 0$ зависит от N, т. е. количества содержащихся в разомкнутой системе интеграторов. Используют термин *тип системы* (*порядок астатизма*), который равен количеству интеграторов N.

Так, для системы типа 0 ($N = 0$) установившаяся ошибка равна:

$$x_{ss} = \frac{A}{1+W_{\text{раз}}(0)} = \frac{A}{1+\dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m} z_i}{a_n \prod_{j=1}^{n} p_j}} = \frac{A}{1+k_p},$$

где $k_p = \lim_{s\to 0} W_{\text{раз}}(s)$ — коэффициент передачи разомкнутой системы.

Если система содержит один или более интеграторов, т. е. $N \geq 1$, то при единичном ступенчатом воздействии установившаяся ошибка равна нулю, т. к.:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1+\dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N a_n \prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}} = \lim_{s\to 0} \frac{As^N}{s^N + \dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{a_n \prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}} = 0.$$

Линейный входной сигнал. Установившаяся ошибка в случае линейного входного сигнала $g(t) = At$ определяется выражением:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot A/s^2}{1+W_{\text{раз}}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + sW_{\text{раз}}(s)},$$

где $L\{At\} = A/s^2$ — преобразование Лапласа от линейного входного сигнала.

Установившаяся ошибка зависит от количества интеграторов, N. Для системы типа «ноль» $N = 0$, и установившаяся ошибка равна бесконечности. Для системы типа «один» $N = 1$, и ошибка:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + s\left(\dfrac{b_m \prod\limits_{i=1}^{m}(s + z_i)}{s a_n \prod\limits_{j=1}^{n}(s + p_j)}\right)} = \frac{A}{\left(\dfrac{b_m \prod\limits_{i=1}^{m} z_i}{a_n \prod\limits_{j=1}^{n} p_j}\right)} = \frac{A}{k_v},$$

где $k_v = \lim\limits_{s\to 0} sW_{\text{раз}}(s)$ — *добротность системы по скорости*.

Если передаточная функция включает в себя два или более интеграторов, $N \geq 2$, то установившаяся ошибка равна нулю.

Квадратичный входной сигнал. Если на вход системы поступает сигнал $g(t) = \dfrac{At^2}{2}$, то установившаяся ошибка имеет вид:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot A/s^3}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s^2 + s^2 W_{\text{раз}}(s)},$$

где $L\left\{\dfrac{At^2}{2}\right\} = \dfrac{A}{s^3}$ — преобразование Лапласа от квадратичного входного сигнала.

При наличии одного интегратора установившаяся ошибка равна бесконечности; при двух интеграторах, $N = 2$, получим:

$$x_{ss} = \frac{A}{\left(\dfrac{b_m \prod\limits_{i=1}^{m} z_i}{a_n \prod\limits_{j=1}^{n} p_j}\right)} = \frac{A}{k_a},$$

где $k_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2 W_{\text{раз}}(s)$ — *добротность системы по ускорению*.

Если количество интеграторов $N \geq 3$, то установившаяся ошибка равна нулю.

3. Коэффициенты ошибок

При оценке точности работы системы удобно использовать так называемые *коэффициенты ошибок*.

Разложим передаточную функцию замкнутой системы по ошибке $W_{\text{зам}}(s)_X$ в ряд Тейлора по возрастающим степеням s:

$$X(s) = \left[c_0 + \frac{c_1 s}{1!} + \frac{c_2 s^2}{2!} + \ldots\right] \cdot G(s).$$

Переходя к оригиналу получаем:

$$x(t) = c_0 g(t) + \frac{c_1}{1!}\frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!}\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \ldots$$

Величины $c_0, c_1, \ldots$ называют *коэффициентами ошибок*. Их можно определять двумя способами:

1. По общему правилу разложения функции в ряд Тейлора по формулам:

$$c_0 = W_{\text{зам}}(s)_X \big|_{s \to 0},$$

$$c_m = \left(\frac{d^m W_{\text{зам}}(s)_X}{ds^m} \right) \Bigg|_{s \to 0}.$$

Встроенная функция пакета Mathcad **series** выполняет разложение выражения или функции в ряд Тейлора:

$$W_{\text{зам}}(s)_X \, series, s, 3 \to \ldots,$$

где $W_{\text{зам}}(s)_X$ — передаточная функция замкнутой системы по ошибке; число «3» указывает, сколько членов ряда необходимо определить.

2. Так как передаточная функция по ошибке $W_{\text{зам}}(s)_X$ представляет собой дробно-рациональную функцию, то коэффициенты ошибок можно получить делением числителя на знаменатель (деление начинаем с младших степеней s) и сравнением с рядом.

Рассмотрим систему третьего порядка с астатизмом разомкнутой системы первого порядка $\nu = 1$. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид:

$$W_{\text{зам}}(s)_X = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{b_1 s + b_0}{s^{\nu} \cdot \left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right)} \right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + k \cdot \left(\dfrac{(b_1/b_0)s + 1}{s \cdot \left((a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1\right)} \right)} =$$

$$= \frac{s \cdot \left((a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1\right)}{s \cdot \left((a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1\right) + k \cdot \left((b_1/b_0)s + 1\right)} =$$

$$= \frac{(a_2/a_0)s^3 + (a_1/a_0)s^2 + s}{(a_2/a_0)s^3 + (a_1/a_0)s^2 + \left(1 + k(b_1/b_0)\right)s + k} = \frac{f_{20}s^3 + f_{10}s^2 + s}{f_{20}s^3 + f_{10}s^2 + fs + k},$$

где $k = b_0/a_0$ — отношение свободных коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы; $f_{20} = a_2/a_0$, $f_{10} = a_1/a_0$, $f = 1 + k \cdot (b_1/b_0)$.

$$
\begin{array}{l|l}
s+f_{10}s^2+f_{20}s^3 & k+fs+f_{10}s^2+f_{20}s^3 \\
- & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
s+\dfrac{f}{k}s^2+\dfrac{f_{10}}{k}s^3 & \dfrac{1}{k}s+\dfrac{f_{10}k-f}{k^2}s^2+\ldots \\
\hline
\dfrac{f_{10}k-f}{k}s^2+\dfrac{f_{20}k-f_{10}}{k}s^3 & \\
- & \\
\dfrac{f_{10}k-f}{k}s^2+\ldots & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Первые коэффициенты ошибок для системы с астатизмом первого порядка:

$$c_0=0,$$

$$c_1=\frac{1}{k},$$

$$c_2=\frac{f_{10}k-f}{k^2}=\frac{(a_1/a_0)k-1-k\cdot(b_1/b_0)}{k^2}.$$

Рассмотрим статическую систему третьего порядка при $\nu=0$. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид:

$$W_{\text{зам}}(s)_X=\frac{1}{1+W_{\text{раз}}(s)}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{b_1s+b_0}{s^{\nu}\cdot\left(a_2s^2+a_1s+a_0\right)}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+k\cdot\left(\dfrac{(b_1/b_0)s+1}{\left((a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1\right)}\right)}=$$

$$=\frac{(a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1}{(a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1+k\cdot((b_1/b_0)s+1)}=$$

$$=\frac{(a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1}{(a_2/a_0)s^2+((a_1/a_0)+k(b_1/b_0))s+(k+1)}=\frac{f_{20}s^2+f_{10}s+1}{f_{20}s^2+m_{10}s+m},$$

где $m_{10}=(a_1/a_0)+k(b_1/b_0)$, $m=1+k$.

$$1+f_{10}s+f_{20}s^2$$

$$-$$

$$1+\frac{m_{10}}{m}s+\frac{f_{20}}{m}s^2$$

$$\overline{\frac{f_{10}m-m_{10}}{m}s+\frac{f_{20}m-f_{20}}{m}s^2}$$

$$-$$

$$\frac{f_{10}m-m_{10}}{m}s+\frac{m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^2}s^2$$

$$\overline{\frac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^2}s^2}$$

$$-$$

$$\frac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^2}s^2+\ldots$$

$$\overline{0}$$

$$m+m_{10}s+f_{20}s^2$$

$$\overline{\frac{1}{m}+\frac{f_{10}m-m_{10}}{m^2}s+}$$

$$+\frac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^3}s^2+\ldots$$

Первые коэффициенты ошибок для статической системы:

$$c_0=\frac{1}{m}=\frac{1}{1+k},$$

$$c_1=\frac{f_{10}m-m_{10}}{m^2}=\frac{(a_1/a_0)(1+k)-(a_1/a_0)-k(b_1/b_0)}{(1+k)^2},$$

$$c_2=\frac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^3}=\frac{f_{20}m^2-f_{20}m-f_{10}mm_{10}+m_{10}{}^2}{m^3}=$$

$$=\frac{(a_2/a_0)(1+k)^2-(a_2/a_0)(1+k)-(a_1/a_0)(1+k)((a_1/a_0)+k(b_1/b_0))+((a_1/a_0)+k(b_1/b_0))^2}{(1+k)^3}$$

Коэффициент c_0 отличный от нуля только в статических системах. В системах с астатизмом 1-го порядка $c_0=0$, а коэффициент c_1 связан с *добротностью по скорости* соотношением $k_v=1/c_1$. В системах с астатизмом второго порядка $c_0=c_1=0$, а коэффициент c_2 связан с *добротностью по ускорению* соотношением $k_a=1/c_2$.

Лекция № 11
Методы повышения точности управления

1. Методы повышения точности управления
2. Инвариантность систем управления
3. Комбинированное управление

1. Методы повышения точности управления

Задача повышения точности системы предполагает пересмотр ее структуры. Возможны замены или добавления отдельных звеньев в контуре. Методами повышения точности системы являются:

1. Увеличение коэффициента передачи k разомкнутой системы.
2. Повышение порядка астатизма ν.
3. Применение регулирования по производным.

1. *Повышение точности систем увеличением коэффициента передачи*. Ошибка системы:

$$X(s) = W_{\text{зам}}(s)_X \cdot G(s) = \frac{1}{1 + k \cdot W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s),$$

будет тем меньше, чем больше k.

Так же первые коэффициенты ошибок не будут равны нулю, но будут тем меньше, чем больше k. Таким образом, увеличение k уменьшает ошибку отработки задающего воздействия.

Погрешность отработки задающего воздействия для статических систем: $\delta = c_0 = \dfrac{1}{1+k}$, для астатических систем: $\delta = c_1 = \dfrac{1}{k}$.

Метод эффективен, широко применяется, но увеличение k приводит к уменьшению запаса устойчивости, так как с ростом коэффициента передачи разомкнутой системы растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении $k = k_{\text{кр}}$ АФЧХ пройдет через критическую точку и попадет на границу устойчивости, а при $k > k_{\text{кр}}$ замкнутая САУ станет неустойчива.

Однако в случае «клювообразных» АФЧХ не только увеличение, но и уменьшение k может привести к потере устойчивости замкнутых систем (рис. 1). В этом случае запас устойчивости определяется двумя отрезками ΔL_1 и ΔL_2, заключенными между критической точкой и АФЧХ.

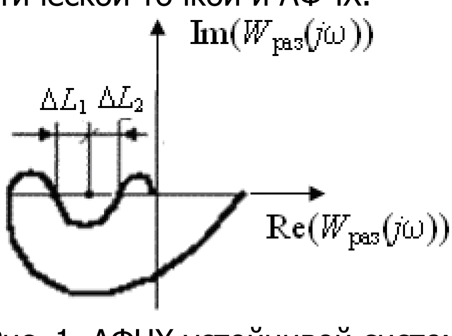


Рис. 1. АФЧХ устойчивой системы

2. *Повышение точности систем увеличением порядка астатизма*. Повышение порядка астатизма используется для устранения установившихся ошибок в типовых режимах движения: в неподвижном положении, при движении с

постоянной скоростью, при движении с постоянным ускорением. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибки системы, например $c_0 = 0$ при астатизме 1-го порядка, $c_0 = c_1 = 0$ при астатизме 2-го порядка, или $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ при астатизме 3-го порядка.

Физически повышение астатизма осуществляется за счет введения в канал системы интегрирующих звеньев. Однако в определенных случаях введение астатизма приведет к потере устойчивости, поэтому необходимо использовать корректирующие устройства.

3. *Повышение точности систем применением регулирования по производным от ошибки*. Использование регулирования по производным от ошибки, позволяет повысить точность системы так как:

— система начнет чувствовать не просто наличие ошибки, но и тенденцию к ее изменению;

— повышается запас устойчивости по фазе и можно поднять общий коэффициент усиления.

Передаточная функция дифференцирующего элемента (рис. 2):

$$W_d(s) = T_d s + 1,$$

где T_d — постоянная времени дифференцирующего элемента.

Раскладывая в ряд передаточную функцию системы по ошибке $W_{\text{зам}}(s)_X$, получим соотношения для коэффициентов ошибок:

$$c_0 = \frac{1}{1+k},$$

$$c_1 = \frac{const}{(1+k)^2} - \frac{T_d}{(1+k)^2} + \ldots,$$

$$c_2 = \frac{const}{(1+k)^3} - \frac{T_d \cdot const}{(1+k)^3} + \ldots, \ldots$$

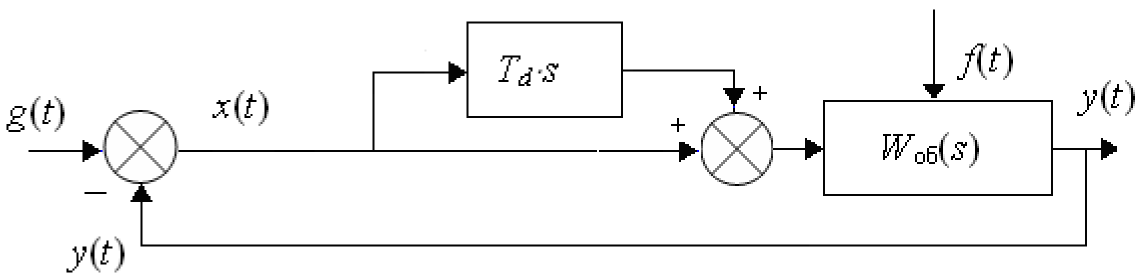


Рис. 2. Структурная схема регулирования по производным от ошибки

Сравнивая полученные коэффициенты с исходными можно увидеть, что все, кроме c_0, уменьшаются. При соответствующем выборе T_d можно обратить в ноль один из старших коэффициентов c_1, или c_2, или ...

2. Инвариантность систем управления

Одним из способов, позволяющих получить высокую точность в системах автоматического управления, является использование методов *теории инвариантности*.

Система является *инвариантной по отношению к возмущающему воздействию*, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, управляемая величина и ошибка системы не зависят от этого воздействия.

Система является *инвариантной по отношению к задающему воздействию*, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, ошибка системы не зависит от этого воздействия.

Оба этих понятия имеют общую математическую трактовку. Рассмотрим эту трактовку для случая, когда на систему действует одно входное воздействие — задающее $g(t)$ или возмущающее $f(t)$. Пусть для ошибки системы имеет место дифференциальное уравнение:

$$(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)X(s) = (b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0)\psi(s), \quad (1)$$

где $\psi(t)$ — задающее или возмущающее воздействие.

Решение этого уравнения имеет две составляющие — свободную $x_{\text{св}}(t)$ и вынужденную $x_{\text{вын}}(t)$. Свободная составляющая определяется общим решением уравнения (1) без правой части, а вынужденная — частным решением уравнения (1) с правой частью.

Изображение ошибки $x(t)$ при нулевых начальных условиях можно представить в следующем виде:

$$X(s) = \frac{Q(s)}{D(s)}\psi(s) = \frac{Q(s)}{D(s)}\frac{A(s)}{B(s)}, \quad (2)$$

$$Q(s) = b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0,$$

где $D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$,

$$\psi(s) = \frac{A(s)}{B(s)}.$$

Оригинал (2) может быть представлен в виде:

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-s_i t} + \sum_{j=1}^{l} F_j e^{-s_j t}, \quad (3)$$

где s_i— полюсы передаточной функции (корни уравнения $D(s) = 0$), а s_j — полюсы входного воздействия (корни уравнения $B(s) = 0$).

Вынужденная составляющая $x_{\text{вын}}(t)$ будет равна нулю в следующих случаях.

1. Если $A(s) = 0$, то $x_{\text{вын}}(t) = 0$. Этот случай является тривиальным, так как соответствует отсутствию входного воздействия, и он не представляет интереса.

2. Если $Q(s) = 0$, то также $x_{\text{вын}}(t) = 0$. Этот случай соответствует *абсолютной инвариантности системы по отношению к входному воздействию* $\psi(t)$, которое может быть любой функцией времени, т. е. меняться по произвольному закону.

В следящих системах при рассмотрении задающего воздействия условие $Q(s) = 0$ означает, что равна нулю передаточная функция по ошибке: $W_{\text{зам}}(s)_X = 0$. В иной записи это означает равенство единице передаточной функции замкнутой системы: $W_{\text{зам}}(s) = 1 - W_{\text{зам}}(s)_X = 1$. Это условие приводит к тому, что следящая система должна иметь бесконечную полосу пропускания, так как частотная передаточная функция замкнутой системы $W_{\text{зам}}(j\omega) = 1$ при всех частотах $0 < \omega < \infty$. В реальных системах реализовать бесконечную полосу пропускания невозможно, поэтому реализация абсолютной инвариантности по задающему воздействию сталкивается с принципиальными трудностями.

При рассмотрении возмущающего воздействия условие $Q(s)=0$ означает равенство нулю передаточной функции по возмущающему воздействию: $W_{\text{зам}}(s)_F=0$. Здесь в принципе возможно получение абсолютной инвариантности поданному возмущению, однако в большинстве случаев приходится иметь дело со значительными техническими трудностями.

3. Равенство нулю вынужденной составляющей будет наблюдаться для таких входных функций, изображения которых имеют все полюсы, т. е. все корни уравнения $B(s)=0$, совпадающие с нулями передаточной функции, т. е. с корнями уравнения $Q(s)=0$. В этом случае после разложения на множители полиномов $B(s)$ и $Q(s)$ можно сократить одинаковые сомножители вида $(s-s_i)$ в числителе и знаменателе изображения (2). В результате второе слагаемое в выражении (3) обращается в ноль и $x_{\text{вын}}(t)=0$.

Этот случай соответствует *частичной инвариантности*, т. е. система будет инвариантна к входным воздействиям определенного вида.

Вводится также понятие *инвариантности системы по отношению к какому-либо входному воздействию с точностью до* ε. Здесь имеется в виду не тождественное равенство нулю вынужденной составляющей ошибки $x_{\text{вын}}(t)$, а приближенное равенство, мерой выполнения которого является некоторая величина ε. Для оценки выполнения инвариантности до ε существуют различные критерии.

Основным методом, используемым при построении инвариантных систем, является применение комбинированного управления.

3. Комбинированное управление

Под *комбинированным управлением* понимается такой метод построения замкнутых автоматических систем, когда, наряду с управлением по отклонению (ошибке), используется управление по задающему или возмущающему воздействию. Таким образом, в системе комбинированного управления осуществляется управление по замкнутому и разомкнутому циклам.

Комбинированное управление по отклонению и по задающему воздействию. Рассмотрим вначале случай, когда дополнительно к управлению по отклонению $x(t)$ используется управление по задающему воздействию $g(t)$. Структурная схема такой системы изображена на рис. 1, *а*.

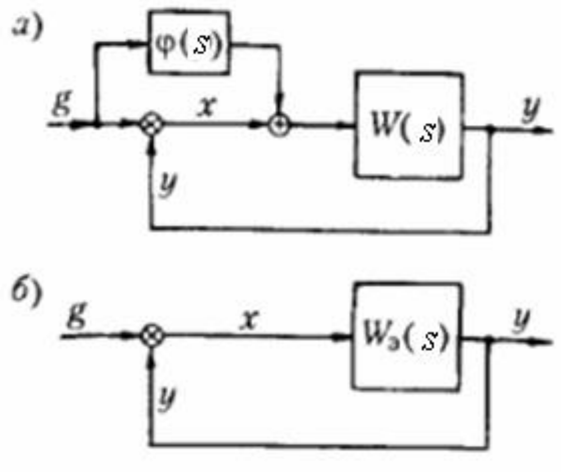


Рис. 1.

В случае отсутствия управления по задающему воздействию, т. е. при $\varphi(s)=0$, управляемая величина $y(t)$ связана с задающим воздействием $g(t)$ через передаточную функцию замкнутой системы:

$$y=\Phi(s)g=\frac{W(s)}{1+W(s)}g\text{ , (1)}$$

где $W(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

При введении управления по задающему воздействию управляемая величина определяется выражением:

$$y=\frac{W(s)}{1+W(s)}(1+\varphi(s))g=\Phi_э(s)g\text{ .}$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом управления по задающему воздействию:

$$\Phi_э(s)=\frac{W(s)}{1+W(s)}(1+\varphi(s))\text{. (2)}$$

Из последнего выражения видно, в частности, что введение управления по задающему воздействию не меняет характеристического уравнения системы, работающей по отклонению, так как знаменатель передаточной функции замкнутой системы одинаков в (1) и (2). Это обстоятельство является замечательным свойством систем комбинированного управления.

Введение дополнительного управления по задающему воздействию не меняет левой части дифференциального уравнения. Это означает, что не будут нарушаться не только условия устойчивости, но сохранятся оценки качества переходного процесса, базирующиеся на использовании корней характеристического уравнения.

Из выражения (2) могут быть найдены эквивалентная (т. е. с учетом управления по задающему воздействию) передаточная функция по ошибке:

$$\Phi_{хэ}(s)=1-\Phi_э(s)=\frac{1-\varphi(s)W(s)}{1+W(s)}\text{ (3)}$$

и передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_э(s)=\frac{\Phi_э(s)}{1-\Phi_э(s)}=\frac{(1+\varphi(s))W(s)}{1-\varphi(s)W(s)}\text{.}$$

Переход к эквивалентной передаточной функции разомкнутой системы позволяет заменить структурную схему системы комбинированного управления эквивалентной ей обычной схемой системы, работающей по отклонению (рис. 1, *б*).

Из формулы (3) для передаточной функции по ошибке можно найти условие *полной инвариантности системы*. Положив $\Phi_{хэ}(t)=0$, получаем:

$$\varphi(s)=\frac{1}{W(s)}\text{ .}$$

Разложив последнее выражение в ряд по возрастающим степеням оператора s, получим необходимый вид передаточной функции:

$$\varphi(s)=a_0+\tau_1 s+\tau_2^2 s^2+\tau_3^3 s^3+\ldots\text{ (4)}$$

Этот ряд может быть конечным и бесконечным. Первое слагаемое (4) в астатических системах и в большинстве статических систем оказывается равным нулю.

Таким образом, при введении управления по задающему воздействию для получения полной инвариантности необходимо вводить первую и высшие производные от задающего воздействия.

Обычно точно можно ввести только в некоторых случаях первую производную, а все последующие производные могут быть получены приближенно при помощи использования известных дифференцирующих звеньев. Поэтому практически может быть получена не полная, а *частичная инвариантность*. Это соответствует введению ограниченного числа первых членов разложения (4).

Так, например, введением первой производной от задающего воздействия в системе с астатизмом первого порядка можно получить равной нулю скоростную ошибку, т. е. повысить степень астатизма относительно задающего воздействия на единицу. Вводя первую и вторую производные (даже приближенно), можно повысить степень астатизма на два и т. д. Это дает обращение в нуль соответствующих коэффициентов ошибки.

В некоторых случаях сигнал по задающему воздействию может вводиться не непосредственно на вход системы, как это показано на рис. 1, а в некоторую точку внутри канала управления (рис. 2).

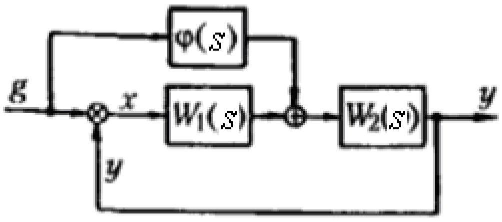


Рис. 2.

Комбинированное управление по отклонению и по возмущающему воздействию. Комбинированное управление может быть использовано также для снижения ошибки от возмущающего воздействия (рис. 3). В этом случае наряду с управлением по отклонению $x(t)$ используется управление по возмущающему воздействию $f(t)$. Передаточная функция замкнутой системы по возмущению будет иметь вид:

$$\Phi_f(s) = \frac{W_f(s) - \varphi(s)W(s)}{W(s)},$$

где $W_f(s)$ — передаточная функция по данному возмущению в разомкнутой системе; $W(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

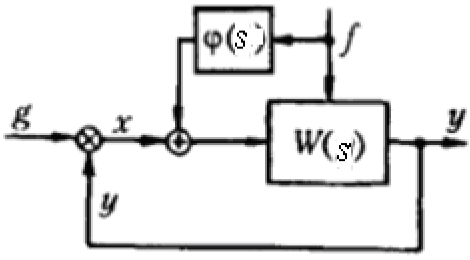


Рис. 3.

Условие полной инвариантности может быть получено, если положить $\Phi_f(s)=0$. Тогда:

$$\varphi(s)=\frac{W_f(s)}{W(s)}.$$

Эта функция также может быть представлена в виде ряда:

$$\varphi(s)=k_f\left(a_0+\tau_1 s+\tau_2^2 s^2+\tau_3^3 s^3+\ldots\right) \quad (5)$$

где a_0 — безразмерное число (1 или 0); k_f — коэффициент, размерность которого совпадает с размерностью передаточной функции $W_f(s)$.

Как и в случае использования управления по задающему воздействию, получение полной инвариантности затрудняется необходимостью вводить первую и более высокие производные от возмущения $f(t)$. Поэтому используется, как правило, частичная инвариантность, получающаяся при реализации в системе первых членов разложения (5). Это в свою очередь дает обращение в ноль соответствующих первых коэффициентов ошибки по возмущению (c_0, c_1, c_2 и т. д.).

Возможно использование комбинированных систем с введением управления по нескольким возмущающим воздействиям и получением полной или частичной инвариантности по каждому из них. Однако это приводит, конечно, к усложнению схемы.

Лекция № 12
Управляемость и наблюдаемость, чувствительность и робастность систем управления

1. Управляемость и наблюдаемость систем управления
2. Чувствительность и робастность систем управления

1. Управляемость и наблюдаемость систем управления

Управляемость означает возможность перевода системы из одного состояния в другое за конечное время, а *наблюдаемость* — возможность определения состояния системы за конечное время по информации о входах и выходах. Эти свойства необходимо учитывать при построении большинства систем управления.

Управляемость. Система является *управляемой*, если существует такое неограниченное управление $u(t)$, определенное на конечном интервале времени $t_0 \le t \le t_k$, которое может перевести систему из произвольного начального состояния $x(t_0)$ в любое другое заданное состояние $x(t_k)$.

Для оценки управляемости системы с одним входом, описываемой уравнением:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t),\\ y(t)&=Cx(t),\end{aligned} \quad (1)$$

вводится понятие *матрицы управляемости* U, которая выражается через A, B следующим образом:

$$U = \left(B\ AB\ A^2B \ldots A^{n-1}B\right), \text{ (2)}$$

и имеет размерность $(n \times n)$.

Поскольку матрица D не оказывает влияния на свойства управляемости и наблюдаемости, ее можно не учитывать в описании, т. е. считать нулевой.

Если матраца управляемости *U* невырожденная (определитель матрицы U не равен нулю), т. е. ее ранг равен *n*, то система является управляемой.

Невырожденная матраца — квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае она называется *вырожденной*.

Ранг — максимальная размерность матрицы, определитель которой не равен нулю.

В соответствии с критерием (2) свойство управляемости целиком определяется парой матриц (*A*, *B*), поэтому часто говорят об *управляемости пары* (*A*, *B*).

Для системы с несколькими входами: B — матрица входа размерности $(n \times r)$, а $u(t)$ — вектор входа размерности $(r \times 1)$. Условием управляемости такой системы также является невырожденность матрицы управляемости *U*.

Ответить на вопрос, является ли система управляемой, можно и другим способом. Для этого необходимо определить имеются ли пути от управляющего сигнала $u(t)$ к каждой из переменных состояния. Если такие пути существуют, то система может быть управляемой.

Более сильной формой управляемости является *нормализуемость* (*нормальность*). Говорят, что система является нормализуемой, если каждая координата вектора управляющих воздействий $u(t)$ в отдельности обеспечивает управляемость.

Для установления свойства нормализуемости («сильной» управляемости) для системы с r входами составляются матрицы управляемости:

$$U_i = (B_i \quad AB_i \quad A^2B_i \ldots A^{n-1}B_i),\ i = 1..r,$$

где B_i — i-ый столбцы матрицы *B*.

Система полностью нормализуема тогда и только тогда, когда для всех $i = 1..r$, выполняются условия $\operatorname{rank} U_i = n$.

Очевидно, система управляема, если выполняется критерий нормализуемости, однако обратное утверждение неверно. При скалярном управлении (система имеет один входной сигнал) оба критерия совпадают.

Наблюдаемость. *Наблюдаемость* связана со способностью оценивать переменные состояния. Говорят, что система является наблюдаемой, если каждая переменная состояния вносит свой вклад в выходной сигнал системы.

Система является наблюдаемой тогда и только тогда, если существует конечное время T такое, что начальное состояние $x(0)$ может быть определено в результате наблюдения выходной переменной $y(t), t \in T$, при заданном управлении $u(t)$.

Рассмотрим систему с одним выходом, описываемую уравнениями:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Система является наблюдаемой, если определитель матрицы V размерности $n \times n$ отличен от нуля, т. е.:

$$\operatorname{rank} V = n, \text{ (3)}$$

где $V=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix}$ — *матраца наблюдаемости.*

Таким образом, для наблюдаемости необходимо чтобы матрица *V* была невырожденной.

В соответствии с критерием (3) свойство наблюдаемости целиком определяется парой матриц (*A*, *C*), поэтому часто говорят о *наблюдаемости пары* (*A*, *C*).

Для системы с несколькими выходами: C — матрица выхода размерности $(p \times n)$, а $y(t)$ — вектор выхода размерности $(p \times 1)$. Условием наблюдаемости такой системы также является невырожденность матрицы наблюдаемости *V*.

Полная наблюдаемость системы означает возможность определения состояния $x(t)$ по будущим значениям векторов $y(\tau)$, $u(\tau)$, что практически не осуществимо. Поэтому в задачах управления более важным обстоятельством является установление свойства *полной восстанавливаемости вектора* $x(t)$ по прошлым значениям векторов $y(\tau)$, $u(\tau)$.

Система (объект) называется *полностью* или *вполне восстанавливаемой*, если существует такой момент времени t_0, $(t < t_0 < \infty)$, что по данным измерений $y(\tau)$, $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_\kappa]$ можно определить состояние $x(t)$.

Для линейных стационарных систем из свойства полной наблюдаемости следует свойство полной восстанавливаемости и наоборот.

2. Чувствительность и робастность систем управления

Чувствительность систем управления. Объект управления подвержен влиянию окружающей среды, старению, отсутствию точной информации о его параметрах и других объективных факторов, которые негативно сказываются на его поведении. В разомкнутой системе все эти факторы приводят к отклонению выходной переменной от желаемого значения. Замкнутая система, напротив, чувствует это отклонение, обусловленное изменениями параметров объекта, и пытается скорректировать выходную переменную.

Степень влияния изменения отдельных параметров на различные характеристики системы оценивается посредством чувствительности. *Чувствительностью* называется показатель, характеризующий свойство системы изменять режим работы при отклонении того или иного ее параметра от номинального значения. В качестве оценки чувствительности используются так называемые *функции чувствительности*, представляющие собой частные производные i-й координаты системы по вариации j-го параметра:

$$u_{ij}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\right)^0 .$$

Нулевым индексом сверху отмечено то обстоятельство, что частные производные должны приниматься равными значениям, соответствующим номинальным параметрам.

Функции чувствительности временных характеристик. Посредством этих функций чувствительности оценивается влияние малых отклонений параметров системы от расчетных значений на временные характеристики системы (переходную функцию, функцию веса и др.).

Исходной системой называют систему, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций. Этой системе соответствует так называемое *основное движение*.

Варьированной системой называют такую систему, у которой произошли вариации параметров. Движение ее называют *варьированным движением*.

Дополнительным движением называют разность между варьированным и основным движением.

Пусть система имеет передаточную функцию вида:

$$W(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0}=\frac{Y(s)}{G(s)},$$

Управляемая величина определяется следующим образом:

$$y(t)=L^{-1}\{y(s)\}=L^{-1}\{W(s)\cdot G(s)\}.$$

Допустим, например, вариацию претерпевает коэффициент a_j. Тогда дифференцирование управляемой величины по a_j, даст функцию чувствительности по этому параметру:

$$u_j(t)=\left(\frac{\partial y(t)}{\partial a_j}\right)^0.$$

Дополнительное движение при этом будет: $\Delta y(t)=u_j(t)\Delta a_j$, где Δa_j — вариация коэффициента a_j.

Функции чувствительности передаточных функций. Для нахождения функций чувствительности и дополнительного движения удобно использовать передаточные функции системы. В этом случае функция чувствительности определяется следующим образом:

$$u_j(t)=\left(\frac{\partial y(t)}{\partial a_j}\right)^0=L^{-1}\left\{\left(\frac{\partial Y(s)}{\partial a_j}\right)^0\right\}=L^{-1}\left\{\left(\frac{\partial W(s)}{\partial a_j}\right)^0\cdot G(s)\right\}=L^{-1}\{S_j(s)\cdot G(s)\}.$$

Здесь введена *функция чувствительности передаточной функции*:

$$S_j(s)=\left(\frac{\partial W(s)}{\partial a_j}\right)^0,$$

которая позволяет определить дополнительную передаточную функцию:

$$\Delta W_j(s)=S_j(s)\cdot\Delta a_j.$$

Робастность систем управления. Обычно регулятор строится на основе некоторых приближенных (номинальных) моделей объекта управления (а также приводов и датчиков) и внешних возмущений. При этом поведение реального объекта и характеристики возмущений могут быть несколько иными. Поэтому требуется, чтобы разработанный регулятор обеспечивал устойчивость и приемлемое качество системы при малых отклонениях свойств объекта и внешних возмущений от номинальных моделей. В современной теории управления это свойство называют *роба́стностью* (*грубостью*). Иначе ею можно назвать *нечувствительностью к малым ошибкам моделирования объекта и возмущений*.

Различают несколько задач, связанных с робастностью:

— *робастная устойчивость* — обеспечить устойчивость системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной;

— *робастное качество* — обеспечить устойчивость и заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной:

— *гарантирующее управление* — обеспечить заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели возмущения от номинальной (считая, что модель объекта известна точно).

Робáстное управление — совокупность методов теории управления, целью которых является синтез такого регулятора, который обеспечивал бы хорошее качество управления, если объект управления отличается от расчетного или его математическая модель неизвестна.

Системы, обладающие свойством робастности, называются *робастными* (*грубыми*) *системами*.

Обычно робастные регуляторы применяются для управления объектами с неизвестной или неполной математической моделью. В этом случае возникает *параметрическая неопределенность*, это означает, что структура модели известна, а ее параметры могут отличаться от номинальных значений.

Например, пусть объект имеет характеристическое уравнение следующего вида:

$$D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 ,$$

где коэффициенты $a_0,\ldots,a_n$ точно неизвестны, но принадлежат интервалам $a\min_i \le a_i \le a\max_i ,\ \ i = 1,\ldots,n$.

Для проверки устойчивости системы необходимо проверить на устойчивость практически бесконечное число возможных характеристических полиномов.

В этом случае используют *теорему Харитонова* (приводится без доказательства), которая позволяет проверить робастную устойчивость характеристического полинома $D(s)$: полином $D(s)$ устойчив при всех возможных значениях коэффициентов тогда и только тогда, когда устойчивы четыре *полинома Харитонова*:

$$D_1(s) = a\min_0 + a\min_1 s + a\max_2 s^2 + a\max_3 s^3 + a\min_4 s^4 + a\min_5 s^5 + \ldots$$

$$D_2(s) = a\max_0 + a\max_1 s + a\min_2 s^2 + a\min_3 s^3 + a\max_4 s^4 + a\max_5 s^5 + \ldots$$

$$D_3(s) = a\min_0 + a\max_1 s + a\max_2 s^2 + a\min_3 s^3 + a\min_4 s^4 + a\max_5 s^5 + \ldots$$

$$D_4(s) = a\max_0 + a\min_1 s + a\min_2 s^2 + a\max_3 s^3 + a\max_4 s^4 + a\min_5 s^5 + \ldots$$

Лекция № 13
Корректирующие устройства

1. О корректирующих средствах
2. Последовательные корректирующие звенья
3. Параллельные корректирующие звенья
4. Обратные связи
5. Типовые линейные законы управления

1. О корректирующих средствах

В теории автоматического управления можно выделить две основные задачи:

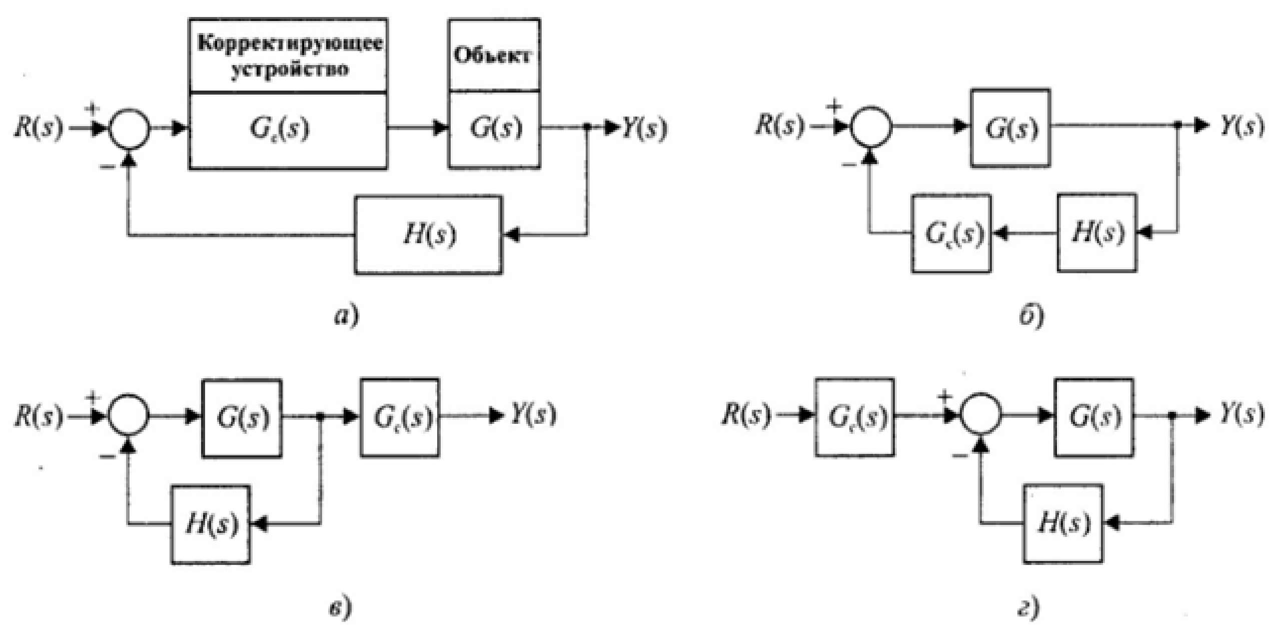
1) в заданной системе оценить переходные процессы — это *задача анализа системы управления*;

2) по заданным переходным процессам и показателям качества разработать систему — это *задача синтеза* (*коррекции*) *системы управления*.

При решении второй задачи требуется синтезировать *корректирующие устройства*, то есть выбрать их схему и параметры. Корректирующие устройства дополнительно вводятся в систему управления с целью обеспечения желаемых показателей качества и точности.

Проблема получения требуемых качественных показателей — точности в типовых режимах, запаса устойчивости и быстродействия — является единой и ни один из входящих в нее вопросов не может решаться в отрыве от других. Это делает всю проблему весьма сложной, что заставляет в некоторых случаях получать требуемое решение посредством последовательного приближения и рассмотрения многих вариантов.

Для простой одноконтурной системы управления несколько вариантов коррекции приведены на рис. 1. Выбор места размещения корректирующего устройства зависит от требований к качеству системы, от уровня мощности сигнала в различных точках системы и от имеющихся в наличии технических устройств.



Виды коррекции. (*а*) Последовательная коррекция. (*б*) Корректирующее устройство в цепи обратной связи. (*в*) Коррекция по выходу, или по нагрузке. (*г*) Коррекция по входу

Рис. 1.

Звенья последовательного типа особенно удобно применять в тех случаях, когда в системе управления используется электрический сигнал в виде напряжения постоянного тока, величина которого функционально связана с сигналом ошибки $u(t)=f(x,t)$, например, линейной зависимостью $u(t)=kx(t)$.

Звенья параллельного типа удобно применять в тех случаях, когда необходимо осуществить сложный алгоритм управления с введением интегралов и производных от сигнала ошибки.

Обратные связи находят наиболее широкое применение вследствие простоты технической реализации. Это объясняется тем обстоятельством, что на вход обратной связи поступает сигнал сравнительно высокого уровня, часто даже непосредственно с выхода системы. Другое не менее важное обстоятельство заключается в том, что корректирующие устройства различного типа оказывают различное влияние на содержащиеся в системе нелинейности. Если обратная связь охватывает участок канала управления, содержащий какую-либо нелинейность, например силы трения, люфт, зону нечувствительности и т. п., то влияние этой нелинейности на протекание процессов в системе меняется существенным образом.

Отрицательные обратные связи имеют свойство уменьшать влияние нелинейностей тех участков цепи, которые ими охватываются. Так как практически все системы содержат те или иные нелинейности, ухудшающие качество управления, то использование корректирующих устройств в виде отрицательных обратных связей, как правило, дает возможность добиться лучших результатов по сравнению с другими типами корректирующих устройств.

Аналогичным образом отрицательные обратные связи дают значительно лучший эффект в тех случаях, когда вследствие воздействия внешних факторов (время, температура и т. и.) меняется коэффициент усиления какой-либо части цепи, охватываемой отрицательной обратной связью.

Положительные обратные связи находят значительно меньшее распространение в качестве корректирующих средств по сравнению с отрицательными. Применяются в качестве корректоров ошибки.

2. Последовательные корректирующие звенья

Корректирующие звенья последовательного типа могут составляться из различных по своей физической природе элементов: электрических, механических, гидравлических и т. д. Наиболее просто такие звенья могут быть составлены из электрических *R*-, *C*- и *L*-элементов или реализованы на операционных усилителях.

Последовательные звенья из *R*-, *C*- и *L*-элементов называют *пассивными последовательными корректирующими устройствами*, так как они не содержат источников электродвижущих сил.

Существует большое количество пассивных последовательных звеньев. В некоторых книгах и справочниках приводятся таблицы, содержащие схемы сотен звеньев различного вида.

