ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Вычислительные системы и информационная безопасность»

Практикум
по дисциплине

«Теория информации»

Авторы
Ганжур М.А,
Ганжур А.П.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Практикум предназначен для студентов очной формы обучения направлений 10.03.01, 10.05.02 «Информационная безопасность»

Авторы

ст. преподаватель кафедры «Вычислительные системы и информационная безопасность»
Ганжур М.А,
ст. преподаватель кафедры «Вычислительные системы и информационная безопасность»
Ганжур А.П.

Оглавление

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫМ МЕТОДОМ 4

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 8

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО КОДИРОВАНИЯ.. 8

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3 13

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОДА ХЕММИНГА 13

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 17

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОДА 17

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫМ МЕТОДОМ

1. Цель и задачи работы

Цель работы: практическое ознакомление с особенностями преобразования первичных сигналов в дискретные и их восстановления при передаче непрерывных сообщений дискретно-аналоговым методом.

Задачи работы: усвоение понятий, связанных с квантованием по времени непрерывных функций, отображающих сообщения; выполнение расчетов, связанных с разложением периодических сигналов ограниченного спектра в ряд Котельникова; проведение графоаналитических расчетов, связанных с интерполяцией исходной непрерывной функции по ее дискретным значениям.

2. Теоретические вопросы, которые необходимо изучить перед выполнением работы

1. Сущность процесса квантования непрерывного сигнала по времени.
2. Спектральное содержание непрерывного сигнала произвольной формы и спектральные характеристики импульсного переносчика информации.
3. Содержание прямой (выбор интервала дискретности) и обратной (восстановление непрерывной функции по значениям ее отсчетов) задач передачи непрерывных сообщений с помощью дискретных сигналов.
4. Назначение и свойства функции отсчетов.
5. Использование теоремы Котельникова для определения периодов квантования непрерывных функций

3. Программа и порядок выполнения работы

3.1. Исследование процесса квантования непрерывного сигнала по времени.

Для заданных непрерывных функций провести исследования, связанные с их квантованием по времени. Содержание задания. В качестве исследуемых выбираются две (периодическая и непериодическая) функции времени и строятся их графики с различными значениями шага изменения аргумента. В качестве периодических функций удобно использовать тригонометрические зависимости типа смешанных синусоид (косинусоид) или других функций на основе гармонических составляющих. В качестве непериодических можно использовать, например, обратные функции тангенса или котангенса, а также кусочные функции без разрывов.

Примечание. В случае использования обратных тригонометрических функций следует произвести условную замену аргумента, т.к. эта функции не являются зависимыми от времени.

С достаточно малым шагом изменения аргумента строятся графики выбранных функций, отображающие их свойства. Увеличивая шаг изменения аргумента (что идентично изменению шага квантования по времени), необходимо получить значения функции (в виде соответствующего графического изображения), не отображающие их свойства (периодичность, амплитудные и нулевые значения, изменения знаков производных и др.). Зафиксировать значения частоты квантования, которая (по субъективному мнению) еще достаточная для наблюдения основных сигналов при их восстановлении по дискретным значениям изменения аргумента. Установить частоту квантования, вдвое превышающую максимальную частоту повторения периодического сигнала (описываемого периодической функцией). Воспроизвести интерполированный график функции для этого случая. Результаты занести в отчет. Сделать выводы.

3.2. Исследование свойств функции отсчетов.

Функция отсчетов принадлежит к классу функций вида:

$$S(\tau)=\frac{\sin 2\pi\cdot F\cdot\tau}{2\pi\cdot F\cdot\tau},$$

где F - максимальная частота спектра передаваемого сигнала;

$\tau = t - \dfrac{k}{2F}$, k= 1, 2, 3, ... -аргумент, характеризующий изменения времени.

В математическом плане функция отсчетов может рассматриваться как непрерывная и записываться следующим образом: $f(y)=\dfrac{\sin y}{y}$.

Задавая значения y в диапазоне возможных изменений с учетом периодичности, построить график функции $f(y)$ и зафиксировать его вид в отчете. График должен представлять симметричную функцию относительно оси ординат.

Замечание. В машинном эксперименте значение $y=0$ необходимо заменять малыми, но не равными нулю значениями аргумента. График построить для результатов, отображаемых тремя-четырьмя полуволнами в пространстве положительных и отрицательных значений аргумента.

Для построения графика функции отсчетов введем обозначения $\tau = t - \dfrac{k}{2F}$,а начало координат определим в точку отсчета $t = \dfrac{k}{2F}$. При этом τ становится равным нулю. Значение F принимаем равным некоторому постоянному значению, а k присваиваем значение, равное 1.

Изменяя в пределах от $\dfrac{k}{2F} = \dfrac{1}{2F}$ до $\pm\left(\dfrac{3k}{2F} = \dfrac{3}{2F}\right)$ получаем график функции отсчетов. Перенести график в отсчет и обозначить особые точки, относящиеся к значениям аргумента и функции. Определить временные интервалы. Рассмотреть влияние изменений значений F и k на вид функции. Результаты занести в отчет.

