ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Вычислительные системы и информационная безопасность»

Практикум

по дисциплине

«Компьютерная геометрия и графика»

Авторы
Айдинян А.Р.,
Герасименко А.Н.,
Панасенко Н.Д.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

«Практикум» предназначен для студентов заочной формы обучения направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» по дисциплине «Компьютерная геометрия и графика»

Авторы

доцент, к.т.н., доцент
кафедры «Вычислительные системы и информационная безопасность»
Айдинян А.Р.

ст. преподаватель кафедры «Вычислительные системы и информационная безопасность»
Герасименко А.Н.

ассистент кафедры «Вычислительные системы и информационная безопасность»
Панасенко Н.Д.

Оглавление

1. ЗАЛИВКА И ШТРИХОВКА ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЕЙ

Задача заливки областей заключается в заполнении заданным цветом некоторой замкнутой части экрана, ограниченной контуром.

В общем случае процесс заливки состоит из двух фаз:

- подготовка контура, то есть составление списка его ребер или изображение контура на визуализированной поверхности (экране);

- собственно, заполнение области внутри контура требуемым цветом.

Во многих прикладных задачах контур области, подлежащий заливке, описан совокупностью пикселов. В этом случае широко используется алгоритм для заливки областей с “затравочным” пикселом, разработанный Смитом.

При инициализации алгоритма координаты “затравочного” пиксела, находящегося внутри замкнутой области, заносятся в стек.

Собственно, алгоритм заключается в следующем.

1. Координаты одного «затравочного» пиксела извлекаются из стека. Этот пиксел становится текущим пикселом (ТП).

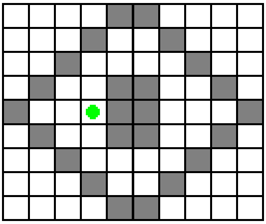
2. Закрашиваются пикселы строки левее и правее «затравочного» пиксела вплоть до контура заливаемой области.

3. Находятся отрезки, принадлежащие соседним строкам (выше и ниже текущей строки), которые содержат, по крайней мере, одну точку (пиксел), имеющую общую сторону хотя бы с одним пикселом текущей строки. Координаты одного из пикселов каждого соседнего отрезка заносятся в стек. Эти пикселы будут служить очередным “затравочным” пикселом.

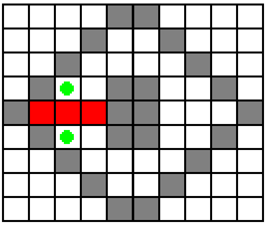
4. Описанный выше процесс повторяется, начиная с пункта 1, до тех пор, пока вся область не окажется закрашенной (стек опустеет).

Алгоритм штриховки отличается тем, что не все пикселы, лежащие внутри многоугольника, необходимо закрашивать. Например, при чересстрочной горизонтальной штриховке можно закрашивать пикселы, лежащие на нечетных или четных строках развертки. Описанный выше алгоритм заливки может быть легко модифицирован для этой задачи.

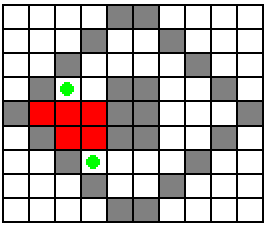
Пример. Пошаговая реализация заливки для заданного замкнутого контура. Затравочный пиксел имеет координаты (4,5).



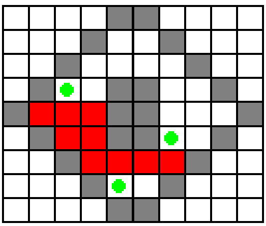
Шаг 0: Стек = (4,5)
Шаг 1: ТП = (4,5) Стек = 0
Шаг 2: Заливка (4,5) – (2,5)
Шаг 3: Стек = (3,4), (3,6)



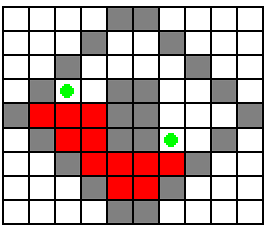
Шаг 1: ТП = (3,6) Стек = (3,4)
Шаг 2: Заливка (3,6) – (4,6)
Шаг 3: Стек = (3,4), (4,7)