Пассивные дифференцирующие звенья подавляют низкие частоты и вносят положительный фазовый сдвиг. Подавление низких частот обычно недопустимо, так как снижает коэффициент передачи разомкнутой системы и увеличивает ошибки системы.

Пассивные интегрирующие звенья подавляют усиление на высоких частотах и вносят в некотором интервале частот отрицательный фазовый сдвиг.

3. Параллельные корректирующие звенья

Параллельные корректирующие звенья удобно применять при использовании сложных алгоритмов управления, когда наряду с основным сигналом вводятся его производные или интегралы. Введение интегралов преследует цель снижения установившейся ошибки. Введение производных преследует обычно цель обеспечения устойчивости.

Варианты параллельного включения дифференцирующих звеньев показаны на рис. 1. Получение производной второго порядка при помощи одного звена является затруднительным. Поэтому схема, изображенная на рис. 1, *б* используется редко. Введение второй производной дополнительно к первой производной осуществляется обычно по каскадным схемам, изображенным на рис. 1, *в* и 1, *г*. Для первой из них (рис. 1, *в*) результирующая передаточная функция будет:

$$W(s) = 1 + T_1 s + T_1 T_2 s^2, \quad (1)$$

а для второй (рис. 1, *г*) —

$$W(s) = 1 + (T_1 + T_2)s + T_1 T_2 s^2. \quad (2)$$

На рис. 1 дифференциаторы изображены идеальными. Более вероятно, что они будут представлять собой дифференцирующие звенья с замедлением.

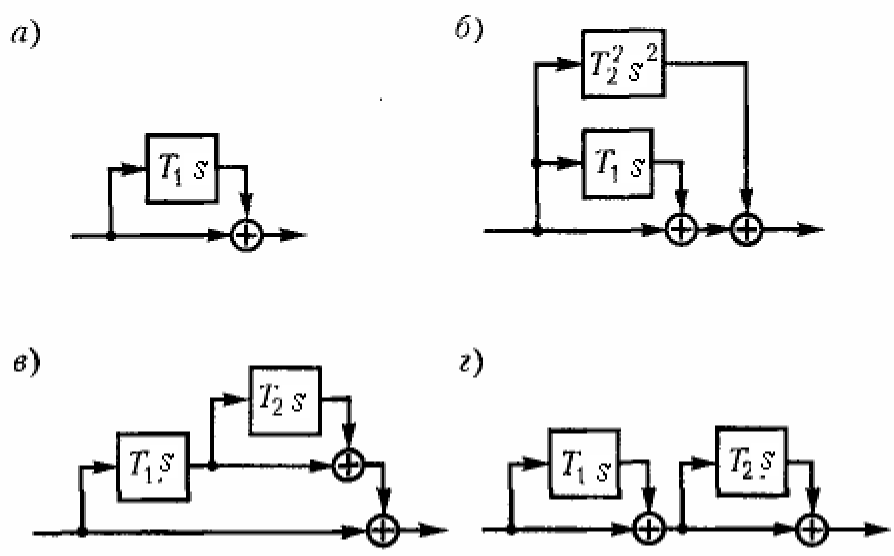


Рис. 1.

Введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой интеграторы, соответствует поднятию нижних частот. Введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой дифференциаторы, соответствует поднятию верхних частот. Это можно видеть из формул (1) и (2).

4. Обратные связи

Обратные связи могут быть положительными и отрицательными. Кроме того, обратные связи могут быть *жесткими* и *гибкими*.

Рассмотрим передаточную функцию замкнутой системы, записанную для случая отрицательной обратной связи. Из этого выражения найдем передаточную функцию для установившегося режима, для чего необходимо положить s = 0:

$$W_{ск}(0) = \frac{W_c(0)}{1 + W_c(0)W_{oc}(0)}. \quad (1)$$

Здесь может быть два случая. Если выполняется условие $W_{oc}(0) = 0$, что будет при использовании в цепи обратной связи дифференцирующих элементов, то в установившемся режиме $W_{ск}(0) = = W_c(0)$. Это означает, что в этом режиме передаточная функция цепи, охваченной обратной связью, будет равна передаточной функции исходной цепи. Такая обратная связь называется *гибкой*. Таким образом, гибкая обратная связь действует только в переходных режимах, а в установившемся режиме она как бы отключается.

Если $W_{oc}(0) \neq 0$, то обратная связь действует не только в переходном, но и в установившемся режиме. В этом случае обратная связь называется *жесткой*.

Случай, когда звено, охватываемое обратной связью, относится к числу интегрирующих звеньев и $W_c(0) \to \infty$ не вносит особенностей. Здесь по-прежнему условие $W_{oc}(0) = 0$ будет соответствовать случаю гибкой обратной связи, так как числитель (1) будет стремиться к бесконечности быстрее, чем знаменатель, и результирующая передаточная функция $W_{ск}(0) \to \infty$ так же, как и передаточная функция исходной цепи.

Понятие гибкой или жесткой обратной связи связано с той величиной, которая принимается в качестве выходной в исходном звене. Так, например, обратная связь может быть гибкой по отношению к углу поворота вала двигателя и жесткой по отношению к скорости его вращения, которая является первой производной от угла поворота.

На рис. 1, *а* и 1, *б* изображены примеры гибкой и жесткой отрицательных обратных связей. Обратной связью замыкается апериодическое звено с передаточной функцией:

$$W_c(s) = \frac{k_c}{1+T_c s}.$$

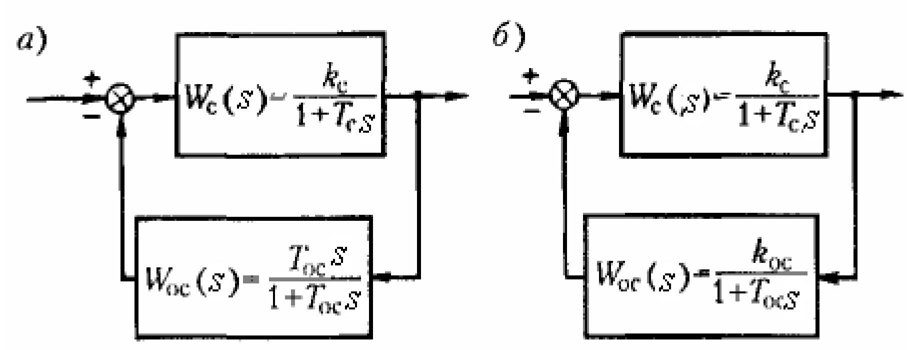


Рис. 1.

В первом случае (рис. 1, *а*) обратная связь представляет собой дифференцирующее звено с замедлением с передаточной функцией:

$$W_{oc}(s) = \frac{T_{oc} s}{1+T_{oc} s}.$$

Результирующая передаточная функция:

$$W_{ск}(s) = \frac{W_c(s)}{1+W_c(s)W_{oc}(s)} = \frac{k_c(1+T_{oc} s)}{1+(T_c+T_{oc}+k_c T_{oc})s+T_c T_{oc} s^2}.$$

Результирующий коэффициент передачи в установившемся состоянии равен k_c, так же, как и в исходном апериодическом звене. Таким образом, эта обратная связь является гибкой. Наличие дифференцирующего элемента в цепи обратной связи и привело к получению гибкой обратной связи.

Во втором случае (рис. 1, *б*) обратная связь представляет собой апериодическое звено с передаточной функцией:

$$W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}}{1+T_{oc} s}.$$

Результирующая передаточная функция:

$$W_{ск}(s) = \frac{W_c(s)}{1+W_c(s)W_{oc}(s)} = \frac{k_c(1+T_{oc} s)}{1+k_c k_{oc}+(T_c+T_{oc})s+T_c T_{oc} s^2} =$$

$$= \frac{k_{ск}(1+T_{oc} s)}{1+\frac{T_c+T_{oc}}{1+k_c k_{oc}} s + \frac{T_c+T_{oc}}{1+k_c k_{oc}} s^2},$$

где $k_{ck} = \frac{k_c}{1+k_{oc} k_c}$ представляет собой новое значение коэффициента передачи звена, замкнутого обратной связью.

В рассмотренном случае обратная связь является жесткой, так как она изменяет коэффициент передачи звена в установившемся состоянии.

Весьма важным является случай, когда цепь обратной связи представляет собой безынерционное звено с передаточной функцией $W_{\text{ос}}(s) = k_{\text{ос}}$. Этот случай легко получить из последних равенств, положив в них $T_{\text{ос}} = 0$. В результате для апериодического звена, замкнутого такой отрицательной обратной связью, получим:

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{k_{\text{с}}}{1 + k_{\text{с}} k_{\text{ос}}} \frac{1}{1 + \dfrac{T_{\text{с}} s}{1 + k_{\text{с}} k_{\text{ос}}}} = \frac{k_{\text{ск}}}{1 + T_{\text{ск}} s},$$

где

$$k_{\text{ск}} = \frac{k_{\text{с}}}{1 + k_{\text{с}} k_{\text{ос}}} \quad \text{и} \quad T_{\text{ск}} = \frac{T_{\text{с}}}{1 + k_{\text{с}} k_{\text{ос}}}.$$

Из этих выражений видно, что подобная отрицательная обратная связь уменьшает коэффициент передачи и постоянную времени апериодического звена в $1 + k_{\text{с}} k_{\text{ос}}$ раз, где $k_{\text{с}} k_{\text{ос}}$ представляет собой *коэффициент передачи по петле обратной связи*.

В динамическом отношении отрицательные обратные связи могут оказывать самое различное действие. Можно наметить три основных вида отрицательных обратных связей:

— обратные связи, подавляющие высокие частоты (аналоги пассивного последовательного интегрирующего звена);

— обратные связи, подавляющие низкие частоты (аналоги пассивного последовательного дифференцирующего звена);

— обратные связи, подавляющие средние частоты (аналоги пассивного последовательного интегро-дифференцирующего звена).

Положительные обратные связи. Встречается применение положительных обратных связей в качестве *корректоров ошибки* (рис. 2).

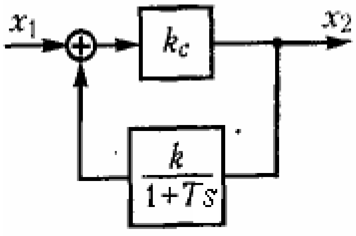


Рис. 2.

Прямая цепь представляет собой безынерционное звено с передаточной функцией $W_{\text{с}}(s) = k_{\text{с}}$, а в цепи обратной связи установлено апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией $W_{\text{ос}}(s) = \dfrac{k}{Ts + 1}$. Результирующая передаточная функция:

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{k_{\text{с}}(1 + Ts)}{1 - k_{\text{с}} k + Ts}. \qquad (2)$$

При выполнении условия $k_{\text{с}} k = 1$ формула (2) будет соответствовать передаточной функции изодромного устройства. Это позволяет построить изодромное устройство, повышающее астатизм системы, на базе апериодического звена, а не интегратора. Отсутствие интегратора упрощает схему, но точное выполнение требования $k_c k = 1$ затрудняется необходимостью тщательного масштабирования.

5. Типовые линейные законы управления

К типовым линейным законам управления относят следующие:

— пропорциональный (П-закон);
— интегральный (И-закон);
— пропорционально-интегральный (ПИ-закон);
— пропорционально-дифференциальный (ПД-закон);
— пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД-закон).

Пропорциональный П-закон управления. Уравнение пропорционального закона управления имеет вид:

$$u_\Pi(t) = k_P \cdot \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$ — ошибка управления; $g(t)$ и $x(t)$ — заданное и текущее значения управляемой переменной; k_P — коэффициент усиления звена.

Передаточная функция звена, реализующего П-закон:

$$W_\Pi(s) = k_P.$$

Повышение коэффициента усиления регулятора приводит к увеличению быстродействия и уменьшению статической ошибки регулирования, но снижает устойчивость системы.

Дифференциальный Д-закон управления. Дифференциальное уравнение Д-закона управления:

$$u_Д(t) = T_Д \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Передаточная функция Д-звена имеет вид:

$$W_Д(s) = T_Д s,$$

где $T_Д$ — постоянная времени звена, определяющая интенсивность воздействия по производной.

Д-закон не может выполнять функции главного регулятора. Это связано с тем, что он реагирует, согласно дифференциальному уравнению, лишь на скорость изменения ошибки и безразличен к ее абсолютному значению в установившемся состоянии ($u_Д = 0$ для $\varepsilon = \mathrm{const}$). Но в составе сложных законов управления он значительно повышает быстродействие и уменьшает динамическую ошибку управления за счет «предсказания» дальнейшего ее поведения.

Интегральный И-закон управления. Данный закон описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$T_И \frac{du_И(t)}{dt} = \varepsilon(t)$$

или

$$u_И(t) = \frac{1}{T_И} \int_{t_0}^{t} \varepsilon(t) \cdot dt,$$

где $T_И$ — время интегрирования. Увеличение $T_И$ приводит к замедлению нарастания управляющего сигнала при наличии ошибки управления.

Для И-звена передаточная функция описывается выражением:

$$W_{И}(s)=\frac{1}{T_{И}s}.$$

Этот закон называют управлением по накопленному опыту изменения ошибки. Его свойством является астатизм первого порядка, т. е. отсутствие установившейся ошибки. Это объясняется тем, что управляющий сигнал $u_{И}(t)$ меняется во времени до тех пор, пока $\varepsilon \neq 0$. Он как бы «ищет» такое значение управления, которое компенсирует влияние входного воздействия. Но поисковый характер И-закона определяет его основной недостаток — низкое быстродействие.

Сложные законы управления формируются путем суммирования элементарных составляющих, каждая из которых привносит свои положительные свойства и частично компенсирует недостатки других составляющих. Распространенными являются три составных типовых закона управления: ПД-ПИ- и ПИД-законы.

Лекция № 14

Классификация дискретных систем управления.

Представление данных в импульсной форме

1. **Типы сигналов и их преобразование**
2. **Достоинства и классификация дискретных систем управления**
3. **Решетчатые функции. Конечные разности решетчатых функций**
4. **Виды импульсной модуляции**

1. Типы сигналов и их преобразование

Типы сигналов. Выделяют следующие типы сигналов, которым соответствуют определенные формы их математического описания (рис. 1).

Аналоговый сигнал (analog signal) является непрерывной функцией непрерывного аргумента, т. е. определен для любого значения аргументов. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывные в динамике своего развития во времени, в пространстве или по любой другой независимой переменной, при этом регистрируемый сигнал подобен («аналогичен») порождающему его процессу. Множество возможных значений сигнала образует *континуум* — непрерывное пространство, в котором любая точка может быть определена с точностью до бесконечности. Примеры сигналов, аналоговых по своей природе: изменение напряженности электрического, магнитного, электромагнитного поля во времени и в пространстве.

Дискретный сигнал (discrete signal) по своим значениям также является непрерывной функцией, но определенной только по дискретным значениям аргумента. По множеству своих значений он является конечным (счетным) и описывается дискретной последовательностью отсчетов (samples) $f[kT_0]$, где T_0 — интервал между отсчетами (*шаг дискретизации*, sample time, *период дискретизации*); число k может принимать все целые значения от –∞ до +∞. Величина, обратная шагу дискретизации: $\omega_0=\frac{1}{T_0}$, называется *частотой дискретизации* (sampling frequency). При $T_0=const$ реализуется *равномерная* *дискретизация*, иначе — *неравномерная дискретизация сигнала*.

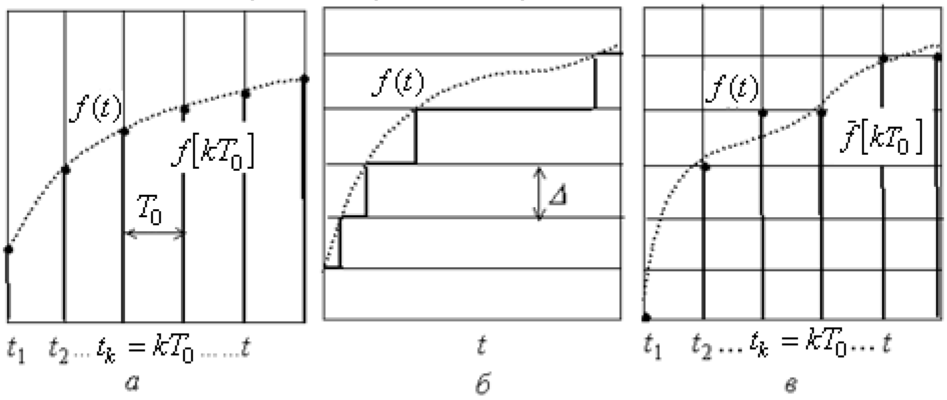


Рис. 1. Дискретизация функции по времени (*а*); квантование функции по уровню (*б*); дискретизация функции по времени и квантование по уровню (*в*)

Цифровой сигнал (digital signal) квантован по своим значениям и дискретен по аргументу. Он описывается функцией $f_k = Q_n\left(f[kT_0]\right)$, где Q_n — функция квантования с числом уровней квантования n, при этом интервалы квантования могут быть как с равномерным распределением, так и с неравномерным, например — логарифмическим. Δ — *шаг квантования*.

По существу, цифровой сигнал по своим значениям (отсчетам) является разновидностью дискретного сигнала при округлении отсчетов последнего до определенного количества цифр. Цифровой сигнал конечен по множеству своих значений.

В системах цифровой обработки данных и в ЭВМ сигнал всегда представлен с точностью до определенного количества разрядов, а, следовательно, всегда является цифровым. С учетом этих факторов при описании цифровых сигналов функция квантования обычно опускается (подразумевается равномерной по умолчанию), а для описания сигналов используются правила описания дискретных сигналов.

Преобразования типа сигналов. На разных этапах процессов получения и обработки информации материальное представление сигналов в устройствах регистрации и обработки и формы их математического описания при анализе данных могут изменяться путем соответствующих операций преобразования типа сигналов.

Операция дискретизации (discretization) осуществляет преобразование аналоговых сигналов (функций), непрерывных по аргументу, в функции мгновенных значений сигналов по дискретному аргументу. Дискретизация обычно производится с постоянным шагом по аргументу (*равномерная дискретизация*), при этом $f(t) \to f[kT_0]$, где значения $f[kT_0]$ представляют собой отсчеты функции $f(t)$ в моменты времени $t = kT_0$. Частота, с которой выполняются замеры аналогового сигнала, называется *частотой дискретизации*. В общем случае, сетка отсчетов по аргументу может быть произвольной или задаваться по определенному закону. В результате дискретизации непрерывный (аналоговый) сигнал переводится в последовательность чисел.

Операция восстановления аналогового сигнала из его дискретного представления обратна операции дискретизации и представляет, по существу, интерполяцию данных.

Дискретизация сигналов может приводить к определенной потере информации о поведении сигналов в промежутках между отсчетами. Однако существуют условия, определенные *теоремой Котельникова*, согласно которым аналоговый сигнал с ограниченным частотным спектром может быть без потерь информации преобразован в дискретный сигнал, и затем абсолютно точно восстановлен по значениям своих дискретных отсчетов.

Как известно, любая непрерывная функция может быть разложена на конечном отрезке в ряд Фурье, т. е. представлена в спектральной форме — в виде суммы ряда синусоид. Говорят, что сигнал имеет *ограниченный спектр*, если после определенной частоты F все коэффициенты спектра равны нулю, т. е. сигнал представляется в виде конечной суммы ряда Фурье.

Теоремой Котельникова: если спектр сигнала ограничен частотой F_m, то после дискретизации сигнала с частотой дискретизации $\omega_0 \geq 2F_m$ можно восстановить исходный непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно. Тогда шаг дискретизации должен удовлетворять следующему неравенству: $T_0 \leq \dfrac{1}{2F_m} = \dfrac{1}{\omega_0}$.

На практике эта теорема имеет огромное значение. Например, известно, что диапазон звуковых сигналов, воспринимаемых человеком, не превышает 20 кГц. Следовательно, при дискретизации записанных звуковых сигналов с частотой не менее 40 кГц мы можем точно восстановить исходный аналоговый сигнал по его цифровым отсчетам, что и выполняется в проигрывателях компакт-дисков для восстановления звука. Частота дискретизации звукового сигнала при записи на компакт-диск составляет 44100 Гц.

Пример 1. Для качественной передачи голоса по дискретному каналу используют частоту дискретизации амплитуды звуковых колебаний $\omega_0 = 8000$ Гц. Это связано с тем, что в аналоговой телефонии для передачи голоса был выбран диапазон от 300 до 3400 Гц, который достаточно качественно передает все основные гармоники голосов. В соответствии с теоремой Котельникова для качественной передачи голоса достаточно выбрать частоту дискретизации, в два раза превышающую самую высокую гармонику непрерывного сигнала, т. е.:

$$\omega_0 = 2F_m = 2 \cdot 3400 = 6800 \text{ Гц.}$$

Выбранная в действительности частота дискретизации 8000 Гц обеспечивает некоторый запас качества.

Операция квантования по уровню или аналого-цифрового преобразования (АЦП; Analog-to-Digital Converter, ADC) заключается в преобразовании дискретного сигнала (последовательности отчетов аналогового сигнала) в конечное число цифровых значений — в цифровой сигнал. Устройство, которое выполняет подобную функцию, называется *аналого-цифровым преобразователем* (АЦП).

Квантование представляет собой округление значения амплитуды, т. е. замену этого значения одним из разрешенных значений, отстоящих друг от друга на конечные интервалы. Шкала разрешенных значений называется *шкалой квантования*, а интервал между значениями — *шагом квантования*. Чем меньше шаг квантования, тем выше качество преобразования. Шкала квантования определяется разрядностью АЦП. Следовательно, по линии передаются не сами значения амплитуды сигнала, а номера уровней.

Возникающие при квантовании ошибки округления отсчетов называются *шумами* (noise) или о*шибками* (error) *квантования* (quantization).

Пример 2. Необходимо передать сигнал со значениями амплитуды в диапазоне от 0 до $X_{\max}$. Если используется 8 разрядное АЦП, то уровней квантования будет 256 (от 0 до 255), если 7 разрядное, то уровней квантования будет 128 (от 0 до 127) (2^8=256, 2^7=128).

Тогда квантованное значение амплитуды каждого замера определяется из пропорции:

$$\frac{X_{\text{квант}}{}^i}{255} = \frac{X_{\text{замер}}{}^i}{X_{\max}}, \qquad X_{\text{квант}}{}^i = \frac{X_{\text{замер}}{}^i \cdot 255}{X_{\max}},$$

или

$$\frac{X_{\text{квант}}{}^i}{127} = \frac{X_{\text{замер}}{}^i}{X_{\max}}, \qquad X_{\text{квант}}{}^i = \frac{X_{\text{замер}}{}^i \cdot 127}{X_{\max}},$$

где $X_{\text{квант}}{}^i$ — квантованное значение амплитуды i-го замера; $X_{\text{замер}}{}^i$ — амплитуда i-го замера; $X_{\max}$ — максимальное значение амплитуды сигнала.

При этом точность квантования будет равна $\delta = \frac{X_{\max}}{2^8} = \frac{X_{\max}}{256}$, поскольку число уровней квантования равно 256 (от 0 до 255) или $\delta = \frac{X_{\max}}{2^7} = \frac{X_{\max}}{128}$ при числе уровней квантования 128 (от 0 до 127). Таким образом, точность квантования равна высоте сетке квантования.

Операция цифро-аналогового преобразования (ЦАП; Digital-to-Analog Converter, DAC) обратна операции квантования, при этом на выходе регистрируется либо дискретно-аналоговый сигнал, который имеет ступенчатую форму, либо непосредственно аналоговый сигнал.

Так как квантование сигналов всегда выполняется с определенной и неустранимой погрешностью (не более половины интервала квантования), то операции АЦП и ЦАП не являются взаимно обратными с абсолютной точностью.

Пример 3. Передача непрерывного сигнала в дискретном виде требует от сетей жесткого соблюдения временного интервала в 125 мкс (соответствующего частоте дискретизации 8000 Гц: $T_0 = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{8000} = 125 \cdot 10^{-6}$ с) между соседними замерами, т. е. синхронной передачи данных между узлами сети. При несоблюдении синхронности прибывающих замеров исходный сигнал восстанавливается неверно, что приводит к искажению голоса, изображения или другой мультимедийной информации, передаваемой по цифровым сетям. Так, искажение синхронизации в 10 мс может привести к эффекту «эха», а сдвиги между замерами в 200 мс приводят к потере распознаваемости произносимых слов.

В то же время потеря одного замера при соблюдении синхронности между остальными замерами практически не сказывается на воспроизводимом звуке после цифро-аналогового преобразования на приемной стороне. Это происходит за счет сглаживающих устройств в цифро-аналоговых преобразователях, основанных на свойстве инерционности любого физического процесса — амплитуда звуковых колебаний не может мгновенно измениться на большую величину.

На качество сигнала на выходе ЦАП влияет не только синхронность поступления на его вход замеров, но и погрешность дискретизации амплитуд этих замеров. Воспроизводимый в приемнике сигнал не совпадает в точности с оригинальным сигналом. Дело в том, что из-за конечного числа уровней квантования вершина *дискрета* (значение функции в каждый момент времени) может занимать произвольное положение внутри интервала квантования. В приемнике же значение восстановленного сигнала располагается в середине интервала квантования.

Алиасинг (aliasing). А что произойдет, если спектр аналогового сигнала был неограниченным или имел частоту, выше частоты дискретизации?

Предположим, что при записи акустического сигнала оркестра в помещении от какого-то устройства присутствует ультразвуковой сигнал с частотой 30 кГц. Запись выполняется с дискретизацией сигнала на выходе микрофона с типовой частотой 44,1 кГц. При прослушивании такой записи с использованием ЦАП мы услышим шумовой сигнал на частоте $30-\frac{44{,}1}{2}\approx 8$ кГц. То есть частоты, лежащие выше половины частоты дискретизации $\frac{44{,}1}{2}=22{,}05$, отразились в нижнюю часть спектра и сложились с присутствующими там гармониками. Это так называемый эффект *появления ложных* (*кажущихся*) *частот*. Эффект аналогичен всем известному эффекту обратного вращения колес автомобиля на экранах кино и телевизоров, когда скорость их вращения начинает превышать частоту смены кадров. Природу эффекта можно наглядно видеть на рис. 1. Аналогично в главный частотный диапазон дискретных сигналов «отражаются» от частоты дискретизации и все высокочастотные шумы, присутствующие в исходном аналоговом сигнале.

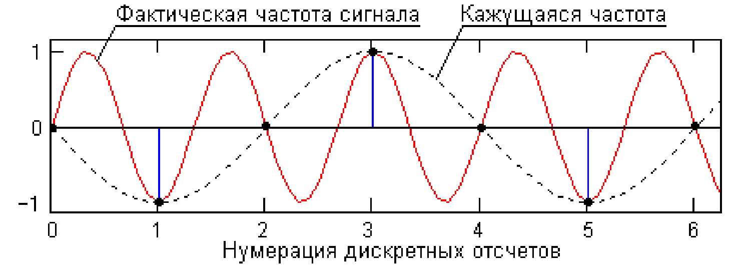


Рис. 1. Появление кажущейся частоты при дискретизации

Для предотвращения алиасинга следует повышать частоту дискретизации или ограничить спектр сигнала перед оцифровкой *фильтрами низких частот* (НЧ-фильтры, low-pass filters), которые пропускают без изменения все частоты, ниже заданной, и подавляют в сигнале частоты, выше заданной. Эта граничная частота называется *частотой среза* (cutoff frequency) *фильтра*. Частота среза анти-алиасинговых фильтров устанавливается равной половине частоты дискретизации. В реальные АЦП почти всегда встраивается анти-алиасинговый фильтр.

2. Достоинства и классификация дискретных систем управления

Системы, в которых передача, обработка и преобразование информации осуществляются только в определенные моменты времени (дискретно) и действуют сигналы, являющиеся последовательностью импульсов называются *дискретными*.

Создание дискретных систем вызвано следующими причинами:

— *принцип действия некоторых элементов, входящих в систему, может быть дискретным*. К примеру, в системе управления ракетой имеется импульсная радиолокационная станция, измеряющая координаты цели и ракеты. По своему принципу действия она выдает информацию дискретно с частотой следования импульсов станции, поэтому и вся система управления будет дискретной;

— *в дискретных системах проще реализовать сложные алгоритмы управления*. При использовании ЦВМ алгоритм задается в виде программы, сложность которой практически не влияет на конструкцию системы. В непрерывных же системах повышение сложности алгоритма управления требует включения в состав системы новых элементов;

— *точность решения алгоритмов управления с помощью дискретных устройств выше, чем с помощью непрерывных*. В дискретных системах из-за импульсного характера сигналов (в промежутках нет полезной информации) есть методическая погрешность (зависит от метода). Однако в непрерывных системах инструментальная погрешность намного больше. Дискретная обработка информации за счет импульсного характера сигналов неизбежно приводит к ее потере, так как на интервалах, где импульсы отсутствуют, полезная информация не используется. Поэтому, если для решения одного и того же алгоритма использовать дискретные и непрерывные устройства, то точность последних будет выше. За счет потери части информации дискретные устройства обладают методической погрешностью, то есть такой, которая зависит от метода обработки. Однако как дискретные, так и непрерывные устройства имеют и другие погрешности — инструментальные, зависящие от неточностей изготовления отдельных элементов, нестабильностей параметров, внутренних шумов и помех. Оказывается, что инструментальные погрешности непрерывных устройств значительно больше, чем устройств дискретных, и сильно растут с усложнением алгоритма обработки. В итоге суммарная погрешность дискретных устройств оказывается меньше инструментальной погрешности непрерывных, что и позволяет говорить о более высокой точности работы дискретных систем.

Если в дискретной системе преобразуются процессы, дискретизированные по времени, то это *импульсная система*. Если в дискретной системе преобразуются процессы, квантованные по уровню, то это *релейная система*. Система с квантованием процессов по времени и уровню называется *цифровой*.

3. Решетчатые функции. Конечные разности решетчатых функций

Процесс дискретизации непрерывной функции $f(t)$ осуществляется с помощью *идеального импульсного элемента* (ИИЭ) (*ключа*) (рис. 1), на выходе которого формируется *решетчатая функция* $f[kT_0]$, то есть функция, значения которой определяются только в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени; в паузах решетчатая функция равна нулю (рис. 2). Значение функции в каждый момент времени называется *дискрета*.

Решетчатые функции определены только в дискретные моменты времени kT_0, и формируются из непрерывных функций: $f[kT_0] = f(t)$ при $t = kT_0$.

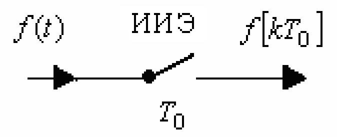


Рис. 1. Процесс дискретизации непрерывной функции

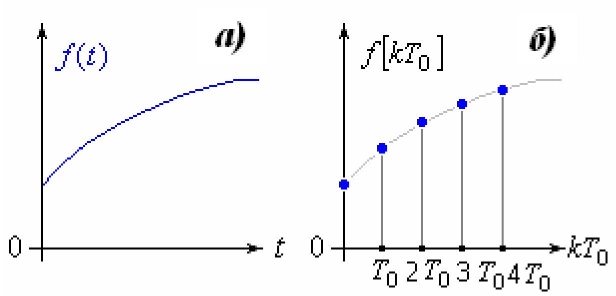


Рис. 2 Непрерывная (*а*) и соответствующая ей решетчатая функции (*б*)

Поскольку в интервалах между моментами квантования значения функции не заданы, то из одной и той же непрерывной функции можно получить бесконечное множество различных решетчатых функций, путем смещения начала отсчета (рассматривается функция $f[kT_0+\tau]$) или изменения частоты квантования ω_0. Справедливо и обратное утверждение: одной и той же решетчатой функции могут соответствовать бесконечное множество непрерывных функций.

Различают прямые и обратные конечные разности (рис. 3).

Прямая конечная разность — это разность между значением функции в последующем такте и значением функции в текущем такте:

$$\Delta f[kT_0]=f[(k+1)T_0]-f[kT_0].$$

С помощью прямой конечной разности можно вычислить значение функции в следующем такте:

$$f[(k+1)T_0]=\Delta f[kT_0]+f[kT_0].$$

Обратная конечная разность — это разность между значением функции в текущем такте и значением функции в предыдущем такте:

$$\nabla f[kT_0]=f[kT_0]-f[(k-1)T_0].$$

Обратная конечная разность используется для формирования сигналов управления.

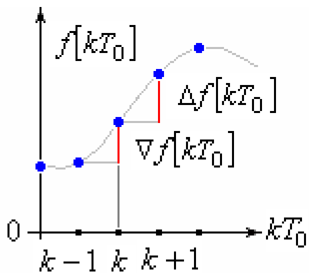


Рис. 3. Конечные разности решетчатых функций

Прямая конечная разность второго порядка:

$$\Delta^2 f[kT_0]=\Delta f[(k+1)T_0]-\Delta f[kT_0]=$$
$$=\left(f[(k+2)T_0]-f[(k+1)T_0]\right)-\left(f[(k+1)T_0]-f[kT_0]\right)=$$
$$=f[(k+2)T_0]-2f[(k+1)T_0]+f[kT_0].$$

Прямая конечная разность *i*-го порядка:

$$\Delta^i f[kT_0]=\sum_{\nu=0}^{i}(-1)^{\nu}C_i^{\nu} f[(k+i-\nu)T_0],$$

где $C_i^{\nu}=\dfrac{i!}{\nu!(i-\nu)!}$ — число сочетаний из i по ν.

Аналогичным образом вычисляются обратные конечные разности 2-го порядка:

$$\nabla^2 f[kT_0] = \nabla f[kT_0] - \nabla f[(k-1)T_0] =$$
$$= \left(f[kT_0] - f[(k-1)T_0]\right) - \left(f[(k-1)T_0] - f[(k-2)T_0]\right) =$$
$$= f[kT_0] - 2f[(k-1)T_0] + f[(k-2)T_0],$$

и *i*-го порядка:

$$\nabla^i f[kT_0] = \sum_{\nu=0}^{i} (-1)^{\nu} C_i^{\nu} f[(k-i+\nu)T_0].$$

Конечная разность — это *аналог производной для решетчатой функции*. Производная непрерывной функции $f(t)$ определяется по формуле:

$$f'(t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

отсюда дифференциал аналогичен прямой конечной разности:

$$\Delta f(t) = f'(t)\Delta t = f(t+\Delta t) - f(t).$$

Конечная сумма решетчатой функции — это сумма ее дискрет:

$$F[nT_0] = \sum_{i=0}^{n-1} f[iT_0],$$

является аналогом интеграла для решетчатой функции.

4. Виды импульсной модуляции

В общем случае можно изобразить обобщенную структурную схему импульсной системы (рис. 1).

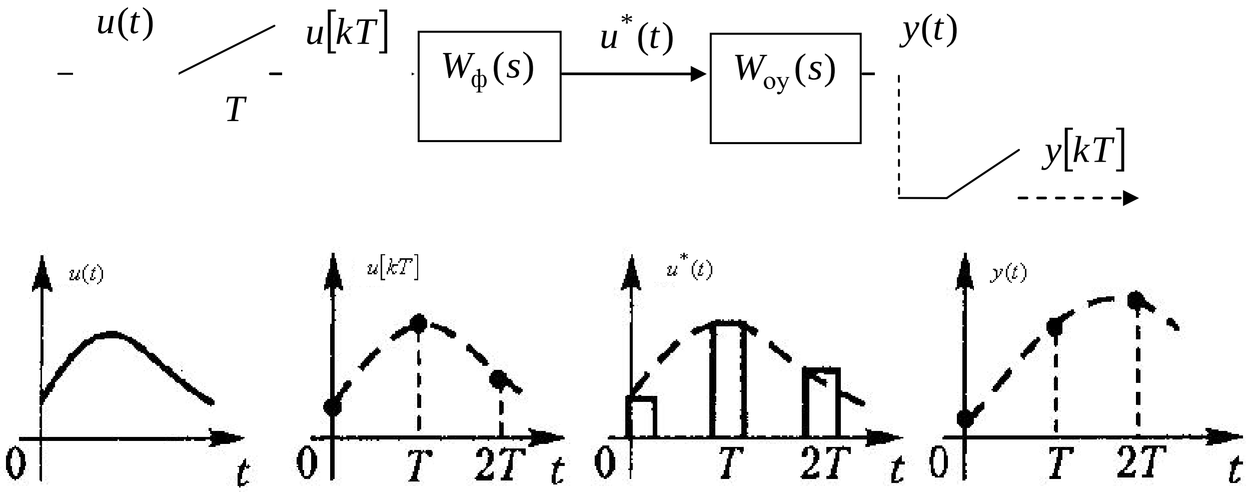


Рис. 1. Обобщенная структурная схема импульсной системы

В процессе преобразования непрерывного сигнала в дискретный сигнал *импульсный элемент*, состоящий из идеального импульсного элемента (ключ) и *формирующего устройства* (*модулятор*) решает две задачи. Ключ выполняет дискретизацию входного сигнала $u(t)$ с периодом T, в результате на выходе появляется сигнал $u[kT]$. Формирующее устройство с передаточной функцией $W_ф(s)$ выполняет *импульсную модуляцию*, изменяя какой-либо параметр импульса (амплитуду, ширину) пропорционально входным сигналам $u[kT]$, в результате на выходе появляется сигнал $u^*(t)$.

При *амплитудно-импульсной модуляции* (АИМ) модулируемым (изменяемым) параметром служит амплитуда (высота) импульсов. Сигнал $u^*(t)$ на выходе импульсного элемента формируется в виде (рис. 2):

$$u^*(t) = \begin{cases} K_{\text{а}} u[kT] \text{ при } kT \le t < (k+\gamma)T, \\ 0 \text{ при } (k+\gamma)T \le t < (k+1)T, \end{cases}$$

где $K_{\text{а}}$ — коэффициент пропорциональности; γ — скважность импульсов ($0 < \gamma \le 1$), которая остается постоянной.

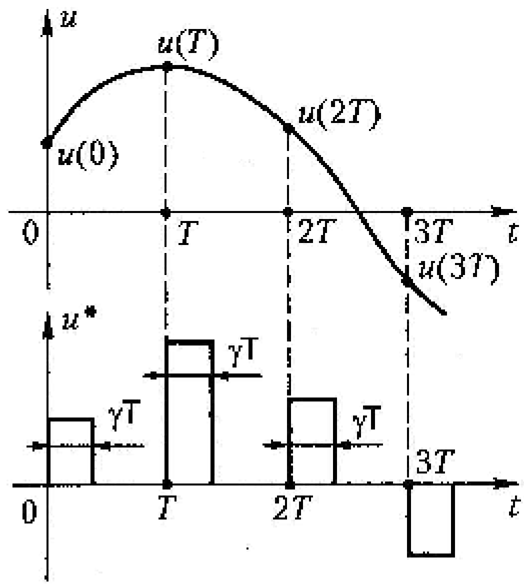


Рис. 2. Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)

При *широтно-импульсной модуляции* (ШИМ) модулируемым параметром является ширина (длительность) импульсов $\tau_k = \gamma_k T$, где $\gamma_k = \gamma(kT)$ — скважность k-го импульса. Амплитуда импульсов при этом остается постоянной. Сигнал $u^*(t)$ на выходе импульсного элемента формируется в виде (рис. 3):

$$u^*(t) = \begin{cases} h \cdot \operatorname{sign}(u[kT]) \text{ при } kT \le t < (k+\gamma_k)T, \\ 0 \text{ при } (k+\gamma_k)T \le t < (k+1)T, \end{cases}$$

где h — амплитуда импульсов; $\operatorname{sign}(u[kT])$ — функция, определяющая знак величины $u[kT]$.

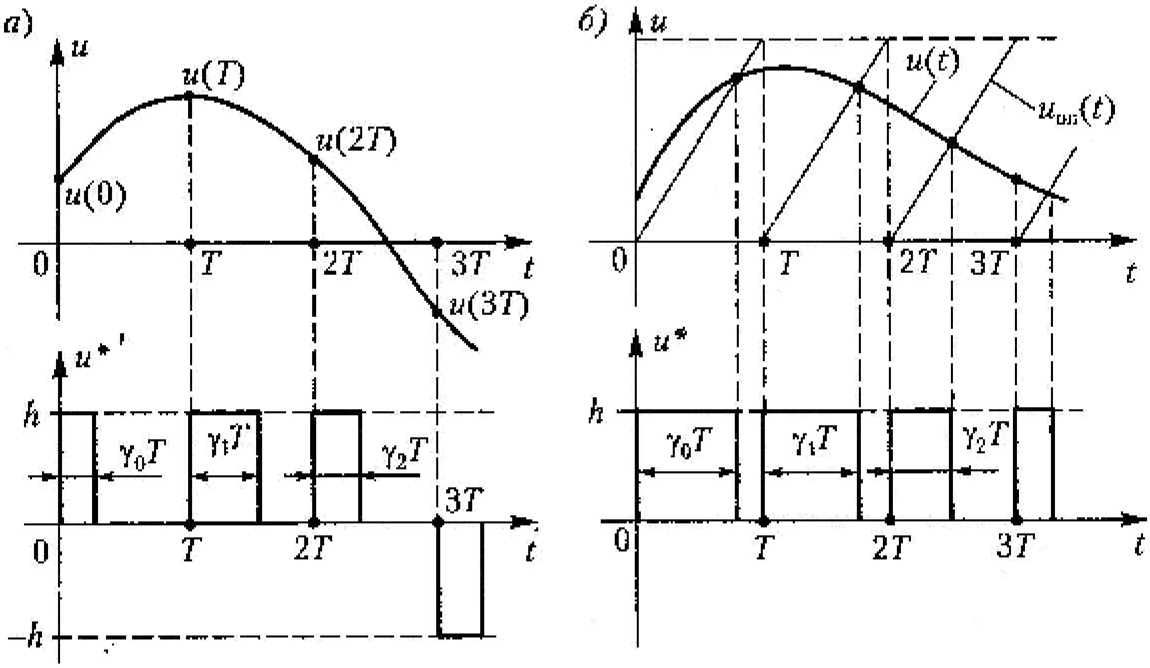


Рис. 3. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)

В зависимости от способа определения текущего значения скважности импульсов γ_k различают *широтно-импульсную модуляцию 1-го рода* (ШИМ-1) и *широтно-импульсную модуляцию 2-го рода* (ШИМ-2).

При ШИМ-1 (рис. 3, *а*) скважность k-го импульса равна:

$$\gamma_k = \begin{cases} K_{\text{ш}} \cdot |u[kT]| \text{ при } K_{\text{ш}} \cdot |u[kT]| < 1, \\ 1 \text{ при } K_{\text{ш}} \cdot |u[kT]| \geq 1, \end{cases}$$

где $K_{\text{ш}}$ — коэффициент пропорциональности (крутизна характеристики широтно-импульсного модулятора).

При ШИМ-2 (рис. 3, *б*) длительность импульсов определяется в результате сравнения непрерывного входного сигнала $u(t)$ с некоторым периодическим опорным сигналом $u_{\text{оп}}(t)$, в качестве которого обычно используется пилообразный сигнал, формируемый специальным генератором. Импульсы запускаются в моменты времени $t = kT$ и существуют до момента совпадения сигналов $u(t)$ и $u_{\text{оп}}(t)$. Как правило, ШИМ-2 используют в системах, в которых сигнал $u(t)$ не меняет свой знак.