Убедиться в следующих свойствах функции отчетов:

- при изменении значений k= 1, 2, 3, ... получается семейство функций отсчетов, сдвинутых друг относительно друга на интервалы времени *Δt*, равные $\pm\dfrac{1}{2F}$;

- в моменты времени $t=\dfrac{k}{2F}$ функция отсчетов становится максимальной и равной единице;

- моменты времени $t=\dfrac{k+\lambda}{2F}$, где λ = 1, 2, 3, . функция отсчетов обращается в ноль;

- ширина "главного лепестка" равна $\dfrac{1}{F}$.

Следует помнить, что функция вида $\dfrac{\sin y}{y}$ представляет собой описание реакции идеального фильтра нижних частот с граничной частотой $\overline{\omega}_c = 2\pi F$ на единичное импульсное воздействие (дельта - функцию).

3.3. Графоаналитический способ интерполяции исходной непрерывной функции (определение воспроизводящей функции).

Известно, что аналитическая запись теоремы Котельникова при отображении сигнала конечным числом дискретных отсчетов представляется выражением:

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} x\left(\frac{k}{2F}\right)\frac{\sin\left[2\pi F(t-\frac{k}{2F})\right]}{2\pi F(t-\frac{k}{2F})}$$

где $\bar{x}(t)$ - любая функция времени, обладающая ограниченным спектром;

F – верхняя граница спектра сигнала;

k – текущая целочисленная переменная;

$N = \dfrac{T}{\Delta t} + 1 = 2FT + 1$ - число отсчетов, приближенно описывающих сигнал $x(t)$, Δt - дискретность отсчетов.

Для представления функции с помощью ряда Котельникова необходимо.

1) Определить значение предельной частоты спектра сигнала;

2) определить интервал дискретности функции в соответствии с теоремой Котельникова;

3) найти значения коэффициентов ряда, являющихся значениями функции в моменты выборок;

4) построить график воспроизводящей функции.

Перечисленные процедуры можно продемонстрировать следующим примером. Пусть задана некоторая функция:

$$S\ (t) = \frac{F}{2} - E\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E}{2}\sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Необходимо представить эту функцию в виде ряда Котельникова и построить график воспроизводящей функции.

1) Анализ показывает, что заданная функция является периодической с периодом. $T = 2\pi/\omega$ и максимальным значением круговой частота гармонического сигнала в спектре $\Omega = 2\omega$. Таким образом, предельное значение частоты спектра будет:

$$F = \frac{1}{\tau} = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{2\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\pi}$$

2) Интервал дискретности функции согласно теореме Котельникова принимает вид:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{k}{2\omega}\right)\frac{\sin 2\omega(t - k\frac{\pi}{2\omega})}{2\omega(t - k\frac{\pi}{2\omega})}$$

Приближенное (усеченное) значение будет:

$$\bar{S}(t) = \sum_{k=-1}^{4} S\left(k\frac{T}{4}\right)\frac{\sin\pi(4\frac{t}{T} - k)}{\pi(4\frac{t}{T} - k)}$$

3) Коэффициенты ряда являются значениями функции в моменты выборок. Моменты выборок соответствуют значениям: $k = -\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ что соответствует… $t_3 = -3\frac{\pi}{2\omega}$; $t_2 = -2\frac{\pi}{2\omega}$; $t_1 = -\frac{\pi}{2\omega}$; $t_0 = 0$; $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$; $t_2 = \frac{2\pi}{2\omega}$; …

Моменты времени (выборок) подставляются в полное выражение для ряда Котельникова и вычисляются значения функции в эти моменты времени:

$$S\ (0) = \frac{E}{2} + E\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E}{2} - \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}707\,E$$

В силу периодичности функции ее мгновенные значения будут повторяться. Обозначая

$S\left(-\frac{k\pi}{2\omega}\right) = a_{-k}$; $S\left(\frac{k\pi}{2\omega}\right) = a_k$, можно записать:

$\ldots a_{-4} = a_0 = a_4 = a_8 = \ldots = 1{,}707E,$
$\ldots a_{-3} = a_1 = a_5 = a_9 = \ldots = 0{,}707E,$
$\ldots a_{-2} = a_2 = a_6 = a_{10} = \ldots = 0{,}290\ E,$
$\ldots a_{-1} = a_3 = a_7 = a_{11} = \ldots = -0{,}707\ E.$

4. Для построения графика воспроизводящей функции, учитывая ее периодичность, достаточно использовать 4-5 мгновенных значений этой функции (допустим $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3$). Способ построения (воспроизведения) заключается в том, что для каждого момента отсчета строится функция отсчета с амплитудой "главного лепестка", равной значению коэффициента ряда $S\left(\frac{k}{2\omega}\right)$. В рассматриваемом примере и $S\left(k \cdot \frac{T}{4}\right) = a_k$, где $k = -1, 0, 1, 2, 3$ моментами отсчета будут:

$t_1 = 0 - \Delta t;\ t_2 = 0;\ t_3 = 0 + \Delta t;\ t_4 = 0 + 2\Delta t;\ t_5 = 0 + 3\Delta t.$

Учитывая, что $\Delta t = \frac{1}{2F} = \frac{T}{4}$, можно пространство, отведенное на графике под один период функции, разделить на четыре части и считать граничные точки этих частей моментами отсчетов. Производя графическое или аналитическое сложение функций отсчета в одинаковые моменты времени с удобным для этого шагом и последующую интерполяцию, получим воспроизводящую функцию. Вся работа производится с использованием ПЭВМ в среде MatLab. В последующем сравниваются графические изображения исходной и воспроизводящей функций. Результаты вычислений и сравнения, а также выводы по результатам эксперимента заносятся в отчет.

4. Содержание отчета

Отчет о выполненной работе должен включать следующие материалы:

-содержание заданий;
-использованные расчетные соотношения и пояснения к ним;
-результаты расчетов в виде цифр, таблиц, графиков;
-выводы по анализу результатов проделанной работы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО КОДИРОВАНИЯ

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

Цель работы: получение практических навыков статистического (эффективного) кодирования при передаче информации по дискретному каналу и проведения оценки качества составленных кодов

Задачи работы:

- усвоить назначение эффективного кодирования и понять сущность соответствующих теоретических предпосылок;
- разобраться в сущности методик эффективного кодирования, их достоинствах и недостатках;

- провести выполнение всех этапов кодирования и оценить их результаты.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ИЗУЧИТЬ ПЕРЕД ВЫПОЛНЕНИЕМ РАБОТЫ

1. Классификацию и назначение основных способов кодирования информации, передаваемой по каналам связи.
2. Задачи кодирования сообщений.
3. Принципы эффективного кодирования в канале без помех.
4. Сущность и этапы получения кодов Шеннона-Фэно.
5. Сущность кодирования по методике Хаффмена.

3. ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1 Практическое усвоение основных принципов статистического кодирования.

Для исследования предлагается некоторый алфавит, в котором определены вероятности появления букв в текстовой информации c_i. Задание устанавливает возможности нескольких вариантов задания вероятностей c_i. Необходимо рассмотреть случай, когда буквы предложенного алфавита равновероятны. Весь алфавит кодируется с помощью бинарного кода, и определяются параметры такого кода. Дается оценка данным кодограмм в сравнении с теоретическим пределом Шеннона.

Для случая, когда первичный алфавит включает небольшое число букв, необходимо провести декорреляцию сообщений методом укрупнения, перейти к новому алфавиту и задаться условными вероятностями появления введенных ансамблей. Вычислив, оценить эффект, обусловленный укрупнением алфавита.

Порядок выполнения этого задания можно продемонстрировать следующим примером.

Предположим, что первичный алфавит состоит всего из двух букв a_1 и a_2, имеющих следующие статистические характеристики:

$$\rho(a_1) = \frac{3}{4}; \rho(a_2) = \frac{1}{4}; \rho(a_1/a_1) = \frac{1}{3};$$

$$\rho(a_2/a_1) = \frac{1}{3}; \rho(a_1/a_2) = 1; \rho(a_2/a_2) = 0.$$

Эффект укрупнения можно оценить относительным увеличением количества информации

$$\rho = \frac{J_A - J_a}{J_a} = \frac{[h(a) + h(a)_{\max}]}{2h(a)} - 1,$$

где J_A - количество информации, содержащейся в укрупненном сообщении длиной n_a;

J_a - количество информации, содержащейся в первичном сообщении той же длительности;

$h(a)_{max}$ - значение энтропии источника на букву при отсутствии корреляции;

$h(a)$ - условная энтропия на букву, равная реальной первичной энтропии источника.

Значения $h(a)_{max}$и $h(a)$ можно вычислить, используя следующие соотношения:

$$h(a)_{\max} = -\sum_{i=1}^{2} \rho(a_i)\cdot \log \rho(a_i)\,;$$

$$h(a) = h(a_1 / a_2) = -\sum_{i=1}^{2} \rho(a_i) \sum_{j=1}^{2} \rho(a_j / a_i)\cdot \log \rho(a_j / a_i)$$

В соответствии с приведенными выражениями

$h(a)=$
$-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1\cdot\log 1+0\cdot\log 0\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right)$ *=0,685;*

$h\ (a)_{max}=-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$ *=0,815;*

Отсюда, $\rho=\frac{J_A-J_a}{J_a}=\frac{\left[h(a)+h(a)_{\max}\right]}{2h(a)}-1$ *=0,095*,т.е. декорреляция, проведенная путем укрупнения алфавита из двух букв при заданных условиях, обеспечила выигрыш в количестве информации на 9,5%.