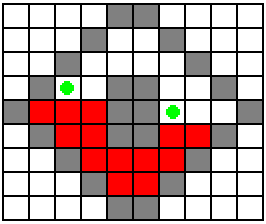
Шаг 1: ТП = (4,7) Стек = (3,4)
Шаг 2: Заливка (4,7) – (7,7)
Шаг 3: Стек = (3,4), (7,6), (5,9)



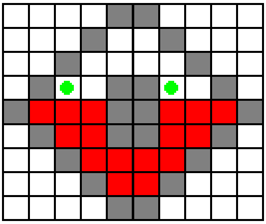
Шаг 1: ТП = (5,9) Стек = (3,4), (7,6)
Шаг 2: Заливка (5,9) – (6,9)
Шаг 3: Стек = (3,4), (7,6)



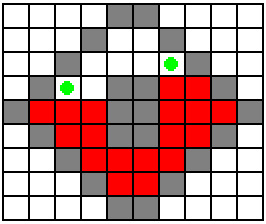
Шаг 1: ТП = (7,6) Стек = (3,4)
Шаг 2: Заливка (7,6) – (8,6)
Шаг 3: Стек = (3,4), (7,5)



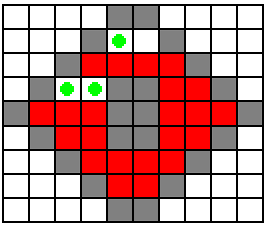
Шаг 1: ТП = (7,5) Стек = (3,4), (7,5)
Шаг 2: Заливка (7,5) – (9,5)
Шаг 3: Стек = (3,4), (7,4)



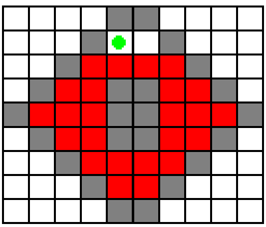
Шаг 1: ТП = (7,4) Стек = (3,4)
Шаг 2: Заливка (7,4) – (8,4)
Шаг 3: Стек = (3,4), (7,3)



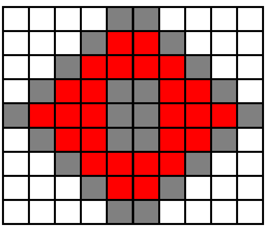
Шаг 1: ТП = (7,3) Стек = (3,4)
Шаг 2: Заливка (7,3) – (4,3)
Шаг 3: Стек = (3,4), (5,2), (4,4)



Шаг 1: ТП = (4,4) Стек = (3,4), (5,2)
Шаг 2: Заливка (4,4) – (4,3)
Шаг 3: Стек = (3,4), (5,2)



Шаг 1: ТП = (5,2) Стек = (3,4)
Шаг 2: Заливка (5,2) – (6,2)
Шаг 3: Стек = (3,4)



Шаг 1: ТП = (3,4) Стек = (пусто)
Шаг 2: Заливка —
Шаг 3: Стек = (пусто)
Заливка завершена

2. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2.1. Понятие преобразований координат

В компьютерной графике чаще всего используются двухмерная и трехмерная системы координат. В общем случае система координат — *n*-мерная.

Пусть известны координаты точки A в системе координат R1. Определение координат точки A в другой системе координат R2 — задача преобразования координат. В общем случае размерности систем координат не совпадают. Пусть система координат R1 имеет размерность n, а R2 — N. Если координаты точки A в системе координат R1 равны $k_1, k_2, ..., k_n$, то для преобразования координат из системы R1 в R2 можно записать

$$K_1 = f_1(k_1, k_2, ..., k_n),$$

$$K_2 = f_2(k_1, k_2, ..., k_n),$$

$$...$$

$$K_N = f_N(k_1, k_2, ..., k_n),$$

где $K_1, K_2, ..., K_N$ — координаты точки A в системе координат R2, $f_1, f_2, ..., f_N$ — в общем случае нелинейные функции.

В случае, если $n \neq N$, осуществить однозначное преобразование зачастую не удается. Например, по двумерным координатам невозможно вычислить трехмерные.

При $n = N$ также возможны случаи, когда невозможно однозначно осуществить преобразование координат.