Импульсные системы с амплитудно-импульсной модуляцией являются линейными. Остальные дискретные системы (релейные, цифровые, импульсные с широтно-импульсной модуляцией) являются нелинейными.

Лекция № 15
Математическое описание импульсных систем управления

1. Передаточные функции импульсных систем управления

2. Преобразования структурных схем импульсных систем управления

3. Построение переходных процессов импульсных систем управления

4. Уравнения состояния импульсных систем управления

5. Решение уравнений состояния импульсных систем управления

Дополнительная информация. Z-преобразование решетчатых функций (дискретное преобразование Лапласа).

В основу методики анализа и синтеза дискретных систем управления положено дискретное преобразование Лапласа или Z-преобразование, на его основе созданы методы исследования дискретных систем автоматического управления, аналогичные методам исследования непрерывных систем.

Для решетчатых функций $f\left[kT_0\right]$ введено понятие *дискретного преобразования Лапласа*, определяемого формулой:

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT_0}f\left[kT_0\right]=f\left[0\right]+e^{-sT_0}f\left[T_0\right]+e^{-2sT_0}f\left[2T_0\right]+\ldots$$

Как и обычное преобразование Лапласа, дискретное преобразование Лапласа $F^*(s)$ — функция комплексной переменной s. Эта функция представляет собой сумму бесконечного ряда, каждое слагаемое которого содержит сомножитель $\left(e^{sT_0}\right)^{-k}$, $k=1..\infty$. Функция $\left(e^{sT_0}\right)$ является трансцендентной функцией (трансцендентные функции — это функции, содержащие показательные, логарифмические или тригонометрические функции):

$$e^{sT_0}=e^{(\beta_0+j\omega)T_0}=e^{\beta_0T_0}(\cos\omega T_0+j\sin\omega T_0).$$

Таким образом, функция $F^*(s)$ также является трансцендентной по аргументу s.

Обычное изображение по Лапласу рассматривается как рациональная дробь:

$$F(s)=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0},$$

от которой, используя теорию вычетов или с помощью разложения на элементарные дроби, можно найти обратное преобразование Лапласа.

Поскольку функция $F^*(s)$ — трансцендентная дробь, поэтому нахождение обратного преобразования Лапласа с помощью тех же приемов, что и для обычного преобразования Лапласа невозможно.

Чтобы избавиться от трансцендентности вводят новую комплексную переменную:

$$z=e^{sT_0}.$$

Тогда функция:

$$F^*(s)\Big|_{e^{sT_0}\to z} = F(z) = f[0]z^0 + f[T_0]z^{-1} + f[2T_0]z^{-2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT_0]z^{-k},$$

является рациональной функцией от переменной z.

Z-преобразованием решетчатой функции является сумма ряда:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT_0]z^{-k}.$$

Условно Z-преобразование записывается следующим образом:

$$F(z) = Z\{f[kT_0]\}.$$

Z-преобразования типовых функций сведены в табл. 1.

Таблица 1

Z-преобразования типовых функций

№	$f(t)$	$f[kT_0]$	$F(z)$
1.	$1(t)$	$1[kT_0]$	$\dfrac{z}{z-1}$
2.	t	kT_0	$\dfrac{T_0 z}{(z-1)^2}$
3.	t^2	$(kT_0)^2$	$\dfrac{T_0{}^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

Обратное Z-преобразование (теорема обращения)

С помощью обратного Z-преобразования по Z-изображению функции находится решетчатая функция оригинал.

Теорема обращения: Если $F(z)$ есть Z-преобразование функции $f[kT_0]$, то эта функции равна:

$$f[kT_0] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1}dz, \quad (1)$$

где Γ — замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции $F(z)$ (корни ее знаменателя (полюсы)).

Вычисление $f[kT_0]$ по формуле (1) называется *обратным Z-преобразованием*.

Интеграл (1) вычисляется по теореме о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1}dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1};\, z_i\right],$$

где z_i — корни знаменателя функции $F(z)$; n — количество корней знаменателя функции $F(z)$.

Поскольку z_i — это полюсы, то:

$$f[kT_0] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1};\, z_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \lim_{z\to z_i}\left[(z-z_i)F(z)z^{k-1}\right].$$

Если z_i является *полюсом* m*-го порядка* функции (кратность полюса z_i равна m, то есть имеется m одинаковых корней функции $F(z)$), то:

$$\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1};\, z_i\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m F(z)z^{k-1}\right].$$

1. Передаточные функции импульсных систем управления

Обобщенная структурная схема замкнутой импульсной системы приведена на рис. 1.

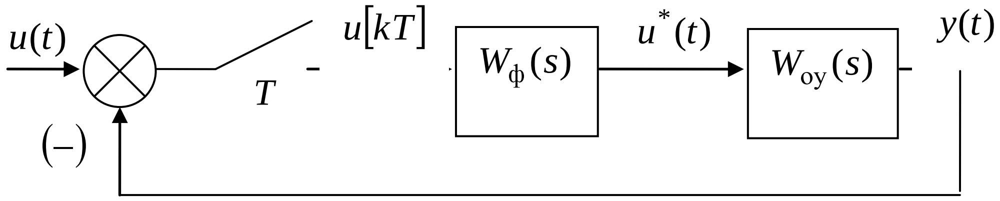


Рис. 1. Обобщенная структурная схема замкнутой импульсной системы

Передаточная функция *формирующего устройства*:

$$W_ф(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s},$$

$$W_ф(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right\}=Z\left\{1-e^{-Ts}\right\}Z\left\{\frac{1}{s}\right\}=\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}=1$$

в терминах Z-преобразований при переходе через экстраполятор сигнал не изменяется.

Тогда Z-передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{раз}(z)=Z\left\{W_ф(s)W_{оу}(s)\right\}=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}W_{оу}(s)\right\}=$$

$$=\frac{1-z^{-1}}{1}Z\left\{\frac{W_{оу}(s)}{s}\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{W_{оу}(s)}{s}\right\}.$$

Для перехода к Z-преобразованию необходимо найти обратное преобразование Лапласа от выражения:

$$L^{-1}\left\{\frac{W_{оу}(s)}{s}\right\},$$

сделать замену $t=kT$, а затем к полученному выражению применить прямое Z-преобразование.

Z-передаточная функция замкнутой системы находится по аналогии с непрерывными системами:

$$W_{зам}(z)=\frac{W_{раз}(z)}{1+W_{раз}(z)}.$$

2. Преобразования структурных схем импульсных систем управления

Преобразования структурных схем импульсных систем отличаются от структурных преобразований линейных непрерывных САУ.

В случае, когда *непрерывная часть состоит из параллельно включенных звеньев и на входе имеется общее импульсное звено*, то дискретная передаточная функция может быть определена суммированием дискретных передаточных функции, определенных для каждого звена в отдельности:

$$W(z) = \sum_{i=1}^{n} W_i(z).$$

Если *непрерывные звенья включены последовательно и имеется одно импульсное звено на входе*, то дискретная передаточная функция такого соединения:

$$W(z) \neq \prod_{i=1}^{n} W_i(z).$$

В этом случае дискретная передаточная функция $W(z)$ должна определяться Z-преобразованием от произведения передаточных функций непрерывной части системы:

$$W(z) = Z\left\{\prod_{i=1}^{n} W_i(s)\right\}.$$

Нельзя переносить сумматор или любое непрерывное звено через импульсный элемент. Непрерывную часть можно преобразовывать по известным правилам преобразования структурных схем непрерывных САУ.

Для схем, состоящих из импульсных элементов, когда на входе каждого непрерывного звена стоит свой импульсный элемент, справедливы все правила преобразования структурных схем непрерывных систем.

3. Построение переходных процессов импульсных систем управления

Аналогом дифференциального уравнения для импульсной системы является *разностное уравнение*. Разностное уравнение связывает решетчатую функцию и ее разности до некоторого порядка.

Для записи разностного уравнения необходимо представить передаточную функцию замкнутой системы в следующем виде:

$$W(z) = \frac{b_m z^m + \ldots + b_1 z^1 + b_0}{a_n z^n + \ldots + a_1 z^1 + a_0}.$$

Домножим числитель и знаменатель $W(z)$ на z^{-n}. В результате получим:

$$W(z) = \frac{b_m z^{m-n} + \ldots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{a_n + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}} = \frac{Y(z)}{X(z)},$$

где $Y(z)$ — Z-изображение выходного сигнала; $X(z)$ — Z-изображение входного сигнала.

Тогда по определению передаточной функции можно записать:

$$\left(a_n + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}\right) Y(z) = \left(b_m z^{m-n} + \ldots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}\right) X(z)$$

или

$$a_n Y(z) + \ldots + a_1 z^{1-n} Y(z) + a_0 z^{-n} Y(z) = b_m z^{m-n} X(z) + \ldots + b_1 z^{1-n} X(z) + b_0 z^{-n} X(z).$$

Определяя обратные Z-преобразования от каждого слагаемого этого выражения, получим разностное уравнение:

$$a_n y[k] + \ldots + a_1 y[k+1-n] + a_0 y[k-n] =$$
$$= b_m x[k+m-n] + \ldots + b_1 x[k+1-n] + b_0 x[k-n].$$

Примечание. Используется Z-преобразование функции смещенной в сторону запаздывания (*теорема запаздывания*):

$$Z\{f[(k-m)T_0]\} = z^{-m}F(z).$$

Тогда *выходной сигнал* (*переходной процесс*):

$$y[k] = \frac{1}{a_n}[\ldots - a_1 y[k+1-n] - a_0 y[k-n] + b_m x[k+m-n] + \ldots + b_1 x[k+1-n] + b_0 x[k-n]]$$

.

4. Уравнения состояния импульсных систем управления

Общий вид уравнений состояния для многомерной линейной дискретной системы с постоянными параметрами выглядит как

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$

где вектор состояния $\mathbf{x}(k)$ имеет размерность $(n \times 1)$, вектор входа $\mathbf{u}(k)$ — размерность $(r \times 1)$,а вектор выхода $\mathbf{y}(k)$ — размерность $(p \times 1)$. Следовательно, матрица коэффициентов системы $\mathbf{A}$, матрица входа $\mathbf{B}$ и матрица выхода $\mathbf{C}$ имеют размерности, соответственно, $(n \times n)$, $(n \times r)$ и $(p \times n)$. Матрица $\mathbf{D}$, характеризующая непосредственную связь между входом и выходом системы, имеет размерность $(p \times r)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times 1},$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{1\times n}.$$

Установим связь между уравнениями состояния и передаточной функцией дискретной системы с одним входом и одним выходом. По аналогии с непрерывным случаем , при условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ имеем:

$$\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U(z).$$

Найдем z-преобразование уравнения выхода :

$$Y(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + DU(z).$$

Подстановка в последнее уравнение $\mathbf{X}(z)$ дает:

$$Y(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(z),$$

откуда следует, что система имеет передаточную функцию

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D.$$

5. Решение уравнений состояния импульсных систем управления

Группа разностных уравнений первого порядка, описывающих модель в переменных состояния для линейной стационарной дискретной системы, имеет вид:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k). \qquad (1)$$

Для решения этих уравнений можно воспользоваться итерационным методом. Считая, что $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{u}(k)$ известны, можно вычислить (1) для $k = 0$, затем для $k = 1$, затем для $k = 2$ и т.д.:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0),$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1),$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) =$$
$$= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(n-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1).$$

Следовательно, решение уравнений (1) можно выразить в общем виде:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}(k). \qquad (2)$$

Общее решение уравнений (1) можно получить также с использованием z-преобразования. Для этого представим (1) в развернутом виде:

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + \ldots + a_{1n}x_n(k) + b_{11}u_1(k) + \ldots + b_{1r}u_r(k),$$
$$\vdots$$
$$x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + \ldots + a_{nn}x_n(k) + b_{n1}u_1(k) + \ldots + b_{nr}u_r(k).$$

Затем найдем z-преобразование этих уравнений:

$$z[X_1(z) - x_1(0)] = a_{11}X_1(z) + \ldots + a_{1n}X_n(z) + b_{11}U_1(z) + \ldots + b_{1r}U_r(z),$$
$$\vdots$$
$$z[X_n(z) - x_n(0)] = a_{n1}X_1(z) + \ldots + a_{nn}X_n(z) + b_{n1}U_1(z) + \ldots + b_{nr}U_r(z).$$

Те же уравнения, но в матричной форме:

$$z[\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}(0)] = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z),$$

или

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z).$$

Отсюда выразим $\mathbf{X}(z)$:

$$\mathbf{X}(z) = z[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z). \qquad (3)$$

Применив к (3) обратное z-преобразование, получим тот же результат, что в (2), поэтому матрица перехода $\mathbf{\Phi}(k)$ для уравнений состояния дискретной системы имеет вид:

$$\mathbf{\Phi}(k) = \mathfrak{z}^{-1}(z\,[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}) = \mathbf{A}^k.$$

Тогда решение (2) можно записать как

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{\Phi}(n-1-k)\mathbf{B}\mathbf{u}(k).$$

Лекция № 16
Анализ и синтез импульсных систем управления

1. Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления
2. Частотный критерий устойчивости Найквиста импульсных систем управления
3. Оценка точности импульсных систем управления
4. Синтез импульсных систем управления

1. Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления

В теории функций комплексной переменной преобразования, в процессе которого одна переменная заменяется некоторой функцией от новой переменной, а одна область комплексной плоскости отображается в другую, называется *конформным преобразованием*.

Конформное преобразование $z = e^{Ts}$ отображает левую полуплоскость плоскости s в область, ограниченную окружностью единичного радиуса на плоскости z (рис. 1). При этом мнимая ось плоскости s отображается в саму окружность.

Действительно, пусть $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Тогда:

$$z_{1,2} = e^{T(\alpha \pm j\beta)} = e^{\alpha T}(\cos\beta T \pm j\sin\beta T).$$

При этом $|z_{1,2}| = e^{\alpha T}$. Для значений $\alpha < 0$ (что соответствует корням $s_{1,2}$, лежащим в левой полуплоскости плоскости s) $|z_{1,2}| < 1$, что соответствует корням, лежащим внутри круга единичного радиуса плоскости z. Если $\alpha = 0$, т. е. если корни $s_{1,2}$ располагаются на мнимой оси плоскости s, то корни $z_{1,2}$ попадают на окружность единичного радиуса плоскости z.

Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления: для устойчивости импульсной замкнутой системы необходимо и достаточно чтобы корни характеристического уравнения по модулю были <1, т. е. $|z_i| < 1$ (лежали внутри окружности единичного радиуса на z плоскости).

Для того чтобы получить возможность использования для исследования устойчивости импульсных систем всех критериев устойчивости непрерывных систем, необходимо отобразить круг единичного радиуса с плоскости z на левую полуплоскость некоторой новой переменной. Для этого можно воспользоваться преобразованием из теории функций комплексной переменной:

$$z = \frac{1 + (T/2)\upsilon}{1 - (T/2)\upsilon} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right).$$

Тогда окружность единичного радиуса на z плоскости отображается в левую полуплоскость υ, а внешняя часть окружности — в правую полуплоскость υ. Такое преобразование называется *билинейным преобразованием*.

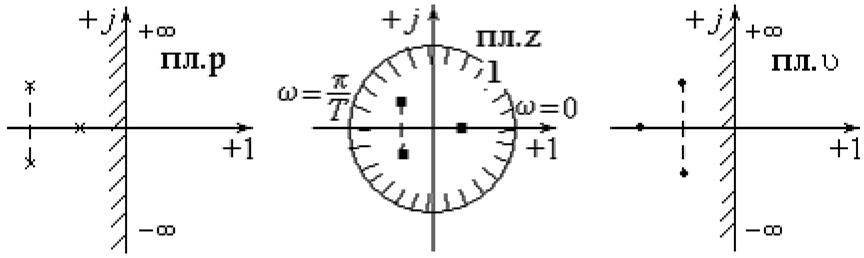


Рис. 1. Изображение корней характеристического уравнения на различных плоскостях

Для нахождения корней характеристического полинома $D(s)$ в Mathcad имеется встроенная функция **polyroots(v)**.

Вектор ν будет иметь вид:

$$v=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$D(s) := T1\cdot T2\cdot s^3 + (T1 + T2)\cdot s^2 + (1 + k1\cdot k2\cdot kp\cdot Tp)\cdot s + k1\cdot k2\cdot kp$$

$$v(Tp, kp) := D(s) \text{ coeffs }, s \;\rightarrow \begin{pmatrix} kp\cdot k1\cdot k2 \\ 1 + kp\cdot k1\cdot k2\cdot Tp \\ T1 + T2 \\ T1\cdot T2 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v(Tp, kp))$$

Вектор r содержит корни характеристического уравнения.

2. Частотный критерий устойчивости Найквиста импульсных систем управления

Годограф АФЧХ разомкнутой импульсной системы строится путем формальной замены $z = e^{j\omega T}$ в передаточной функции $W_{\text{раз}}(z)$.

Если разомкнутая система устойчивая, то для устойчивости замкнутой импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы годограф АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты ω от 0 до $\omega_s/2$ не охватывал точку (–1;*j*0) (частота дискретизации $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$).

Если разомкнутая система неустойчивая, и ее передаточная функция $W_{\text{раз}}(z)$ имеет g неустойчивых корней, то замкнутая система будет устойчивой, если годограф разомкнутой системы охватывает точку (–1;*j*0) в положительном направлении $g/2$ раз.

3. Оценка точности импульсных систем управления

Оценка точности непрерывных систем в установившемся режиме основана на теореме о конечном значении из преобразования Лапласа. Аналогичные результаты для импульсных систем можно получить на основании теоремы о конечном значении из Z-преобразования. Эта теорема гласит, что:

$$\lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z),$$

при условии, что предел в левой части существует. Последнее возможно только тогда, когда все полюсы $E(z)$ расположены внутри единичной окружности, за исключением единственного полюса $z=1$.

Z-преобразование сигнала ошибки равно (рис. 1):

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z) - \frac{G(z)}{1+G(z)}R(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)}.$$

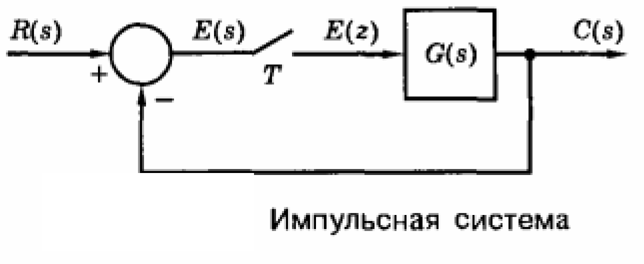


Рис. 1.

По теореме о конечном значении установившаяся ошибка определяется выражением:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{1+G(z)}. \quad (1)$$

Рассмотрим сначала установившуюся ошибку, вызванную ступенчатым воздействием. В этом случае $R(z)=\dfrac{Az}{z-1}$, где A — величина ступенчатого воздействия. Тогда:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}\frac{Az}{1+G(z)} = \frac{A}{1+\lim\limits_{z\to 1} G(z)} = \frac{A}{1+K_p}, \quad (2)$$

Заметим, что если $G(z)$ имеет по крайней мере один полюс при $z=1$, то $K_p=\infty$ и установившаяся ошибка при ступенчатом входном сигнале равна нулю. Число полюсов передаточной функции разомкнутой системы при $z=1$ называется *типом системы*. Поэтому если система имеет тип 1 или выше, то при ступенчатом входном воздействии установившаяся ошибка равна нулю. В противном случае ошибка отлична от нуля и определяется выражением (2).

Если входной сигнал имеет вид линейной функции $r(t)=At$, то $R(z)=\dfrac{ATz}{(z-1)^2}$. Согласно (1), установившаяся ошибка равна:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}\frac{ATz}{(z-1)+(z-1)G(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{AT}{(z-1)G(z)} = \frac{A}{K_v}.$$

Если передаточная функция разомкнутой системы имеет два или более полюсов в точке $z=1$, то коэффициент K_v равен бесконечности и установившаяся ошибка при линейном входном воздействии будет равна нулю. Иначе говоря, система типа 2 или выше будет отрабатывать воздействие $r(t)=At$ без установившейся ошибки.

Полученные выражения для установившейся ошибки применимы и в случае, когда в системе на рис. 1 после квантователя находится цифровой регулятор с передаточной функцией $D(z)$. Тогда надо $G(z)$ заменить на $D(z)G(z)$.

Установившаяся ошибка обозначена как $e_{ss}(kT)$, чтобы подчеркнуть, что такое значение она имеет только в моменты квантования. Между моментами квантования установившаяся ошибка неизвестна и не может быть вычислена с помощью Z-преобразования, поскольку последнее связывает вход и выход системы только в моменты квантования.

4. Синтез импульсных систем управления

В импульсных системах для улучшения точности в установившемся режиме обычно добавляют полюсы в точке $z=1$ и увеличивают тем самым порядок астатизма системы, либо изменяют в большую сторону коэффициент усиления системы. При этом конечно, необходимо сохранить приемлемые запасы устойчивости.

Для повышения быстродействия системы необходимо увеличить ее полосу пропускания. С той же целью полюсы замкнутой системы желательно располагать как можно ближе к началу координат *z*-плоскости.

Чтобы уменьшить перерегулирование в переходной функции, необходимо увеличивать запасы устойчивости, что эквивалентно увеличению коэффициента затухания соответствующего доминирующим комплексным полюсам. Увеличение запасов устойчивости также приводит к уменьшению величины пика на амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы.

Предположим, что синтезируемая система имеет конфигурацию, изображенную на рис. 1 (*а*). Цифровой регулятор обычно реализуется с помощью АЦП, компьютера и ЦАП. Коррекция, представленная на рис. 1 (*а*), называется *последовательной*.

Иногда бывает выгоднее поместить регулятор во внутренний контур системы, как показано на рис. 1 (*б*). Этот тип коррекции называется *коррекцией в цепи местной связи*.

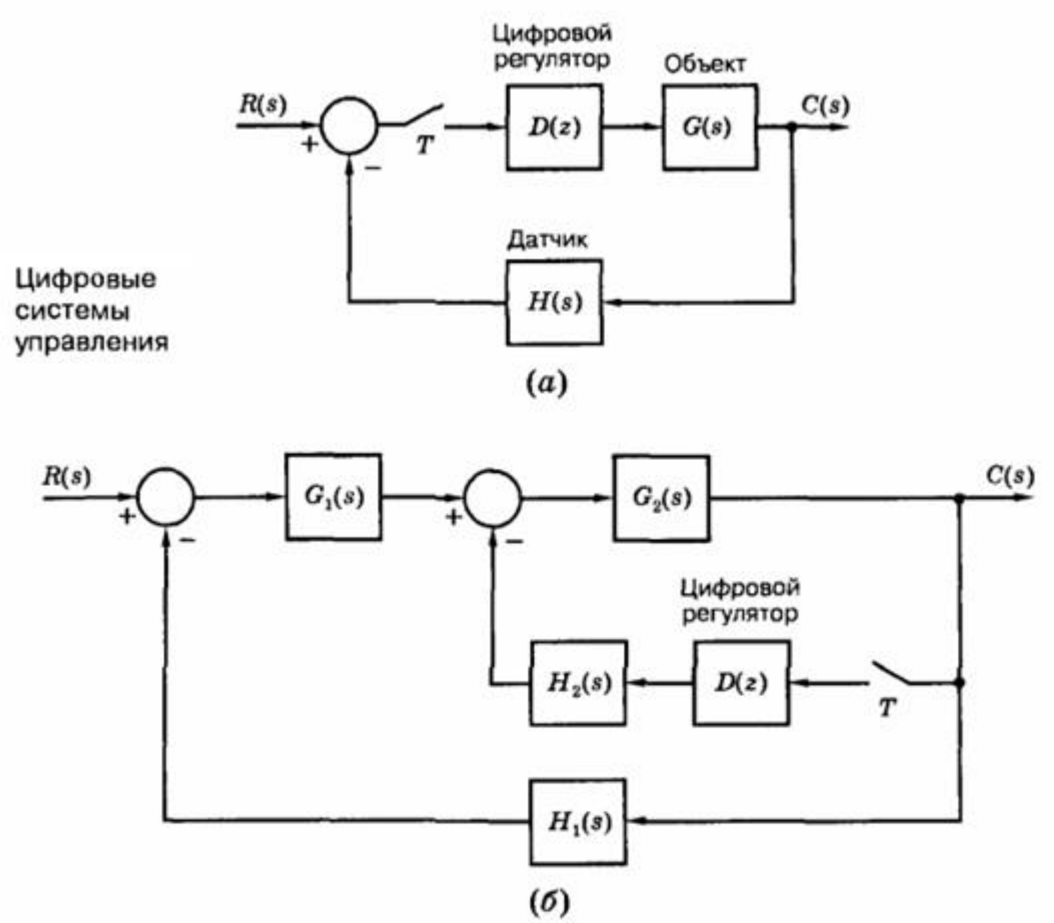


Рис. 1.

В основном используются корректирующие устройства первого порядка, т. е. такие, передаточная функция которых имеет вид:

$$D(z)=\frac{K_d(z-z_0)}{z-z_p}. \qquad (1)$$

Можно использовать метод корневого годографа для определения нуля, полюса и коэффициента K_d этой передаточной функции. Однако если использовать частотный метод синтеза, то соответствующие процедуры выполняются не на z-плоскости, а на υ-плоскости. Следовательно, передаточная функция регулятора должна быть представлена в зависимости от переменной υ. Переход от $D(z)$ к $D(w)$ совершается путем замены переменной:

$$D(\upsilon)=D(z)\Big|_{z=\frac{1+(2/T)\upsilon}{1-(2/T)\upsilon}}.$$

Таким образом, $D(\upsilon)$ также имеет первый порядок и может быть записана в виде:

$$D(\upsilon)=\frac{1+\upsilon/\omega_{w0}}{1+\upsilon/\omega_{wp}}, \qquad (2)$$

где $-\omega_{w0}$ и $-\omega_{wp}$ есть, соответственно, положение нуля и полюса функции $D(\upsilon)$ на υ-плоскости.

Коэффициент усиления регулятора на нулевой частоте определяется из (1) при $z = 1$ или из (2) при $\upsilon = 0$. Таким образом, в (2) предполагается, что регулятор имеет единичный коэффициент усиления. Чтобы получить регулятор с неединичным коэффициентом усиления, надо правую часть (2) умножить на число, соответствующее желаемому коэффициенту усиления.

Для реализации регулятора передаточную функцию необходимо выразить в зависимости от переменной z, как в (1). Из (2) имеем:

$$D(z) = \left.\frac{1 + \upsilon/\omega_{w0}}{1 + \upsilon/\omega_{wp}}\right|_{\upsilon = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{\omega_{wp}(2/T + \omega_{w0})}{\omega_{w0}(2/T + \omega_{wp})}\left(\frac{z - \dfrac{2/T - \omega_{w0}}{2/T + \omega_{w0}}}{z - \dfrac{2/T - \omega_{wp}}{2/T + \omega_{wp}}}\right).$$

Следовательно, параметры регулятора (1) на z-плоскости как функции от параметров на υ-плоскости имеют следующие выражения:

$$K_d = \frac{\omega_{wp}(2/T + \omega_{w0})}{\omega_{w0}(2/T + \omega_{wp})}; \quad z_0 = \frac{2/T - \omega_{w0}}{2/T + \omega_{w0}}; \quad z_p = \frac{2/T - \omega_{wp}}{2/T + \omega_{wp}}.$$

Как и в случае аналоговых регуляторов, цифровой регулятор (2) относится к тому или иному типу, в зависимости от относительного расположения нуля, ω_{w0}, и полюса, ω_{wp}. Если $\omega_{w0} < \omega_{wp}$, регулятор обладает *опережением по фазе*. Если $\omega_{w0} > \omega_{wp}$, то регулятор обладает *отставанием по фазе*.

Если в выражении для $D(z)$ нуль z_0 расположен ближе к точке $z = 1$, чем полюс z_p, то регулятор обладает опережением по фазе; в противном случае он создает отрицательный фазовый сдвиг (отставание по фазе).

Область устойчивости для дискретных систем на υ-плоскости та же самая, что для непрерывных систем на s-плоскости. Однако одинаковое расположение полюсов на υ-плоскости и на s-плоскости не дает одинакового вида переходных характеристик. Положение полюса на s-плоскости отображается в положение полюса на υ-плоскости преобразованием:

$$\upsilon = \left.\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right|_{z=e^{sT}} = \left.\frac{2}{T}\left(\frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1}\right)\right|.$$

Однако все процедуры, связанные с частотным методом синтеза, являются одними и теми же как для непрерывных, так и для цифровых систем управления.

Прежде чем переходить непосредственно к синтезу цифровых регуляторов, приведем некоторые их преимущества перед аналоговыми регуляторами.

1. Цифровой регулятор обладает большей гибкостью, поскольку для изменения какого-либо его параметра достаточно просто изменить число, записанное в ячейке памяти. Изменение параметра аналогового регулятора обычно требует замены по крайней мере одного элемента схемы.

2. Цифровые сигналы менее чувствительны к шумам и дрейфу параметров оборудования, т. к. данные представляются, генерируются, передаются и обрабатываются в виде двоичных чисел.

3. Цифровая обработка сигналов может производиться с высокой скоростью и точностью. Повышение скорости цифровой обработки сигналов может быть достигнуто за счет аппаратных, а не программных средств.

Методические указания по выполнению лабораторных работ

Лабораторная работа 1
Моделирование динамических систем в пакете Matlab Simulink

Цель работы: ознакомление с пакетом Matlab Simulink, получение навыков составления структурных схем динамических систем и процессов, описываемых дифференциальными уравнениями.

Теоретические сведения

Гидравлический резервуар

Дифференциальное уравнение процесса имеет вид (рис. 1):

$$S_1 \cdot \frac{dH}{dt} = Q - G,$$

($V = Q - G$ — объем воды в резервуаре; $V = S_1 \cdot \Delta H$)

где Q — приток воды в резервуар (входная величина) (м^3/с); G — расход воды из резервуара (внешнее воздействие) (м^3/с); H — высота столба воды в резервуаре (выходная величина) (м); S_1 — площадь резервуара (м^2).

Выразим из исходного уравнения выходную величину H:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q - G}{S_1}, \quad H = \int\left(\frac{Q - G}{S_1}\right).$$

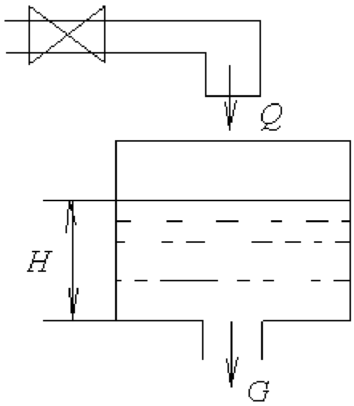


Рис. 1. Гидравлический резервуар

Двигатель постоянного тока

Двигатель постоянного тока описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\left(L\frac{d}{dt} + R\right) \cdot I = y - k_\omega \frac{dx}{dt},$$

$$J\frac{d^2x}{dt^2} = k_m I,$$

где x — угол поворота вала двигателя; y — сигнал управления (управляющее напряжение, входная величина); I — ток в цепи якоря двигателя; L, R — индуктивность и сопротивление цепи якоря двигателя; J — момент инерции двигателя; k_ω — коэффициент противоЭДС; k_m — коэффициент пропорциональности, связывающий ток и развиваемый двигателем момент.

Выходной величиной для моделируемой системы является скорость изменения угла поворота вала двигателя $\frac{dx}{dt}$.

Запишем исходное уравнение, используя оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ (или оператор Лапласа s):

$$(Ls + R) \cdot I = y - k_{\omega} sx,$$

$$Js^2 x = k_m I,$$

отсюда выразим ток якоря:

$$I = \frac{y - k_{\omega} sx}{(Ls + R)}.$$

Произведение тока якоря на коэффициент пропорциональности представляет собой момент двигателя:

$$M_{dv} = k_m I = Js^2 x.$$

Выразим производную выходной величины — ускорение изменения угла поворота вала двигателя:

$$s^2 x = \frac{k_m I}{J}.$$

После интегрирования полученного сигнала определяется скорость изменения угла поворота вала двигателя sx.

Работа в Matlab Simulink

Запуск Simulink: в командной строке Matlab набрать команду **>> simulink** или выбрать знак Simulink на панели инструментов.

Запуск моделирования системы осуществляется командой меню **Simulink ▹ Start.**

Источники сигналов Simulink в библиотеке Sources

Источник одиночного перепада Step:

Step time — время появления перепада;
Initial value — начальное значение воздействия — до перепада;
Final value — конечное значение воздействия;
Sample time = 0 — эталонное время.

Линейно нарастающее воздействие формируется блоком **Ramp:**

Slope — угловой коэффициент временной зависимости;
Start time — время, начиная с которого воздействует нарастание;
Initial value — начальный уровень воздействия.

Постоянное воздействие создается блоком **Constant Value**, в котором задается необходимое значение константы.

Источником синусоидального воздействия является блок **Sine Wave:**

Amplitude — амплитуда;
Frequence — частота;
Phase — фаза;
Sample time = 0 — эталонное время.

Блоки моделирования систем

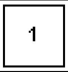
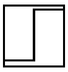
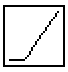
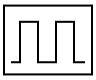
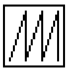
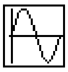
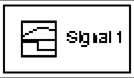
1. Из библиотеки математических блоков **Math** выбирается блок масштабирования **Gain** (умножение на заданную константу) и блок суммирования **Sum**.

2. Из библиотеки **Continuous** выбирается блок интегрирования данных **Integrator.**

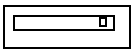
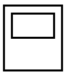
3. Из библиотеки **Sinks** выбирается блок **Scope** — осциллограф для наблюдения временных и других зависимостей.

4. Из библиотеки **Continuous** выбирается блок **Transfer Fnc** — передаточная функция в виде отношения полиномом заданной степени.

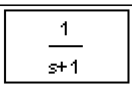
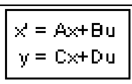
Основные источники сигналов (Sources)

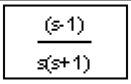
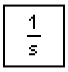
	**Constant** – сигнал постоянной величины.
	**Step** – ступенчатый сигнал, меняется время скачка (**Step Time**), начальное (**Initial Value**) и конечное значение (**Final Value**).
	**Ramp** – линейно возрастающий сигнал с заданным наклоном (**Slope**). Можно задать также время начала изменения сигнала (**Start Time**) и начальное значение (**Initial Value**).
	**Pulse Generator** – генератор прямоугольных импульсов, задаются амплитуда (**Amplitude)**, период (**Period**), ширина (**Pulse Width**, в процентах от периода), фаза (**Phase Delay**).
	**Repeating Sequence –** последовательность импульсов, их форма задается в виде пар чисел (время; величина сигнала)
	**Sine Wave** – синусоидальный сигнал, задается амплитуда (**Amplitude**), частота (**Frequency**), фаза (**Phase**) и среднее значение (**Bias**).
	**Signal Builder** – построитель сигналов, позволяющий задавать форму сигнала, перетаскивая мышью опорные точки.
	**Random Number** – случайные числа с нормальным (гауссовым) распределением. Можно задать среднее значение (**Mean Value**), дисперсию (**Variance**), период изменения сигнала (**Sample Time**).
	**Uniform Random Number** – случайные числа с равномерным распределением в заданном интервале от **Minimum** до **Maximum**.
	**Band Limited White Noise** – случайный сигнал, ограниченный по полосе белый шум (имеющий равномерный спектр до некоторой частоты). Блок используется как источник белого шума для моделей непрерывных систем. Задается интенсивность (**Noise Power**) и интервал дискретизации (**Sample Time**), в течение которого удерживается постоянное значение сигнала. Чем меньше интервал, тем точнее моделирование, однако больше вычислительные затраты.

Основные устройства вывода (Sinks)

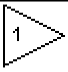
	**Display** – цифровой дисплей, показывает изменение входного сигнала в цифровом виде.
	**Scope –** осциллограф, показывает изменение сигнала в виде графика, позволяет передавать данные в рабочую область MATLAB для последующей обработки и оформления.

Линейные системы (Continuous)

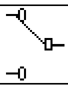
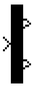
	**Transfer Fcn** – передаточная функция, в параметрах задаются числитель (**Numerator**) и знаменатель (**Denominator**) в виде полиномов.
	**State Space** – модель в пространстве состояний, в параметрах задается четверка матриц, определяющих модель, и начальные условия для вектора состояния (**Initial conditions**).

	**Zero-Pole** – модель в форме «нули-полюса», в параметрах задаются массивы нулей (**Zeros**), полюсов (**Poles**), а также коэффициент усиления (G**ain**).
	**Integrator** – интегратор с возможностью установки начальных условий (**Initial condition**), а также пределов насыщения (**Lower saturation limit** и **Upper saturation limit**). Когда сигнал выхода выходит за границы, определяемые этими пределами, интегрирование прекращается.

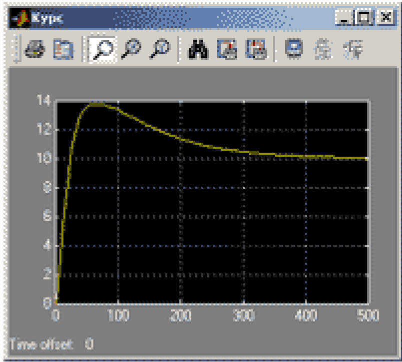
Математические операции (Math Operations)

	**Gain** – усилитель, задается коэффициент усиления (G**ain**).
	**Sum** – сумматор, используется для сложения и вычитания входов. Параметр **List of signs** задает количество входов, их знаки («**+**» для сложения и «**–**» для вычитания). Промежутки между входами (обозначаются знаком **|**).
	**Trigonometric Function** – тригонометрическая функция.

Управление сигналами (Signal Routing)

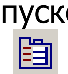
	**Manual Switch** – ручной переключатель, позволяет двойным щелчком переключать выход на один из двух входных сигналов.
	**Mux** – мультиплексор, объединяет несколько сигналов в один «жгут» (векторный сигнал), в параметрах задается число входов (**Number of Inputs**).
	**Demux** – демультиплексор, позволяет «разбить» векторный сигнал на несколько скалярных, в параметрах задается число выходов (**Number of Outputs**).

Блок Scope



В окне блока **Scope** изображается график изменения входного сигнала. Если вход соединен с выходом мультиплексора, сразу строится несколько графиков (по размерности входного «жгута»).

По умолчанию на оси ординат используется диапазон от -5 до 5. Если этот вариант не подходит, выбрать масштаб автоматически (так, чтобы весь график был виден) можно с помощью кнопки . Соседняя кнопка  сохраняет эти настройки для следующих запусков.

Кнопка  открывает окно настроек, причем наиболее важные данные содержатся на вкладке **Data history**. Если не сбросить флажок **Limit data points**, в памяти будет сохраняться только заданное число точек графика, то есть, при большом времени моделирования начало графика будет потеряно.

Отметив на этой же странице флажок **Save data to workspace** можно сразу передать результаты моделирования в рабочую область Matlab для того, чтобы их можно было дальше обрабатывать, выводить на графики и сохранять в файле. Поле **Variable name** задает имя переменной в рабочей области, в которой сохраняются данные. В простейшем случае выбирается формат **Array** (в списке **Format**). Это означает, что данные будут сохраняться в массиве из нескольких столбцов (первый столбец – время, второй – первый сигнал, третий – второй сигнал и т.д., по порядку входов мультиплексора).

Задания

Задание 1. Промоделировать работу системы — гидравлический резервуар в случаях различных типов входных и возмущающих воздействий:

a) входное и возмущающее воздействия представляют собой одиночный перепад;

b) входное и возмущающее воздействия представляют собой линейно нарастающее воздействие. Сделать выводы по результатам моделирования.

Задание 2. Построить модель двигателя постоянного тока для двух случаев:

a) управление скоростью вращения вала двигателя;

b) управление углом поворота вала двигателя.

Задание 3. Промоделировать работу двигателя постоянного тока в случаях различных типов входных воздействий:

a) входное воздействие представляет собой постоянное значение (const);

b) входное воздействие представляет собой синусоидальный сигнал. Сделать выводы по результатам моделирования.

Задание 4. Сделать выводы по лабораторной работе.

Варианты.

Вид характеристики	Варианты			
	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29	2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30	3, 7, 11, 15, 19, 23, 27	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28
	Тип двигателя постоянного тока			
	МИГ-90А	МИГ-180А	МИГ-400А	МИГ-600А
Номинальная мощность, Вт	90	180	400	600
Частота вращения ω, об/мин	3000	3000	3000	3000
Номинальный момент M, Н·м	0,286	0,573	1,275	1,91
Номинальный ток I, А	4,5	8,9	8,3	6,3
Сопротивление обмотки якоря R, Ом	0,94	0,4	0,76	1,4
Момент инерции якоря J, 10^{-5} кг·м^2	2,0	3,9	16	43
Электромеханическая постоянная $T_м$, мс (10^{-3} с)	3,8	3,0	4,5	5,4
Электромагнитная постоянная $T_э$, мс (10^{-3} с)	0,7	0,9	1,7	2,4
Масса m, кг	5,9	9,0	14,6	20,0

Индуктивность цепи якоря двигателя L определяется из формулы:

$$T_э = \frac{L}{R} \Rightarrow L = T_э R.$$

Коэффициент пропорциональности, связывающий ток и развиваемый двигателем момент k_m определяется из формулы:

$$M = k_m \cdot I \Rightarrow k_m = M / I,$$

где M — номинальный момент двигателя.

Коэффициент противо ЭДС k_ω определяется из формулы:

$$T_м = \frac{J \cdot R}{k_m \cdot k_\omega} \Rightarrow k_\omega = \frac{J \cdot R}{k_m T_м}.$$

Контрольные вопросы.

1. Принципы управления.
2. Классификация систем управления.
3. Статический и динамический режимы работы систем управления.
4. Передаточная функция системы управления.
5. Нахождение передаточной функции системы по дифференциальному уравнению.
6. Построение структурной схемы системы по дифференциальному уравнению процесса.

Лабораторная работа 2

Построение структурных схем систем управления на основе систем дифференциальных уравнений

Цель работы: получение навыков построения структурных схем систем управления на основе систем дифференциальных уравнений.

Теоретические сведения

Пример 1. Построить структурную схему системы управления, представленной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -y + g$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x \qquad ,$$
$$\frac{dz}{dt} = y + 0{,}5z$$

где g — входной сигнал; x, y, z — переменные состояния; z — выходной сигнал.

Структурная схема системы показана на рис. 1.