3.2. Построение кода Шеннона-Фэно.

Пусть каждая буква предложенного в п. 3.1. алфавита соответствует сообщению источника, а вероятности их появления в текстовой информации - вероятностям сообщений (ρ_i). Считаем, что сообщения независимые (корреляция отсутствует). Необходимо произвести кодирование сообщений по методике Шеннона-Фэно.

Код строится следующим образом: буквы алфавита сообщений вносятся в таблицу в порядке убывания вероятностей. Затем они разделяются на две группы так, чтобы суммы вероятностей в каждой из групп были бы по возможности одинаковы. Всем буквам верхней половины в качестве кодового символа присваивается 0, а всем нижним - 1. Каждая из полученных групп, в свою очередь, разбивается на две подгруппы с одинаковыми суммарными вероятностями и т.д. Процесс повторяется до тех пор, пока в каждой группе не останется по одной букве. Заголовок таблицы выглядит следующим образом:

Таблица 2.1

Сообщения	Вероятности	Ступени разбиения							Кодограммы
		I	II	III	IV	V	VI	…	
A_1	$\rho(A_1)$			…					11
A_2	$\rho(A_1)$								10…
⋮	⋮								
A_m	$\rho(A_1)$								…

После заполнения таблицы вычислить энтропию сообщений:

$$H(A) = -\sum_{j=1}^{m} \rho(A_j) \cdot \log \rho(A_j)$$

и среднюю длину кодограмм

$$\bar{n} = \sum_{j=1}^{m} \rho\left(Z_j\right) \cdot n_j$$

($\rho(Z_j)$ - вероятность j- ой кодограммы, n_j - длина этой кодограммы).

3.3. Построение кода Хаффмена.

Для того же задания, которое рассматривалось в п.3.2, построить код по методике Хаффмена.

Для двоичного кода методика сводится к следующему. Буквы алфавита сообщений выписываются в основной столбец в порядке убывания вероятностей. Две последние буквы объединяются в одну вспомогательную букву, которой приписывается суммарная вероятность. Вероятность букв, не участвующих в объединении, и полученная суммарная вероятность опять располагаются в порядке убывания в дополнительном столбце, и две последние из них снова объединяются. Процесс продолжается до тех пор, пока не останется единственная вспомогательная буква с вероятностью, равной единице.

Заголовок таблицы выглядит следующим образом.

Таблица 2.2

Сообщения	Вероятности (основной столбец)	Вспомогательные столбцы					Кодограммы
		I	II	III	IV	...	

Для составления кодовых комбинаций, соответствующих каждому сообщению, необходимо проследить пути переходов сообщений по строкам и столбцам таблицы.

Проследить пути переходов удобно с помощью кодового дерева. Из начальной точки направляются две ветви, отображающие вероятности, занесенные в последний столбец. При этом ветви с большой вероятностью присваивается символ 1, а с меньшей - 0. Такое последовательное ветвление продолжается до тех пор, пока оно не окончится вероятностью каждой буквы. Фрагмент гипотетического дерева изображен на рис. 2.1.

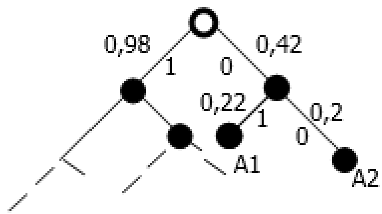

Рис. 2.1. Фрагмент кодового дерева.

Для проведенного кодирования определить среднюю длину кодограмм и сравнить ее со значениями, полученными в п. 3.2 и теоретическим пределом, соответствующим энтропии источника

Сделать выводы и внести их в отчет.

3.4. Содержание отчета.

1. Исходные данные, расчеты и выводы, выполненные по заданию п. 3.1
2. Таблица кодирования, расчеты, оценки и выводы для кодов Шеннона-Фэно.
3. Таблица кодирования, кодовое дерево, расчеты и сравнительные оценки для кодов Хаффмена.
4. Общие выводы по проделанной работе и результатам

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОДА ХЕММИНГА

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

Цель работы: получение навыков составления кодов Хемминга и оценки его обнаруживающих и корректирующих свойств.

Задачи работы:

- практическое усвоение методики кодирования цифровой информации "по Хеммингу" для заданных условий, определяющих свойства кода;
- рассмотрение основных этапов реализации алгоритмов обнаружения и исправления ошибок на приемной стороне линии связи;
- проведение оценки эффективности кодов Хемминга.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ' ИЗУЧИТЬ ПЕРЕД ВЫПОЛНЕНИЕМ РАБОТЫ

1. Основные понятия и принципы помехоустойчивого кодирования.
2. Классификация помехоустойчивых кодов.
3. Показатели качества помехоустойчивых кодов.
4. Основные этапы составления систематических исправляющих кодов.
5. Алгоритм обнаружения и исправления ошибок на приемной стороне цифровой линии связи.

3. ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Исследование процесса формирования кода Хемминга.

Исследуется процесс формирования кода Хемминга, исправляющего одиночные ошибки (искажения). Задача формирования заключается в определении количества, положения и содержания контрольных разрядов передаваемой N-разрядной кодограммы.

Так как ставится задача исправления одиночных ошибок, то необходимо определить минимальное кодовое расстояние, обеспечивающее выполнение заданных условий. Оно определяется избыточностью кода, под которой понимают числа контрольных разрядов n_kк числу информационных $n_и$:$r=\frac{n_k}{n_и}$.

Кроме этого действуют следующие соотношения:

$$d_1 \geq 2t+1;\ N=n_k+n_и,$$

гдеd_1- минимальное кодовое расстояние для кода, обеспечивающего исправление i ошибок.

Для исследования задается информационное слово, содержащее n_nразрядов.

Следует определить число контрольных разрядов. Кроме этого определяется расположение этих разрядов в кодовом слове. Номера контрольных разрядов определяются из соотношения:$N_k = 2^{i-1}$(i = 1, 2, 3, …).

Составить таблицу расположения контрольных разрядов, отметив их крестиком:

Таблица 3.1

Номера разрядов	…	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Контрольные разряды	…		X				x		x	x

Построение кода состоит в разбиении разрядов слова на взаимно пересекающиеся подмножества, причем каждому подмножеству ставится в соответствие один контрольный разряд проверки на четность.

Подмножества формируются на основе анализа номера разряда при записи в двоичной форме счисления. Все разряды кодового слова, имеющие единицу в первом разряде своего номера, включаются в первое подмножество, во втором - во второе подмножество и т.д. Затем подсчитывается число единиц в разрядах, относящихся к каждому подмножеству, и в соответствующий контрольный разряд записывается 1, если это число нечетно, и 0 - если четно. В табл. 3.2. иллюстрируется разбиение разрядов на указанные выше подмножества для 7-разрядного слова.

Таблица 3. 2

Номером разрядов кодового слова		Подмножества		
десятичн.	двоичн.	1-е	2-е	3-е
1	001	*		
2	010		*	
3	011	*	*	
4	100			*
5	101	*		*
6	110		*	*
7	111	*	*	*

Построить таблицу разбиения на подмножества для заданного кода в соответствии с его разрядностью и определить подмножества.

Заполнить значения контрольных разрядов кодового слова и полностью представить его в форме, соответствующей выдачи в линию связи на передающем конце. Результаты занести в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Разряды слова	…	8	7	6	5	4	3	2	1
Контрольные разряды	…	*				*		*	*
Информационные разряды	…	-	0	1	0	-	1	-	-
1-е подм.	…		0		0		1		1
2-е подм.	…		0	1			1	0	
3-е подм.	…								
К-е подм.	…								
Слово в коде Хемминга	…	…	0	1	0	…	1	0	1

Следует заметить, что заполнение значений контрольных и информационных разрядов в табл. 3.3 произведено без привязки к конкретному коду.

3.2. Исследование процесса декодирования с формированием опознавателя номера искаженного разряда.

Метод Хемминга предусматривает вычисление на приемной стороне серии проверочных равенств и в формировании по результатам этих провероккомбинации цифр, указывающих номер разряда, который содержит искаженное значение (опознавателя). Сущность этой процедуры заключается в следующем.

Первый (справа) разряд опознавателя заполняется результатом Σ_i первого проверочного суммирования по *mod 2* значений тех разрядов кола, которые входят в 1-е подмножество. Второй разряд опознавателя формируется тем же порядком, но суммируются значения разрядов кода, попадающие во 2-е подмножество и т.д. Если расположить результаты суммирования последовательно в порядке их формирования, то получится двоичный код того разряда, где произошло искажение. Результат, состоящий из всех нулей, соответствует отсутствию искажений в кодограмме. Запись производится следующим образом:

$$\Sigma_1 = Z_1 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \oplus \ \ldots$$
$$\Sigma_2 = Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_6 \oplus \ \ldots$$
$$\Sigma_3 = Z_4 \oplus Z_5 \oplus Z_7 \oplus \ \ldots$$
$$\ldots$$

Номер разряда с искажением будет соответствовать результатам суммирования, записанным в порядке $Z_1\ Z_2 Z_3$ **....** Например, для шестиразрядного закодированного по Хеммингу двоичного числа 101101 процедура формирования опознавателя будет выглядеть следующим образом:

а) для случая отсутствия искажений

$$\Sigma_1 = Z_1 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \oplus \ = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$
$$\Sigma_2 = Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_6 \oplus \ = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$$
$$\Sigma_3 = Z_4 \oplus Z_5 \oplus Z_7 \oplus \ = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