По виду функций f_i различают линейные и нелинейные преобразования. Если все функции f_i являются линейными относительно аргументов k_j, то преобразования являются линейными.

Аффинные преобразования — частный случай линейных преобразований. Линейные преобразования являются аффинными при условии $n = N$.

Линейные преобразования наглядно записываются в матричной форме

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Более удобным является представление всех коэффициентов преобразования в одной матрице. С этой целью вводятся однородные координаты, то есть к декартовым координатам добавляется одна дополнительная координата, обычно равная 1. В случае, если дополнительная координата не равна 1, то при переходе от обобщенных координат к декартовым необходимо все координаты поделить на последнюю координату.

Например, точка в обобщенной системе координат имеет координаты (5, 4, 3, 2), то в декартовой системе координат получим (2.5, 2, 1.5).

Обратный переход является неоднозначным. Например, точка в декартовой системе координат имеет координаты (2, 4, 3), то в обобщенной системе координат имеется бесконечное множество вариантов — (2, 4, 3, 1), (4, 8, 6, 2), (2a, 4a, 3a, a), где a — произвольное число не равное 1.

При использовании обобщенных координат преобразование примет вид

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Аффинные преобразования на плоскости

Зададим двумерную систему координат $0xy$. Аффинное преобразование координат (x, y) описывается формулами

$$X = Ax + By + C,$$

$$Y = Dx + Ey + F,$$

где A, B, C, D, E, F — константы,

X, Y — можно трактовать как координаты в новой системе координат.

Обратное преобразование также является аффинным.

$$x = A'X + B'Y + C',$$

$$y = D'X + E'Y + F',$$

где A', B', C', D', E', F' — константы.

Аффинные преобразования удобно записывать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}.$$

Однако для того, чтобы учесть константы C и F в одной матрице необходимо перейти к однородным координатам

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матричная запись дает возможность наглядно представить несколько преобразований, которые идут одно за другим. Например, если необходимо сначала выполнить преобразование

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & M_1 & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

а затем — другое преобразование

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & M_2 & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix},$$

то можно записать

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & M_2 & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & M_2 & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & M_1 & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Однако вместо двух преобразований можно выполнить только одно

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $M = M_2 \cdot M_1$.

Рассмотрим частные случаи аффинных преобразований.

1) Параллельный сдвиг координат 0xy на величины dx,dy, соответственно, вдоль осей X, Y(рис. 2.1)

$$\begin{cases} X = x + dx, \\ Y = y + dy. \end{cases}$$

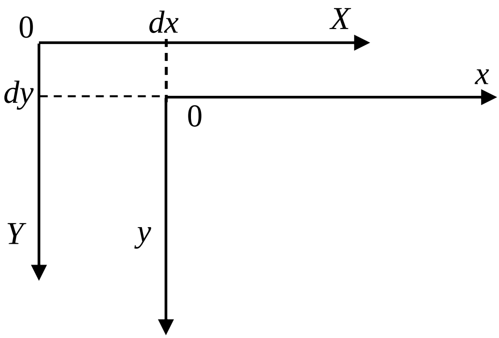


Рис. 2.1. Параллельный сдвиг координат

Матрица преобразования имеет вид $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Растяжение-сжатие осей 0xy в kx,ky раз, соответственно, вдоль осей X, Y(рис. 2.2).

При растяжении осей 0xy в kx,ky раз, получим

$$\begin{cases} X = 1/kx \cdot x, \\ Y = 1/ky \cdot y. \end{cases}$$

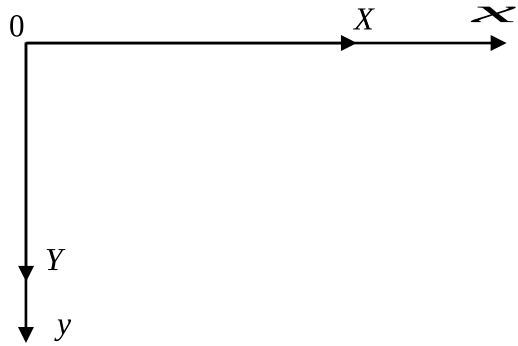


Рис. 2.2. Растяжение-сжатие осей координат

Матрица преобразования имеет вид $\begin{bmatrix} 1/kx & 0 & 0 \\ 0 & 1/ky & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Коэффициенты kx и ky могут быть отрицательными. Например, при $kx = -1$ осуществляется зеркальное отражение относительно оси y.