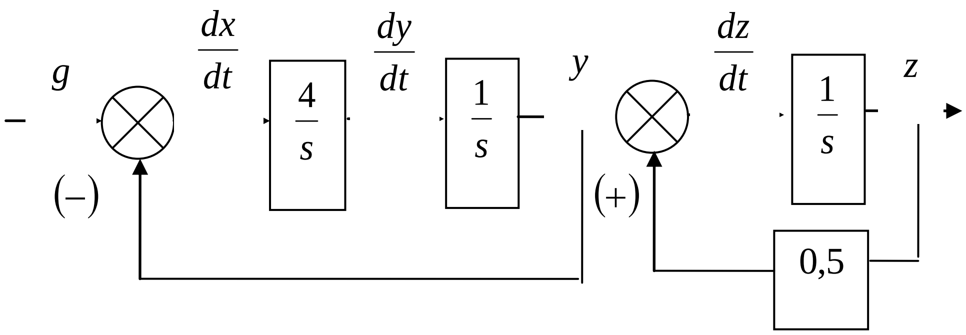


Рис. 1.

Задание. Построить структурную схему системы управления, представленной системой дифференциальных уравнений.

Варианты.

1., 17.

$$\begin{cases} T_3\dfrac{d^2X_3}{dt^2}+\dfrac{dX_3}{dt}=K_3(X_{ВХ}+X_6); \\ T_2\dfrac{dX_2}{dt}+X_2=K_2\delta; \\ X_{ВЫХ}=X_3+X_4 \\ T_5\dfrac{dX_5}{dt}+X_5=K_5\dfrac{dX_{ВЫХ}}{dt}; \\ \delta=-(X_5+X_{ВЫХ}); \\ X_1=K_1\delta; \\ X_6=K_6(X_1+X_2); \\ X_4=K_4X_2. \\ K_1=2{,}5;\quad K_2=1{,}5;\quad K_3=0{,}1;\quad K_4=5;\quad K_5=10;\quad K_6=20; \\ T_2=10c;\quad T_3=5c;\quad T_5=10c. \end{cases}$$

2., 18.

$$\begin{cases} T_3\dfrac{d^2X_3}{dt^2}+\dfrac{dX_3}{dt}=K_3(X_{ВХ}+X_2) \\ T_2\dfrac{dX_2}{dt}+X_2=K_2X_1 \\ T_1\dfrac{dX_1}{dt}+X_1=K_1\delta \\ \delta=-X_8 \\ X_8=X_5+X_6 \\ X_5=K_5\dfrac{dX_7}{dt} \\ X_6=K_6X_7 \\ X_7=K_7X_{ВЫХ} \\ X_4=K_4X_1 \\ X_{ВЫХ}=X_3+X_4 \\ K_1=2\quad K_2=5\quad K_3=0{,}5\quad K_4=10\quad K_5=100\quad K_6=0{,}02 \\ K_7=2\quad T_1=10c\quad T_2=5c\quad T_3=2c \end{cases}$$

3., 19.

$$\begin{cases} T_3 \dfrac{d^2 X_3}{dt^2} + \dfrac{dX_3}{dt} = K_3 (X_{BX} + X_2); \\ X_{ВЫХ} = X_3 + X_4; \\ X_5 = K_5 \dfrac{dX_{ВЫХ}}{dt}; \\ X_6 = K_6 X_{ВЫХ}; \\ X_7 = X_5 + X_6; \\ \delta = -X_7; \\ T_1 \dfrac{dX_1}{dt} + X_1 = K_1 \delta; \\ T_2 \dfrac{dX_2}{dt} + X_2 = K_2 X_1; \\ X_4 = K_4 X_1; \\ K_1 = 2; \quad K_2 = 5; \quad K_3 = 10; \quad K_4 = 50; \quad K_5 = 0{,}01; \quad K_6 = 0{,}1; \\ T_1 = 10c; \quad T_2 = 2c; \quad T_3 = 0{,}5c. \end{cases}$$

4., 20.

$$\begin{cases} X_3 = K_3 (X_{BX} + X_2); \\ X_{ВЫХ} = X_2 + X_6; \\ T_5 \dfrac{d^2 X_5}{dt^2} + \dfrac{dX_5}{dt} = K_5 \delta; \\ X_6 = X_5 + X_4; \\ X_1 = K_1 \delta; \\ \delta = -X_{ВЫХ}; \\ T_2 \dfrac{dX_2}{dt} + X_2 = K_2 X_1; \\ x_6 = \delta + x_1; \\ K_1 = 1{,}5; \quad K_2 = 10; \quad K_3 = 150; \quad K_4 = 0{,}01; \quad K_5 = 15; \\ T_2 = 0{,}1c; \quad T_5 = 5c. \end{cases}$$

5., 21.

$$\begin{cases} T_2 \dfrac{d^2 X_3}{dt^2} + T_1 \dfrac{dX_3}{dt} + X_3 = K_3 (X_{BX} + X_1 + X_2); \\ X_4 = K_4 X_2; \\ X_{ВЫХ} = X_3 + X_4; \\ X_7 = K_7 X_{ВЫХ}; \\ T_5 \dfrac{dX_5}{dt} + X_5 = K_5 X_7; \\ X_6 = K_6 X_7; \\ \delta = -(X_5 + X_6); \\ X_1 = K_1 \, d\delta / dt; \\ X_2 = K_2 \delta; \\ K_1 = 5; \quad K_2 = 10; \quad K_3 = 2; \quad K_4 = 0{,}1; \quad K_5 = 0{,}05; \quad K_6 = 7; \\ K_7 = 0{,}7c; \quad T_1 = 0{,}7c; \quad T_2 = 1c. \quad T_5 = 5c. \end{cases}$$

6., 22.

$$\begin{cases} T_2\dfrac{dX_2}{dt}+X_2=K_2X_1; \\ X_3=K_3(X_{ВХ}+X_2); \\ X_1=K_1\delta; \\ \delta=-(X_{ВЫХ}+X_3); \\ T_5\dfrac{d^2X_5}{dt^2}+\dfrac{dX_5}{dt}=K_5\delta; \\ X_6=K_6X_5; \\ X_{ВЫХ}=X_2+X_6; \\ К_1=0{,}1;\quad К_2=1{,}5;\quad К_3=10;\quad К_4=5;\quad К_5=0{,}5;\quad К_6=15; \\ T_2=0{,}2c;\quad T_5=5c. \end{cases}$$

7., 23.

$$\begin{cases} T_3\dfrac{d^2X_3}{dt^2}+\dfrac{dX_3}{dt}=K_3(X_{ВХ}+X_2); \\ T_2\dfrac{dX_2}{dt}+X_2=K_2X_1; \\ T_1\dfrac{dX_1}{dt}+X_1=K_1\delta; \\ \delta=-X_7; \\ X_7=X_5+X_6; \\ X_5=K_5\,{dX_{ВЫХ}}/{dt}; \\ X_6=K_6X_{ВЫХ}; \\ X_4=K_4X_1; \\ X_{ВЫХ}=X_3+X_4; \\ К_1=2;\quad К_2=4;\quad К_3=0{,}1;\quad К_4=15;\quad К_5=100;\quad К_6=7; \\ T_1=0{,}5c;\quad T_2=2c;\quad T_3=5c. \end{cases}$$

8., 24.

$$\begin{cases} T_3\dfrac{dX_3}{dt}+X_3=K_3X_{ВЫХ}; \\ T_1\dfrac{dX_{ВЫХ}}{dt}=X_4; \\ X_1=K_1X_{ВХ}; \\ X_4=X_1-X_2; \\ X_{ВХ}-X_{ВЫХ}=\delta; \\ X_2=\delta+X_3; \\ K_1=2;\quad K_3=4;\quad T_1=0{,}01c;\quad T_3=0{,}5c. \end{cases}$$

9., 25.

$$\begin{cases} X_1=-K_1\delta; \\ T_3\dfrac{dX_{ВЫХ}}{dt}+X_{ВЫХ}=K_3(X_2+X_4+\delta); \\ X_4=K_4X_{ВХ}; \\ T_2\dfrac{dX_2}{dt}+X_2=K_2X_1; \\ X_{ВХ}-X_{ВЫХ}=\delta; \\ К_1=2;\quad К_2=5;\quad К_3=3;\quad К_4=8; \\ T_2=0{,}1c;\quad T_3=1c. \end{cases}$$

10., 26.

$$\begin{cases} T_1 \dfrac{dX_2}{dt} + X_2 = K_2\left(X_{ВХ} + X_1 - X_4\right); \\ X_1 = K_1\left(\delta - X_5\right); \\ X_4 = K_4 X_{ВЫХ}; \\ T_2 \dfrac{d^2 X_{ВЫХ}}{dt^2} + \dfrac{dX_{ВЫХ}}{dt} = K_3 X_2; \\ X_5 = K_5 X_{ВЫХ}; \\ \delta = -X_5 \\ K_1 = 0{,}5; \quad K_2 = 2; \quad K_3 = 100; \quad K_4 = 0{,}02; \quad K_5 = 15; \\ T_1 = 0{,}1c; \quad T_2 = 2c. \end{cases}$$

11., 27.

$$\begin{cases} X_{ВЫХ} = X_{ВХ} - X_3; \\ T_3 \dfrac{dX_3}{dt} = K_3\left(T_2 \dfrac{dX_2}{dt} + X_2\right); \\ X_2 = X_4 - X_{ВЫХ} + \delta; \\ T_4 \dfrac{dX_4}{dt} + X_4 = K_4 X_{ВЫХ}; \\ \delta = X_{ВХ} - X_{ВЫХ} \\ K_3 = 4; \quad K_4 = 7; \quad T_2 = 0{,}1c; \quad T_3 = 1c. \quad T_4 = 10c. \end{cases}$$

12., 28.

$$\begin{cases} X_1 = X_{ВХ} - X_4; \\ X_2 = T_1 \dfrac{dX_1}{dt}; \\ X_3 = K_1 X_1; \\ X_{ВЫХ} = X_2 + X_3; \\ \delta = X_{ВХ} - X_{ВЫХ}; \\ T_2 \dfrac{dX_4}{dt} + X_4 = K_2 X_{ВЫХ}; \\ K_1 = 5; \quad K_4 = 8; \quad T_1 = 0{,}1c; \quad T_2 = 5c. \end{cases}$$

13., 29.

$$\begin{cases} T_2 \dfrac{d^2 X_3}{dt^2} + T_1 \dfrac{dX_3}{dt} + X_3 = K_3\left(X_{ВХ} + X_1 + X_2\right); \\ X_4 = K_4 X_2; \\ X_{ВЫХ} = X_3 + X_4; \\ T_5 \dfrac{dX_5}{dt} + X_5 = K_5 X_{ВЫХ}; \\ T_6 \dfrac{dX_6}{dt} + X_6 = K_6 X_{ВЫХ}; \\ X_1 = K_1 \, {d\delta}/{dt}; \\ \delta = -\left(X_5 + X_6\right); \\ X_2 = K_2 \delta; \\ K_1 = 100; \quad K_2 = 2; \quad K_3 = 3; \quad K_4 = 0{,}1; \quad K_5 = 5; \quad K_6 = 2; \\ T_1 = 1c; \quad T_2 = 2c; \quad T_5 = 10c; \quad T_6 = 50c. \end{cases}$$

14., 30.

$$\begin{cases} X_7 = X_{ВХ} + X_2; \\ X_{ВЫХ} = K_3(X_7 + X_5); \\ X_6 = K_6 X_{ВЫХ} \\ T_2 \dfrac{d^2 X_5}{dt^2} + T_3 \dfrac{dX_5}{dt} + X_5 = K_5 \delta; \\ T_1 \dfrac{dX_4}{dt} + X_4 = K_4 \delta; \\ X_1 = K_1 \delta; \\ X_2 = K_2(X_1 + X_4); \\ \delta = -X_6; \\ K_1 = 0{,}5; \quad K_2 = 2; \quad K_3 = 150; \quad K_4 = 0{,}01; \quad K_5 = 7; \quad K_6 = 3; \\ T_1 = 0{,}2c; \quad T_2 = 5c; \quad T_3 = 2c. \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} T_2 \dfrac{d^2 X_3}{dt^2} + T_1 \dfrac{dX_3}{dt} = K_3(X_{ВХ} + X_1 + X_2); \\ X_4 = K_4 X_2; \\ X_{ВЫХ} = X_3 + X_4; \\ X_7 = K_7 X_{ВЫХ}; \\ T_5 \dfrac{dX_5}{dt} + X_5 = K_5 X_7; \\ T_6 \dfrac{dX_6}{dt} + X_6 = K_6 X_7; \\ \delta = -(X_5 + X_6); \\ X_1 = K_1 \, {}^{d\delta}\!/_{dt}; \\ X_2 = K_2 \delta; \\ K_1 = 0{,}1; \quad K_2 = 10; \quad K_3 = 100; \quad K_4 = 4; \quad K_5 = 5; \quad K_6 = 0{,}02; \\ K_7 = 5; \quad T_1 = 0{,}75c; \quad T_2 = 2c; \quad T_5 = 10c; \quad T_6 = 50c. \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} \dfrac{dX_3}{dt} = K_3(X_{ВХ} + X_{ВЫХ} - X_4); \\ X_4 = K_4 X_3; \\ \delta = -X_3; \\ T_1 \dfrac{d^2 X_{ВЫХ}}{dt^2} + \dfrac{dX_{ВЫХ}}{dt} = K_2(X_1 - X_{ВЫХ}); \\ X_1 = K_1 \delta; \\ K_1 = 100; \quad K_2 = 5; \quad K_3 = 0{,}02; \quad K_4 = 0{,}1; \\ T_1 = 10c. \end{cases}$$

Контрольные вопросы.

1. Принципы построения структурных схем систем управления на основе систем дифференциальных уравнений.

Лабораторная работа 3
Построение временных и частотных характеристик звеньев

Цель работы: получение навыков построения временных и частотных характеристик звеньев.

Теоретические сведения
Передаточная функция системы управления

Пусть некоторая система описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g}{dt^m} + \ldots + b_0 g(t),$$

где $x(t)$ — регулируемая, или выходная величина системы (реакция системы на входное воздействие); $g(t)$ — входной сигнал, вызывающий реакцию системы.

В ТАУ используют понятие *дифференциального оператора* (*оператор дифференцирования*) $p = \frac{d}{dt}$ так, что, $\frac{dy}{dt} = py$, а $\frac{d^n}{dt^n} = p^n$, позволяющего записывать дифференциальные уравнения в операторной форме как алгебраические. Обратная дифференцированию операция интегрирования записывается как $\frac{1}{p}$.

В операторной форме исходное дифференциальное уравнение:

$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0)x = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)g.$$

В ТАУ используется понятие *передаточной функции* — отношение операторов правой и левой частей дифференциального уравнения:

$$W(p) = M(p)/D(p) = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)/(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0).$$

Полагая, что имеют место нулевые начальные условия, то есть что система до момента приложения воздействия находилась в состоянии покоя, преобразуем обе части дифференциального уравнения по Лапласу и из полученного уравнения в изображениях:

$$X(s)(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0) = G(s)(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0)$$

найдем отношение изображения реакции системы $X(s)$ к изображению входного сигнала $G(s)$:

$$W(s) = \frac{\overbrace{X(s)}^{выход}}{\underbrace{G(s)}_{вход}} = \frac{\overbrace{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}^{вход}}{\underbrace{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}_{выход}}.$$

При нулевых начальных условиях обе формы записи совпадают так как:

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=L[px(t)]=sX(s),\ldots,L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]=L[p^n x(t)]=s^n X(s),$$

$$L\left[\frac{dg(t)}{dt}\right]=L[pg(t)]=sG(s),\ldots,L\left[\frac{d^m g(t)}{dt^m}\right]=L[p^m g(t)]=s^m G(s),$$

и оператор Лапласа s может быть отождествлен с оператором дифференцирования p.

Передаточной функцией звена называется отношение изображений по Лапласу выходной переменной к входной при нулевых начальных условиях.

Передаточная функция определяет отношение выходной величины звена к входной в каждый момент времени, поэтому ее еще называют *динамическим коэффициентом усиления*.

В установившемся режиме $d/dt=0$, то есть $p=0$ (и соответственно можно сказать, что $s=0$), и передаточная функция превращается в *коэффициент усиления* $k=W(0)=b_0/a_0$ (отношение свободных членов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы). Таким образом, коэффициент усиления — это коэффициент пропорциональности между постоянным входным сигналом и установившимся значением выходного сигнала (если оно существует). Когда входная и выходная величины имеют разную природу, его называют *коэффициентом передачи*.

Знаменатель передаточной функции $D(s)=a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0$ называют *характеристическим полиномом* (*уравнением*). Его корни, то есть значения s, при которых знаменатель $D(s)$ обращается в ноль, а $W(s)$ стремится к бесконечности, называются *полюсами передаточной функции*.

Числитель $M(s)=b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0$ называют *операторным коэффициентом передачи*. Его корни, при которых $M(s)=0$ и $W(s)=0$, называются *нулями передаточной функции*.

Порядок (*звена*) *системы* — это наивысшая степень производной в дифференциальном уравнении, которое описывает систему или порядок полинома знаменателя передаточной функции.

Физически нереализуемым звеном является звено, у которого степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя, т. е. $m>n$, поскольку в этом случае звено осуществляет дифференцирование входного сигнала.

Звено с известной передаточной функцией называется *динамическим звеном*. Оно изображается прямоугольником, внутри которого записывается выражение передаточной функции. Схема, составленная из динамических звеньев, называется *структурной схемой*.

Звено называется *минимально-фазовым*, если все нули и полюса его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части.

Звено называют *неминимально-фазовым*, если хотя бы один ноль или полюс его передаточной функции имеет положительную вещественную часть.

Теперь к классификации систем автоматического управления можно добавить, что системы делятся на *статические* и *астатические*. Такое деление производится по характеру установившейся ошибки в системе при ступенчатом (скачкообразном) воздействии.

Установившаяся ошибка системы управления при скачкообразном изменении входной величины называется *статической ошибкой*.

Системы управления, статическая ошибка которых не равна нулю, называются *статическими системами*. Соответственно, системы автоматического управления, установившаяся ошибка которых равна нулю, называются *астатическими системами*.

Чтобы определить, к статической или астатической системе относится система автоматического управления, не обязательно решать дифференциальное уравнение замкнутой системы при скачкообразном воздействии. Достаточно иметь выражение передаточной функции разомкнутого контура управления исследуемой замкнутой системы управления.

Признаком астатической системы управления является наличие в разомкнутом контуре управления интегрирующего (астатического) звена, то есть звена с передаточной функцией: $W(s)=\dfrac{1}{s^{\nu}}$, где ν — порядок астатизма. Если в разомкнутом контуре системы управления отсутствует интегрирующее звено, то она относится к статическим системам.

Типовые управляющие и возмущающие воздействия

Для оценки динамических свойств системы исследуют ее реакцию на *типовые входные воздействия*, которые наиболее полно отражают особенности реальных возмущений. Во-первых, это позволяет сравнивать отдельные элементы между собой с точки зрения их динамических свойств. Во-вторых, зная реакцию системы на типовые воздействия, можно судить о том, как она будет вести себя при сложных изменениях входной величины.

Наиболее распространенными типовыми воздействиями являются: *ступенчатое*, *импульсное* и *гармоническое* воздействия.

Первое воздействие — *ступенчатое воздействие* (*единичная ступенчатая функция*, *функция Хевисайда*) (рис. 1):

$$g(t)=1(t)=\begin{cases}1, \text{ при } t\ge 0,\\ 0, \text{ при } t<0.\end{cases}$$

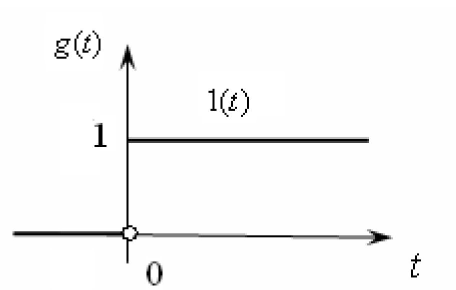


Рис. 1. Единичная ступенчатая функция

Другим распространенным типовым воздействием является *дельта-функция* (δ-*функция*, *функция Дирака*). Дельта-функция физически представляет собой импульс с единичной площадью, с бесконечно малой длительностью и амплитудой (высотой) стремящейся к бесконечности (рис. 2):

$$\delta(t)=\begin{cases}0, \text{ при } t\ne 0,\\ \infty, \text{ при } t=0.\end{cases}$$

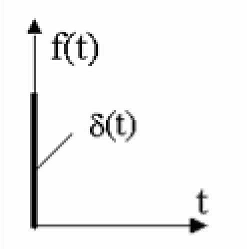


Рис. 2. Дельта-функция

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

— поскольку производная от единичной функции при $t=0$ равна бесконечности $\left.\dfrac{d1(t)}{dt}\right|_{t=0}=\infty$, то интеграл в бесконечных пределах от δ-функции равен единице $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$. Отсюда следует утверждение о том, что δ-функция имеет единичную площадь;

— фильтрующие свойства: $x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$.

Понятие временных характеристик

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие (зависимость изменения выходной величины системы от времени при подаче на ее вход единичного ступенчатого воздействия при нулевых начальных условиях) называется *переходной характеристикой системы* (*переходным процессом*) и обозначается $h(t)$.

Зная передаточную функцию системы $W(s)$, выражение для переходного процесса можно записать следующим образом:

$$h(s)=W(s)L[1(t)],$$

где $L[1(t)]=1/s$ — преобразование Лапласа единичной ступенчатой функции.

Тогда $h(s)=W(s)\cdot 1/s$.

Далее взяв обратное преобразование Лапласа, находится функция переходного процесса от времени:

$$h(t)=L^{-1}[h(s)].$$

Импульсная переходная характеристика (*весовая функция*, *функция веса*) описывает реакцию системы на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях, обозначают $w(t)$.

Единичная импульсная функция, или $\delta-$ функция, представляет собой производную от единичной ступенчатой функции:

$$\delta(t)=\frac{d}{dt}1(t).$$

Таким образом, взяв производную от переходной функции можно получить выражение для импульсной переходной функции системы $w(t)=\dfrac{dh(t)}{dt}$.

Дельта-функция тождественно равна нулю во всех точках, кроме $t=0$, где она стремится к бесконечности. Основное свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1,$$

то есть она имеет единичную площадь.

Нетрудно установить, что изображение по Лапласу дельта-функции:

$$\delta(s) = L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s \times \frac{1}{s} = 1.$$

Тогда изображение по Лапласу импульсной переходной функции системы определяется как:

$$L\{w(t)\} = w(s) = W(s) \cdot \delta(s) = W(s).$$

Таким образом, справедливо выражение:

$$w(t) = L^{-1}\{w(s)\} = L^{-1}\{W(s)\}.$$

Переходная и импульсная переходная характеристики называются *временными характеристиками*. По ним с использованием интеграла Дюамеля можно определить выходную величину при произвольном входном воздействии.

Интеграл Дюамеля позволяет определять реакцию системы на входное воздействие $x(t)$ в текущем времени (в реальном, замедленном или ускоренном масштабе, в зависимости от мощности вычислительного инструмента и желания исследователя) по ее переходной функции $h(t)$:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau)\frac{d}{d\tau}x(\tau)d\tau + y(0).$$

Как видно, интеграл Дюамеля оперирует с сигналами, начавшимися в нулевой момент времени или позднее и может учитывать одно начальное условие (выходной сигнал в начальный момент времени), но не значения младших производных выходного сигнала в нулевой момент времени, которые предполагаются нулевыми.

Моделирующие программы, например Mathcad, довольно долго вычисляют интеграл Дюамеля, поскольку он требует выполнять большой объем вычислительной работы на каждом шаге.

Интеграл свертки можно рассматривать как вариант интеграла Дюамеля, в котором под интегралом проведено интегрирование по частям. Это позволяет выразить выходной сигнал системы через ее весовую функцию $w(t)$:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

Смысл интеграла свертки состоит в том, что здесь входной сигнал представляется последовательностью плотно следующих друг за другом коротких импульсов, амплитуды (точнее, площади) которых равны значению сигнала в моменты их следования и длительность которых устремляется к нулю. При этом последовательность импульсов стремится к последовательности дельта-функций с площадями, равными площадям соответствующих импульсов. Реакция системы находится как сумма реакций на каждый импульс, составляющий входное воздействие, т. е. как взвешенная сумма сдвинутых весовых функций $w(t-\tau)$.

Методы интегралов Дюамеля и свертки способны решать задачи в текущем времени потому, что текущим временем t является верхний предел этих интегралов. Интегралы Дюамеля и свертки трактуют решение как сумму элементарных переходных процессов, а, следовательно, как перманентный переходный процесс. Поэтому даже если система работает в установившемся режиме, интегралы Дюамеля и свертки формально рассматривают этот режим как переходный.

Понятие частотных характеристик

Если подать на вход системы с передаточной функцией $W(s)$ гармонический сигнал:

$$u(t) = U_m e^{j\omega t} = U_m(\cos\omega t + j\sin\omega t),$$

то после завершения переходного процесса на выходе установятся гармонические колебания:

$$y(t) = Y_m e^{j(\omega t+\varphi)} = Y_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

с той же частотой ω, но другими амплитудой и фазой, зависящими от частоты ω входного сигнала. По ним можно судить о динамических свойствах системы.

Зависимости, связывающие амплитуду и фазу выходного сигнала с частотой входного сигнала, называются *частотными характеристиками* (ЧХ). Анализ ЧХ системы с целью исследования ее динамических свойств называется *частотным анализом*.

Подставим выражения для $u(t)$, $y(t)$ в уравнение динамики:

$$(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)y = (b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0)u\,.$$

Учтем, что

$$su = sU_m e^{j\omega t} = U_m j\omega e^{j\omega t} = j\omega u$$ (производную находим),

а значит

$$s^n u = s^n U_m e^{j\omega t} = U_m (j\omega)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n u\,.$$

По аналогии с передаточной функцией можно записать:

$$y = \frac{b_m (j\omega)^m + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0} u = W(j\omega)\cdot u\,.$$

$W(j\omega)$, равная отношению выходного сигнала к входному при изменении входного сигнала по гармоническому закону, называется *частотной передаточной функцией*. Она может быть получена путем простой замены $s = j\omega$ в выражении $W(s)$.

$W(j\omega)$ — комплексная функция, поэтому:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega)$ — *вещественная частотная характеристика* (ВЧХ); $Q(\omega)$ — *мнимая частотная характеристика* (МЧХ); $A(\omega)$ — а*мплитудно-частотная характеристика* (АЧХ); $\varphi(\omega)$ — *фаза-частотная характеристика* (ФЧХ).

АЧХ дает отношение амплитуд выходного и входного сигналов и показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты. ФЧХ дает сдвиг по фазе выходной величины относительно входной и показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах:

$$A(\omega) = \frac{Y_m}{U_m} = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = |W(j\omega)|,$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)\cdot\frac{180}{\pi} = \arg\left(W(j\omega)\right)\cdot\frac{180}{\pi}\,.$$

По форме АЧХ различают несколько основных типов звеньев:

1) *фильтр низких частот* – пропускает низкочастотные сигналы примерно с одинаковым коэффициентом усиления, блокирует высокочастотные шумы и помехи;
2) *фильтр высоких частот* – пропускает высокочастотные сигналы, блокирует сигналы низкой частоты;
3) *полосовой фильтр* – пропускает только сигналы с частотами в полосе от ω_1 до ω_2;
4) *полосовой режекторный фильтр* – блокирует только сигналы с частотами в полосе от ω_1 до ω_2, остальные пропускает.

На рис .1 показаны амплитудные частотные характеристики идеальных фильтров этих четырех типов:

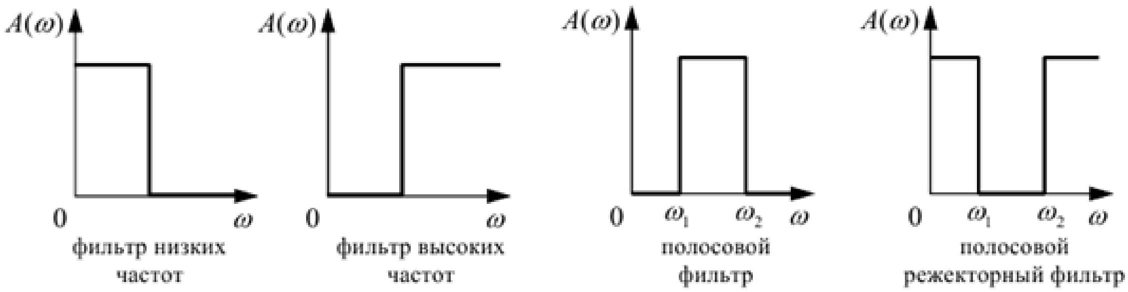


Рис. 1.

В радиотехнике используется понятие *полосы пропускания* – это ширина полосы частот, в которой значение АЧХ больше, чем $1/\sqrt{2}$ от ее максимального значения.

Переходной процесс можно построить по вещественной или мнимой характеристикам системы:

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}(W_{зам}(j\omega))\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega,$$

$$h(t) = \mathrm{Re}(W_{зам}(0)) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}(W_{зам}(j\omega))\frac{\cos\omega t}{\omega}d\omega,$$

где $\mathrm{Re}(W_{зам}(j\omega))$ — вещественная частотная характеристика замкнутой системы (ВЧХ); $\mathrm{Im}(W_{зам}(j\omega))$ — мнимая частотная характеристика замкнутой системы (МЧХ).

Если $W(j\omega)$ изобразить вектором на комплексной плоскости, то при изменении ω от 0 до $+\infty$ его конец будет вычерчивать кривую, называемую *годографом вектора* $W(j\omega)$, или *амплитудно-фазовую частотную характеристику* (АФЧХ) (рис. 2, 3). Ветвь АФЧХ при изменении ω от $-\infty$ до 0 можно получить зеркальным отображением данной кривой относительно вещественной оси.

Длина вектора, проведенного из начала координат в точку АФЧХ, соответствующую какой-то выбранной частоте, равна модулю частотной передаточной функции. Угол между вектором и положительным направлением вещественной оси, отсчитываемом против часовой стрелки, равен аргументу или фазе частотной передаточной функции. Таким образом, АФЧХ дает возможность наглядно представить для каждой частоты входного воздействия звена отношение амплитуд выходной и входной величин и сдвиг фаз между ними.

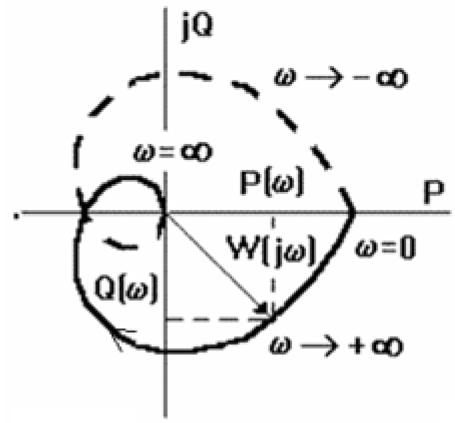


Рис. 2. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

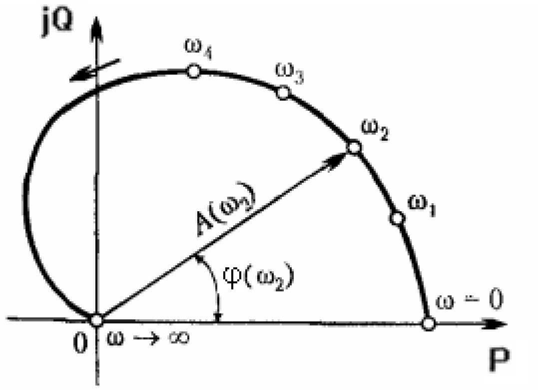


Рис. 3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Частотные характеристики достаточно сложно строить вручную. В 60-е годы, когда развивалась классическая теория управления, не было мощных компьютеров, поэтому наибольшую популярность приобрели приближенные методы, которые позволяли проектировать регуляторы с помощью ручных вычислений и построений. Один из таких подходов основан на использовании *логарифмических частотных характеристик*.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) $L(\omega)$ и *логарифмическая фазовая частотная характеристика* (ЛФЧХ) $\varphi(\omega)$ получаются путем логарифмирования передаточной функции:

$$\ln\left(W(j\omega)\right)=\ln\left(A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\right)=\ln\left(A(\omega)\right)+\ln\left(e^{j\varphi(\omega)}\right)=\ln\left(A(\omega)\right)+\varphi(\omega).$$

ЛАЧХ получают из первого слагаемого, которое из соображений масштабирования умножается на 20, и используют не натуральный логарифм, а десятичный, то есть $L(\omega)=20\lg\left(|W(j\omega)|\right)=20\lg\left(A(\omega)\right)$. Величина $L(\omega)$ откладывается по оси ординат в *децибелах* (дБ).

По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе. Единицей отсчета на логарифмической оси частот является *декада* — диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу $\lg(10)=1,\ \ \lg(100)=2$).

ЛФЧХ, получаемая из второго слагаемого, отличается от ФЧХ только масштабом по оси ω. Величина $\varphi(\omega)$ откладывается по оси ординат в градусах или радианах.

Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются *логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (ЛАФЧХ) или *диаграммой Боде*.

Логарифмические характеристики обладают двумя ценными свойствами:

1. ЛАЧХ и ЛФЧХ для произведения $W_1(s)W_2(s)$ вычисляются как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев:

$$20\lg\big(A(\omega)\big)=20\lg\big(A_1(\omega)\big)+20\lg\big(A_2(\omega)\big),$$

$$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega).$$

2. В области высоких и низких частот ЛАЧХ асимптотически приближаются к прямым, наклон которых составляет ± 20 дБ/дек (децибел на декаду), ± 40 дБ/дек и т. д.

Задания

Задание 1. Найти функцию веса $w(t)$ по известному переходному процессу $h(t)$:

1. $h(t)=5t$.

2. $h(t)=10$.

Задание 2. Найти переходной процесс $h(t)$ по известной функции веса $w(t)$:

3. $w(t)=7t$.

4. $w(t)=3$.

5. $w(t)=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$.

Задание 3. Найти передаточную функцию системы по известному дифференциальному уравнению (начальные условия — нулевые):

6. $2\cdot\dot{x}_2(t)+4\cdot x_2(t)=2\cdot\dot{x}_1(t)+5\cdot x_1(t)$.

7. $8\cdot\dot{x}_2(t)+5\cdot x_2(t)=4\cdot\dot{x}_1(t)+2\cdot x_1(t)$.

8. $6\cdot\ddot{x}_2(t)+\dot{x}_2(t)+2\cdot x_2(t)=8\cdot x_1(t)$.

Задание 4. Найти передаточную функцию системы по известной функции веса $w(t)$:

9. $w(t)=12$.

10. $w(t)=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$.

11. $w(t)=4\cdot t^2$.

Задание 5. По передаточной функции $W(p)$ системы найти ее реакцию на единичное ступенчатое воздействие (переходной процесс):

12. $W(p) = \dfrac{4}{p} + \dfrac{5}{2p+1}$.

13. $W(p) = k_1 + \dfrac{k_3}{p}$.

14. $W(p) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{4}{5p+1}$.

Построить графики переходных процессов.

Задание 6. Найти АЧХ и ФЧХ по известной передаточной функции $W(p)$ системы:

15. $W(p) = \dfrac{5}{p}$.

16. $W(p) = \dfrac{8}{5p+1}$.

17. $W(p)=10(2p+1)$.

18. $W(p) = \dfrac{10p+1}{4p+1}$.

Построить графики АЧХ и ФЧХ.

Задание 7.

Определить сигнал $x_2(t)$ на выходе системы по известному входному сигналу и передаточной функции системы

$$x_1(t)=2\cdot\sin 10t, \qquad W(p) = \frac{4}{0{,}1p+1}.$$

Решение. Известно, что при воздействии входного сигнала $x_1(t)=X_1\sin\omega t$ на систему выходной сигнал $x_2(t)$ по истечении времени переходного процесса также будет гармоническим, но отличается от входного амплитудой и фазой

$$x_2(t)=A(\omega)X_1\sin[\omega t+\varphi(\omega)],$$

где $A(\omega)$ – АЧХ системы;

$\varphi(\omega)$ – ФЧХ системы.

Следовательно для определения $x_2(t)$ необходимо найти $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$.

По передаточной функции найдем

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{0{,}1\omega^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} 0{,}1\omega.$$

На частоте $\omega=10$ $A(\omega = 10) = 4/\sqrt{2}$; $\varphi(\omega = 10) = -\pi/4$.

Тогда $x_2(t) = \dfrac{8}{\sqrt{2}} \cdot \sin(10t - \pi/4)$.

Построить графики входных $x_1(t)$ и выходных $x_2(t)$ сигналов.

Варианты.

19. $x_1(t) = 5 \cdot \sin t; \quad W(p) = \dfrac{4}{p}.$

20. $x_1(t) = 8 \cdot \sin 0{,}25t; \quad W(p) = \dfrac{10}{4p+1}.$

21. $x_1(t) = 2 \cdot \sin 10t; \quad W(p) = 2 \cdot p.$

22. $x_1(t) = 4 \cdot \sin 25t; \quad W(p) = 10(4p+1).$

23. $x_1(t) = 3 \cdot \sin 4t; \quad W(p) = \dfrac{2p+1}{4p+1}.$

Задание 8. По переходному процессу $h(t)$ и весовой функции $w(t)$ линейного элемента найти реакцию на входной сигнал $x(t)$.

Реакция элемента на входной сигнал $x(t)$ определяется по *интегралу Дюамеля*, который может быть записан через кривую разгона $h(t)$ или через весовую функцию $w(t)$.

Если известна кривая разгона $h(t)$, то интеграл Дюамеля записывается следующим образом:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau)\frac{d}{d\tau}x(\tau)d\tau + y(0).$$

Если известна весовая функция $w(t)$, то интеграл Дюамеля записывается следующим образом:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau.$$

Построить графики входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов.

Варианты.

№	$h(t)$	$\omega(t)$	$x(t)$
1., 11., 21	$1-e^{-3t}$	e^{-t}	t^2
2., 12., 22	$4e^{-2t}$	$t\cdot e^{-2t}$	t
3., 13., 23	t^2+t	$1-e^{-t}$	$1-e^{-t}$
4., 14., 24	$1-e^{-2t}$	$4e^{-2t}$	$1-e^{-2t}$
5., 15., 25	$-1-e^{-2t}+t$	$t\cdot e^{-t}$	t^2-1
6., 16., 26	$1-e^{-t}\cos t$	$8t\cdot e^{-t/2}$	$t-1$
7., 17., 27	t^2+1	e^{-2t}	$\sin 3t$
8., 18., 28	$2t^2$	$2-t\cdot e^{-t}$	$1-e^{-2t}\sin t$
9., 19., 29	$2(1-e^{-3t})$	$t\cdot e^{-2t}$	$2t^2+t$
10., 20., 30	$1-e^{-2t}\sin 3t$	$5e^{-3t}$	$t+1$

Задание 9. По известной передаточной функции $W(s)$ элемента найти его переходной процесс, весовую функцию, амплитудно-частотную, фазо-частотную, амплитудно-фазовую характеристики. Построить графики.

Записать дифференциальное уравнение элемента, связывающее выходную и входную переменные.

Варианты.

№	Передаточная функция $W(s)$
1., 11., 21	$\dfrac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$
2., 12., 22	$\dfrac{4s+1}{(2s+1)(s+2)}$
3., 13., 23	$\dfrac{2s+3}{(2s+1)(s+3)}$
4., 14., 24	$\dfrac{2s+5}{(3s+2)(2s+4)}$
5., 15., 25	$\dfrac{3s+2}{(3s+4)(s+1)}$
6., 16., 26	$\dfrac{s+1}{(3s+1)(2s+1)}$
7., 17., 27	$\dfrac{2s+3}{(3s+1)(4s+3)}$
	$\dfrac{5s+4}{(2s-3)(4s+3)}$
	$3s+2$

8., 18., 28	
9., 19., 29	
10., 20., 30	

Контрольные вопросы.

1. Передаточная функция системы управления.
2. Типовые управляющие и возмущающие воздействия.
3. Понятие временных характеристик (переходной процесс, весовая функция).
4. Понятие частотных характеристик (АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ).

Лабораторная работа 4
Эквивалентные преобразования структурных схем систем управления

Цель работы: освоение правил эквивалентного преобразования структурных схем систем управления.

Теоретические сведения

Эквивалентные преобразования структурных схем

Структурная схема системы автоматического управления строится из элементарных динамических звеньев. Но несколько элементарных звеньев могут быть заменены одним звеном со сложной передаточной функцией. Для этого существуют *правила эквивалентного преобразования структурных схем*.

1. *Последовательное соединение* — выходная величина предшествующего звена подается на вход последующего (рис. 1). При этом можно записать:

$$y_1 = W_1 y_0,\ y_2 = W_2 y_1, \ldots, y_n = W_n y_{n-1},$$

$$y_n = W_1 W_2 \ldots W_n y_0 = W_{\text{экв}} y_0.$$

где $W_{\text{экв}} = W_1 W_2 \ldots W_n = \prod_{i=1}^{n} W_i$.

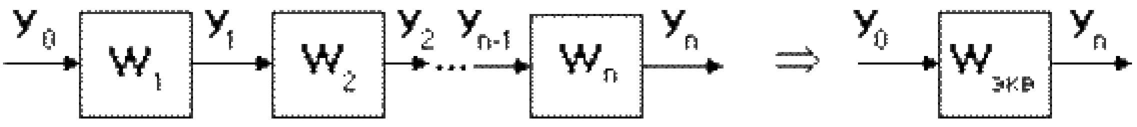


Рис. 1. Последовательное соединение звеньев

То есть цепочка последовательно соединенных звеньев преобразуется в эквивалентное звено с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций отдельных звеньев.

2. *Параллельное соединение* — на вход каждого звена подается один и тот же сигнал, а выходные сигналы складываются (рис. 2). Тогда:

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = (W_1 + W_2 + \ldots + W_n) y_0 = W_{\text{экв}} y_0,$$

где $W_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{n} W_i$.

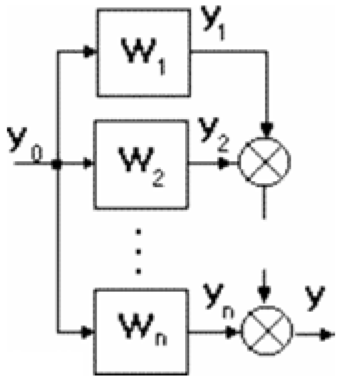


Рис. 2. Параллельное соединение звеньев

То есть цепочка звеньев, соединенных параллельно, преобразуется в звено с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций отдельных звеньев.

3. *Обратная связь* с передаточной функцией обратной связи $W_{\text{ос}}$ (рис. 3, *а*). При этом для отрицательной обратной связи:

$$y = W_n u,\;\; y_1 = W_{\text{ос}} y,\;\; u = y_0 - y_1,$$

следовательно:

$$y = W_n y_0 - W_n y_1 = W_n y_0 - W_n W_{\text{ос}} y,$$

$$y(1 + W_n W_{\text{ос}}) = W_n y_0,$$

$$y = W_{\text{экв}} y_0.$$

где $W_{\text{экв}} = \dfrac{W_n}{1 + W_n W_{\text{ос}}}$.