б) для случая искажения в 5-м разряде

$$\Sigma_1 = Z_1 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \oplus \ = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$
$$\Sigma_2 = Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_6 \oplus \ = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$$
$$\Sigma_3 = Z_4 \oplus Z_5 \oplus Z_7 \oplus \ = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Результат $\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1 = 101_2 = 5_{10}$, т.е. указывается автоматически, что в пятом разряде информация искажена, и ее необходимо заменить на противоположную (инвертировать). Для получения в п. 3.1 кода необходимо задаться появлением искажения в одном из разрядов и показать процедуру автоматического определения номера искаженного разряда. Это необходимо проделать для нескольких вариантов искажений, для случая отсутствия искажений, а также убедиться, что в случае одновременного искажения в двух разрядах избыточность исследуемого кода недостаточная.

3.3. Оценка эффективности помехоустойчивости кода.

Для формируемого и исследуемого кода необходимо определить:

- число разрешенных кодограмм, позволяющих передавать сообщения в линию связи N_p;
- коэффициент избыточности r;

- коэффициент отсутствия избыточности *p*.

Данные перенести в отчет.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет о выполненной работе должен включать следующие материалы:

- исходные данные, связанные с формированием кода Хемминга;
- текстовые, цифровые и табличные материалы, характеризующие этапы формирования кода на передающем конце линии связи;
- те же материалы, раскрывающие процесс вычисления и использования опознавателя;
- результаты, вычисленные по заданию п. 3.3.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОДА

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

Цель работы: практическое усвоение этапов и процедур формирования простейших циклических кодов с обнаружением и коррекцией одиночных ошибок.

Задачи работы:

- усвоение подхода, при котором процессы исследования кодовых формирований интерпретируются действиями с двоичными многочленами;
- выполнение расчетов, позволяющих определять исходные позиции для формирования кодовых посылок;
- рассмотрение этапов формирования образующих матриц для неразделимого и разделимого циклического ряда.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ИЗУЧИТЬ ПЕРЕД ВЫПОЛНЕНИЕМ РАБОТЫ

1. Назначение и классификация циклических кодов
2. Сущность операций над двоичными многочленами, представленными в различных формах.
3. Порядок выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления над двоичными числами по модулю 2 (mod 2).
4. Порядок определения числа контрольных разрядов в корректирующих кодах.
5. Представление в математической форме процесса искажения цифровых кодограмм в линиях связи

6. Назначение образующих матриц и их использование при формировании корректирующих кодов.

3. ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Исследование свойств циклического кода.

Основное свойство циклических кодов, определивших их название, состоит в следующем: любое n-разрядное кодовое слов А = a_{n-1}, a_{n-2},...,a_1, a_0, будучи
циклически сдвинутыми на один разряд, создаст новое слово A_1 = a_{n-2}, a_{n-1},...,a_0, a_{n-1} , принадлежащее этому же циклическому коду.
В процессе исследования будем полагать, что в линии связи кодовые слова выдаются или принимаются последовательно - разряд за разрядом, а прием и слов происходит, начиная со старшего разряда, который при записи и изображении слов будет располагаться слева.
Известно, что для исследования циклических кодов используется прием, когда каждому двоично-кодированному n-разрядному слову ставится в соответствие полином (n-l)-й степени переменной *x.* При этом коэффициентами полинома являются значения соответствующих разрядов слова. Таким образом, кодовые слова будут представляться полиномами.
Например, слово A=101101 представляется полиномом пятой степени

$P_A(x)=1\cdot x^5 + 0x^4 + 1x^5 + 1x^2 + 0x^1 + 1x^0 = x^5 + x^3 +x + 1.$

Циклический сдвиг словаАдает новое слово $B = \overline{A}$ =011011.

$P_B(x) = x^4 + x^3 +x+ 1.$

Задание. Записать в виде полиномов 3-4 шестиразрядные двоичные кодовые слова, а также значения этих слов после осуществления их циклического сдвига на 2-3 разряда влево и вправо.
Известно, что в качестве разрешающих слов в циклическом коде используются только такие слова, представляющие полиномы которых $F(x)$делятся без остатка на некоторый заранее выбранный (образующий, порождающий) полином$P(x)$.
Если после искажения отдельных разрядов слова образуется другое слово, представляющий полином которого $F^*(x)$не будет делиться без остатка на $P(x)$, то фиксируется факт ошибки. Этим проявляется обнаруживающее свойство кода.
Кодирование информационной части слова, представленной полиномом $G(x)$происходит в соответствии с соотношением:

$F(x) = G(x)\, x^k \oplus R(x),$

где $R(x)$- остаток от деления $G(x)x^k$ наx^k сдвигается наk разрядов влево. В освободившиесяk младших (контрольных) разрядов записывается остаток $R(x)$ от $G(x)x^k$ на $P(x)$, который и представляет контрольную часть слова.