3) Поворот системы координат $0xy$ вокруг точки 0 (рис. 2.3)

$$\begin{cases} X = \cos(\alpha)\cdot x + \sin(\alpha)\cdot y, \\ Y = -\sin(\alpha)\cdot x + \cos(\alpha)\cdot y. \end{cases}$$

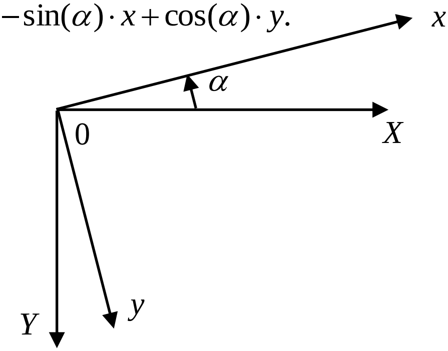


Рис. 2.3. Растяжение-сжатие осей координат

Матрица преобразования имеет вид $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Пусть в системе координат 0xy задан многоугольник с n-вершинами.

Любой многоугольник с n вершинами на плоскости в однородных координатах можно задать матрицей T размерности $3 \times n$ вида $T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, где n — количество вершин многоугольника, x_i, y_i - координаты i-ой вершины ($i \in \overline{1,n}$).

Если над системой координат 0xy выполнить преобразования, описываемые матрицей M, то координаты вершин многоугольника в системе OXY можно представить в виде

$$T' = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = M \cdot T .$$

Более сложные преобразования можно представить в виде последовательности простейших преобразований.

Например, поворот многоугольника на угол вокруг точки с координатами x_a, y_a, не совпадающей с началом систем координат, осуществляется в три этапа.

Во-первых, необходимо совместить точку x_a, y_a с началом координат путем параллельного переноса многоугольника на величины $-x_a$ и $-y_a$, соответственно, вдоль осей x и y, то есть: $M_1 = R_{-x_a,-y_a} \cdot M$.

Во-вторых, повернуть фигуру вокруг начала системы координат на угол α: $M_2 = R_\alpha \cdot M_1 = R_\alpha \cdot T_{-x_z,-y_z} \cdot M$.

В-третьих, компенсировать сдвиг, сделанный ранее: $M_3 = T_{x_a,y_a} \cdot M_2 = T_{x_a,y_a} \cdot R_\alpha \cdot T_{-x_a,-y_a} \cdot M$.

Таким образом, координаты вершин многоугольника после поворота вокруг точки, не совпадающей с началом координат, будут определяться матрицей М3. Координаты i-ой вершины многоугольника после осуществления преобразования определяются i-ым столбцом этой матрицы.

Как следует из вышесказанного, для задания нескольких последовательных преобразований, имеется возможность комбинирования матриц преобразования путем их перемножения.

Например, необходимо осуществить сдвиг квадрата, изображенного на рис. 1, на 1 единицу вдоль оси ОХ и затем повернуть его на 30 градусов против часовой стрелки вокруг вершины А1.

Координаты вершин квадрата, изображенного на рис. 2.4, описываются матрицей $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Матрица сдвига вдоль оси ОХ на величину 1 имеет вид: $T_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Таким образом, вершины квадрата после сдвига будут описываться матрицей

$$M1 = T_{1,0} \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для поворота квадрата вокруг вершины А1, которая после сдвига имеет координаты 0,-1 (как следует из первого столбца матрицы М1), необходимо совместить вершину А1 с началом системы координат, то есть сдвинуть квадрат на 1 единицу вдоль оси у. После сдвига осуществляется поворот на 30 градусов, а затем квадрат сдвигается на величину -1 вдоль оси OY для компенсации сдвига, сделанного перед поворотом. Координаты вершин квадрата после поворота будут описываться матрицей:

$$M_2 = T_{0,1} \cdot R_{30} \cdot T_{0,-1} \cdot M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(30) & \sin(30) & 0 \\ -\sin(30) & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_1.$$

Полученный в результате преобразований квадрат изображен на рис. 2.5.