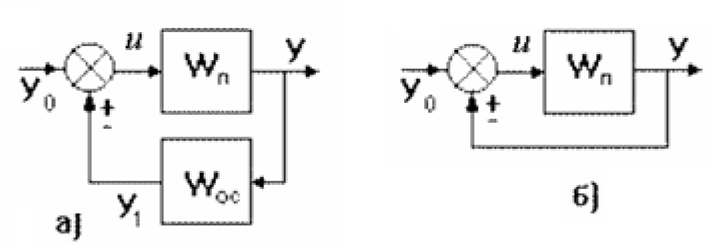


Рис. 3. Обратная связь

Аналогично: $W_{\text{экв}} = \dfrac{W_n}{1 - W_n W_{\text{ос}}}$ — для положительной обратной связи.

Если $W_{\text{ос}} = 1$ (рис. 3, *б*), то обратная связь называется *единичной*, тогда $W_{\text{экв}} = \dfrac{W_n}{1 \pm W_n}$.

Обычно в обратной связи находится датчик, который обладает намного меньшей инерционностью по сравнению с объектом (рис. 4, *а*). Иначе говоря, полоса пропускания датчика много больше полосы пропускания объекта. По этой причине датчик может быть смоделирован в виде идеального коэффициента усиления, который обозначим $k_{\text{ос}}$ (рис. 4, *б*). Тогда передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид:

$$W_{\text{экв}} = \frac{W_n}{1 \pm k_{\text{ос}} W_n}.$$

На рис. 4, *в* приведена структурная схема системы с единичной обратной связью соответствующая схеме на рис. 4, *б* с неединичной обратной связью.

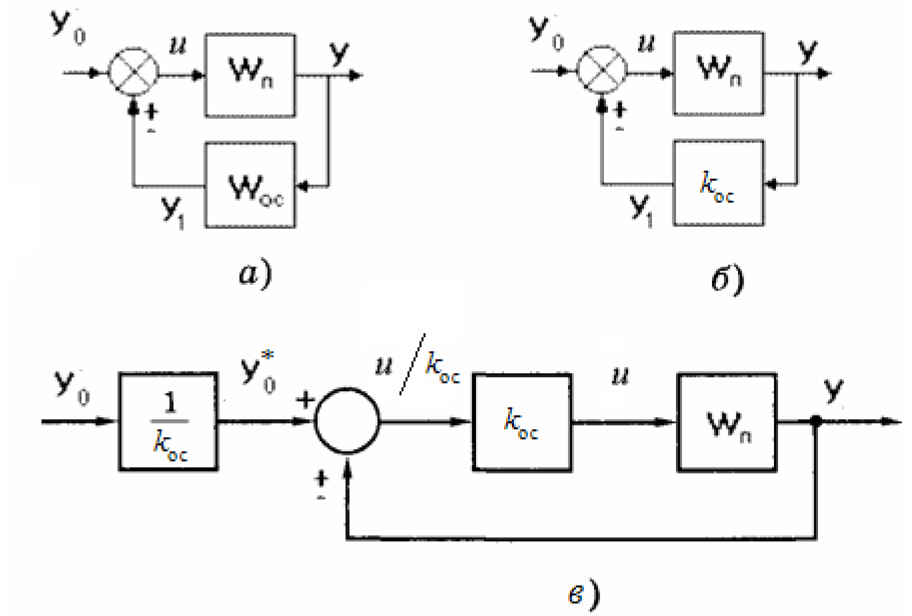


Рис. 4. Переход от системы с неединичной обратной связью к системе с единичной обратной связью

4. *Передаточная функция по возмущающему воздействию* (рис. 5).

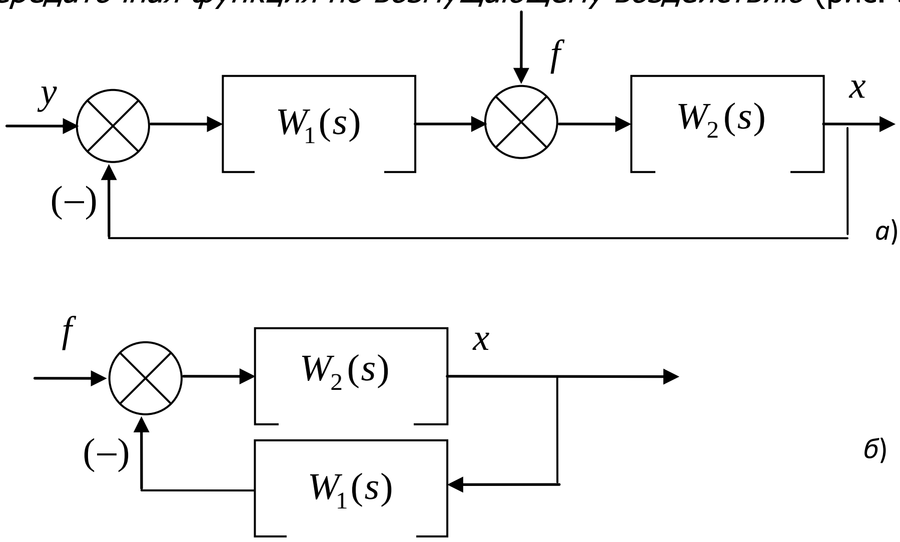


Рис. 5. Определение передаточной функции по возмущению f

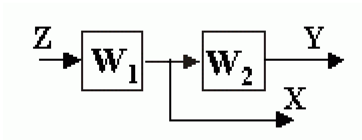
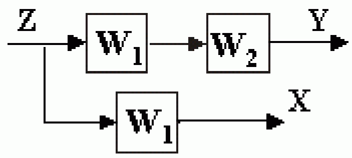
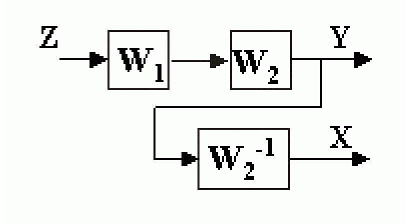
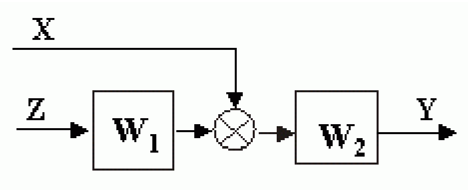
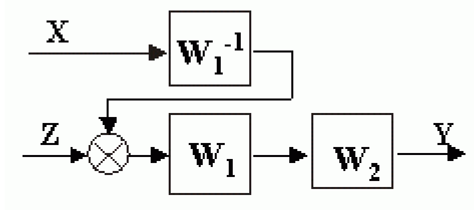
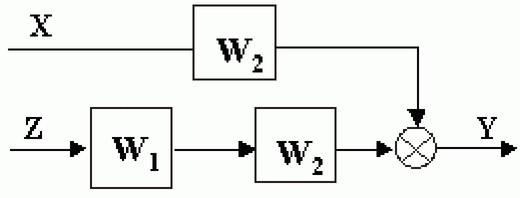
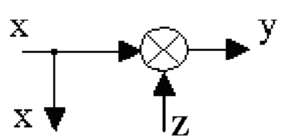
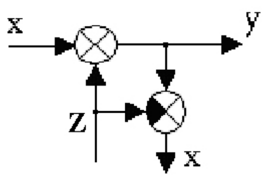
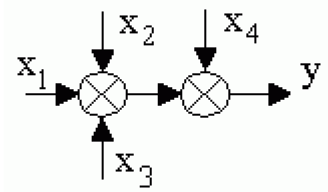
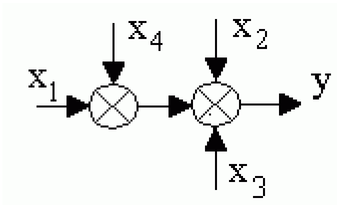
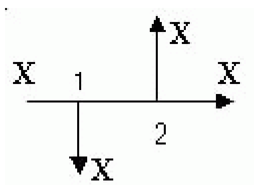
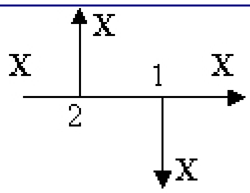
Передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию *у*: $W_{\text{раз}}^{y}(s) = \dfrac{X(s)}{Y(s)} = W_1(s)W_2(s)$, передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию *f*: $W_{\text{раз}}^{f}(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = W_2(s)$.

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию *f* (рис. 5, *б*): $W_{\text{зам}}^{f}(s) = \dfrac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \dfrac{W_{\text{раз}}^{f}(s)}{1 + W_{\text{раз}}^{y}(s)}$.

Дополнительные правила эквивалентного преобразования структурных схем приведены в табл. 1.

Таблица 1

Правила эквивалентного преобразования структурных схем

Преобразование	**Структурная схема**	
	Исходная	Эквивалентная
Перенос узла через элемент	 $X = Z \cdot W_1$ $Y = Z \cdot W_1 \cdot W_2$	 
Перенос сумматора через элемент	 $Y = (Z \cdot W_1 + X) \cdot W_2$	 $Y = (Z + X \cdot W_1^{-1}) \cdot W_1 \cdot W_2$  $Y = Z \cdot W_1 \cdot W_2 + X \cdot W_2$
Перемена мест узла и сумматора	 $Y = X + Z$	 $X = Y - Z$
Перенос сумматора через сумматор	 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$	
Перенос узла через узел	 	

Задание. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем для заданной структурной схемы.

В качестве проверки правильности решения задачи студентам необходимо:

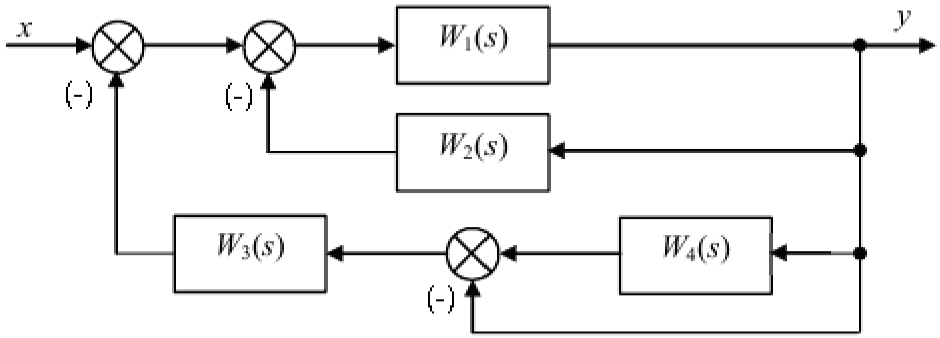
— самостоятельно произвольно задать передаточные функции звеньев;

— осуществить построение исходной, всех промежуточных и эквивалентной структурных схем в пакете Matlab Simulink;

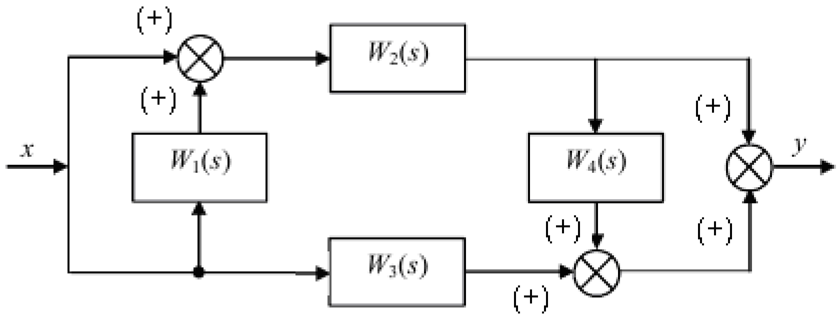
— сравнить выходные сигналы полученных систем при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия.

Варианты.

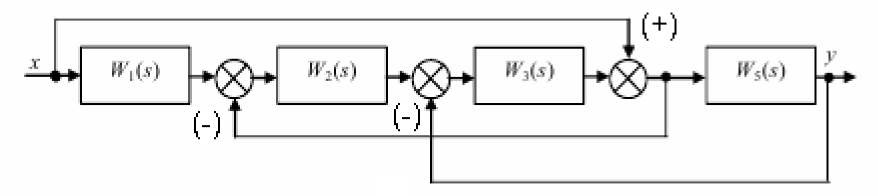
1.



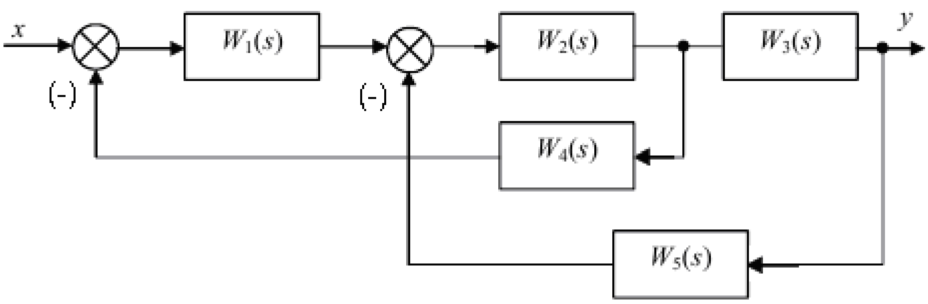
2.



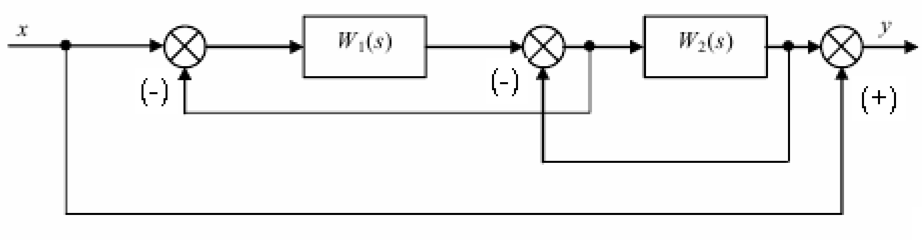
3.



4.

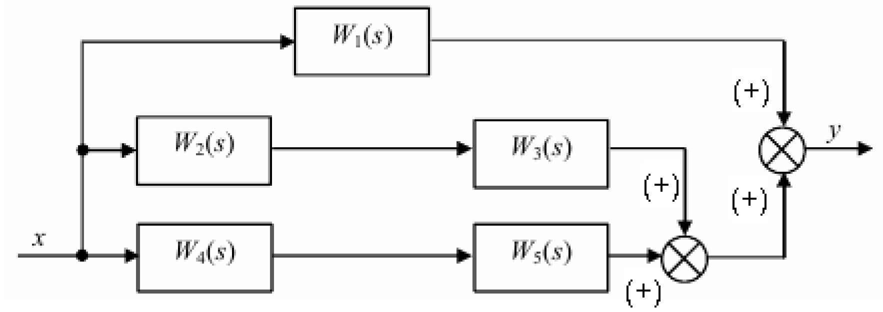


5.

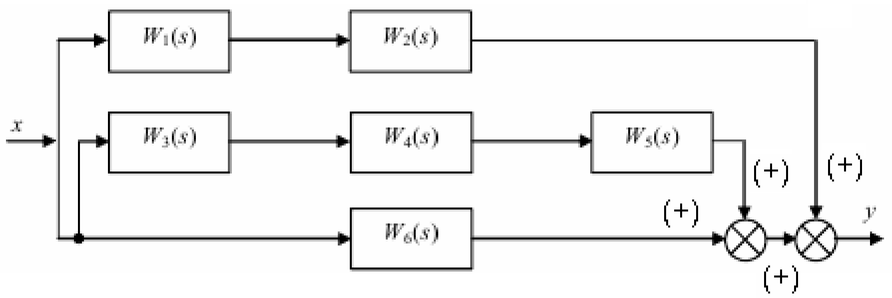


Дополнительные варианты.

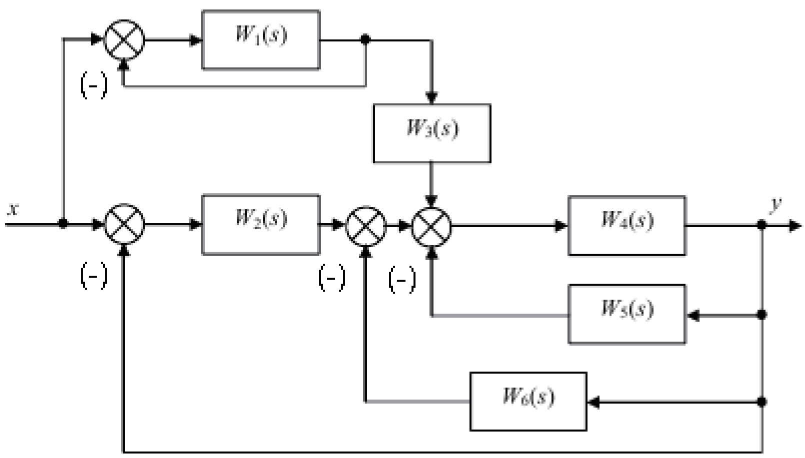
2.1



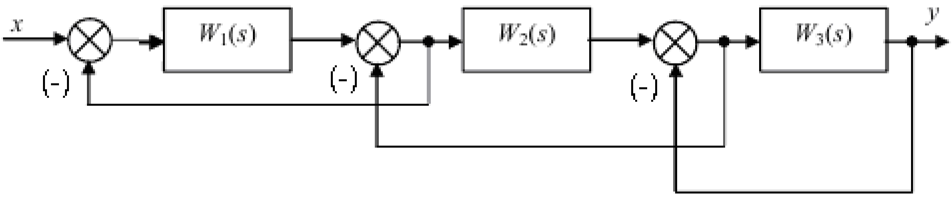
2.2



2.3



2.4



Контрольные вопросы.

1. Правила эквивалентного преобразования структурных схем.

Лабораторная работа 5
Математические модели систем в переменных состояния

Цель работы: получение навыков составления и решения уравнений в переменных состояния.

Теоретические сведения
Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний)

Модель в переменных состояния (*модель в пространстве состояний*) имеет вид дифференциальных уравнений, но записанных в специальной форме — как система уравнений первого порядка. Обычно модель в переменных состояния представляют в *векторно-матричной форме*.

Смысл модели в переменных состояния заключается в том, что она сохраняет соотношение между входом и выходом системы (т. е. передаточную функцию), но в то же время позволяет перейти от одного дифференциального уравнения n-го порядка к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка. Преимущество такого представления в том, что кроме двух внешних переменных (входной и выходной), в модели отражаются и все внутренние переменные системы.

Уравнения состояния линейной непрерывной системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ — производная по времени от вектора $x(t)$; $x(t)$ — вектор состояния размерности $(n \times 1)$, компонентами которого являются переменные состояния системы n-го порядка; A — матрица коэффициентов системы размерности $(n \times n)$; B — матрица входа размерности $(n \times r)$; $u(t)$ — вектор входа размерности $(r \times 1)$, компонентами которого являются входные переменные системы; $y(t)$ — вектор выхода размерности $(p \times 1)$, компонентами которого являются выходные переменные системы; C — матрица выхода размерности $(p \times n)$; D — матрица обхода, определяющая прямую зависимость выхода от входа размерности $(n \times r)$.

Все векторы (сигналы) можно представить в развернутом виде:

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dots\\ \dot{x}_n(t)\end{pmatrix},\ x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \dots\\ x_n(t)\end{pmatrix},\ u(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \dots\\ u_r(t)\end{pmatrix},\ y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \dots\\ y_p(t)\end{pmatrix}.$$

Первое из уравнений системы (1) — это матричное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Оно называется *уравнением «вход-состояние»*, а решением его является вектор состояния $x(t)$.

Второе уравнение системы (1) называется *уравнением «вход-состояние-выход»*. Смысл такого названия в том, что оно позволяет определить выход $y(t)$ по известным вектору входа $u(t)$ и вектору состояния $x(t)$.

Матрица D обычно равна нулю, т. к. в физических системах во всех каналах между входами и выходами, как правило, присутствуют динамические звенья. Если матрица D отлична от нуля, это указывает на то, что, по крайней мере, один прямой путь от входов к выходам представлен обычным коэффициентом передачи.

Левая часть дифференциальных уравнений относительно $\dot{x}(t)$ всегда представлена только первыми производными переменных состояния, правая же часть не должна содержать никаких производных. В уравнении относительно выхода $y(t)$ также не должно быть никаких производных.

Уравнения состояния (1) записаны в предположении, что у системы имеется несколько входных и выходных переменных. Такие системы принято называть *многомерными*. Если у системы имеется только один вход, то матрица B имеет вид столбца, а вектор $u(t)$ превращается в скалярную переменную. Если у системы только один выход, то вектор $y(t)$ превращается в скалярную переменную, а матрица C принимает вид строки.

Методы решения уравнений состояния

Метод преобразования Лапласа. Решение уравнения $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ имеет вид:

$$X(s)=(sE-A)^{-1}x(0)+(sE-A)^{-1}BU(s),\ (3)$$

где E — единичная матрица; $U(s)=\frac{1}{s}=L\{1(t)\}$ — изображение по Лапласу входного сигнала, представляющего собой единичную ступенчатую функцию; $x(0)$ — вектор начальных условий размерности $n\times 1$.

Искомый вектор состояния $x(t)$ будет обратным преобразованием Лапласа от $X(s)$.

Для решения можно использовать понятие *переходной матрицы состояния* (*матрица перехода*):

$$\Phi(t)=L^{-1}\left\{(sE-A)^{-1}\right\}.\ (4)$$

Эту матрицу называют также *фундаментальной матрицей*. Заметим, что для системы n-го порядка матрица перехода имеет размерность $(n\times n)$. Обратное преобразование Лапласа для матрицы определяется путем применения обратного преобразования Лапласа к каждому элементу этой матрицы.

Решение уравнений состояния можно получить несколько иным способом.

Второе слагаемое в правой части уравнения (3) представляет собой произведение двух изображений по Лапласу. Поэтому обратное преобразование Лапласа для этого члена имеет вид интеграла свертки:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau .$$

Сверткой двух функций называется определенный интеграл вида:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau .$$

Изображение по Лапласу свертки функции равно произведению изображений этих функций:

$$L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s) .$$

По теореме свертки это решение можно записать иначе:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau . \quad (5)$$

Решение состоит из двух слагаемых. Первое из них представляет собой свободное движение системы, возникающее только за счет начальных условий (при отсутствии входного сигнала). Второе слагаемое соответствует вынужденному движению системы, обусловленному входным воздействием (при этом начальные условия полагаются нулевыми).

Как следует из (5), центральную роль в решении уравнений состояния играет матрица перехода. Этот вид решения сопряжен с трудностями вычислительного характера, если только речь не идет о простейших системах.

Подводя итоги, можно сказать, что решение уравнений состояния получается либо с помощью преобразования Лапласа, либо с помощью комбинации этого преобразования и интеграла свертки. В любом случае процедура является длинной, отнимает много времени и может привести к появлению ошибок. Поэтому на практике следует отдать предпочтение анализу динамики системы с помощью моделирования.

Метод разложения в бесконечный ряд. Один из методов решения дифференциальных уравнений заключается в следующем. Считают, что решение имеет вид бесконечного ряда с неизвестными коэффициентами. Этот ряд подставляют в дифференциальное уравнение и таким образом определяют неизвестные коэффициенты. Тогда матрицу перехода можно записать в виде:

$$\Phi(t) = E + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}t^n .$$

Представление $\Phi(t)$ в виде бесконечного ряда имеет преимущества, когда матрица перехода вычисляется на компьютере для нескольких значений времени t. Разложение в ряд также оказывается удобным при анализе цифровых систем управления.

Связь передаточной функции и модели системы в переменных состояния

Переход от передаточной функции к модели системы в переменных состояния. Пусть объект имеет передаточную функцию вида:

$$W(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0},$$

где $m<n$.

Тогда для составления модели объекта в переменных состояния необходимо записать следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times n},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times 1},$$

$$C=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{1\times n}.$$

Переход от модели в переменных состояния к передаточной функции системы:

$$W(s)=C(sE-A)^{-1}B=C\Phi(s)B.$$

Если $D\neq 0$, то передаточная функция имеет выражение:

$$W(s)=C(sE-A)^{-1}B+D.$$

Характеристическое уравнение системы можно найти, если известна матрица A в следующем виде:

$$D(s)=\left|sE-A\right|.$$

Для многомерных систем (систем с более чем одним входом и/или более чем одним выходом) $U(s)$ есть вектор размерности $(r\times 1)$, а $Y(s)$ — вектор размерности $(p\times 1)$. Все предыдущие рассуждения остаются в силе, но теперь $W(s)$ является матрицей размерности $(p\times r)$. Каждый из элементов матрицы $W(s)$ представляет собой передаточную функцию, связывающую вход системы с номером j с выходом с номером i: $W_{ij}(s)=\frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$.

Задания

Задание 1. Провести эквивалентные преобразования структурной схемы, указанной в индивидуальном задании. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем.

Задание 2. Записать дифференциальное уравнение, описывающее замкнутую систему управления.

Задание 3. Составить математическую модель замкнутой системы в переменных состояния. В качестве переменных состояний предлагается использовать выходную переменную и ее производные до $n-1$-го порядка, где n — порядок системы управления.

По уравнениям состояния записать передаточную функцию замкнутой системы управления и сравнить с полученной в пункте 1. Если они не совпадают, следовательно, уравнения состояния составлены неверно.

Задание 4. Решить уравнения состояния с помощью преобразования Лапласа и комбинации преобразования Лапласа с интегралом свертки. Построить график выходного сигнала $y(t)$ при единичном ступенчатом входном воздействии и сравнить его с графиком переходного процесса замкнутой системы.

Задание 5. Решить уравнения состояния с помощью разложения в бесконечный ряд. Построить график выходного сигнала $y(t)$ при единичном ступенчатом входном воздействии и сравнить его с графиком переходного процесса замкнутой системы.

Задание 6. В пакете Matlab Simulink промоделировать работу системы управления, используя модель с передаточными функциями (блок **Transfer Fcn** из библиотеки **Continuous**) и модель в пространстве состояний (блок **State Space** из библиотеки **Continuous**). Сравнить графики выходных сигналов $y(t)$.

Задание 7. Сделать выводы по лабораторной работе.

Контрольные вопросы.

1. Принципы составления математических моделей систем в переменных состояния (в пространстве состояний).
2. Решение уравнений состояния с помощью преобразования Лапласа и комбинации преобразования Лапласа с интегралом свертки.
3. Решение уравнений состояния с помощью разложения в бесконечный ряд.
4. Переход от передаточной функции к модели системы в переменных состояния.
5. Переход от модели в переменных состояния к передаточной функции системы.

Лабораторная работа 6
Анализ устойчивости линейной непрерывной системы управления алгебраическими методами

Цель работы: освоение алгебраических методов анализа устойчивости линейных непрерывных систем управления.

Теоретические сведения

Под *устойчивостью системы* понимается способность ее возвращаться к состоянию установившегося равновесия после снятия возмущения, нарушившего это равновесие. *Неустойчивая система* непрерывно удаляется от равновесного состояния или совершает вокруг него колебания с возрастающей амплитудой (рис. 1).

Рис. 1. Устойчивость систем

Виды устойчивости. *Устойчивость «вход-выход»*. Обычно для инженеров практиков в первую очередь важно, чтобы система не «пошла вразнос», то есть, чтобы управляемая величина не росла неограниченно при всех допустимых входных сигналах. Если это так, говорят, что система обладает устойчивостью «вход-выход» (при ограниченном входе выход также ограничен). Заметим, что при этом нас не интересует, как меняются внутренние переменные объекта, важен только вход и выход.

Рассмотрим ванну, которая наполняется водой из крана. Модель этой системы — интегрирующее звено. При постоянном (ограниченном по величине!)

входном потоке уровень воды в ванне будет неограниченно увеличиваться (пока вода не польется через край), поэтому такая системе не обладает устойчивостью «вход-выход».

«Техническая» устойчивость. В отличие от устойчивости «вход-выход», понятие «техническая устойчивость» относится к автономной системе, у которой все входные сигналы равны нулю. *Положением равновесия* называют состояние системы, которая находится в покое, то есть, сигнал выхода $y(t)$ — постоянная величина, и все его производные равны нулю.

Систему выводят из положения равновесия и убирают все возмущения. Если при этом с течением времени (при $t \to \infty$) система возвращается в положение равновесия, она называется *устойчивой*. Если выходная координата остается ограниченной (не уходит в бесконечность), система называется *нейтрально устойчивой*, а если выход становится бесконечным — *неустойчивой*.

Если вернуться к примеру с ванной, становится понятно, что эта система — нейтрально устойчива, потому что уровень воды остается постоянным, когда мы перекроем кран. С одной стороны, уровень воды не возвращается к предыдущему значению, а с другой — не растет бесконечно (система не является неустойчивой).

Внутренняя (*математическая*) *устойчивость* означает, что не только выход, но и все внутренние переменные (переменные состояния) приближаются к своим значениям в положении равновесия.

Система автоматического управления может быть неустойчивой по двум причинам: неподходящий состав динамических звеньев и неподходящие значения параметров звеньев.

Правила, позволяющие судить об устойчивости системы, называются *критериями устойчивости*. Их можно разделить на *алгебраические* (основаны на составлении по характеристическому уравнению по определенным правилам алгебраических выражений, по которым можно судить об устойчивости системы управления) и *частотные* (основаны на исследовании частотных характеристик).

Корневой критерий устойчивости

Решение дифференциального уравнения ищется в виде:

$$y(t) = y_{\text{вын}}(t) + y_{\text{св}}(t).$$

Здесь $y_{\text{св}}(t)$ — *решение однородного дифференциального уравнения*, то есть уравнения с нулевой правой частью:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0.$$

Физически это означает, что все внешние воздействия сняты и система абсолютно свободна, ее движения определяются лишь собственной структурой. Поэтому решение данного уравнения называется *свободной составляющей общего решения*.

$y_{\text{вын}}(t)$ — *частное решение неоднородного дифференциального уравнения*, под которым понимается уравнение с ненулевой правой частью. Физически это означает, что к системе приложено внешнее воздействие $u(t)$. Поэтому вторая составляющая общего решения называется *вынужденной*. Она определяет вынужденный установившийся режим работы системы после окончания переходного процесса.

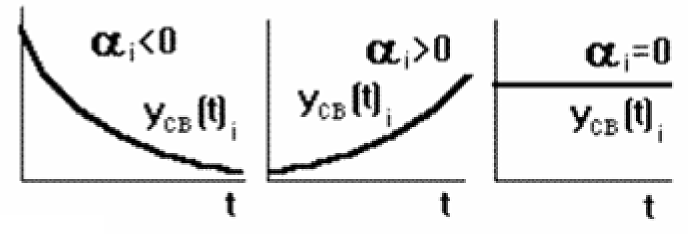
Свободная составляющая представляет собой сумму из n отдельных составляющих:

$$y_{\text{св}}(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{s_i t},$$

где s_i — корни характеристического уравнения.

Корни могут быть либо вещественными, либо комплексно сопряженными $s_i=\alpha_i+j\beta_i$. Постоянные интегрирования A_i определяются исходя из начальных условий, подставляя в общее решение значения u, y и их производные в моменты времени $t=0$ и $t\to\infty$.

Каждому отрицательному вещественному корню соответствует экспоненциально затухающая во времени составляющая $y_{\text{св}}(t)_i$, каждому положительному — экспоненциально расходящаяся, каждому нулевому корню соответствует $y_{\text{св}}(t)=const$ (рис. 2).



$$\alpha := \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \qquad t := 0, 0.1..2$$

$$y(t,\alpha) := e^{\alpha\cdot t}$$

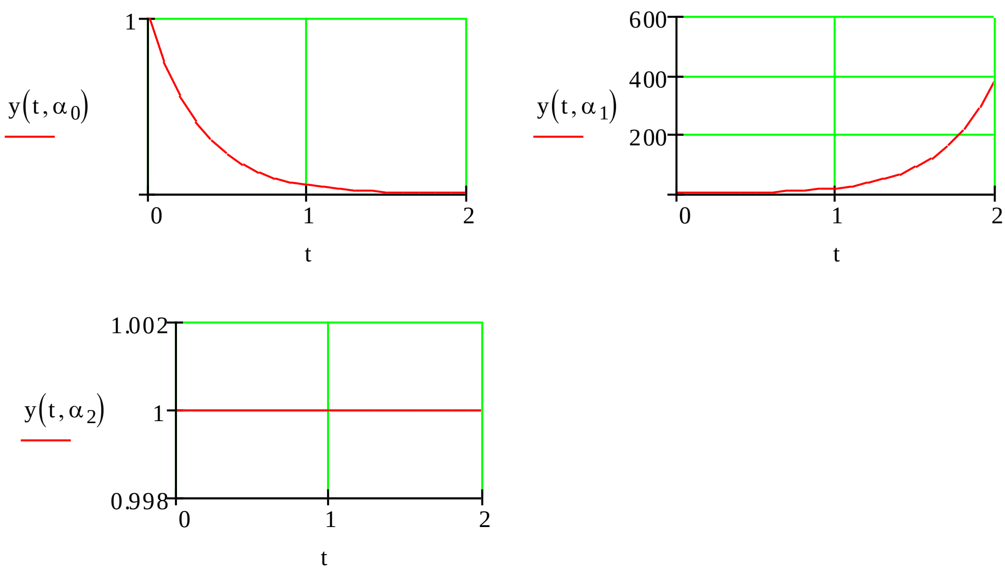
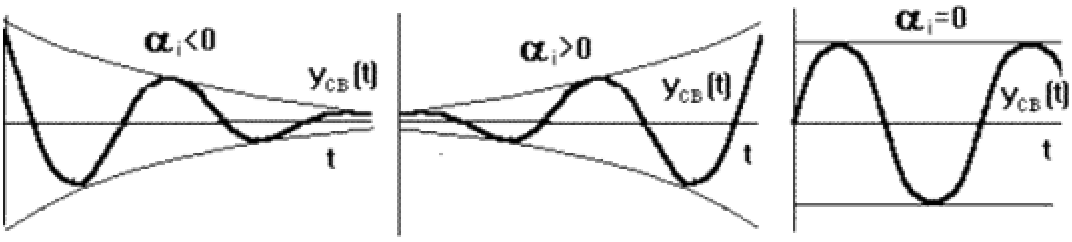


Рис. 2. Вид свободного решения уравнения при действительных корнях

Пара комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью определяет затухающие колебания, при положительной вещественной части — расходящиеся колебания, при нулевой — незатухающие (рис 3).

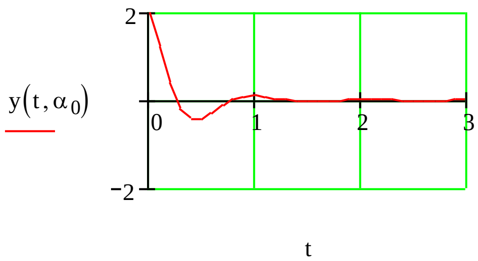


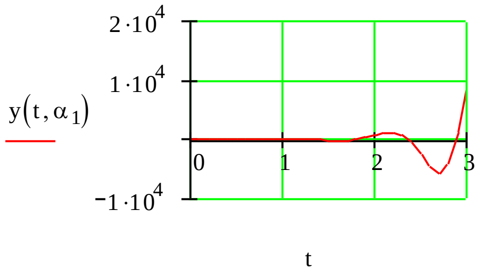
$$j := \sqrt{-1} \qquad \alpha := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta := 6$$

$$t := 0, 0.1..3$$

$$y(t,\alpha) := e^{(\alpha + j\cdot\beta)\cdot t} + e^{(\alpha - j\cdot\beta)\cdot t}$$





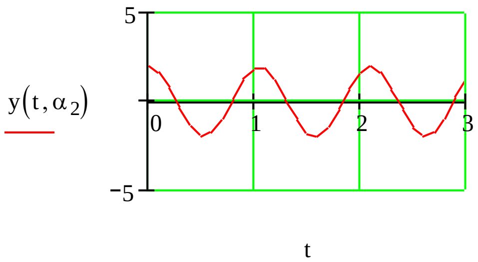


Рис. 3. Вид свободного решения уравнения при комплексно-сопряженных корнях

Так как после снятия возмущения $y_{вын}(t)=0$, то устойчивость системы определяется только характером свободной составляющей $y_{св}(t)$. Поэтому *условие устойчивости систем по А.М. Ляпунову* формулируется так: в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики, должна стремиться к нулю, то есть затухать.

Тогда *корневой критерий устойчивости*: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (знаменателя передаточной функции замкнутой системы) имели отрицательные вещественные части (на комплексной плоскости были левыми). Если хотя бы один корень правый, то система неустойчива. Если один из корней равен нулю, а остальные левые, то система находится на *границе апериодической устойчивости*. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно-сопряженных корней, то система находится на *границе колебательной устойчивости*.

Для нахождения корней характеристического полинома $D(s)$ в Mathcad имеется встроенная функция **polyroots(v)**.

Вектор ν будет иметь вид:

$$v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$D(s) := T1 \cdot T2 s^3 + (T1 + T2) \cdot s^2 + (1 + k1 \cdot k2 \cdot kp \cdot Tp) \cdot s + k1 \cdot k2 \cdot kp$$

$$v(Tp, kp) := \begin{pmatrix} k1 \cdot k2 \cdot kp \\ 1 + k1 \cdot k2 \cdot kp \cdot Tp \\ T1 + T2 \\ T1 \cdot T2 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v(Tp, kp))$$

$$r = \begin{pmatrix} -1.343 \\ -0.078 + 0.54i \\ -0.078 - 0.54i \end{pmatrix}$$

Вектор r содержит корни характеристического уравнения.

Необходимое условие устойчивости. Характеристическое уравнение системы с помощью теоремы Виета может быть записано в виде:

$$D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n) = 0,$$

где s_i — корни уравнения.

Если система устойчива, значит все корни левые, то есть вещественные части всех корней отрицательны, что можно записать как $\alpha_i = -|\alpha_i| < 0$. Подставим их в уравнение:

$$a_n (s + |\alpha_1|)(s + |\alpha_2| - j\beta_2)(s + |\alpha_2| + j\beta_2) \ldots = 0.$$

Перемножая комплексно-сопряженные выражения, получим:

$$a_n (s + |\alpha_1|)(s^2 + 2s|\alpha_2| + |\alpha_2|^2 + \beta_2^2) \ldots = 0.$$

После раскрытия скобок получится выражение:

$$a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Так как в скобках нет ни одного отрицательного числа, то ни один из коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ не будет отрицательным. Поэтому *необходимым условием устойчивости системы автоматического управления* является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения: $a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$.

Для систем первого и второго порядков это условие одновременно является и *достаточным*. Однако для более высоких порядков положительность коэффициентов не гарантирует отрицательность корней характеристического полинома.

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пусть характеристическое уравнение имеет вид: $a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$.

Из коэффициентов характеристического уравнения строится *матрица Гурвица* по алгоритму:

— по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от a_{n-1} до a_0;

— в каждом столбце вниз от диагонали записывают коэффициенты при возрастающих степенях оператора s, вверх — при убывающих степенях s;

— на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Например, для системы 4-го порядка матрица Гурвица будет иметь вид:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Критерий Гурвица: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные определители матрицы Гурвица имели положительные значения:

$$\Delta_1 = \det[a_{n-1}] > 0,\ \Delta_2 = \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0,\ \dots,\ \Delta_n = \det[\Delta] > 0.$$

Если один из определителей равен нулю, то существует хотя бы один нулевой корень, т. е. система находится на границе устойчивости.

Критерий Гурвица применяют при $n \le 4$. При больших порядках возрастает число определителей, и процесс становится трудоемким. Имеется ряд модификаций данного критерия, расширяющие его возможности. *Недостаток критерия Гурвица* — малая наглядность. *Достоинство* — удобен для реализации на ЭВМ. Его часто используют для определения влияния одного из параметров системы управления на ее устойчивость.

Задания

Задание 1. Провести эквивалентные преобразования структурной схемы, указанной в индивидуальном задании. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем.

Задание 2. Исследовать устойчивость линейной непрерывной системы по корням характеристического уравнения.

Задание 3. Исследовать устойчивость линейной непрерывной системы с помощью алгебраического критерия устойчивости Гурвица.

Задание 4. Сформулировать выводы о влиянии параметров звеньев системы на ее устойчивость.

Примечание. В лабораторной работе должны быть проанализированы два случая: система устойчивая и система неустойчивая. Для этого студентам необходимо самостоятельно выбрать соответствующие коэффициенты системы k_p, T_p.

Контрольные вопросы.

1. Понятие устойчивости системы. Виды устойчивости.
2. Корневой критерий устойчивости систем.
3. Необходимое условие устойчивости систем.
4. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица.

Лабораторная работа 6
Анализ устойчивости линейной непрерывной системы управления частотными методами

Цель работы: освоение частотных методов анализа устойчивости линейных непрерывных систем управления.

Теоретические сведения

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем по виду их частотных характеристик. Их *достоинство* в простой геометрической интерпретации, наглядности и в отсутствии ограничений на порядок дифференциального уравнения. К этой группе относятся критерии Михайлова, Найквиста, критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.

Критерий устойчивости Михайлова

Общей базой для частотных критериев устойчивости является *принцип аргумента*.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) = 0.$$

При изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ каждый сомножитель характеристического уравнения с устойчивым корнем дает поворот своей комплексной частотной характеристики на $+\dfrac{\pi}{2}$ (против часовой стрелке, положительное направление) (рис. 1, *а*).

С неустойчивым корнем на $-\dfrac{\pi}{2}$ (по часовой стрелке, отрицательное направление) (рис. 1, *б*).

Сомножители с корнями, имеющими нулевую вещественную часть не изменяют фазу своей характеристики.

А при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый сомножитель характеристического уравнения с устойчивым корнем дает поворот своей комплексной частотной характеристики на $+\pi$ (против часовой стрелке, положительное направление). С неустойчивым корнем на $-\pi$ (по часовой стрелке, отрицательное направление).

$j := \sqrt{-1} \qquad \omega := 0, 0.1 .. 100$

$\lambda 1 := -2 + j \cdot 8 \quad \lambda 2 := -2 - j \cdot 8 \qquad\qquad \lambda 3 := 2 + j \cdot 8 \quad \lambda 4 := 2 - j \cdot 8$

$D1(s) := (s - \lambda 1) \cdot (s - \lambda 2) \qquad\qquad D2(s) := (s - \lambda 3) \cdot (s - \lambda 4)$

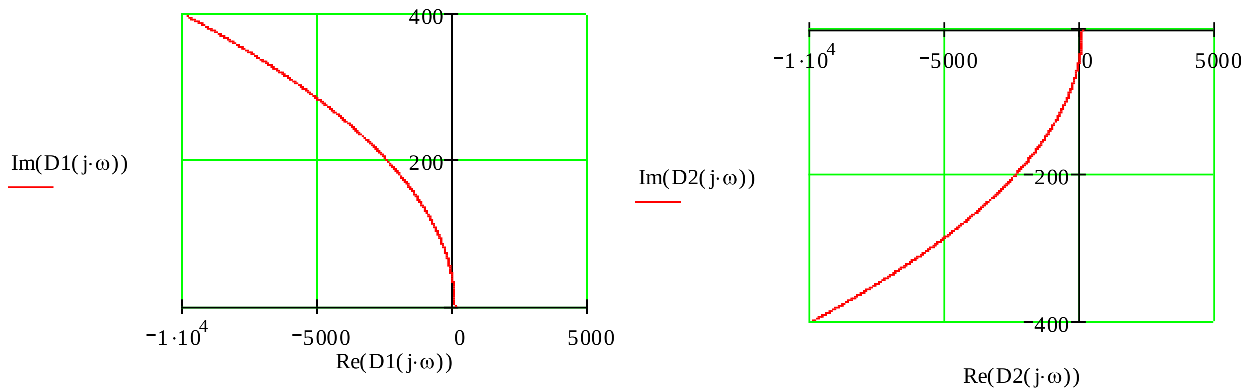


Рис. 1.