Пример кодирования слова А= 1010010 при помощи полинома третьей степени

$P(x) = x^3 + x + 1.$

В соответствии с описанным выше правилом получаем:

$G_A(x) = x^6 + x^4 + x;$

$G_A x^3 = x^9 + x^7 + x^4;$

$R_A(x) = x+ 1;$

$F_A(x) = G_A(x)\, x^3 \oplus R_A(x) = x^9 + x^7 + x^4 + x + 1.$

Получение контрольной части слова, соответствующей полиному $R(x)$, практически осуществляется путем последовательного вычитания (сложения) по модулю 2 (*mod2*) из сдвинутой информационной части слова другого слова, соответствующего порождающему полиному $P(x)$. Процесс нахождения контрольной части слова для рассмотренного выше примера показан в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Информационная часть слова	Контрольная часть слова
1 0 1 0 0 1 0 ⊕ 1 0 1 1	0 0 0
0 0 0 1 0 1 0 ⊕ 1 0 1 1	0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 ⊕ 1 0	0 0 0 0 1 1 0 1 1

В соответствии с процедурой, описанной выше, процесс формирования кодового слова записывается следующим образом:

$G_A(x)\, x^3$ 1010010 000

$R_A(x)$ 0000000 011

$F_A(x)$ 1010010 011

Все другие свойства циклического кода, в частности, его избыточность и корректирующая способность полностью определяются степенью и видом порождающего полинома $P(x)$. К такому полиному предъявляются определенные требования, изучаемые в теоретической части курса. Не- которые простые многочлены,

используемые в качестве порождающих, а также соответствующие им двоичные
комбинации, десятичные эквиваленты и количества различных остатков от деления приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Простой многочлен	$x + 1$	x^2+x+1	x^3+x+1	x^3+x^2+1	x^4+x+1	x^4+x^3+1	x^5+x^2+1	x^5+x^3+1	x^6+x+1	...
Двоичн. комбинация	11	111	1011	1101	10011	11001	100101	101001	1000011	...
Десятичн. эквивалент.	3	7	11	13	19	25	37	41	67	...
Количество разл. остатков	1	3	7	7	15	15	31	31	63	...

Количество возможных различных остатков определяет корректирующую способность кода. Для простых циклических кодов, образуемых делением полиномов, соответствующих разрешенным кодовым комбинациям, на порождающий полином степени q количество различных остатков равно $2^q - 1$. Это равно числу возможных значащих разрешенных кодовых комбинаций для n разрядных информационных слов ($N= 2^n-1$).

Задание. При выполнении этого раздела лабораторной работы необходимо провести исследования, связанные с выполнением следующих заданий:

- задаться некоторым кодом (число разрядов в этом коде указывает преподаватель) и дать характеристику информационным возможностям этого кода;
- выбрать из табл. 4.2 соответствующий порождающий полином и для 2-3 значений кода проделать операции формирования циклического кода;
- для случая, когда рассматривается одно возможное искажение кода, записать полиномы помех $E_i(x)$ в виде кодов и полиномов, представляемых одночленами $E_\partial(x) = x^\partial$ (∂ -номер искаженного разряда или номер значащего члена в кодограмме помехи).

В процессе передачи кодограммы взаимодействуют с векторами помех $E_i(x)$, в результате чего возникают многочлены:

$\underline{y_{ij} = Z_j(x) \oplus E_i(x).}$

На приемной стороне комбинации $y_{ij}(x)$ подвергаются обработке, которую можно рассматривать как деление на порождающий полином *P (x).* Если при делении образуется остаток, комбинация считается запрещенной. Наличие остатка позволяет обнаружить ошибку, а вид остатка - определить номер (или номера) искаженного разряда, т.е. исправить ошибку. Так как рассматривается двоичная система, то разрядность двоичных эквивалентов остатков всегда на единицу меньше разрядности делителя (принята такая форма записи).

Например, остаток от деления на P (x) = x3 + x2 + 1 = 1101 любого разрешимого многочлена 6-й степени с искаженным 1-м разрядом определяется следующим образом. "Искаженный" многочлен делится на порождающий полином, что записывается как

$$\frac{y_{ij}(x)}{P(x)} = \frac{Z_j(x)}{P(x)} \oplus \frac{E_i(x)}{P(x)}.$$

В этом выражении $Z_j(x)$ (разрешенный код, сформированный на передающей стороне) делится на $P(x)$ без остатка. Поэтому остатки будут определяться вторым слагаемым $\frac{E_i(x)}{P(x)}$. Покажем нахождение остатков для любого разрешенного многочлена 6-й степени при $P(x) = x^3 + x^2 + 1 = 1101$.

$$R_0(x) = \frac{E_0(x)}{P(x)} = \frac{1}{x^3 + x^2 + 1} = \frac{0000001}{1101} = 001;$$

$$R_1(x) = \frac{E_1(x)}{P(x)} = \frac{x}{x^3 + x^2 + 1} = \frac{0000010}{1101}\ 010;$$

$$R_2(x) = \frac{E_2(x)}{P(x)} = \frac{x^2}{x^3 + x^2 + 1} = \frac{0000100}{1101}\ 100.$$

Задание. Остальные остатки необходимо вычислить самостоятельно и результаты работы занести в отчет. Кроме этого, необходимо вычислить остатки для одного из значений кода, которым задавались ранее, при значении *P (x)*, с помощью которого формировался циклический код.