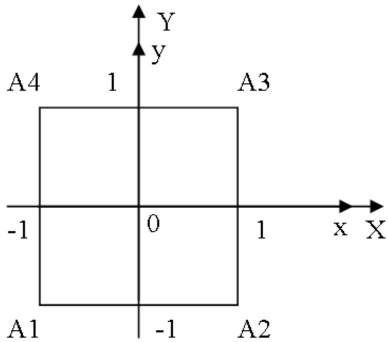


Рис 2.4

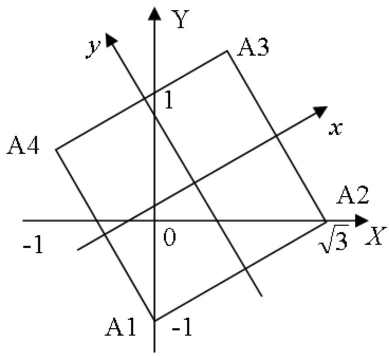


Рис. 2.5

2.3. Преобразования в трехмерном пространстве

Одной из областей применения компьютерной графики является отображение трехмерных сцен на дисплее компьютера. При этом с помощью существующих алгоритмов имеется возможность изменять положение и ориентацию элементов сцены и наблюдателя.

Любую точку в трехмерном пространстве в мировой системе координат можно определить тремя числами или вектором $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Однако для представления различных преобразований в единой форме точку удобно представить четырьмя числами. Это связано с использованием так называемых однородных координат. В однородных координатах положение точки P(x,y,z) представляется в виде P(Wx, Wy, Wz, W)= P(X, Y, Z, W), где W – любой масштабный множитель. Декартовые координаты по однородным определяются следующим образом: x=X/W; y=Y/W; z=Z/W. Операция сведения вектора P(X, Y, Z, W) к виду P(X/W, Y/W, Z/W,1)=P(x,y,z,1) называется нормализацией.

Преобразования однородных координат описываются соотношениями:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ W \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/W \\ Y/W \\ Z/W \\ 1 \end{bmatrix},$$

где T — некоторая матрица преобразования.

Полное преобразование, полученное путем воздействия на вектор положения матрицей 4x4 и нормализации полученного вектора, называется линейным преобразованием и обеспечивает выполнение комплекса операций сдвига, частичного изменения масштаба, поворота и переноса.

В общем случае обобщенная матрица преобразования 4x4 для трехмерных координат имеет вид:

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

и может быть представлена в виде четырех подматриц $\begin{bmatrix} 3\times3 & 3\times1 \\ 1\times3 & 1\times1 \end{bmatrix}$. Подматрица $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix}$ осуществляет линейное преобразование в виде изменения масштаба, сдвига и вращения. Вектор $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ производит перенос, вектор $\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$ — перспективное преобразование, а последний скалярный элемент s — общее изменение масштаба.

Ниже приведены матрицы преобразований для различных простых операций:
сдвига на величины dx, dy, dz вдоль осей x, y, z:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

вращения на угол α против часовой стрелки вокруг оси z:

$$R_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

вращения на угол β против часовой стрелки вокруг оси x:

$$R_{x,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

вращения на угол γ против часовой стрелки вокруг оси y:

$$R_{y,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

масштабирования в Sx, Sy, Sz раз, соответственно, по осям x, y, z:

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

зеркального отражения относительно плоскости OYZ

$$M_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

зеркального отражения относительно плоскости OXZ

$$M_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

зеркального отражения относительно плоскости OXY

$$M_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример. Получить матрицу преобразования на плоскости для последовательного выполнения трех простейших преобразований: сдвиг вдоль оси Y на величину 1, поворот вокруг начала координат системы 0XYZ на угол 30 градусов и растяжение в 2 раза вдоль осей 0X и 0Y.

Матрица сдвига вдоль оси Y на величину 1 имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

поворота вокруг начала координат системы 0XYZ на угол 30 градусов имеет вид

$$\begin{bmatrix} \cos(30) & 0 & \sin(30) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(30) & 0 & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и растяжения в 2 раза вдоль осей 0X и 0Y имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, результирующее преобразование описывается матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(30) & 0 & \sin(30) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(30) & 0 & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cos(30) & 0 & 2\sin(30) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -\sin(30) & 0 & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример. Вычислить координаты вершин квадрата, заданного координатами левого верхнего угла (3,4,5) и длиной стороны (7). Стороны квадрата до преобразования параллельны осям координат и плоскость квадрата параллельна плоскости 0xy. Осуществить преобразование над квадратом в соответствии с предыдущим примером. Получить координаты вершин после преобразования.