Так как для устойчивой системы управления число правых корней $g = 0$, то угол поворота вектора $D(j\omega)$ (характеристический полином замкнутой системы) составит:

$$\arg(D(j\omega))\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\frac{\pi}{2},$$

где n — порядок системы (число корней характеристического уравнения).

То есть система управления будет устойчива, если вектор $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ повернется на угол $n\frac{\pi}{2}$.

При этом конец вектора опишет кривую, называемую *годографом Михайлова*.

Годограф (от др.-греч. путь, движение, направление и пишу) в механике — кривая, представляющая собой геометрическое место концов переменного (изменяющегося со временем) вектора, значения которого в разные моменты времени отложены от общего начала. Понятие годографа было введено английским ученым У. Гамильтоном. Годограф дает наглядное геометрическое представление о том, как изменяется со временем физическая величина, изображаемая переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к годографу.

Критерий устойчивости Михайлова: для устойчивой замкнутой системы годограф Михайлова должен начинаться на положительной полуоси, так как $D(0) = a_0$, и последовательно проходить против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, затем уходить в бесконечность в n-ом квадранте, где n — порядок системы (рис. 2, *а*).

Если это правило нарушается (например, число проходимых кривой квадрантов не равно n, или нарушается последовательность прохождения квадрантов (рис. 2, *б*)), то такая система управления неустойчива.

При четном n, годограф стремится к ∞ параллельно оси $\mathrm{Re}(D(j\omega))$; при нечетном n, годограф стремится к ∞ параллельно оси $\mathrm{Im}(D(j\omega))$.

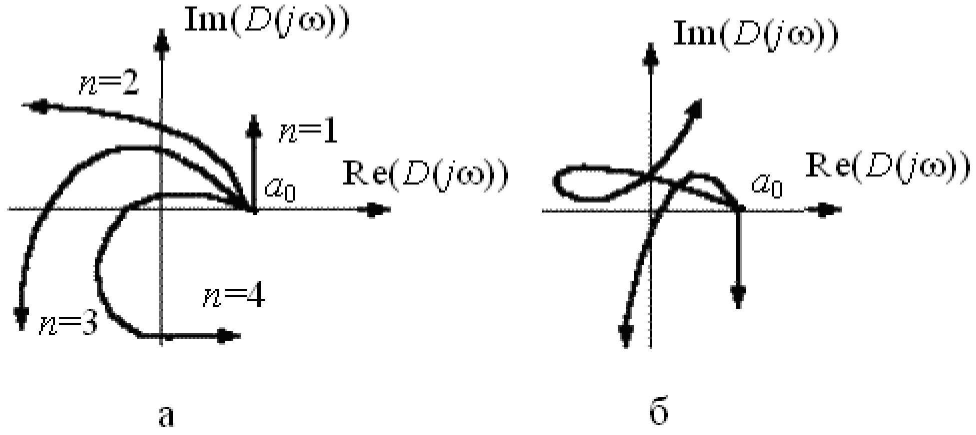


Рис. 2. Годограф Михайлова

Достоинством критерия является его наглядность. Так, если кривая проходит вблизи начала координат, то система управления находится вблизи границы устойчивости и наоборот.

Критерий устойчивости Найквиста

Наиболее удобным является критерий устойчивости Найквиста. С его помощью можно оценить устойчивость замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы. Для построения АФЧХ определяется частотная передаточная функция разомкнутой системы путем формальной замены $W_{\text{раз}}(j\omega)=W_{\text{раз}}(s)\big|_{s=j\omega}$. По оси ординат откладывается мнимая часть частотной передаточной функции $\mathrm{Im}(W_{\text{раз}}(j\omega))$, а по оси абсцисс — вещественная часть $\mathrm{Re}(W_{\text{раз}}(j\omega))$.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{\text{раз}}(s)=\frac{B_{\text{раз}}(s)}{A_{\text{раз}}(s)},$$

передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{\text{зам}}(s)=\frac{W_{\text{раз}}(s)}{1+W_{\text{раз}}(s)}=\frac{B_{\text{раз}}(s)}{A_{\text{раз}}(s)+B_{\text{раз}}(s)},$$

где $A_{\text{зам}}(s)=A_{\text{раз}}(s)+B_{\text{раз}}(s)$ — характеристическое уравнение замкнутой системы.

Вводится вспомогательная функция, представляющая собой АФЧХ разомкнутой системы, сдвинутую на единицу вправо:

$$F(s)=1+W_{\text{раз}}(s)=\frac{A_{\text{раз}}(s)+B_{\text{раз}}(s)}{A_{\text{раз}}(s)}=\frac{A_{\text{зам}}(s)}{A_{\text{раз}}(s)}.$$

Ее числитель представляет собой характеристическое уравнение замкнутой системы, а знаменатель — характеристическое уравнение разомкнутой системы. Полиномы числителя и знаменателя имеют одинаковый порядок, равный n.

Получим выражение для вспомогательной частотной характеристики:

$$F(j\omega)=\frac{A_{\text{зам}}(j\omega)}{A_{\text{раз}}(j\omega)}.$$

Рассмотрим результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞, используя те же соотношения, что и при доказательстве критерия Михайлова.

Если замкнутая система устойчива, то приращение фазы числителя будет равно: $\varphi_{\text{зам}}(\omega) = n\dfrac{\pi}{2}$. При устойчивой разомкнутой системе фаза знаменателя определяется выражением: $\varphi_{\text{раз}}(\omega) = n\dfrac{\pi}{2}$. Результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет равен разности фаз:

$$\varphi_F(\omega) = \varphi_{\text{зам}}(\omega) - \varphi_{\text{раз}}(\omega) = 0.$$

Таким образом, для устойчивости замкнутой системы при устойчивой разомкнутой должно выполняться это соотношение. Это свойство имеет простую геометрическую интерпретацию: вспомогательная частотная характеристика $F(j\omega)$ не должна охватывать точку начала координат.

Так как $F(j\omega)$ отличается от $W_{\text{раз}}(j\omega)$ на единицу, то можно строить АФЧХ.

Тогда для систем, содержащих в разомкнутом варианте только устойчивые звенья (разомкнутая система устойчива), принята *упрощенная формулировка признака устойчивости:* замкнутая система будет устойчива, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами (–1; *j*0).

На рис. 1 показаны АФЧХ устойчивых разомкнутых систем. Первая система будет устойчива в замкнутом состоянии, а вторая — нет.

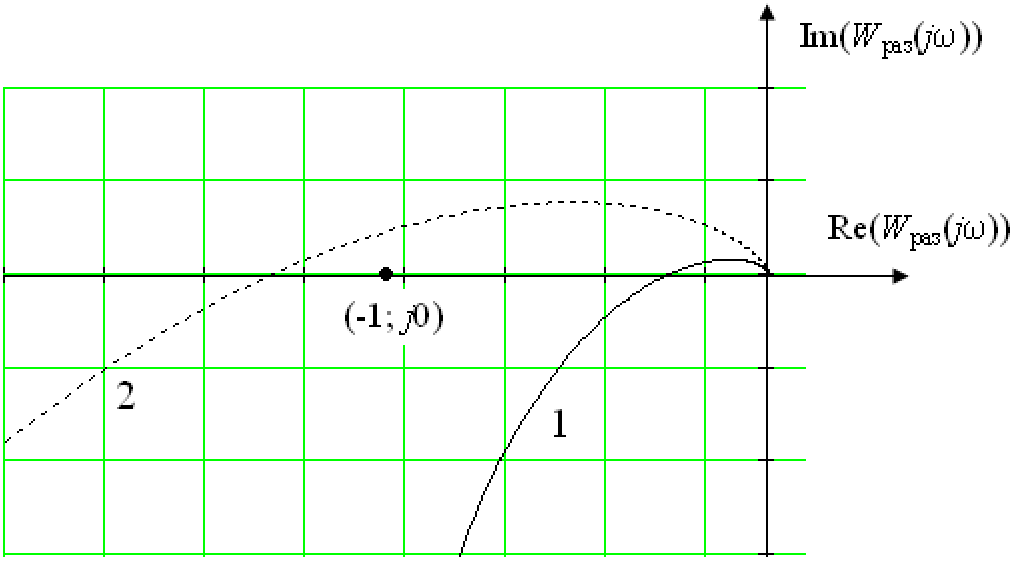


Рис. 1. АФЧХ разомкнутых систем

Рассмотрим случай, когда разомкнутая система неустойчива и имеет g неустойчивых корней (с положительной вещественной частью). Тогда фаза знаменателя определяется выражением:

$$\varphi_{\text{раз}}(\omega) = -\frac{g\pi}{2} + (n-g)\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - g\pi = (n-2g)\frac{\pi}{2}.$$

Если замкнутая система устойчива, то приращение фазы числителя будет равно: $\varphi_{\text{зам}}(\omega) = n\dfrac{\pi}{2}$.

Следовательно, результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет равен разности фаз:

$$\varphi_F(\omega) = \varphi_{\text{зам}}(\omega) - \varphi_{\text{раз}}(\omega) = n\frac{\pi}{2} - (n-2g)\frac{\pi}{2} = \frac{g}{2}2\pi.$$

Тогда можно сформулировать критерий Найквиста для общего случая, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы n-го порядка содержит g неустойчивых корней: если разомкнутая система неустойчива и имеет g правых корней (неустойчивых), то для того, чтобы замкнутая система была устойчива необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ вспомогательная частотная характеристика $F(j\omega)$ должна охватывать в положительном направлении (против часовой стрелки) $\frac{g}{2}$ раз точку начала координат, или АФЧХ разомкнутой системы должна охватывать в положительном направлении (против часовой стрелки) $\frac{g}{2}$ раз точку (–1, *j*0).

Если g нечетное, то строят от $-\infty$ до $+\infty$, и должна охватывать g раз.

Годограф $W(j\omega)$ всегда начинается на действительной оси, так как $W(j\omega)\big|_{\omega=0} = \dfrac{b_0}{a_0} = k$. Но при порядке астатизма равном ν, по причине устремления $W(j\omega)$ к ∞ (при $\omega \to 0$ возникает деление на 0), видимая часть годографа появляется только в квадранте $\nu+1$, отсчитанном по часовой стрелке.

На рис. 2, *а* приведены АФЧХ разомкнутых систем управления, устойчивых в замкнутом состоянии, на рис. 2, *б* — замкнутая система неустойчива.

На рис. 2, *в*, *г* показаны АФЧХ разомкнутых астатических систем управления, соответственно устойчивых и неустойчивых в замкнутом состоянии. Их особенность в том, что АФЧХ при $\omega \to 0$ уходит в бесконечность. В этом случае при использовании критерия Найквиста ее мысленно замыкают на вещественную ось по дуге окружности бесконечно большого радиуса.

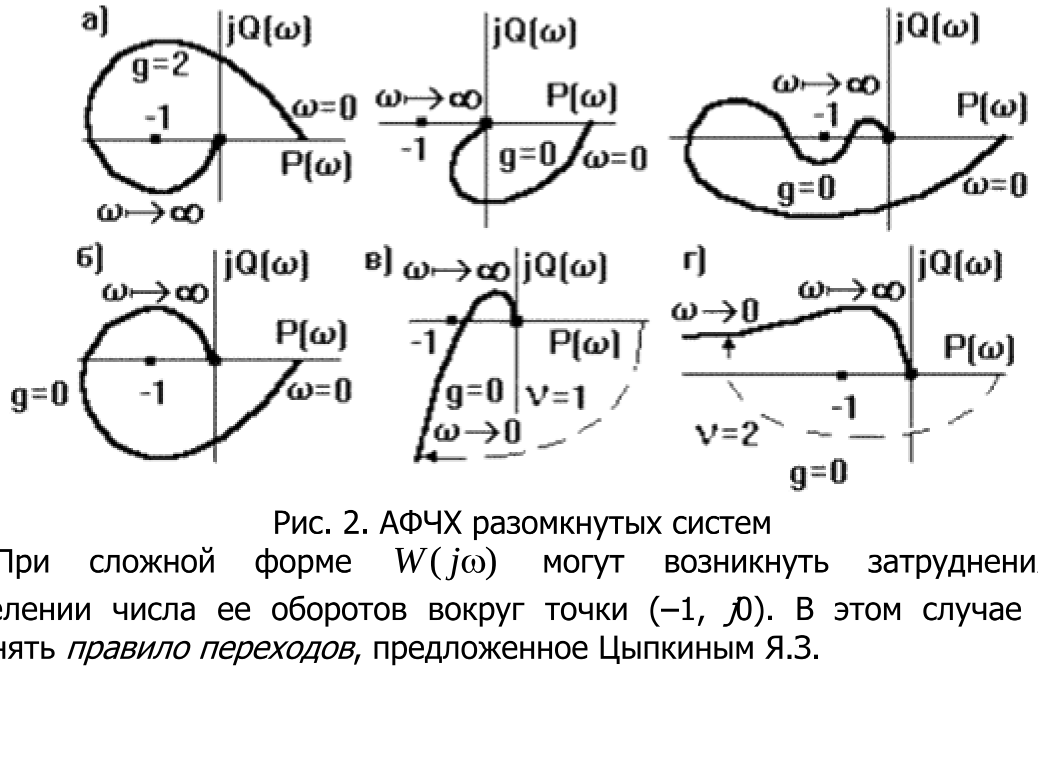


Рис. 2. АФЧХ разомкнутых систем

При сложной форме $W(j\omega)$ могут возникнуть затруднения при определении числа ее оборотов вокруг точки (–1, *j*0). В этом случае удобно применять *правило переходов*, предложенное Цыпкиным Я.З.

Назовем переход $W(j\omega)$ через вещественную ось при возрастании ω *положительным*, если он проходит сверху вниз, и *отрицательным*, если он происходит снизу вверх. Если $W(j\omega)$ начинается или заканчивается на оси, то она совершает полперехода. Тогда критерий Найквиста можно сформулировать следующим образом.

Если разомкнутая система управления неустойчива, то для того чтобы замкнутая была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ через отрезок вещественной оси $(-\infty; -1)$ при изменении частоты от 0 до ∞ была равна $\frac{g}{2}$, где g — число правых корней характеристического уравнения.

В качестве примера на рис. 3 изображена АФЧХ разомкнутой системы: число правых корней $g=2$, число переходов — два положительных, один отрицательные, их разность равна $l=\frac{g}{2}=1$, следовательно, замкнутая система устойчива.

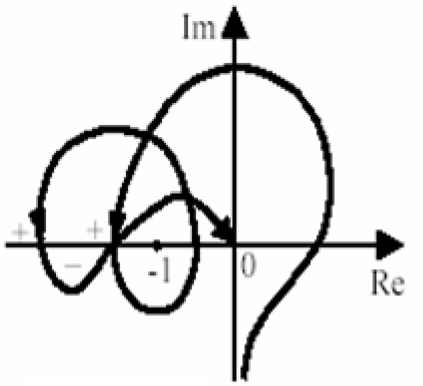


Рис. 3.

Передаточную функцию разомкнутой системы в некоторых случаях удобно представлять в следующем виде:

$$W_{\text{раз}}(s)=kW_{\text{раз0}}(s)=k\frac{B_{\text{раз0}}(s)}{A_{\text{раз0}}(s)},$$

где $k=\frac{b_0}{a_0}$ — коэффициент передачи разомкнутой системы.

Передаточную функцию $W_{\text{раз0}}(p)$ назовем *нормированной*.

Рассмотрим функцию:

$$\Delta(s)=\frac{1}{k}+W_{\text{раз0}}(s)=\frac{A_{\text{раз0}}(s)+kB_{\text{раз0}}(s)}{kA_{\text{раз0}}(s)},$$

числитель которой — характеристический полином замкнутой системы.

Для устойчивости замкнутой системы нормированная АФЧХ $W_{\text{раз0}}(j\omega)$, должна $g/2$ раз охватывать точку $(-1/k, j0)$ против часовой стрелки.

Такая формулировка является *модифицированным критерием Найквиста*, которая упрощает исследование зависимости устойчивости замкнутой системы от коэффициента передачи k контура. При изменении k нормированная АФЧХ не изменяется, а критическая точка $(-1/k, j0)$ превращается в критический отрезок (луч).

Критерий Найквиста позволяет установить для систем с неустойчивой разомкнутой цепью, будет ли система устойчива при замыкании обратной связи.

Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

ЛАЧХ разомкнутой системы строится по следующему выражению: $L(\omega) = 20\lg\left(\left|W_{\text{раз}}(j\omega)\right|\right)$, ЛФЧХ: $\varphi(\omega) = \arg\left(W_{\text{раз}}(j\omega)\right)\cdot\dfrac{180}{\pi}$. По оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе.

Каждой точке АФЧХ разомкнутой системы соответствуют определенные точки ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Пусть известны частотные характеристики двух разомкнутых систем управления (1 и 2), отличающихся друг от друга только коэффициентом передачи $K_1 < K_2$. Пусть первая система устойчива в замкнутом состоянии, вторая нет (рис. 1).

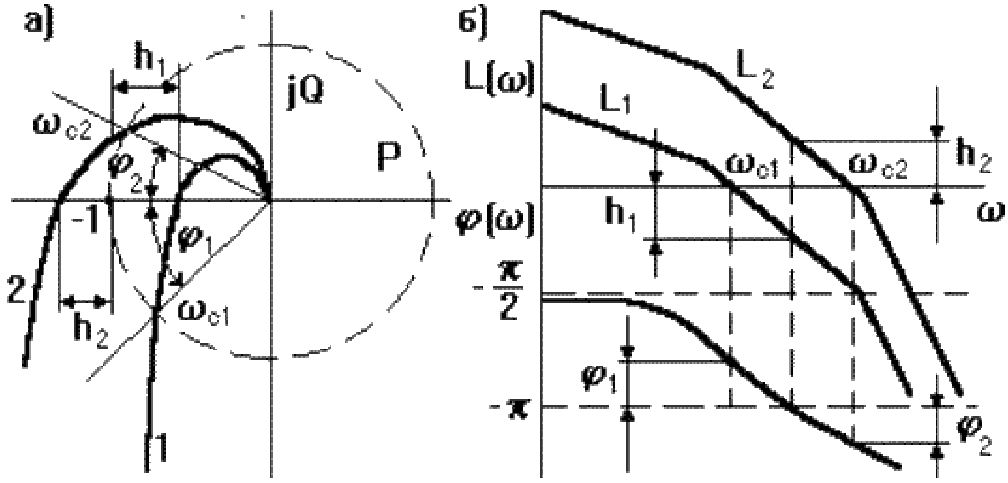


Рис. 1.

Если $W_1(s)$ — передаточная функция первой системы, то передаточная функция второй: $W_2(s) = KW_1(s)$, где $K = K_2/K_1$.

Особыми точками являются точки пересечения АФЧХ с единичной окружностью. Частоты ω_{c1} и ω_{c2} при которых это происходит, называют *частотами среза*.

В этих точках $A(\omega) = 1 \Rightarrow L(\omega) = 0$ — ЛАЧХ пересекает горизонтальную ось. Амплитуда $A_1(\omega) < 1$ соответствует на ЛАЧХ значениям $L_1(\omega) = 20\lg A_1(\omega) < 0$, а амплитуда $A_2(\omega) > 1$ соответствует на ЛАЧХ значениям $L_2(\omega) > 0$.

Пересечениям АФЧХ вещественной оси соответствует значение фазы $\varphi = -\pi$.

Если при частоте среза фаза АФЧХ $\varphi_{c1} > -\pi$ (рис. 1, *а*, кривая 1), то замкнутая система устойчива. На рис. 1, *б* это выглядит так, что пересечению ЛАЧХ горизонтальной оси соответствует точка ЛФЧХ, расположенная выше линии $\varphi = -\pi$. И, наоборот, для неустойчивой замкнутой системы (рис. 1, *а* кривая 2) $\varphi_{c2} < -\pi$, поэтому при $\omega = \omega_{c2}$ ЛФЧХ проходит ниже линии $\varphi = -\pi$.

Таким образом, *критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутых систем* можно сформулировать следующим образом: система, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если ЛАЧХ пересекает ось абсцисс (в последний раз) раньше, чем ЛФЧХ пересечет (в последний раз) ординату $-\pi$.

На рис. 2 показаны ЛАЧХ и ЛФЧХ устойчивой разомкнутой системы, которая также будет устойчива и в замкнутом состоянии.

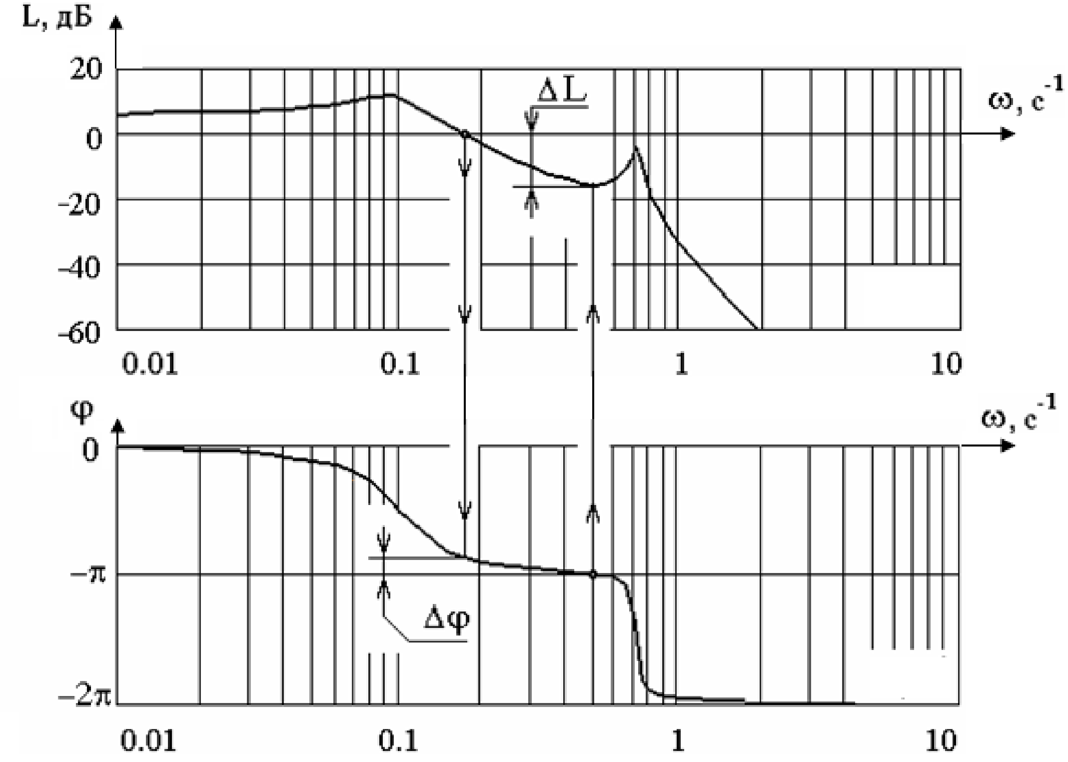


Рис. 2. ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы

Понятие запаса устойчивости

В условиях эксплуатации параметры системы по тем или иным причинам могут меняться в определенных пределах (старение, температурные колебания и т. п.). Эти колебания параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости. Поэтому стремятся спроектировать систему управления так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости. Степень этого удаления называют *запасом устойчивости*.

Согласно критерия Найквиста, чем дальше АФЧХ от критической точки (–1, *j*0), тем больше запас устойчивости.

Запас устойчивости по усилению Δh характеризует удаление годографа АФЧХ разомкнутой системы от критической точки в направлении вещественной оси (рис. 1, *а*). По физическому смыслу он показывает, насколько должно увеличиться усиление на данной частоте, чтобы система оказалась на границе устойчивости.

При использовании ЛАЧХ и ЛФЧХ вместо запаса устойчивости по усилению на той же частоте определяется *запас устойчивости по модулю* ΔL, который показывает во сколько раз или на сколько децибел можно увеличить коэффициент усиления при неизменной фазе, сохраняя устойчивость системы (с увеличением k ЛАЧХ поднимается и точка пересечения оси абсцисс смещается вправо) (см. рис. 2, в предыдущем разделе).

Знаяя Δh запас устойчивости по модулю можно вычислить по следующей формуле: $\Delta L = 20\lg(1-\Delta h)$.

Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ характеризует удаление годографа от критической точки по дуге окружности единичного радиуса и определяется углом $\Delta\varphi$ между отрицательным направлением вещественной полуоси и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения годографа с единичной окружностью (рис. 1, *а*).

При использовании ЛАЧХ и ЛФЧХ *запас устойчивости по фазе* $\Delta\varphi$ показывает, на какой угол может быть смещена фазовая характеристика при неизменной амплитудной с сохранением устойчивости (см. рис. 2, в предыдущем разделе).

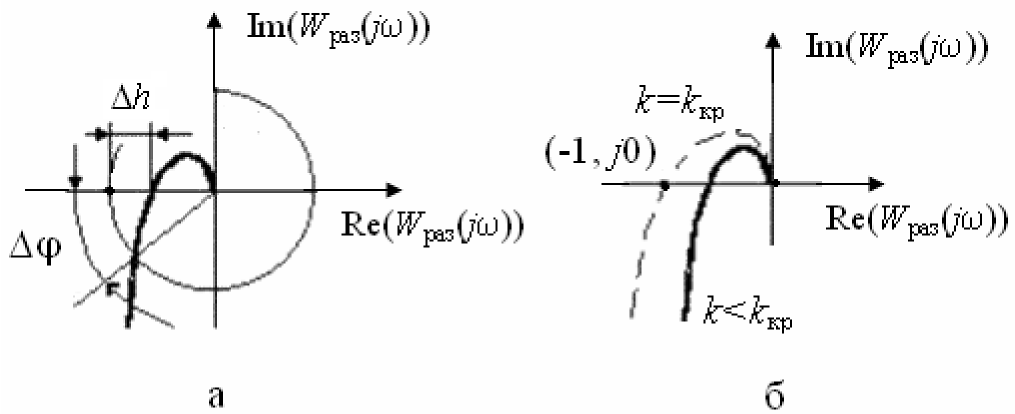


Рис. 1. Определение запасов устойчивости по АФЧХ разомкнутой системы

С ростом коэффициента передачи k разомкнутой системы растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении $k = k_{кр}$ АФЧХ пройдет через критическую точку и попадет на границу устойчивости, а при $k > k_{кр}$ замкнутая система станет неустойчивой ($k = b_0/a_0$ — отношение свободных членов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы) (рис. 1, *б*).

В табл. 1 приведены требуемые запасы устойчивости для систем различных порядков.

Таблица 1

Требуемые запасы устойчивости

Порядок системы, n	Запас устойчивости по модулю ΔL, дБ	Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$, град.
Статическая система		
<3	7—10	35—45
3—6	10—15	45—60
>6	>15	>60
Астатическая система 1-го порядка		
<3	10—15	45—60
3—6	15—20	60—90
>6	>20	>90
Астатическая система 2-го порядка		
<3	15—20	60—90
3—6	20—25	90—120
>6	>25	>120

Задания

Задание 1. Провести эквивалентные преобразования структурной схемы, указанной в индивидуальном задании. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем.

Задание 2. Исследовать устойчивость замкнутой линейной системы с помощью частотного критерия Михайлова.

Задание 3. Исследовать устойчивость замкнутой системы с помощью частотного критерия Найквиста.

Задание 4. Исследовать устойчивость замкнутой системы по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

Задание 5. Определить значения запасов устойчивости по модулю и по фазе.

Задание 6. Сформулировать выводы о влиянии параметров звеньев системы на ее устойчивость.

Примечание. В отчете должны быть проанализированы два случая: система устойчивая и система неустойчивая. Для этого студентам необходимо самостоятельно выбрать соответствующие коэффициенты системы k_p, T_p.

Контрольные вопросы.

1. Частотный критерий устойчивости Михайлова.
2. Частотный критерий устойчивости Найквиста.
3. Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.
4. Понятие запаса устойчивости.

Лабораторная работа 7
Анализ качества линейной непрерывной системы управления

Цель работы: **освоение методов оценки качества линейных непрерывных систем управления по прямым и косвенным показателям.**

Теоретические сведения

Устойчивость САУ является необходимым, но не достаточным условием для ее эффективного функционирования. Важное значение имеет *качество управления* — степень удовлетворения требований к форме переходного процесса, который определяет пригодность системы для конкретных условий работы.

Методы анализа качества управления делятся на *прямые методы* анализа по кривой переходного процесса и *косвенные методы* (частотные, корневые, интегральные методы).

Прямые методы оценки качества управления

Переходная характеристика (процесс) $h(t)$ (рис. 1) — это реакция системы на единичную ступенчатую функцию:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Построение переходного процесса:

$$h(t) = L^{-1}\{W_{зам}(s) \cdot L[1(t)]\},$$

где $L[1(t)] = 1/s$ — преобразование Лапласа единичной ступенчатой функции.

В случае, когда система описывается дифференциальным уравнением высокого порядка и обратное преобразование Лапласа от передаточной функции $W_{зам}(s)$ затруднено, построение переходного процесса можно проводить по следующим формулам:

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}(W_{зам}(j\omega))\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega,$$

$$h(t) = \mathrm{Re}(W_{зам}(0)) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}(W_{зам}(j\omega))\frac{\sin \omega t}{\omega}d\omega,$$

где $\mathrm{Re}(W_{зам}(j\omega))$ — вещественная частотная характеристика замкнутой системы (ВЧХ); $\mathrm{Im}(W_{зам}(j\omega))$ — мнимая частотная характеристика замкнутой системы (МЧХ).

Показатели качества по переходному процессу:

1. *Время регулирования* $t_р$ — это время когда переходной процесс входит в *N* % *зону* (*трубку*) *регулирования* и в дальнейшем из нее не выходит. Время регулирования оценивает быстродействие системы.

Обычно зона регулирования задается в процентах от установившегося значения выходной величины $\Delta = 0{,}05$, 5 %.

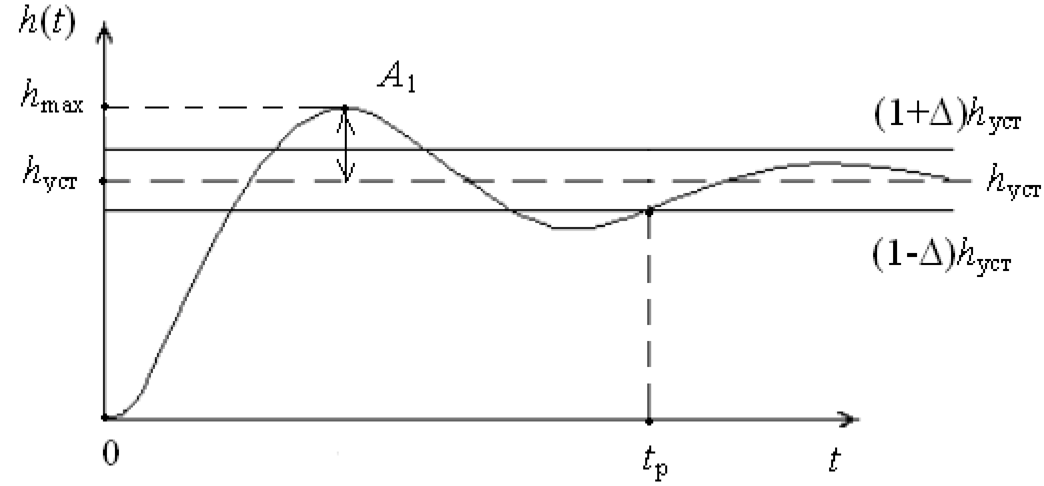


Рис. 1. Переходной процесс замкнутой системы

2. *Перерегулирование* σ — максимальное отклонение переходного процесса от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%,$$

где h_{max} — значение максимума переходного процесса.

При больших перерегулированиях могут возникнуть значительные динамические усилия в механической части системы, электрические перенапряжения. Допустимое значение σ определяется из опыта эксплуатации, обычно оно составляет 0,1—0,3, иногда допускается до 0,7. Величина перерегулирования отражает динамическую точность системы, то есть точность системы в процессе ее перехода из одного состояния в другое.

3. Для колебательных процессов существенным является показатель Ψ — *интенсивность затухания* (*степень затухания, затухание*):

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1},$$

где A_1, A_3 — амплитуды первого и третьего (положительных) всплесков переходного процесса относительно установившегося значения.

4. *Статическая ошибка* $e = h_{жел} - h_{уст}$ — это разность между заданным (желаемым) и действительным значением управляемой величины в установившемся режиме. Для статических систем статическая ошибка отлична от нуля и пропорциональна величине возмущающего фактора f (в линейных системах) и коэффициенту передачи системы по данному возмущению, а для астатических — равна нулю.

5. *Время нарастания* $t_н$ — время достижения переходным процессом в первый раз своего установившегося состояния.

6. *Частота колебаний* $\omega = 2\pi/T$, где T — период колебаний.

7. *Число колебаний* n за время регулирования $t_р$.

При создании системы допустимые значения показателей качества оговариваются техническими условиями, что представляется в виде *диаграммы показателей качества*. Это область, за границы которой не должна выходить переходная характеристика.

Косвенные методы оценки качества управления

Оценка качества управления по частотным характеристикам.

1. *Запасы устойчивости по модулю и по фазе* определяются по ЛАЧХ и ЛФЧХ или по АФЧХ разомкнутой системы.

Для построения *АФЧХ* определяется частотная передаточная функция разомкнутой системы путем формальной замены $W_{раз}(j\omega) = W_{раз}(s)\big|_{s=j\omega}$. По оси ординат откладывается мнимая часть частотной передаточной функции $\mathrm{Im}(W_{раз}(j\omega))$, а по оси абсцисс — вещественная часть $\mathrm{Re}(W_{раз}(j\omega))$.

ЛАЧХ разомкнутой системы строится по следующему выражению: $L(\omega) = 20\lg\left(\left|W_{раз}(j\omega)\right|\right)$, *ЛФЧХ*: $\varphi(\omega) = \arg\left(W_{раз}(j\omega)\right)\cdot\frac{180}{\pi}$. По оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе.

Показатели качества по амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) замкнутой системы, которая представляет собой зависимость $A(\omega) = \left|W_{зам}(j\omega)\right|$ от частоты ω:

Начальное значение АЧХ:

$$A(0) = \begin{cases} 1 \text{ для астатической САР,} \\ \dfrac{K}{K+1} \approx 1 \text{ для статической САР.} \end{cases}$$

2. *Резонансная частота системы* $\omega_р$ — это частота, при которой колебания проходят через систему с наибольшим усилением, а АЧХ замкнутой системы достигает максимума.

3. *Полоса пропускания системы* ω_B — это частота, при которой мощность сигнала на выходе уменьшается в 2 раза по сравнению с ее максимальным значением на низких частотах.

4. *Частота среза* $\omega_{ср}$ — частота, при которой ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс, а АЧХ замкнутой системы принимает значение равное значению $A(0)$, то есть $A(\omega_{ср}) = A(0)$. По ней можно судить о быстродействии системы.

Частота среза $\omega_{ср}$ во многих случаях близка к резонансной частоте $\omega_р$ системы. Так как резонансная частота приблизительно соответствует частоте колебаний замкнутой системы в переходном процессе, то время достижения первого максимума на переходном процессе может быть определено по приближенной зависимости:

$$t_м \approx \frac{\pi}{\omega_р} \approx \frac{\pi}{\omega_{ср}}.$$

Если переходной процесс в системе заканчивается за 1—2 колебания (это одно из требований к системам управления, выведенное на основе эксплуатации), то время регулирования можно определить по приближенной зависимости:

$$t_р \approx \frac{(1 \ldots 2)\cdot 2\pi}{\omega_р} \approx \frac{(1 \ldots 2)\cdot 2\pi}{\omega_{ср}}.$$

5. *Частотный показатель колебательности* M — это отношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы к ее значению при $\omega = 0$: $M = A(\omega_р)/A(0)$ (рис. 2).

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Допустимое значение показателя колебательности определяется на основании опыта эксплуатации систем управления: это значение должно быть в пределах 1,1—1,5, хотя в некоторых случаях можно допускать величины до 2—2,5.

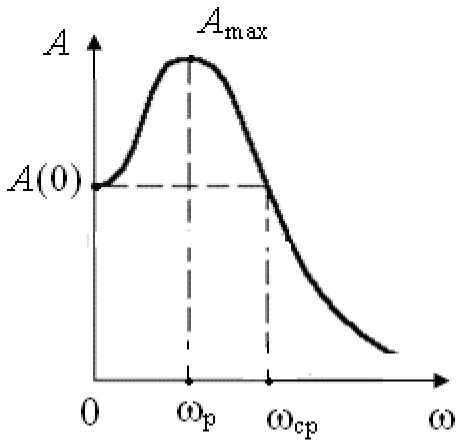


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы

Соотношения между вещественной частотной характеристикой замкнутой системы (ВЧХ), которая представляет собой зависимость вещественной части $P(\omega) = \mathrm{Re}(W_{зам}(j\omega))$ частотной передаточной функции замкнутой системы от частоты ω и *переходным процессом*:

1. Начальное значение ВЧХ $P(0)$ равно установившемуся значению переходной характеристики $P(0) = h(\infty) = h_{\text{уст}}$. Конечное значение ВЧХ соответствует начальному значению переходного процесса $P(\infty) = h(0)$.

2. Система с вогнутой ВЧХ (рис. 3, *а*, кривая 1) не имеет перерегулирования, то есть ей соответствует монотонная переходная характеристика (рис. 3, *б*, кривая 1).

3. Система с трапециидальной ВЧХ (рис. 3, *а*, кривая 2) имеет апериодическую переходную характеристику (рис. 3, *б*, кривая 2), причем величина перерегулирования σ не превышает 18 %.

4. Кривые 3 и 4 на рис. 3, *а* соответствуют колебательной переходной характеристике (рис. 3, б, кривая 3). Наличие отрицательного экстремума у ВЧХ (кривая 4) свидетельствует о повышенной колебательности системы.

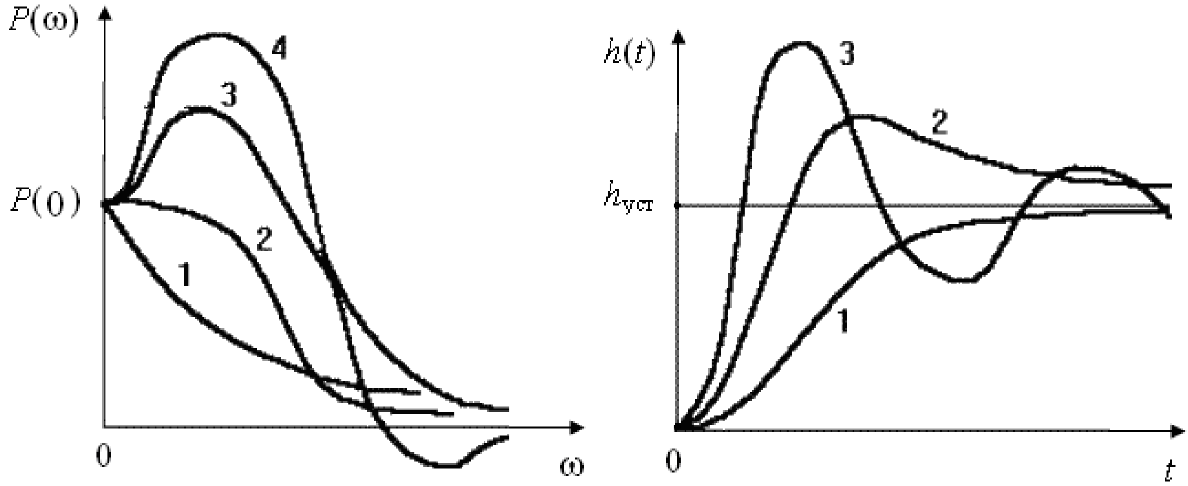


Рис. 3. ВЧХ (*а*) и переходные процессы (*б*) замкнутых систем

Корневой метод оценки качества управления. *Это косвенный метод, основанный на определении границ области расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, что дает возможность приблизительно оценить качество управления (свойства переходного процесса).*

Для нахождения корней характеристического полинома $D(s)$ в Mathcad имеется встроенная функция **polyroots(v)**.

Вектор ν будет иметь вид:

$$v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$D(s) := T1 \cdot T2 \cdot s^3 + (T1 + T2) \cdot s^2 + (1 + k1 \cdot k2 \cdot k_p \cdot T_p) \cdot s + k1 \cdot k2 \cdot k_p$$

$$v(T_p, k_p) := \begin{pmatrix} k1 \cdot k2 \cdot k_p \\ 1 + k1 \cdot k2 \cdot k_p \cdot T_p \\ T1 + T2 \\ T1 \cdot T2 \end{pmatrix}$$

$$r := \mathrm{polyroots}(v(T_p, k_p))$$

$$r = \begin{pmatrix} -1.343 \\ -0.078 + 0.54i \\ -0.078 - 0.54i \end{pmatrix}$$

Вектор r содержит корни характеристического уравнения.

1. *Среднегеометрический корень*. Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид: $a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$.

Используя понятие *среднегеометрического корня*:

$$\Omega_0 = \sqrt[n]{|s_1 s_2 \ldots s_n|} = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}, \ (1)$$

где s_i — корни характеристического уравнения, можно перейти к новой комплексной величине q путем подстановки $s = \Omega_0 q$. В результате получим уравнение:

$$a_n \Omega_0^n q^n + \ldots + a_1 \Omega_0 q + a_0 = 0$$

или

$$\frac{a_n \Omega_0^n}{a_0} q^n + \ldots + \frac{a_1 \Omega_0}{a_0} q + 1 = 0.$$

Введем коэффициенты:

$$A_k = \frac{a_k \Omega_0^k}{a_0},$$

тогда можно записать:

$$A_n q^n + \ldots + A_1 q + 1 = 0. \ (2)$$

Исходное характеристическое уравнение при возвращении к прежней комплексной величине получает вид (подставим $q = \dfrac{s}{\Omega_0}$):

$$A_n \Omega_0^{-n} s^n + \ldots + A_1 \Omega_0^{-1} s + 1 = 0$$

или

$$A_n s^n + \ldots + A_1 \Omega_0^{n-1} s + \Omega_0^n = 0. \ (3)$$

Среднегеометрический корень Ω_0 может служить мерой быстроты протекания переходных процессов. Если в уравнении (3) увеличить Ω_0, например, в 10 раз, то переходный процесс, оставаясь подобным сам себе, будет протекать в 10 раз быстрее.