3.2. Исследование способов формирования образующей матрицы.

Существует несколько способов формирования образующей матрицы циклического кода.

Наиболее простым способом считается умножение $n_и$ линейно независимых многочленов сообщений $A_j(x)$ на порождающий многочлен. Для выполнения этой операции достаточно произвести n_u-lциклических сдвигов многочлена *P(x).*

Рассмотрим пример, иллюстрирующий это утверждение. Пусть необходимо передать $N_p=16$ сообщений циклическим кодом, способным исправить одиночные искажения. По известному значению $n_и = log_2 N_и = 4$.

Учитывая, что степень порождающего многочлена должна удовлетворять неравенству:

$2^{nk} - 1 \geq n$,

где $n = n_и + n_k$, а $n_k = 3$ (из условия исправления одной ошибки), вычисляем степь порождающего многочлена. Так как число одиночных ошибок в семиразрядном коде ($n_и + n_k = n = 7$) равно семи, то в табл. 4.2 находим простой многочлен, способный образовать 7 различных остатков. Таких многочленов два, оба 3-й степени. Выбрать можно любой. Допустим, что выбран

$P(x) = x^3 + x^2 + 1 = 1101.$

Образующая матрица должна состоять из четырех строк - произведений порождающего многочлена на четыре линейно-независимых сообщения. В качестве таких сообщений удобно выбрать строки единичной матрицы:

$A_1(x) = 1 = 0001$; $A_2(x) = x = 0010$; $A_3(x) = x^2 = 0100$; $A_4(x) = x^3 = 1000$.

Произведения этих сообщений на $P(x)$ будут:

$Z_1(x) = A_1(x) \cdot P(x) = 1 \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^3 + x^2 + 1 = 0001101;$

$Z_2(x) = A_2(x) \cdot P(x) = x \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^4 + x^3 + x = 0011010;$

$Z_3(x) = A_3(x) \cdot P(x) = x^2 \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^5 + x^4 + x^2 = 0110100;$

$Z_4(x) = A_4(x) \cdot P(x) = x^3 \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^6 + x^5 + x^3 = 1101000.$

Эти произведения можно рассматривать как результат трех последовательных сдвигов порождающего многочлена.

Образующую матрицу записывают таким образом, чтобы порождающий многочлен занял нижнюю строку:

$$M_{7,4} = \begin{Vmatrix} 1101000 \\ 0110100 \\ 0011010 \\ 0001101 \end{Vmatrix}$$

Суммируя все сочетания строк образующей матрицы, определяются остальные разрешенные многочлены. Например:

$Z_5(x) = Z_1(x) \oplus Z_2(x) = 0010111.$

Задание.
а) закончить выполнение примера, определив все разрешенные многочлены для рассматриваемого кода;
б) выполнить процедуры формирования образующей матрицы для случая, когда в качестве $P(x)$ выбран полином $x^3 + x + 1$;
в) определить тип полученного кода с точки зрения выделения в явном виде информационных символов.
Другим способом формирования образующей матрицы является процедура, включающая в себя следующие операции:
1) составляется исходная единичная матрица сообщений
$\|A_{n_и, n_k}\| = \|1 n_и\| = \|1_4\|$;
2) строки единичной матрицы умножаются на $x^{n_k} = x^3$ и получается матрица промежуточных комбинаций:
$\|A_{(n_и + n_k), n_и}\| = \|A_{7,4}\|$;
3) производится деление строк этой матрицы на порождающий многочлен
$P(x) = x^3 + x^2 + 1 = 1101$ (результаты такого деления в работе получены ранее) и составляется дополнительная матрица остатков:
$\|R_{n_k, n_и}\| = \|R_{3,4}\|$;
4) складываются соответствующие строки промежуточной и дополнительной матриц, в результате чего получается образующая матрица:
$\|M_{n, n_и}\| = \|M_{7,4}\|$
Задание. а) выполнить перечисленные выше операции для условий рассуживаемого примера и получить образующую матрицу;
б) определить для этого случая тип получаемого кода с точки зрения выделения в явном виде информационных символов

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчетные материалы должны содержать следующее:
1) формулировки заданий на исследования и исходные данные для проведения расчетов;
2) расчетные соотношения, расчеты и их результаты по всем заданиям;
3) пояснения, выводы.