Вершины квадрата имеют следующие координаты: (3,4,5), (10,4,5), (10,-3,5), (3,-3,5).

Квадрат до преобразования описывается матрицей

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 & 3 \\ 4 & 4 & -3 & -3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и после преобразования

$$\begin{bmatrix} 2\cos(30) & 0 & 2\sin(30) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -\sin(30) & 0 & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 & 3 \\ 4 & 4 & -3 & -3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10.196 & 22.321 & 22.321 & 10.196 \\ 6 & 6 & -1 & -1 \\ 2.83 & -0.67 & -0.67 & 2.83 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИМИТИВЫ

3.1. Прямая

Алгебраическое уравнение прямой в пространстве в общем случае имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Прямая в пространстве может быть задана двумя точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

В этом случае удобно получить уравнение прямой в канонической форме

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

или в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t, \end{cases}$$

где t — параметр, принимающий значения в диапазоне $(-\infty, +\infty)$.

В параметрической форме удобно задавать уравнения прямых. В этом случае $t \in [0,1]$.

Пример. Получить уравнение прямой, проходящей через точки A с координатами $(1,2,3)$ и B с координатами $(3,7,1)$.

В канонической форме уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{7-2}=\frac{z-3}{1-3}$$

или

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{-2}$$

В параметрической форме уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} x=1+(3-1)\cdot t, \\ y=2+(7-2)\cdot t, \\ z=3+(1-3)\cdot t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x=1+2\cdot t, \\ y=2+5\cdot t, \\ z=3-2\cdot t. \end{cases}$$

3.2. Плоскость

Алгебраическое уравнение плоскости в пространстве в общем случае имеет вид

$ax+by+cz+d=0$ и содержит 4 коэффициента.

Однако для плоскостей, не совпадающих с плоскостями системы координат, его можно нормировать, то есть сделать $d=1$.

Тогда

$$\tilde{a}x+\tilde{b}y+\tilde{c}z=-1, \qquad (1)$$

где $\tilde{a}=a/d$, $\tilde{b}=b/d$, $\tilde{c}=c/d$.

Плоскость в пространстве может быть задана тремя неколлинеарными точками (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

Получим уравнение плоскости по трем точкам, подставив их координаты в уравнение (1) и решив полученную систему

$$\begin{cases} \tilde{a}x_1+\tilde{b}y_1+\tilde{c}z_1=-1 \\ \tilde{a}x_2+\tilde{b}y_2+\tilde{c}z_2=-1 \\ \tilde{a}x_3+\tilde{b}y_3+\tilde{c}z_3=-1 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решение этого уравнения дает значения коэффициентов плоскости

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение плоскости можно получить по уравнению нормали и координатам одной точки, лежащей на плоскости.

Пусть нормаль имеет координаты (n_1, n_2, n_3), а точка на плоскости имеет координаты (x_1, y_1, z_1). Тогда уравнение плоскости имеет вид

$n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0$, где d вычисляется по формуле $d = -(n_1 x_1 + n_2 y_2 + n_3 z_3)$.

3.3. Нормаль к плоскости

Нормаль к плоскости можно получить с помощью векторного произведения векторов, лежащих на плоскости. Пусть точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ и $A_3(x_3, y_3, z_3)$ лежат в плоскости. Тогда векторы A_1A_2 и A_1A_3 также лежат в этой же плоскости. Уравнение нормали имеет вид

$$n = A_1A_2 \otimes A_1A_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_2 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

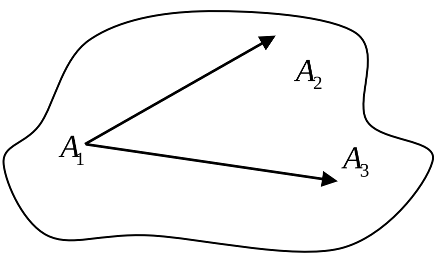


Рис. 3.1. Плоскость с лежащими на ней векторами

3.4. Нахождение точки пересечения двух прямых

Найти координаты точки пересечения двух прямых AB и CD.