В связи с этим можно рассматривать (2) как *нормированное характеристическое уравнение*, которому соответствует переходной процесс, построенный для времени $\tau = \Omega_0 t$. Если качество переходного процесса является приемлемым, то требуемая быстрота протекания переходного процесса может быть обеспечена соответствующим выбором величины Ω_0.

Для увеличения величины Ω_0, как следует из (1), необходимо увеличивать свободный член характеристического уравнения a_0. Для статической разомкнутой системы, имеющей свободный коэффициент знаменателя $a_{0\_раз}$, при замыкании обратной связи свободный коэффициент будет равен $a_0 = a_{0\_раз} + k$, а для астатической $a_0 = k$, где k — коэффициент передачи разомкнутой системы. Следовательно, повышение быстродействия может осуществляться за счет увеличения коэффициента передачи k. Однако, при этом уменьшается запас устойчивости замкнутой системы и в результате переходной процесс становится более колебательным.

2. *Степенью устойчивости* η называется абсолютная величина вещественной части корня, расположенного ближе всех остальных к мнимой оси. Термин «степень устойчивости» не является удачным, и его следовало заменить термином «*степень быстродействия*». Это объясняется тем, что степень устойчивости никак не связана с удалением системы от границы устойчивости. Таким образом, η показывает *быстродействие системы*.

Длительность переходного процесса определяется в основном свободной составляющей, имеющей наименьшее затухание, то есть наименьшее абсолютное значение вещественной части соответствующего полюса. Если изобразить все полюса в комплексной плоскости корней, то данный полюс (или пара комплексно сопряженных полюсов) будет наиболее близко расположен к мнимой оси (рис. 1).

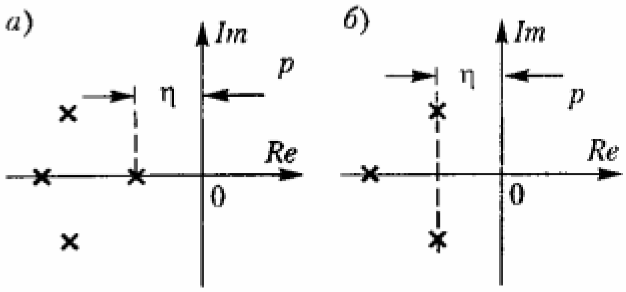


Рис. 1.

Если ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, то составляющая в переходном процесс определяемая этим корнем, будет иметь вид:

$$x_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t}.$$

Положив в конце переходного процесса $x_\eta(t_p) = \Delta C_\eta$, где $\Delta = 0{,}01 \ldots 0{,}05$ (таким образом, после окончания переходного процесса статическая ошибка будет в пределах 1—5 % от C_η) и, прологарифмировав левую и правую части выражения, получим:

$$\ln x_\eta(t) = \ln C_\eta e^{-\eta t},$$

$$\ln \Delta C_\eta = \ln C_\eta e^{-\eta t},$$

$$\ln \Delta = -\eta t.$$

Тогда можно получить приближенную зависимость между степенью устойчивости и временем регулирования:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}.$$

Так, например, если принять $\Delta = 0{,}05$, то время регулирования составит:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0{,}05} \approx \frac{3}{\eta},$$

а если $\Delta = 0{,}01$, то время регулирования составит:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0{,}01} \approx \frac{5}{\eta}.$$

Таким образом, можно считать, что: $t_p \approx \dfrac{3 \ldots 5}{\eta}$.

Если ближайшей к мнимой оси является пара комплексных корней $-\eta \pm j\beta$, то составляющая в переходном процессе, определяемая этими корнями, будет:

$$x_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t} \sin(\beta t + \psi).$$

Положив в этом случае $x_\eta(t_p) = \Delta C_\eta$, нельзя в общем виде определить время регулирования, так как для этой цели потребовалось бы решить трансцендентное уравнение. Однако можно найти верхнюю границу времени регулирования, положив в этом уравнении $\sin(\beta t + \psi) = 1$. Тогда получим выражение:

$$t_p \le \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \le \frac{3 \ldots 5}{\eta}.$$

Таким образом, и в этом случае величина степени устойчивости будет в какой-то мере определять быстроту затухания переходного процесса.

3. *Корневой показатель колебательности* (*колебательность*). Склонность системы к колебаниям будет наблюдаться, если в решении характеристического уравнения будут присутствовать комплексные корни вида $\lambda = -\alpha \pm j\beta$.

Модуль отношения мнимой части корня (угловой частоты колебаний) β к вещественной (коэффициенту затухания) α в той паре комплексно-сопряженных корней, которые дают наибольший угол 2φ, называется *колебательностью* μ (характеризует колебательность переходного процесса и величину перерегулирования) (рис. 2):

$$\mu = |\beta / \alpha| = |\mathrm{tg}\varphi|.$$

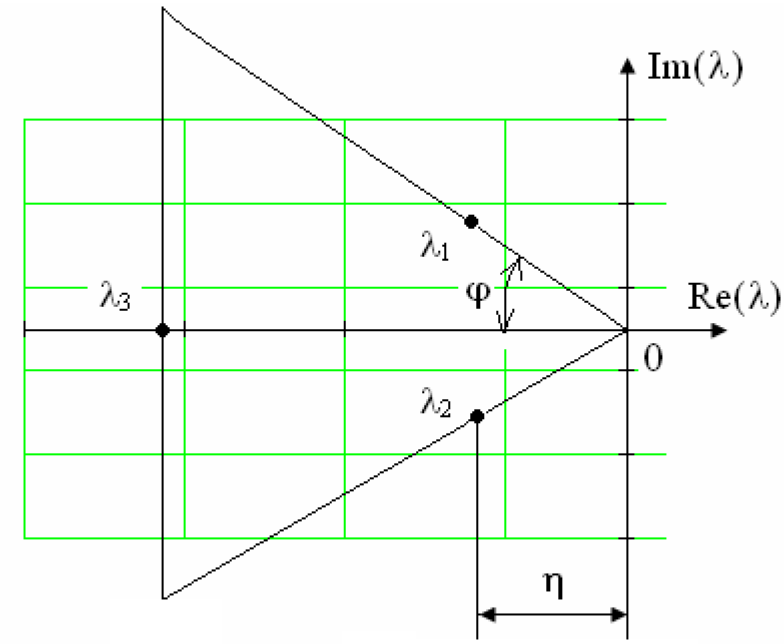


Рис. 2. Расположение полюсов передаточной функции на комплексной плоскости

Чем больше величина μ, тем более колебательный характер будут иметь переходные процессы и наоборот. Если $\mu = 0$ $(\beta = 0)$ все корни характеристического уравнения будут вещественными, и в системе будут возникать апериодические переходные процессы. Если $\mu = \infty$ $(\alpha = 0)$ корни системы будут чисто мнимыми, и в системе будут наблюдаться незатухающие колебательные переходные процессы.

4. *Интенсивность затухания* (*степень затухания*, *затухание*). Комплексные сопряженные корни дают в выражении для переходного процесса член вида:

$$x(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\beta t + \phi).$$

Найдем затухание амплитуды синусоидального колебания за один период. При некотором времени $t = t_1$ эта амплитуда равна:

$$C_1 = Ce^{-\alpha t_1}.$$

Через один период $T = 2\pi/\beta$:

$$C_2 = Ce^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = C_1 e^{-2\pi\frac{\alpha}{\beta}} = C_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Затуханием называют величину:

$$\psi = \frac{C_1 - C_2}{C_1} = 1 - \frac{C_2}{C_1}.$$

Эта величина обычно выражается в процентах. Подставляя значение амплитуды C_2, получаем:

$$\psi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}},$$

или

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln\frac{1}{1-\psi}}.$$

Обычно в системах управления допускается затухании за один период не менее чем 90—98 %. Так, например, если $\psi = 98\,\%$, то допустимая колебательность при этом составит:

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln 50} \approx \frac{\pi}{2} = 1{,}57.$$

Соответственно $\psi = 90\,\%$ при получаем $\mu = 2{,}72$.

Интегральный метод оценки качества управления. В новейшей литературе, посвященной автоматическому управлению, подчеркивается важность математической формулировки понятия качества системы управления и методов его оценки. Современная теория управления предполагает, что инженер способен количественно определить требуемое качество системы. Количественная оценка качества крайне важна для работы адаптивных систем управления, для автоматической оптимизации параметров систем управления и для синтеза оптимальных систем.

Оценка качества — это численный показатель качества системы, который выбирается так, чтобы подчеркнуть наиболее важное требование, предъявляемое к системе.

Система считается *оптимальной системой управления*, если ее параметры выбраны таким образом, что оценка качества принимает экстремальное (обычно минимальное) значение. Чтобы оценка качества имела реальный смысл, она должна представлять собой число, которое всегда положительно или равно нулю. Тогда наилучшей системой будет та, в которой эта оценка имеет минимальное значение.

В общем случае интеграл, оценивающий качество системы, имеет вид:

$$I = \int_0^\infty f\big(e(t), g(t), y(t), t\big)dt,$$

где f — функция ошибки $e(t)$, входного $g(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов, а также времени.

Используя различные комбинации переменных системы и времени, можно получить много разных оценок качества.

Верхний предел интегрирования выбирается достаточно произвольно, так, чтобы интеграл стремился к конечному значению (обычно удобно выбирать его равным времени регулирования $t_\text{р}$).

Рассмотрим наиболее употребляемые интегральные оценки.

Линейная интегральная оценка численно равна площади, ограниченной ошибкой регулирования $e(t) = h_\text{жел} - h(t)$. Определяется она выражением:

$$I_0 = \int_0^\infty e(t)dt. \quad (1)$$

Линейную интегральную оценку применяют только для монотонных переходных процессов, так как при колебательном переходном процессе ошибка в определении качества может быть недопустимой.

Для улучшения свойств предыдущего критерия используют *интеграл от модуля ошибки* (ИМО):

$$I_1 = \int_0^\infty |e(t)| dt \,. \quad (2)$$

Квадратичная интегральная оценка (*интеграл от квадрата ошибки*, ИКО) (*формула Рэлея*):

$$I_2 = \int_0^\infty e^2(t) dt \,. \quad (3)$$

Оценка (3) удобна в практическом применении, т. к. легко могут быть реализованы схемы возведения в квадрат.

Чтобы уменьшить вклад большой начальной ошибки в интеграл (2) и учесть ошибку, появляющуюся в дальнейшем, была предложена следующая оценка:

$$\text{ИВМО} = \int_0^\infty t|e(t)| dt ,$$

которая определяется как *интеграл от взвешенного модуля ошибки* (ИВМО).

Весьма схожим показателем является *интеграл от взвешенного квадрата ошибки* (ИВКО):

$$\text{ИВКО} = \int_0^\infty te^2(t) dt \,.$$

Оценка качества ИВМО является наилучшей из рассмотренных, т. к. с ее помощью проще всего находить минимальное значение интеграла при изменении параметров системы.

Практическую ценность чаще всего представляют оценки ИМО и ИКО. Например, минимизация одной из оценок качества может быть непосредственно связана с минимизацией расхода топлива самолетом или космическим аппаратом.

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут отвечать разные формы переходного процесса, что создает некоторую неопределенность решения задачи.

Задания

Задание 1. Провести эквивалентные преобразования структурной схемы, указанной в индивидуальном задании. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем.

Задание 2. Оценить качество системы управления по прямым показателям по характеру переходного процесса.

Задание 3. Оценить качество системы управления по частотным характеристикам (ЛАЧХ, ЛФЧХ, АФЧХ, ВЧХ, АЧХ).

Задание 4. Оценить качество системы управления по косвенным показателям, используя корневой метод.

Задание 5. Оценить качество системы управления, используя интегральный метод. Определить линейную интегральную оценку, интеграл от модуля ошибки и интеграл от квадрата ошибки. Построить графики функций $h(t)$, $e(t)$, $|e(t)|$, $e^2(t)$.

Задание 6. Сделать выводы по лабораторной работе.

Примечание. Анализ качества системы управления проводится для случая, когда она устойчивая.

Контрольные вопросы.

1. Оценка качества управления по переходному процессу.
2. Оценка качества управления по частотным характеристикам.
3. Корневой метод оценки качества управления.
4. Интегральный метод оценки качества управления.

Лабораторная работа 8
Оценка точности линейной непрерывной системы управления

Цель работы: освоение методов оценки точности линейных непрерывных систем управления, изучение способов повышения точности.

Теоретические сведения

Передаточная функция системы управления по ошибке

Передаточная функция замкнутой системы (рис. 1):

$$W_{\text{зам}}(s) = \frac{W_{\text{раз}}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)}$$

устанавливает связь между управляемой величиной $y(t)$ (его изображением $Y(s)$) и задающим воздействием $g(t)$ (его изображением $G(s)$) при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$Y(s) = W_{\text{зам}}(s) \cdot G(s) = \frac{W_{\text{раз}}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s).$$

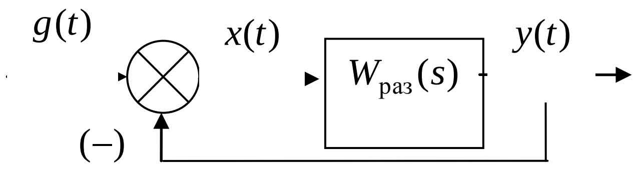


Рис. 1.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке:

$$W_{\text{зам}}(s)_X = 1 - W_{\text{зам}}(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{вывод} \\ y(t) = W_{\text{зам}}(s) \cdot g(t), \quad x(t) = g(t) - y(t) \Rightarrow y(t) = g(t) - x(t), \\ g(t) - x(t) = W_{\text{зам}}(s) \cdot g(t), \quad g(t) - W_{\text{зам}}(s) \cdot g(t) = x(t), \\ x(t) = (1 - W_{\text{зам}}(s)) \cdot g(t). \end{array}\right)$$

устанавливает связь между ошибкой $x(t)$ (ее изображением $X(s)$) и задающим воздействием $g(t)$ (его изображением $G(s)$) в замкнутой системе при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$X(s) = W_{\text{зам}}(s)_X \cdot G(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s).$$

Установившаяся ошибка системы управления с обратной связью

Установившаяся ошибка определяется выражением (по *теореме преобразования Лапласа о конечном значении функции*):

$$x_{ss} = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sG(s)}{1+W_{\text{раз}}(s)}, \ (1)$$

где $X(s) = W_{\text{зам}}(s)_X \cdot G(s) = \dfrac{1}{1+W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s)$.

Определим установившуюся ошибку системы для трех типовых входных сигналов.

Ступенчатый входной сигнал. При ступенчатом входном сигнале амплитуды A $g(t) = A$, установившаяся ошибка равна:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot A/s}{1+W_{\text{раз}}(s)} = \frac{A}{1+W_{\text{раз}}(0)},$$

где $L\{A\} = A/s$ — преобразование Лапласа от ступенчатого входного сигнала амплитуды A.

То есть она определяется передаточной функцией разомкнутой системы $W_{\text{раз}}(s)$, которая в общем случае записывается в виде:

$$W_{\text{раз}}(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N (a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{s^N a_n \prod_{j=1}^{n} (s+p_j)}.$$

Значение $W_{\text{раз}}(s)$ при $s \to 0$ зависит от N, т. е. количества содержащихся в разомкнутой системе интеграторов. Используют термин *тип системы* (*порядок астатизма*), который равен количеству интеграторов N.

Так, для системы типа 0 ($N=0$) установившаяся ошибка равна:

$$x_{ss} = \frac{A}{1+W_{\text{раз}}(0)} = \frac{A}{1+\dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m} z_i}{a_n \prod_{j=1}^{n} p_j}} = \frac{A}{1+k_p},$$

где $k_p = \lim_{s\to 0} W_{\text{раз}}(s)$ — коэффициент передачи разомкнутой системы.

Если система содержит один или более интеграторов, т. е. $N \geq 1$, то при единичном ступенчатом воздействии установившаяся ошибка равна нулю, т. к.:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1+\dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{s^N a_n \prod_{j=1}^{n} (s+p_j)}} = \lim_{s\to 0} \frac{As^N}{s^N + \dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{a_n \prod_{j=1}^{n} (s+p_j)}} = 0.$$

Линейный входной сигнал. Установившаяся ошибка в случае линейного входного сигнала $g(t) = At$ определяется выражением:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot A/s^2}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + sW_{\text{раз}}(s)},$$

где $L\{At\} = A/s^2$ — преобразование Лапласа от линейного входного сигнала.

Установившаяся ошибка зависит от количества интеграторов, N. Для системы типа «ноль» $N = 0$, и установившаяся ошибка равна бесконечности. Для системы типа «один» $N = 1$, и ошибка:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + s\left(\dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m}(s + z_i)}{sa_n \prod_{j=1}^{n}(s + p_j)}\right)} = \frac{A}{\left(\dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m} z_i}{a_n \prod_{j=1}^{n} p_j}\right)} = \frac{A}{k_v},$$

где $k_v = \lim_{s\to 0} sW_{\text{раз}}(s)$ — *добротность системы по скорости*.

Если передаточная функция включает в себя два или более интеграторов, $N \geq 2$, то установившаяся ошибка равна нулю.

Квадратичный входной сигнал. Если на вход системы поступает сигнал $g(t) = \dfrac{At^2}{2}$, то установившаяся ошибка имеет вид:

$$x_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot A/s^3}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s^2 + s^2 W_{\text{раз}}(s)},$$

где $L\left\{\dfrac{At^2}{2}\right\} = \dfrac{A}{s^3}$ — преобразование Лапласа от квадратичного входного сигнала.

При наличии одного интегратора установившаяся ошибка равна бесконечности; при двух интеграторах, $N = 2$, получим:

$$x_{ss} = \frac{A}{\left(\dfrac{b_m \prod_{i=1}^{m} z_i}{a_n \prod_{j=1}^{n} p_j}\right)} = \frac{A}{k_a},$$

где $k_a = \lim_{s\to 0} s^2 W_{\text{раз}}(s)$ — *добротность системы по ускорению*.

Если количество интеграторов $N \geq 3$, то установившаяся ошибка равна нулю.

Коэффициенты ошибок

При оценке точности работы системы удобно использовать так называемые *коэффициенты ошибок*.

Разложим передаточную функцию замкнутой системы по ошибке $W_{\text{зам}}(s)_X$ в ряд Тейлора по возрастающим степеням s:

$$X(s) = \left[c_0 + \frac{c_1 s}{1!} + \frac{c_2 s^2}{2!} + \ldots \right] \cdot G(s).$$

Переходя к оригиналу получаем:

$$x(t) = c_0 g(t) + \frac{c_1}{1!} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \ldots$$

Величины $c_0, c_1, \ldots$ называют *коэффициентами ошибок*. Их можно определять двумя способами:

1. По общему правилу разложения функции в ряд Тейлора по формулам:

$$c_0 = W_{зам}(s)_X \big|_{s \to 0},$$

$$c_m = \left(\frac{d^m W_{зам}(s)_X}{ds^m} \right) \Bigg|_{s \to 0}.$$

Встроенная функция пакета Mathcad **series** выполняет разложение выражения или функции в ряд Тейлора:

$$W_{зам}(s)_X \; series, s, 3 \to \ldots,$$

где $W_{зам}(s)_X$ — передаточная функция замкнутой системы по ошибке; число «3» указывает, сколько членов ряда необходимо определить.

2. Так как передаточная функция по ошибке $W_{зам}(s)_X$ представляет собой дробно-рациональную функцию, то коэффициенты ошибок можно получить делением числителя на знаменатель (деление начинаем с младших степеней s) и сравнением с рядом.

Рассмотрим систему третьего порядка с астатизмом разомкнутой системы первого порядка $\nu = 1$. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид:

$$W_{зам}(s)_X = \frac{1}{1 + W_{раз}(s)} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{b_1 s + b_0}{s^\nu \cdot \left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \right)} \right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + k \cdot \left(\dfrac{(b_1/b_0)s + 1}{s \cdot \left((a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1 \right)} \right)} =$$

$$= \frac{s \cdot \left((a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1 \right)}{s \cdot \left((a_2/a_0)s^2 + (a_1/a_0)s + 1 \right) + k \cdot \left((b_1/b_0)s + 1 \right)} =$$

$$= \frac{(a_2/a_0)s^3 + (a_1/a_0)s^2 + s}{(a_2/a_0)s^3 + (a_1/a_0)s^2 + \left(1 + k(b_1/b_0)\right)s + k} = \frac{f_{20}s^3 + f_{10}s^2 + s}{f_{20}s^3 + f_{10}s^2 + fs + k},$$

где $k = b_0/a_0$ — отношение свободных коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы; $f_{20} = a_2/a_0$, $f_{10} = a_1/a_0$, $f = 1 + k \cdot (b_1/b_0)$.

$$
\begin{array}{l|l}
s+f_{10}s^2+f_{20}s^3 & k+fs+f_{10}s^2+f_{20}s^3 \\
- & \overline{} \\
s+\dfrac{f}{k}s^2+\dfrac{f_{10}}{k}s^3 & \dfrac{1}{k}s+\dfrac{f_{10}k-f}{k^2}s^2+\ldots \\
\hline
\dfrac{f_{10}k-f}{k}s^2+\dfrac{f_{20}k-f_{10}}{k}s^3 & \\
- & \\
\dfrac{f_{10}k-f}{k}s^2+\ldots & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Первые коэффициенты ошибок для системы с астатизмом первого порядка:

$$c_0=0,$$

$$c_1=\frac{1}{k},$$

$$c_2=\frac{f_{10}k-f}{k^2}=\frac{(a_1/a_0)k-1-k\cdot(b_1/b_0)}{k^2}.$$

Рассмотрим статическую систему третьего порядка при $\nu=0$. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид:

$$W_{\text{зам}}(s)_X=\frac{1}{1+W_{\text{раз}}(s)}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{b_1s+b_0}{s^{\nu}\cdot\left(a_2s^2+a_1s+a_0\right)}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+k\cdot\left(\dfrac{(b_1/b_0)s+1}{\left((a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1\right)}\right)}=$$

$$=\frac{(a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1}{(a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1+k\cdot\left((b_1/b_0)s+1\right)}=$$

$$=\frac{(a_2/a_0)s^2+(a_1/a_0)s+1}{(a_2/a_0)s^2+\left((a_1/a_0)+k(b_1/b_0)\right)s+(k+1)}=\frac{f_{20}s^2+f_{10}s+1}{f_{20}s^2+m_{10}s+m},$$

где $m_{10}=(a_1/a_0)+k(b_1/b_0)$, $m=1+k$.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
1+f_{10}s+f_{20}s^2 \\
- \\
1+\dfrac{m_{10}}{m}s+\dfrac{f_{20}}{m}s^2 \\
\hline
\dfrac{f_{10}m-m_{10}}{m}s+\dfrac{f_{20}m-f_{20}}{m}s^2 \\
- \\
\dfrac{f_{10}m-m_{10}}{m}s+\dfrac{m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^2}s^2 \\
\hline
\dfrac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^2}s^2 \\
- \\
\dfrac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^2}s^2+\ldots \\
\hline
0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
m+m_{10}s+f_{20}s^2 \\
\hline
\dfrac{1}{m}+\dfrac{f_{10}m-m_{10}}{m^2}s+ \\
+\dfrac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^3}s^2+\ldots
\end{array}
\end{array}
$$

Первые коэффициенты ошибок для статической системы:

$$c_0=\frac{1}{m}=\frac{1}{1+k},$$

$$c_1=\frac{f_{10}m-m_{10}}{m^2}=\frac{\left(a_1/a_0\right)\left(1+k\right)-\left(a_1/a_0\right)-k\left(b_1/b_0\right)}{\left(1+k\right)^2},$$

$$c_2=\frac{m\left(f_{20}m-f_{20}\right)-m_{10}\left(f_{10}m-m_{10}\right)}{m^3}=\frac{f_{20}m^2-f_{20}m-f_{10}mm_{10}+{m_{10}}^2}{m^3}=$$

$$=\frac{\left(a_2/a_0\right)\left(1+k\right)^2-\left(a_2/a_0\right)\left(1+k\right)-\left(a_1/a_0\right)\left(1+k\right)\left(\left(a_1/a_0\right)+k\left(b_1/b_0\right)\right)+\left(\left(a_1/a_0\right)+k\left(b_1/b_0\right)\right)^2}{\left(1+k\right)^3}$$

Коэффициент c_0 отличный от нуля только в статических системах. В системах с астатизмом 1-го порядка $c_0=0$, а коэффициент c_1 связан с *добротностью по скорости* соотношением $k_v=1/c_1$. В системах с астатизмом второго порядка $c_0=c_1=0$, а коэффициент c_2 связан с *добротностью по ускорению* соотношением $k_a=1/c_2$.

Методы повышения точности управления

Задача повышения точности системы предполагает пересмотр ее структуры. Возможны замены или добавления отдельных звеньев в контуре. Методами повышения точности системы являются:

1. Увеличение коэффициента передачи k разомкнутой системы.
2. Повышение порядка астатизма ν.
3. Применение регулирования по производным.

1. Повышение точности систем увеличением коэффициента передачи*. Ошибка системы:*

$$X(s) = W_{\text{зам}}(s)_X \cdot G(s) = \frac{1}{1 + k \cdot W_{\text{раз}}(s)} \cdot G(s),$$

будет тем меньше, чем больше k.

Так же первые коэффициенты ошибок не будут равны нулю, но будут тем меньше, чем больше k. Таким образом, увеличение k уменьшает ошибку отработки задающего воздействия.

Погрешность отработки задающего воздействия для статических систем: $\delta = c_0 = \dfrac{1}{1+k}$*, для астатических систем:* $\delta = c_1 = \dfrac{1}{k}$.

Метод эффективен, широко применяется, но увеличение k приводит к уменьшению запаса устойчивости, так как с ростом коэффициента передачи разомкнутой системы растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении $k = k_{\text{кр}}$ АФЧХ пройдет через критическую точку и попадет на границу устойчивости, а при $k > k_{\text{кр}}$ замкнутая САУ станет неустойчива.

Однако в случае «клювообразных» АФЧХ не только увеличение, но и уменьшение k может привести к потере устойчивости замкнутых систем (рис. 1). В этом случае запас устойчивости определяется двумя отрезками ΔL_1 и ΔL_2, заключенными между критической точкой и АФЧХ.

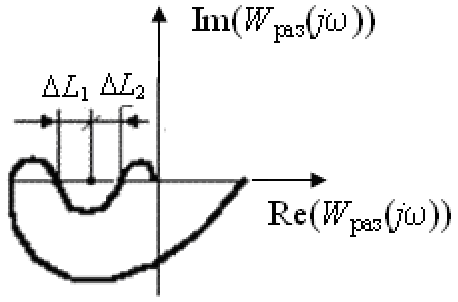


Рис. 1. АФЧХ устойчивой системы

2. Повышение точности систем увеличением порядка астатизма*. Повышение порядка астатизма используется для устранения установившихся ошибок в типовых режимах движения: в неподвижном положении, при движении с постоянной скоростью, при движении с постоянным ускорением. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибки системы, например* $c_0 = 0$ *при астатизме 1-го порядка,* $c_0 = c_1 = 0$ *при астатизме 2-го порядка, или* $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ *при астатизме 3-го порядка.*

Физически повышение астатизма осуществляется за счет введения в канал системы интегрирующих звеньев. Однако в определенных случаях введение астатизма приведет к потере устойчивости, поэтому необходимо использовать корректирующие устройства.

3. Повышение точности систем применением регулирования по производным от ошибки*. Использование регулирования по производным от ошибки, позволяет повысить точность системы так как:*

— система начнет чувствовать не просто наличие ошибки, но и тенденцию к ее изменению;

— повышается запас устойчивости по фазе и можно поднять общий коэффициент усиления.

Передаточная функция дифференцирующего элемента (рис. 2):

$$W_d(s) = T_d s + 1,$$

где T_d — постоянная времени дифференцирующего элемента.

Раскладывая в ряд передаточную функцию системы по ошибке $W_{зам}(s)_X$, получим соотношения для коэффициентов ошибок:

$$c_0 = \frac{1}{1+k},$$

$$c_1 = \frac{const}{(1+k)^2} - \frac{T_d}{(1+k)^2} + \ldots,$$

$$c_2 = \frac{const}{(1+k)^3} - \frac{T_d \cdot const}{(1+k)^3} + \ldots, \ldots$$

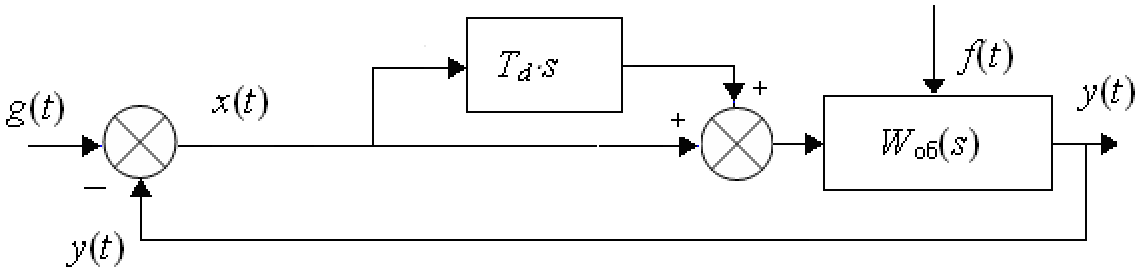


Рис. 2. Структурная схема регулирования по производным от ошибки

Сравнивая полученные коэффициенты с исходными можно увидеть, что все, кроме c_0, уменьшаются. При соответствующем выборе T_d можно обратить в ноль один из старших коэффициентов c_1, или c_2, или ...

Задания

Задание 1. Провести эквивалентные преобразования структурной схемы, указанной в индивидуальном задании. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем.

Задание 2. Записать передаточную функцию замкнутой системы по ошибке.

Задание 3. Определить установившиеся ошибки замкнутой системы для трех типовых входных сигналов: ступенчатый сигнал, линейный сигнал и квадратичный сигнал.

Задание 4. Определить первые три коэффициента ошибок.

Задание 5. Повысить точность системы увеличением коэффициента передачи k разомкнутой системы. Для этого необходимо умножить исходную передаточную функцию разомкнутой системы на коэффициент передачи k: $Wraz\_k(s) = k \cdot Wraz(s)$, а затем определить первые три коэффициента ошибок и сравнить с исходными. Построить переходные процессы исходной и скорректированной систем.

Задание 6. Повысить точность системы увеличением порядка астатизма ν. Для этого необходимо в исходную разомкнутую систему ввести интегрирующее звено с передаточной функцией $W(s)=s^{-\nu}$, где ν — порядок астатизма: $Wraz\_\nu(s)=W(s)\cdot Wraz(s)$, а затем определить первые три коэффициента ошибок и сравнить с исходными. Построить переходные процессы исходной и скорректированной систем.

Задание 7. Повысить точность системы применением регулирования по производным. Для этого необходимо в исходную разомкнутую систему ввести звено с передаточной функцией $W(s)=T_d s+1$: $Wraz\_pr(s)=W(s)\cdot Wraz(s)$, а затем определить первые три коэффициента ошибок и сравнить с исходными. Построить переходные процессы исходной и скорректированной систем.

Задание 8. Сделать выводы по лабораторной работе.

Примечание. Оценка точности системы управления проводится для случая, когда она устойчивая.

Контрольные вопросы.

1. Нахождение передаточной функции замкнутой системы по ошибке.
2. Определение установившихся ошибок замкнутой системы.
3. Нахождение коэффициентов ошибок.
4. Методы повышения точности управления.

Лабораторная работа 9
Оценка управляемости и наблюдаемости, чувствительности и робастности систем управления

Цель работы: **освоение методов оценки управляемости и наблюдаемости, чувствительности и робастности систем управления.**

Теоретические сведения

Управляемость и наблюдаемость систем управления

Управляемость означает возможность перевода системы из одного состояния в другое за конечное время, а *наблюдаемость* — возможность определения состояния системы за конечное время по информации о входах и выходах. Эти свойства необходимо учитывать при построении большинства систем управления.

Управляемость. Система является *управляемой*, если существует такое неограниченное управление $u(t)$, определенное на конечном интервале времени $t_0 \le t \le t_k$, которое может перевести систему из произвольного начального состояния $x(t_0)$ в любое другое заданное состояние $x(t_k)$.

Для оценки управляемости системы с одним входом, описываемой уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

вводится понятие *матрицы управляемости* U, которая выражается через A, B следующим образом:

$$U=\left(B\ AB\ A^2B\ldots A^{n-1}B\right),\ (2)$$

и имеет размерность $(n \times n)$.

Поскольку матрица D не оказывает влияния на свойства управляемости и наблюдаемости, ее можно не учитывать в описании, т. е. считать нулевой.

Если матраца управляемости *U* невырожденная (определитель матрицы U не равен нулю), т. е. ее ранг равен *n*, то система является управляемой.

Невырожденная матраца — квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае она называется *вырожденной*.

Ранг — максимальная размерность матрицы, определитель которой не равен нулю.

В соответствии с критерием (2) свойство управляемости целиком определяется парой матриц (*A*, *B*), поэтому часто говорят об *управляемости пары* (*A*, *B*).

Для системы с несколькими входами: B — матрица входа размерности $(n \times r)$, а $u(t)$ — вектор входа размерности $(r \times 1)$. Условием управляемости такой системы также является невырожденность матрицы управляемости *U*.

Ответить на вопрос, является ли система управляемой, можно и другим способом. Для этого необходимо определить имеются ли пути от управляющего сигнала $u(t)$ к каждой из переменных состояния. Если такие пути существуют, то система может быть управляемой.

Более сильной формой управляемости является *нормализуемость* (*нормальность*). Говорят, что система является нормализуемой, если каждая координата вектора управляющих воздействий $u(t)$ в отдельности обеспечивает управляемость.

Для установления свойства нормализуемости («сильной» управляемости) для системы с r входами составляются матрицы управляемости:

$$U_i = (B_i \quad AB_i \quad A^2 B_i \ldots A^{n-1} B_i),\ i = 1..r,$$

где B_i — i-ый столбцы матрицы *B*.

Система полностью нормализуема тогда и только тогда, когда для всех $i = 1..r$, выполняются условия $\mathrm{rank} U_i = n$.

Очевидно, система управляема, если выполняется критерий нормализуемости, однако обратное утверждение неверно. При скалярном управлении (система имеет один входной сигнал) оба критерия совпадают.

Наблюдаемость. *Наблюдаемость* связана со способностью оценивать переменные состояния. Говорят, что система является наблюдаемой, если каждая переменная состояния вносит свой вклад в выходной сигнал системы.

Система является наблюдаемой тогда и только тогда, если существует конечное время T такое, что начальное состояние $x(0)$ может быть определено в результате наблюдения выходной переменной $y(t), t \in T$, при заданном управлении $u(t)$.

Рассмотрим систему с одним выходом, описываемую уравнениями:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Система является наблюдаемой, если определитель матрицы V размерности $n \times n$ отличен от нуля, т. е.:

$$\mathrm{rank} V = n, \quad (3)$$

где $V = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix}$ — *матраца наблюдаемости.*

Таким образом, для наблюдаемости необходимо чтобы матрица *V* была невырожденной.

В соответствии с критерием (3) свойство наблюдаемости целиком определяется парой матриц (*A*, *C*), поэтому часто говорят о *наблюдаемости пары* (*A*, *C*).

Для системы с несколькими выходами: C — матрица выхода размерности $(p \times n)$, а $y(t)$ — вектор выхода размерности $(p \times 1)$. Условием наблюдаемости такой системы также является невырожденность матрицы наблюдаемости *V*.

Полная наблюдаемость системы означает возможность определения состояния $x(t)$ по будущим значениям векторов $y(\tau)$, $u(\tau)$, что практически не осуществимо. Поэтому в задачах управления более важным обстоятельством является установление свойства *полной восстанавливаемости вектора* $x(t)$ по прошлым значениям векторов $y(\tau)$, $u(\tau)$.

Система (объект) называется *полностью* или *вполне восстанавливаемой*, если существует такой момент времени t_0, $(t < t_0 < \infty)$, что по данным измерений $y(\tau)$, $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_к]$ можно определить состояние $x(t)$.

Для линейных стационарных систем из свойства полной наблюдаемости следует свойство полной восстанавливаемости и наоборот.

Чувствительность и робастность систем управления

Чувствительность систем управления. Объект управления подвержен влиянию окружающей среды, старению, отсутствию точной информации о его параметрах и других объективных факторов, которые негативно сказываются на его поведении. В разомкнутой системе все эти факторы приводят к отклонению выходной переменной от желаемого значения. Замкнутая система, напротив, чувствует это отклонение, обусловленное изменениями параметров объекта, и пытается скорректировать выходную переменную.

Степень влияния изменения отдельных параметров на различные характеристики системы оценивается посредством чувствительности. *Чувствительностью* называется показатель, характеризующий свойство системы изменять режим работы при отклонении того или иного ее параметра от номинального значения. В качестве оценки чувствительности используются так называемые *функции чувствительности*, представляющие собой частные производные i-й координаты системы по вариации j-го параметра:

$$u_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0 .$$

Нулевым индексом сверху отмечено то обстоятельство, что частные производные должны приниматься равными значениям, соответствующим номинальным параметрам.

Функции чувствительности временных характеристик. Посредством этих функций чувствительности оценивается влияние малых отклонений параметров системы от расчетных значений на временные характеристики системы (переходную функцию, функцию веса и др.).

Исходной системой называют систему, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций. Этой системе соответствует так называемое *основное движение*.

Варьированной системой называют такую систему, у которой произошли вариации параметров. Движение ее называют *варьированным движением*.

Дополнительным движением называют разность между варьированным и основным движением.

Пусть система имеет передаточную функцию вида:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{Y(s)}{G(s)},$$

Управляемая величина определяется следующим образом:

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\{W(s) \cdot G(s)\}.$$

Допустим, например, вариацию претерпевает коэффициент a_j. Тогда дифференцирование управляемой величины по a_j, даст функцию чувствительности по этому параметру:

$$u_j(t) = \left(\frac{\partial y(t)}{\partial a_j}\right)^0.$$

Дополнительное движение при этом будет: $\Delta y(t) = u_j(t)\Delta a_j$, где Δa_j — вариация коэффициента a_j.

Функции чувствительности передаточных функций. Для нахождения функций чувствительности и дополнительного движения удобно использовать передаточные функции системы. В этом случае функция чувствительности определяется следующим образом:

$$u_j(t) = \left(\frac{\partial y(t)}{\partial a_j}\right)^0 = L^{-1}\left\{\left(\frac{\partial Y(s)}{\partial a_j}\right)^0\right\} = L^{-1}\left\{\left(\frac{\partial W(s)}{\partial a_j}\right)^0 \cdot G(s)\right\} = L^{-1}\{S_j(s) \cdot G(s)\}.$$

Здесь введена *функция чувствительности передаточной функции*:

$$S_j(s) = \left(\frac{\partial W(s)}{\partial a_j}\right)^0,$$

которая позволяет определить дополнительную передаточную функцию:

$$\Delta W_j(s) = S_j(s) \cdot \Delta a_j.$$

Робастность систем управления. Обычно регулятор строится на основе некоторых приближенных (номинальных) моделей объекта управления (а также приводов и датчиков) и внешних возмущений. При этом поведение реального объекта и характеристики возмущений могут быть несколько иными. Поэтому требуется, чтобы разработанный регулятор обеспечивал устойчивость и приемлемое качество системы при малых отклонениях свойств объекта и внешних возмущений от номинальных моделей. В современной теории управления это свойство называют *роба́стностью* (*грубостью*). Иначе ею можно назвать *нечувствительностью к малым ошибкам моделирования объекта и возмущений*.

Различают несколько задач, связанных с робастностью:

— *робастная устойчивость* — обеспечить устойчивость системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной;

— *робастное качество* — обеспечить устойчивость и заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной:

— *гарантирующее управление* — обеспечить заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели возмущения от номинальной (считая, что модель объекта известна точно).

Робáстное управление — совокупность методов теории управления, целью которых является синтез такого регулятора, который обеспечивал бы хорошее качество управления, если объект управления отличается от расчетного или его математическая модель неизвестна.

Системы, обладающие свойством робастности, называются *робастными* (*грубыми*) *системами*.

Обычно робастные регуляторы применяются для управления объектами с неизвестной или неполной математической моделью. В этом случае возникает *параметрическая неопределенность*, это означает, что структура модели известна, а ее параметры могут отличаться от номинальных значений.

Например, пусть объект имеет характеристическое уравнение следующего вида:

$$D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0,$$

где коэффициенты $a_0,\ldots,a_n$ точно неизвестны, но принадлежат интервалам $a\min_i \le a_i \le a\max_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Для проверки устойчивости системы необходимо проверить на устойчивость практически бесконечное число возможных характеристических полиномов.

В этом случае используют *теорему Харитонова* (приводится без доказательства), которая позволяет проверить робастную устойчивость характеристического полинома $D(s)$: полином $D(s)$ устойчив при всех возможных значениях коэффициентов тогда и только тогда, когда устойчивы четыре *полинома Харитонова*:

$$D_1(s) = a\min_0 + a\min_1 s + a\max_2 s^2 + a\max_3 s^3 + a\min_4 s^4 + a\min_5 s^5 + \ldots$$

$$D_2(s) = a\max_0 + a\max_1 s + a\min_2 s^2 + a\min_3 s^3 + a\max_4 s^4 + a\max_5 s^5 + \ldots$$

$$D_3(s) = a\min_0 + a\max_1 s + a\max_2 s^2 + a\min_3 s^3 + a\min_4 s^4 + a\max_5 s^5 + \ldots$$

$$D_4(s) = a\max_0 + a\min_1 s + a\min_2 s^2 + a\max_3 s^3 + a\max_4 s^4 + a\min_5 s^5 + \ldots$$

Задания

Задание 1. Провести эквивалентные преобразования структурной схемы, указанной в индивидуальном задании. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем.

Задание 2. Оценить управляемость и наблюдаемость исследуемой системы управления.

Задание 3. Найти функции чувствительности переходного процесса замкнутой системы к изменению параметров передаточной функции разомкнутой системы (вариации произошли для коэффициентов $k_p = k_{p0}(1+0{,}5)$, $T_p = T_{p0}(1+0{,}5)$). Определить дополнительные движения. Построить графики дополнительных движений. Построить графики переходного процесса с номинальными значениями коэффициентов и с измененными (с дополнительными движениями).

Задание 4. Провести оценку робастной устойчивости характеристического уравнения замкнутой системы, используя теорему Харитонова. При этом необходимо задать диапазоны изменения коэффициентов характеристического уравнения (например, если $a_0 = 3$, то можно задать $2{,}5 \le a_0 \le 3{,}5$ и так далее для всех коэффициентов).

Задание 5. Сделать выводы по лабораторной работе.

Примечание. Оценка управляемости и наблюдаемости, чувствительности и робастности систем управления проводится для случая, когда она устойчивая.

Контрольные вопросы.

1. Управляемость и наблюдаемость систем управления.
2. Чувствительность и робастность систем управления.

Лабораторная работа 10
Исследование характеристик типовых линейных законов управления

Цель работы: исследование влияния параметров типовых корректирующих устройств на устойчивость и качество системы управления.

Теоретические сведения

О корректирующих средствах

В теории автоматического управления можно выделить две основные задачи:

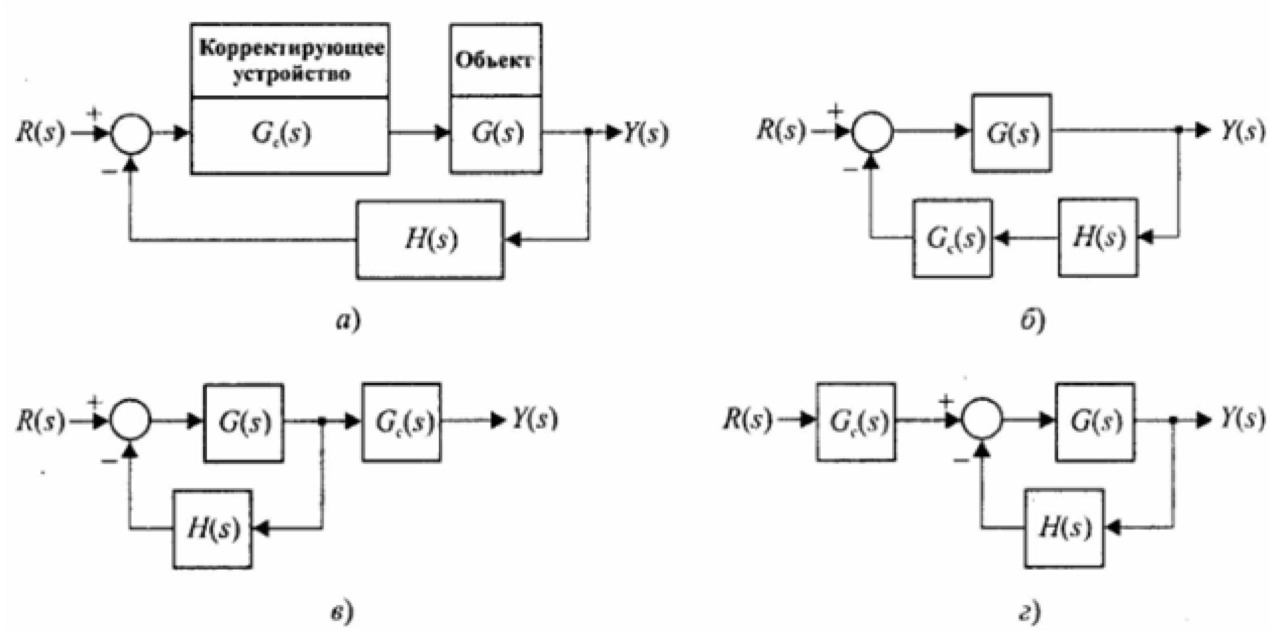
1) в заданной системе оценить переходные процессы — это *задача анализа системы управления*;

2) по заданным переходным процессам и показателям качества разработать систему — это *задача синтеза* (*коррекции*) *системы управления*.

При решении второй задачи требуется синтезировать *корректирующие устройства*, то есть выбрать их схему и параметры. Корректирующие устройства дополнительно вводятся в систему управления с целью обеспечения желаемых показателей качества и точности.

Проблема получения требуемых качественных показателей — точности в типовых режимах, запаса устойчивости и быстродействия — является единой и ни один из входящих в нее вопросов не может решаться в отрыве от других. Это делает всю проблему весьма сложной, что заставляет в некоторых случаях получать требуемое решение посредством последовательного приближения и рассмотрения многих вариантов.

Для простой одноконтурной системы управления несколько вариантов коррекции приведены на рис. 1. Выбор места размещения корректирующего устройства зависит от требований к качеству системы, от уровня мощности сигнала в различных точках системы и от имеющихся в наличии технических устройств.



Виды коррекции. (*а*) Последовательная коррекция. (*б*) Корректирующее устройство в цепи обратной связи. (*в*) Коррекция по выходу, или по нагрузке. (*г*) Коррекция по входу

Рис. 1.

Звенья последовательного типа особенно удобно применять в тех случаях, когда в системе управления используется электрический сигнал в виде напряжения постоянного тока, величина которого функционально связана с сигналом ошибки $u(t) = f(x,t)$, например, линейной зависимостью $u(t) = kx(t)$.

Звенья параллельного типа удобно применять в тех случаях, когда необходимо осуществить сложный алгоритм управления с введением интегралов и производных от сигнала ошибки.

Обратные связи находят наиболее широкое применение вследствие простоты технической реализации. Это объясняется тем обстоятельством, что на вход обратной связи поступает сигнал сравнительно высокого уровня, часто даже непосредственно с выхода системы. Другое не менее важное обстоятельство заключается в том, что корректирующие устройства различного типа оказывают различное влияние на содержащиеся в системе нелинейности. Если обратная связь охватывает участок канала управления, содержащий какую-либо нелинейность, например силы трения, люфт, зону нечувствительности и т. п., то влияние этой нелинейности на протекание процессов в системе меняется существенным образом.

Отрицательные обратные связи имеют свойство уменьшать влияние нелинейностей тех участков цепи, которые ими охватываются. Так как практически все системы содержат те или иные нелинейности, ухудшающие качество управления, то использование корректирующих устройств в виде отрицательных обратных связей, как правило, дает возможность добиться лучших результатов по сравнению с другими типами корректирующих устройств.

Аналогичным образом отрицательные обратные связи дают значительно лучший эффект в тех случаях, когда вследствие воздействия внешних факторов (время, температура и т. и.) меняется коэффициент усиления какой-либо части цепи, охватываемой отрицательной обратной связью.

Положительные обратные связи находят значительно меньшее распространение в качестве корректирующих средств по сравнению с отрицательными. Применяются в качестве корректоров ошибки.

Типовые линейные законы управления

К типовым линейным законам относят следующие:

— пропорциональный (П-закон);
— интегральный (И-закон);
— пропорционально-интегральный (ПИ-закон);
— пропорционально-дифференциальный (ПД-закон);
— пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД-закон).

Пропорциональный П-закон управления. Уравнение пропорционального закона управления имеет вид:

$$u_{\text{П}}(t) = k_P \cdot \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$ — ошибка управления; $g(t)$ и $x(t)$ — заданное и текущее значения управляемой переменной; k_P — коэффициент усиления звена.

Передаточная функция звена, реализующего П-закон:

$$W_{\text{П}}(s) = k_P.$$

Повышение коэффициента усиления регулятора приводит к увеличению быстродействия и уменьшению статической ошибки регулирования, но снижает устойчивость системы.

Дифференциальный Д-закон управления. Дифференциальное уравнение Д-закона управления:

$$u_{\text{Д}}(t) = T_{\text{Д}} \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Передаточная функция Д-звена имеет вид:

$$W_{\text{Д}}(s) = T_{\text{Д}} s,$$

где $T_{\text{Д}}$ — постоянная времени звена, определяющая интенсивность воздействия по производной.

Д-закон не может выполнять функции главного регулятора. Это связано с тем, что он реагирует, согласно дифференциальному уравнению, лишь на скорость изменения ошибки и безразличен к ее абсолютному значению в установившемся состоянии ($u_{\text{Д}} = 0$ для $\varepsilon = \text{const}$). Но в составе сложных законов управления он значительно повышает быстродействие и уменьшает динамическую ошибку управления за счет «предсказания» дальнейшего ее поведения.

Интегральный И-закон управления. Данный закон описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$T_{\text{И}} \frac{du_{\text{И}}(t)}{dt} = \varepsilon(t)$$

или

$$u_{\text{И}}(t) = \frac{1}{T_{\text{И}}} \int_{t_0}^{t} \varepsilon(t) \cdot dt,$$

где $T_{\text{И}}$ — время интегрирования. Увеличение $T_{\text{И}}$ приводит к замедлению нарастания управляющего сигнала при наличии ошибки управления.

Для И-звена передаточная функция описывается выражением:

$$W_И(s) = \frac{1}{T_И s}.$$

Этот закон называют управлением по накопленному опыту изменения ошибки. Его свойством является астатизм первого порядка, т. е. отсутствие установившейся ошибки. Это объясняется тем, что управляющий сигнал $u_И(t)$ меняется во времени до тех пор, пока $\varepsilon \neq 0$. Он как бы «ищет» такое значение управления, которое компенсирует влияние входного воздействия. Но поисковый характер И-закона определяет его основной недостаток — низкое быстродействие.

Сложные законы управления формируются путем суммирования элементарных составляющих, каждая из которых привносит свои положительные свойства и частично компенсирует недостатки других составляющих. Распространенными являются три составных типовых закона управления: ПД- ПИ- и ПИД-законы.

Построение характеристик в пакете Matlab

Задание передаточной функции звена в Matlab. Например, необходимо записать передаточную функцию вида: $W_1(s) = \dfrac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$:

W1=tf([bm bm-1 … b0],[an an-1 … a0])

Отрицательная единичная обратная связь:

Wzam=feedback(Wraz,1)

Положительная единичная обратная связь:

Wzam=feedback(Wraz,1,+1)

Если *в отрицательной обратной связи имеется звено с передаточной функцией* $W_{oc}(p)$:

Wzam=feedback(Wraz,Woc)

Если *в положительной обратной связи имеется звено с передаточной функцией* $W_{oc}(p)$:

Wzam=feedback(Wraz,Woc,+1)

Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы (ЛАЧХ и ЛФЧХ) в пакете Matlab строятся с использованием функции:

figure % функция, обеспечивающая вывод каждого графика в отдельном окне
bode(Wraz)
grid on % функция, осуществляющая построение координатной сетки на графике
Wraz — передаточная функция разомкнутой системы.

Переходной процесс замкнутой системы в пакете Matlab строится с использованием функции:

figure
step(Wzam)
grid on
Wzam — передаточная функция замкнутой системы.

Вычисление *полюсов передаточной функции* (*корней характеристического уравнения*) в пакете Matlab:

r=pole(Wzam);
Wzam — передаточная функция замкнутой системы.

График распределения корней на комплексной плоскости (*корневой годограф*):

plot(real(r), imag(r), 'o')

Задания

При выполнении задания использовать пакет Matlab.

Задание 1. Провести эквивалентные преобразования структурной схемы, указанной в индивидуальном задании. Записать передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем (без регулятора, то есть без звена с коэффициентами k_p, T_p).

Задание 2. Провести анализ устойчивости и качества замкнутой системы управления (без регулятора) (с помощью ЛАЧХ, ЛФЧХ и переходного процесса).

Задание 3. Провести оценку влияния параметров типовых законов регулирования (П и И-регуляторов) на устойчивость и качество замкнутой системы.

Задание 4. Провести оценку влияния параметров ПИД-регулятора на устойчивость и качество замкнутой системы. Определить настройку регулятора, удовлетворяющую требуемым запасам устойчивости (табл. 1).

Задание 5. Построить переходной процесс замкнутой системы при выбранных в пункте 4 параметрах ПИД-регулятора и по прямым показателям оценить качество системы.

Задание 6. Сделать выводы по лабораторной работе.

Таблица 1

Требуемые запасы устойчивости

Порядок системы, n	Запас устойчивости по модулю ΔL, дБ	Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$, град.
Статическая система		
<3	7—10	35—45
3—6	10—15	45—60
>6	>15	>60
Астатическая система 1-го порядка		
<3	10—15	45—60
3—6	15—20	60—90
>6	>20	>90
Астатическая система 2-го порядка		
<3	15—20	60—90
3—6	20—25	90—120
>6	>25	>120

Контрольные вопросы.

1. Корректирующие средства.
2. Свойства типовых линейных законов управления (П, И, Д-законов).
3. Способ формирования и достоинства сложных законов управления.

Лабораторная работа 11
Исследование импульсных систем управления

Цель работы: освоение методов анализа устойчивости и качества импульсных систем.

Теоретические сведения

Передаточные функции импульсных систем управления

Обобщенная структурная схема замкнутой импульсной системы приведена на рис. 1.

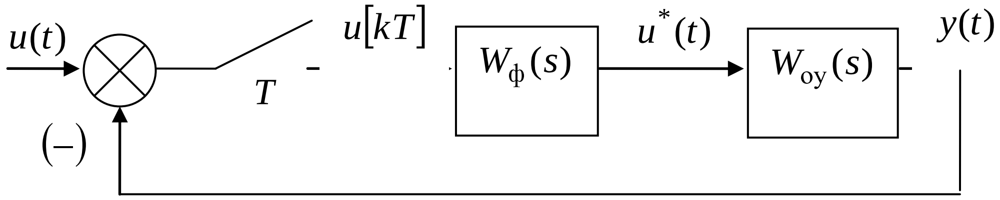


Рис. 1. Обобщенная структурная схема замкнутой импульсной системы

Передаточная функция *формирующего устройства*:

$$W_ф(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s},$$

$$W_ф(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right\}=Z\left\{1-e^{-Ts}\right\}Z\left\{\frac{1}{s}\right\}=\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}=1$$

в терминах Z-преобразований при переходе через экстраполятор сигнал не изменяется.

Тогда Z-передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{раз}(z)=Z\left\{W_ф(s)W_{оу}(s)\right\}=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}W_{оу}(s)\right\}=$$

$$=\frac{1-z^{-1}}{1}Z\left\{\frac{W_{оу}(s)}{s}\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{W_{оу}(s)}{s}\right\}.$$

Для перехода к Z-преобразованию необходимо найти обратное преобразование Лапласа от выражения:

$$L^{-1}\left\{\frac{W_{оу}(s)}{s}\right\},$$

сделать замену $t=kT$, а затем к полученному выражению применить прямое Z-преобразование.

Z-передаточная функция замкнутой системы находится по аналогии с непрерывными системами:

$$W_{зам}(z)=\frac{W_{раз}(z)}{1+W_{раз}(z)}.$$

Преобразования структурных схем импульсных систем управления

Преобразования структурных схем импульсных систем отличаются от структурных преобразований линейных непрерывных САУ.

В случае, когда *непрерывная часть состоит из параллельно включенных звеньев и на входе имеется общее импульсное звено*, то дискретная передаточная функция может быть определена суммированием дискретных передаточных функции, определенных для каждого звена в отдельности:

$$W(z)=\sum_{i=1}^{n}W_i(z).$$

Если *непрерывные звенья включены последовательно и имеется одно импульсное звено на входе*, то дискретная передаточная функция такого соединения:

$$W(z)\neq\prod_{i=1}^{n}W_i(z).$$

В этом случае дискретная передаточная функция $W(z)$ должна определяться Z-преобразованием от произведения передаточных функций непрерывной части системы:

$$W(z)=Z\left\{\prod_{i=1}^{n}W_i(s)\right\}.$$

Нельзя переносить сумматор или любое непрерывное звено через импульсный элемент. Непрерывную часть можно преобразовывать по известным правилам преобразования структурных схем непрерывных САУ.

Для схем, состоящих из импульсных элементов, когда на входе каждого непрерывного звена стоит свой импульсный элемент, справедливы все правила преобразования структурных схем непрерывных систем.

Построение переходных процессов импульсных систем управления

Аналогом дифференциального уравнения для импульсной системы является *разностное уравнение*. Разностное уравнение связывает решетчатую функцию и ее разности до некоторого порядка.

Для записи разностного уравнения необходимо представить передаточную функцию замкнутой системы в следующем виде:

$$W(z)=\frac{b_m z^m+\ldots+b_1 z^1+b_0}{a_n z^n+\ldots+a_1 z^1+a_0}.$$

Домножим числитель и знаменатель $W(z)$ на z^{-n}. В результате получим:

$$W(z)=\frac{b_m z^{m-n}+\ldots+b_1 z^{1-n}+b_0 z^{-n}}{a_n+\ldots+a_1 z^{1-n}+a_0 z^{-n}}=\frac{Y(z)}{X(z)},$$

где $Y(z)$ — Z-изображение выходного сигнала; $X(z)$ — Z-изображение входного сигнала.

Тогда по определению передаточной функции можно записать:

$$\left(a_n+\ldots+a_1 z^{1-n}+a_0 z^{-n}\right)Y(z)=\left(b_m z^{m-n}+\ldots+b_1 z^{1-n}+b_0 z^{-n}\right)X(z)$$

или

$$a_n Y(z)+\ldots+a_1 z^{1-n}Y(z)+a_0 z^{-n}Y(z)=b_m z^{m-n}X(z)+\ldots+b_1 z^{1-n}X(z)+b_0 z^{-n}X(z).$$

Определяя обратные Z-преобразования от каждого слагаемого этого выражения, получим разностное уравнение:

$$a_n y[k]+\ldots+a_1 y[k+1-n]+a_0 y[k-n]=$$
$$=b_m x[k+m-n]+\ldots+b_1 x[k+1-n]+b_0 x[k-n].$$

Примечание. Используется Z-преобразование функции смещенной в сторону запаздывания (*теорема запаздывания*):

$$Z\{f[(k-m)T_0]\} = z^{-m}F(z).$$

Тогда *выходной сигнал* (*переходной процесс*):

$$y[k] = \frac{1}{a_n}[\ldots - a_1 y[k+1-n] - a_0 y[k-n] + b_m x[k+m-n] + \ldots + b_1 x[k+1-n] + b_0 x[k-n]]$$

.

Уравнения состояния импульсных систем управления

Общий вид уравнений состояния для многомерной линейной дискретной системы с постоянными параметрами выглядит как

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$

где вектор состояния $\mathbf{x}(k)$ имеет размерность $(n \times 1)$, вектор входа $\mathbf{u}(k)$ — размерность $(r \times 1)$,а вектор выхода $\mathbf{y}(k)$ — размерность $(p \times 1)$. Следовательно, матрица коэффициентов системы $\mathbf{A}$, матрица входа $\mathbf{B}$ и матрица выхода $\mathbf{C}$ имеют размерности, соответственно, $(n \times n)$, $(n \times r)$ и $(p \times n)$. Матрица $\mathbf{D}$, характеризующая непосредственную связь между входом и выходом системы, имеет размерность $(p \times r)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}_{n\times 1},$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{1\times n}.$$

Установим связь между уравнениями состояния и передаточной функцией дискретной системы с одним входом и одним выходом. По аналогии с непрерывным случаем , при условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ имеем:

$$\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U(z).$$

Найдем z-преобразование уравнения выхода :

$$Y(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + DU(z).$$

Подстановка в последнее уравнение $\mathbf{X}(z)$ дает:

$$Y(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(z),$$

откуда следует, что система имеет передаточную функцию

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D.$$

Решение уравнений состояния импульсных систем управления

Группа разностных уравнений первого порядка, описывающих модель в переменных состояния для линейной стационарной дискретной системы, имеет вид:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k). \qquad (1)$$

Для решения этих уравнений можно воспользоваться итерационным методом.

Считая, что $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{u}(k)$ известны, можно вычислить (1) для $k = 0$, затем для $k = 1$, затем для $k = 2$ и т.д.:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0),$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1),$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) =$$

$$= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(n-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1).$$

Следовательно, решение уравнений (1) можно выразить в общем виде:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}(k). \qquad (2)$$

Общее решение уравнений (1) можно получить также с использованием z-преобразования. Для этого представим (1) в развернутом виде:

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + \ldots + a_{1n}x_n(k) + b_{11}u_1(k) + \ldots + b_{1r}u_r(k),$$

$$\vdots$$

$$x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + \ldots + a_{nn}x_n(k) + b_{n1}u_1(k) + \ldots + b_{nr}u_r(k).$$

Затем найдем z-преобразование этих уравнений:

$$z[X_1(z) - x_1(0)] = a_{11}X_1(z) + \ldots + a_{1n}X_n(z) + b_{11}U_1(z) + \ldots + b_{1r}U_r(z),$$
$$\vdots$$
$$z[X_n(z) - x_n(0)] = a_{n1}X_1(z) + \ldots + a_{nn}X_n(z) + b_{n1}U_1(z) + \ldots + b_{nr}U_r(z).$$

Те же уравнения, но в матричной форме:

$$z[\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}(0)] = \mathbf{AX}(z) + \mathbf{BU}(z),$$

или

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(z).$$

Отсюда выразим $\mathbf{X}(z)$:

$$\mathbf{X}(z) = z[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{BU}(z). \qquad (3)$$

Применив к (3) обратное z-преобразование, получим тот же результат, что в (2), поэтому матрица перехода $\mathbf{\Phi}(k)$ для уравнений состояния дискретной системы имеет вид:

$$\mathbf{\Phi}(k) = \mathfrak{Z}^{-1}(z\,[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}) = \mathbf{A}^k.$$

Тогда решение (2) можно записать как

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{\Phi}(n-1-k)\mathbf{Bu}(k).$$

Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления

В теории функций комплексной переменной преобразования, в процессе которого одна переменная заменяется некоторой функцией от новой переменной, а одна область комплексной плоскости отображается в другую, называется *конформным преобразованием*.

Конформное преобразование $z = e^{Ts}$ отображает левую полуплоскость плоскости s в область, ограниченную окружностью единичного радиуса на плоскости z (рис. 1). При этом мнимая ось плоскости s отображается в саму окружность.

Действительно, пусть $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Тогда:

$$z_{1,2} = e^{T(\alpha \pm j\beta)} = e^{\alpha T}(\cos\beta T \pm j\sin\beta T).$$

При этом $|z_{1,2}| = e^{\alpha T}$. Для значений $\alpha < 0$ (что соответствует корням $s_{1,2}$, лежащим в левой полуплоскости плоскости s) $|z_{1,2}| < 1$, что соответствует корням, лежащим внутри круга единичного радиуса плоскости z. Если $\alpha = 0$, т. е. если корни $s_{1,2}$ располагаются на мнимой оси плоскости s, то корни $z_{1,2}$ попадают на окружность единичного радиуса плоскости z.

Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления: для устойчивости импульсной замкнутой системы необходимо и достаточно чтобы корни характеристического уравнения по модулю были <1, т. е. $|z_i| < 1$ (лежали внутри окружности единичного радиуса на z плоскости).

Для того чтобы получить возможность использования для исследования устойчивости импульсных систем всех критериев устойчивости непрерывных систем, необходимо отобразить круг единичного радиуса с плоскости z на левую полуплоскость некоторой новой переменной. Для этого можно воспользоваться преобразованием из теории функций комплексной переменной:

$$z = \frac{1+(T/2)\upsilon}{1-(T/2)\upsilon} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right).$$

Тогда окружность единичного радиуса на z плоскости отображается в левую полуплоскость υ, а внешняя часть окружности — в правую полуплоскость υ. Такое преобразование называется *билинейным преобразованием*.

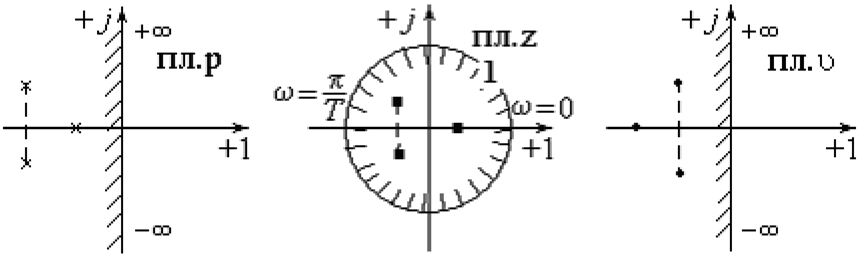


Рис. 1. Изображение корней характеристического уравнения на различных плоскостях

Для нахождения корней характеристического полинома $D(s)$ в Mathcad имеется встроенная функция **polyroots(v)**.

Вектор v будет иметь вид:

$$v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$D(s) := T1\cdot T2\cdot s^3 + (T1 + T2)\cdot s^2 + (1 + k1\cdot k2\cdot kp\cdot Tp)\cdot s + k1\cdot k2\cdot kp$$

$$v(Tp, kp) := D(s) \text{ coeffs }, s \rightarrow \begin{pmatrix} kp\cdot k1\cdot k2 \\ 1 + kp\cdot k1\cdot k2\cdot Tp \\ T1 + T2 \\ T1\cdot T2 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v(Tp, kp))$$

Вектор r содержит корни характеристического уравнения.

Частотный критерий устойчивости Найквиста импульсных систем управления

Годограф АФЧХ разомкнутой импульсной системы строится путем формальной замены $z = e^{j\omega T}$ в передаточной функции $W_{раз}(z)$.

Если разомкнутая система устойчивая, то для устойчивости замкнутой импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы годограф АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты ω от 0 до $\omega_s/2$ не охватывал точку (–1;*j*0) (частота дискретизации $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$).

Если разомкнутая система неустойчивая, и ее передаточная функция $W_{\text{раз}}(z)$ имеет g неустойчивых корней, то замкнутая система будет устойчивой, если годограф разомкнутой системы охватывает точку (–1;*j*0) в положительном направлении $g/2$ раз.

Оценка точности импульсных систем управления

Оценка точности непрерывных систем в установившемся режиме основана на теореме о конечном значении из преобразования Лапласа. Аналогичные результаты для импульсных систем можно получить на основании теоремы о конечном значении из Z-преобразования. Эта теорема гласит, что:

$$\lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z),$$

при условии, что предел в левой части существует. Последнее возможно только тогда, когда все полюсы $E(z)$ расположены внутри единичной окружности, за исключением единственного полюса $z=1$.

Z-преобразование сигнала ошибки равно (рис. 1):

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z) - \frac{G(z)}{1+G(z)}R(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)}.$$

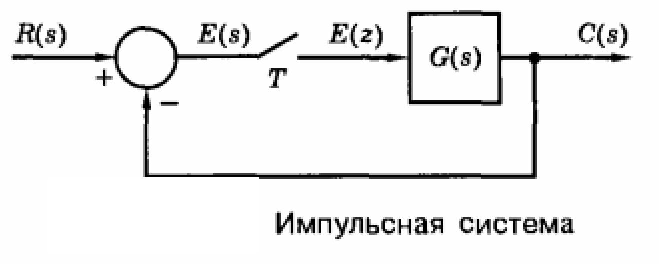


Рис. 1.

По теореме о конечном значении установившаяся ошибка определяется выражением:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{1+G(z)}. \quad (1)$$

Рассмотрим сначала установившуюся ошибку, вызванную ступенчатым воздействием. В этом случае $R(z) = \dfrac{Az}{z-1}$, где A — величина ступенчатого воздействия. Тогда:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z\to 1}\frac{Az}{1+G(z)} = \frac{A}{1+\lim\limits_{z\to 1} G(z)} = \frac{A}{1+K_p}, \quad (2)$$

Заметим, что если $G(z)$ имеет по крайней мере один полюс при $z=1$, то $K_p = \infty$ и установившаяся ошибка при ступенчатом входном сигнале равна нулю. Число полюсов передаточной функции разомкнутой системы при $z=1$ называется *типом системы*. Поэтому если система имеет тип 1 или выше, то при ступенчатом входном воздействии установившаяся ошибка равна нулю. В противном случае ошибка отлична от нуля и определяется выражением (2).

Если входной сигнал имеет вид линейной функции $r(t) = At$, то $R(z) = \dfrac{ATz}{(z-1)^2}$. Согласно (1), установившаяся ошибка равна:

$$e_{ss}(kT) = \lim_{z \to 1} \frac{ATz}{(z-1)+(z-1)G(z)} = \lim_{z \to 1} \frac{AT}{(z-1)G(z)} = \frac{A}{K_v}.$$

Если передаточная функция разомкнутой системы имеет два или более полюсов в точке $z = 1$, то коэффициент K_v равен бесконечности и установившаяся ошибка при линейном входном воздействии будет равна нулю. Иначе говоря, система типа 2 или выше будет отрабатывать воздействие $r(t) = At$ без установившейся ошибки.

Полученные выражения для установившейся ошибки применимы и в случае, когда в системе на рис. 1 после квантователя находится цифровой регулятор с передаточной функцией $D(z)$. Тогда надо $G(z)$ заменить на $D(z)G(z)$.

Установившаяся ошибка обозначена как $e_{ss}(kT)$, чтобы подчеркнуть, что такое значение она имеет только в моменты квантования. Между моментами квантования установившаяся ошибка неизвестна и не может быть вычислена с помощью Z-преобразования, поскольку последнее связывает вход и выход системы только в моменты квантования.

Задания

Задание 1. Найти Z-передаточные функции разомкнутой и замкнутой импульсных систем. При этом предполагается, что импульсный элемент является первым звеном в разомкнутой цепи системы.

Задание 2. Построить переходные процессы непрерывной и импульсной систем и оценить качество управления по прямым показателям качества (перерегулирование, время регулирования, колебательность). Оценить влияние периода дискретизации T на устойчивость и качество импульсной системы.

Задание 3. В пакете Matlab Simulink промоделировать работу непрерывной и импульсной систем управления. Импульсный элемент моделируется блоком **Zero-Order Hold** из библиотеки **Discrete**, параметром является период дискретизации T. Сравнить графики выходных сигналов $y(t)$ непрерывной и импульсной систем. Оценить влияние периода дискретизации T на устойчивость и качество импульсной системы.

Задание 4. Построить модель импульсной системы управления в пространстве состояний. В качестве проверки правильности составленных уравнений состояния необходимо определить передаточную функцию замкнутой системы с помощью матриц A, B, C и сравнить с исходной, полученной в пункте 1. Если они не совпадают, следовательно, уравнения состояния составлены неверно.

Задание 5. Решить уравнения состояния импульсной системы управления итерационным методом и с использование Z-преобразования. Построить график выходного сигнала $y(t)$ при единичном ступенчатом входном воздействии и сравнить его с графиком переходного процесса замкнутой системы.

Задание 6. Используя корневой критерий и частотный критерий устойчивости Найквиста оценить устойчивость импульсной системы.

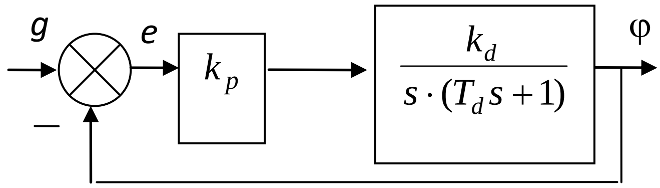
Задание 7. Оценить точность импульсной системы в установившемся режиме: определить установившиеся ошибки системы на ступенчатое воздействие $R(z)=\dfrac{Az}{z-1}$ и на воздействие, имеющее вид линейной функции $R(z)=\dfrac{ATz}{(z-1)^2}$.

Задание 8. Сделать выводы по лабораторной работе.

Варианты.

Вариант № 1.

Структурная схема системы автоматического управления:



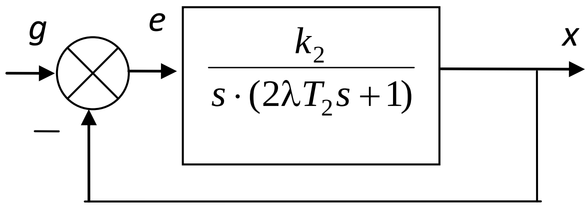
Постоянные параметры системы:

$k_p = 5$; $T_d = 0{,}05$.

№ по списку	1	6	11	16	21
k_d	0,2	0,65	1	1,5	2

Вариант № 2.

Структурная схема системы автоматического управления:



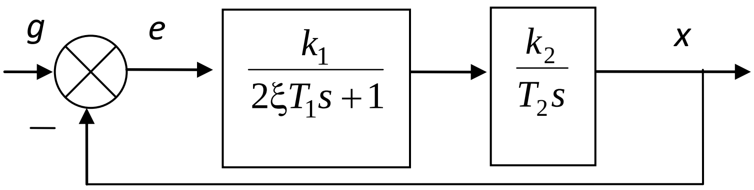
Постоянные параметры системы:

$k_2 = 2$; $T_2 = 0{,}3$.

№ по списку	2	7	12	17	22
λ	0	0,1	0,25	0,4	0,5

Вариант № 3.

Структурная схема системы автоматического управления:



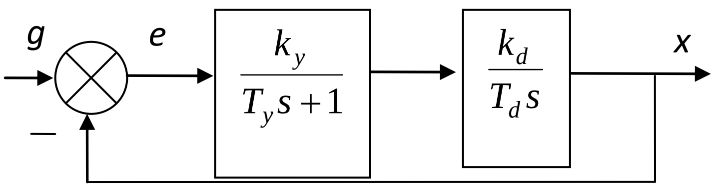
Постоянные параметры системы:

$k_1 = 1$; $k_2 = 0{,}2$; $T_1 = 0{,}07$; $\xi = 0{,}5$.

№ по списку	3	8	13	18	23
T_2	0,1	0,25	0,5	0,75	1

Вариант № 4.

Структурная схема системы автоматического управления:

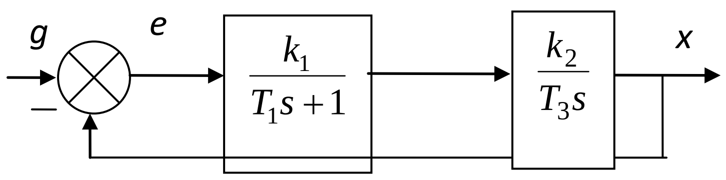


Постоянные параметры системы:
$k_y = 1$; $T_y = 0{,}01$; $T_d = 0{,}5$.

№ по списку	4	9	14	19	24
k_d	1	2	3	4	5

Вариант № 5.

Структурная схема системы автоматического управления:



Постоянные параметры системы:
$T_3 = 0{,}05$; $k_1 = 3$; $k_2 = 1$.

№ по списку	5	10	15	20	25
T_1	0,2	1,1	2,2	3,1	4

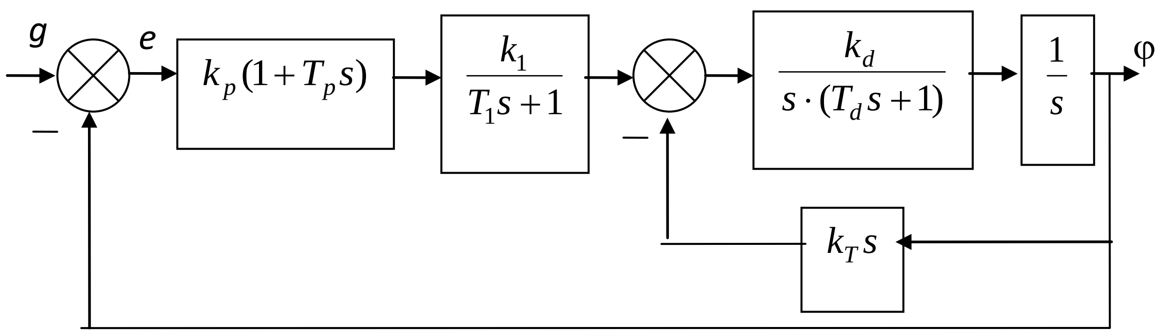
Контрольные вопросы.

1. Типы сигналов и их преобразование. Решетчатые функции.
2. Достоинства и классификация дискретных систем управления.
3. Виды импульсной модуляции.
4. Передаточные функции импульсных систем управления.
5. Преобразования структурных схем импульсных систем управления.
6. Построение переходных процессов импульсных систем управления.
7. Уравнения состояния импульсных систем управления.
8. Решение уравнений состояния импульсных систем управления.
9. Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления.
10. Частотный критерий устойчивости Найквиста импульсных систем управления.
11. Оценка точности импульсных систем.

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант № 1.

Структурная схема системы автоматического управления:

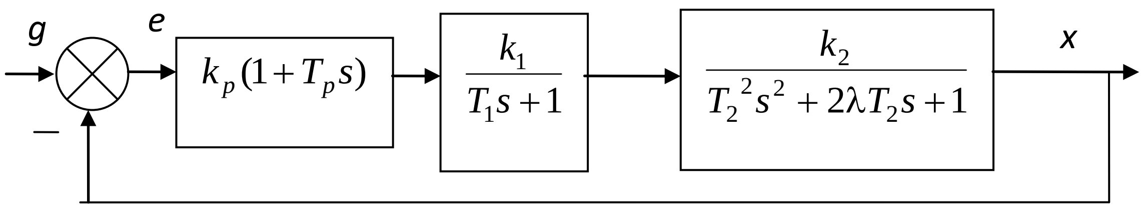


Постоянные параметры системы:
$k_1 = 1$; $k_d = 5$; $T_1 = 0{,}005$; $T_d = 0{,}05$.

№ по списку	1	6	11	16	21
k_T	0,2	0,65	1	1,5	2

Вариант № 2.

Структурная схема системы автоматического управления:

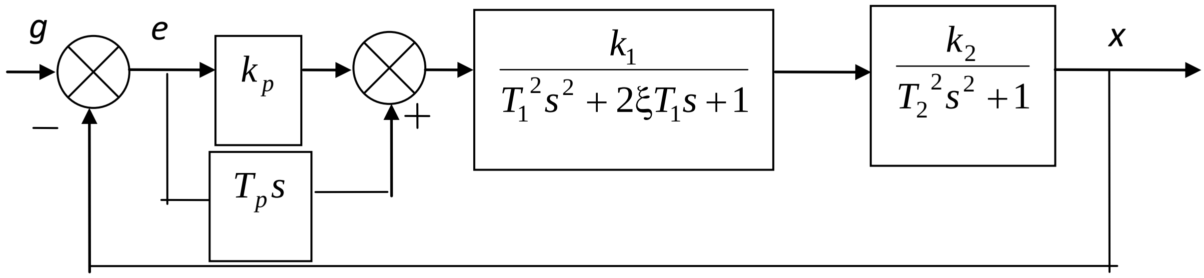


Постоянные параметры системы:
k_1 = 5; k_2 = 2; T_1 = 0,01; T_2 = 0,3.

№ по списку	2	7	12	17	22
λ	0	0,1	0,25	0,4	0,5

Вариант № 3.

Структурная схема системы автоматического управления:

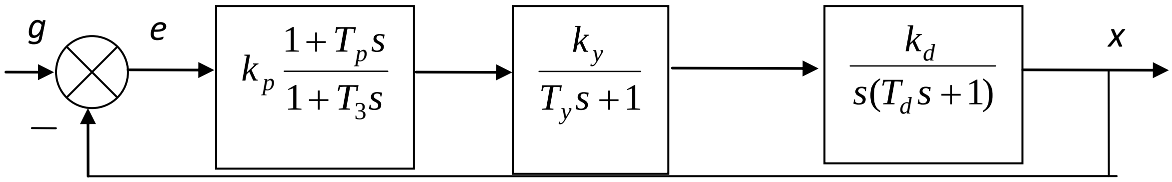


Постоянные параметры системы:
k_1 = 100; k_2 = 2; T_1 = 0,07; ξ = 0,5.

№ по списку	3	8	13	18	23
T_2	0,1	0,25	0,5	0,75	1

Вариант № 4.

Структурная схема системы автоматического управления:

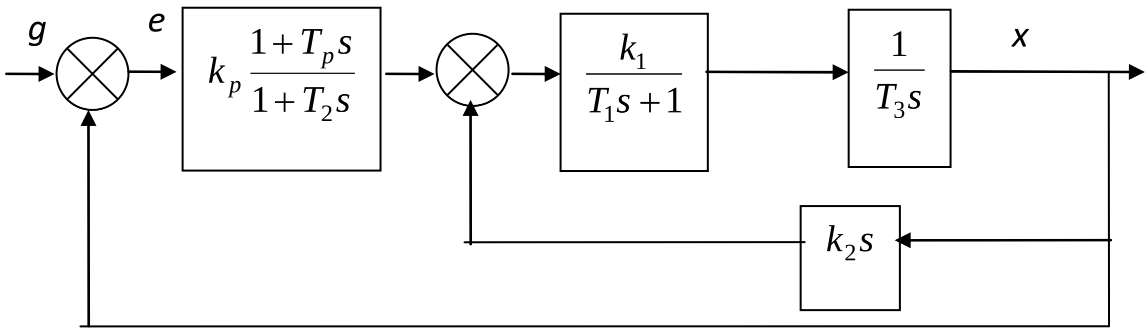


Постоянные параметры системы:
$k_y = 1$; T_y = 0,01; T_d = 0,5; T_3 = 0,03.

№ по списку	4	9	14	19	24
k_d	1	2	3	4	5

Вариант № 5.

Структурная схема системы автоматического управления:



Постоянные параметры системы:
T_2 = 0,01; T_3 = 0,05; k_1 = 30; k_2 = 10.

№ по списку	5	10	15	20	25
T_1	0,2	1,1	2,2	3,1	4

Итоговые вопросы по дисциплине

Вопросы по дисциплине

Раздел 1. Введение в теорию автоматического управления. Устойчивость линейных непрерывных систем управления

Основные понятия теории автоматического управления (ТАУ) Принципы управления
Классификация систем управления История автоматического управления
Статический и динамический режимы работы систем управления Передаточная функция системы управления
Типовые управляющие и возмущающие воздействия Понятие временных характеристик Понятие частотных характеристик
Типовые позиционные динамические звенья 1-го и 2-го порядков Типовые интегрирующие звенья и дифференцирующие звенья Эквивалентные преобразования структурных схем
Математические модели систем в переменных состояния (в пространстве состояний) Методы решения уравнений состояния Связь передаточной функции и модели системы в переменных состояния
Корневой критерий устойчивости Алгебраический критерий устойчивости Гурвица
Критерий устойчивости Михайлова Критерий устойчивости Найквиста Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам Понятие запаса устойчивости

Раздел 2. Оценка качества и точности управления

Прямые методы оценки качества управления Косвенные методы оценки качества управления
Передаточная функция системы управления по ошибке Установившаяся ошибка системы управления с обратной связью Коэффициенты ошибок
Методы повышения точности управления Инвариантность систем управления Комбинированное управление
Управляемость и наблюдаемость систем управления Чувствительность и робастность систем управления

О корректирующих средствах Последовательные корректирующие звенья Параллельные корректирующие звенья Обратные связи Типовые линейные законы управления

Раздел 3. Дискретные системы управления. Импульсные системы управления

Типы сигналов и их преобразование Достоинства и классификация дискретных систем управления Решетчатые функции. Конечные разности решетчатых функций Виды импульсной модуляции
Передаточные функции импульсных систем управления Преобразования структурных схем импульсных систем управления Построение переходных процессов импульсных систем управления Уравнения состояния импульсных систем управления Решение уравнений состояния импульсных систем управления
Корневой критерий устойчивости импульсных систем управления Частотный критерий устойчивости Найквиста импульсных систем управления Оценка точности импульсных систем управления Синтез импульсных систем управления