Уравнение первой прямой в параметрическом виде имеет вид

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\cdot t_1, \\ y = y_A + (y_B - y_A)\cdot t_1, \\ z = z_A + (z_B - z_A)\cdot t_1, \end{cases} \quad (1)$$

а второй

$$\begin{cases} x = x_C + (x_D - x_C)\cdot t_2, \\ y = y_C + (y_D - y_C)\cdot t_2, \\ z = z_C + (z_D - z_C)\cdot t_2, \end{cases}$$

Приравняем друг другу соответствующие уравнения

$$\begin{cases} x_A + (x_B - x_A)\cdot t_1 = x_C + (x_D - x_C)\cdot t_2, \\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t_1 = y_C + (y_D - y_C)\cdot t_2, \\ z_A + (z_B - z_A)\cdot t_1 = z_C + (z_D - z_C)\cdot t_2, \end{cases}$$

Из полученной системы найдем t_1 и t_2, которые после подстановки в уравнения прямых дадут координаты точки пересечения. Прямые в трехмерном пространстве могут не иметь точки пересечения. В случае, если решение системы уравнений существует, то прямые пересекаются в пространстве.

На плоскости прямые всегда пересекаются, и система уравнений содержит два уравнения

$$\begin{cases} x_A + (x_B - x_A)\cdot t_1 = x_C + (x_D - x_C)\cdot t_2, \\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t_1 = y_C + (y_D - y_C)\cdot t_2, \end{cases}$$

Пусть точки A,B,C,D имеют координаты $(1{,}2), (5{,}7), (0{,}7), (5{,}0)$. Тогда

$$\begin{cases} 1 + (5-1)\cdot t_1 = 0 + (5-0)\cdot t_2, \\ 2 + (7-2)\cdot t_1 = 7 + (0-7)\cdot t_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+4\cdot t_1 = 0+5\cdot t_2, \\ 2+5\cdot t_1 = 7-7\cdot t_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\cdot t_1 - 5\cdot t_2 = -1, \\ 5\cdot t_1 + 7\cdot t_2 = 5, \end{cases}$$

$t_1 = 0.34$, $t_2 = 0.472$.

Таким образом, координаты точки пересечения равны

$$\begin{cases} x = 1+4\cdot 0.34 = 2.36, \\ y = 2+5\cdot t_1 = 3.7. \end{cases}$$

Поскольку $t_1 = 0.34 \in [0,1]$ и $t_2 = 0.472 \in [0,1]$, то отрезки AB и CD также пересекаются.

3.5. Нахождение точки пересечения отрезка с плоскостью

Необходимо найти координаты точки пересечения отрезка CV с плоскостью (на рис 3.1 отображена точкой x).

Алгоритм следующий:

1) Выбираем на плоскости произвольную точку A. Ее координаты можно получить из уравнения плоскости.

2) Находим координаты вектора CA, как разность координат точки A и C.

3) Находим компоненты вектора нормали к плоскости.

4) Приводим вектор нормали к единичной длине.

5) Находим вектор CN, скалярно умножив CA на n.

6) Находим вектор CM, скалярно умножив CV на n.

7) Рассчитываем коэффициент K, как частное от деления CN на CM.

8) Находим координаты точки x, последовательно умножая компоненты вектора CV на коэффициент K.

Коэффициент K должен лежать в диапазоне [0,1]. Только в этом случае отрезок CV будет пересекать плоскость. При отрицательном значении коэффициента K или значении более 1 отрезок CV находится с одной стороны от плоскости.

Скалярное произведение вектора **a** на вектор **b** вычисляется по формуле: a.x·b.x+ a.y·b.y+ a.z·b.z и представляет собой косинус угла между векторами на длину векторов **a** и **b.**

Если один из векторов имеет единичную длину, то скалярное произведение — проекция вектора не единичной длины на вектор единичной длины.

Если оба вектора имеют единичную длину, то скалярное произведение — косинус угла между этими векторами.

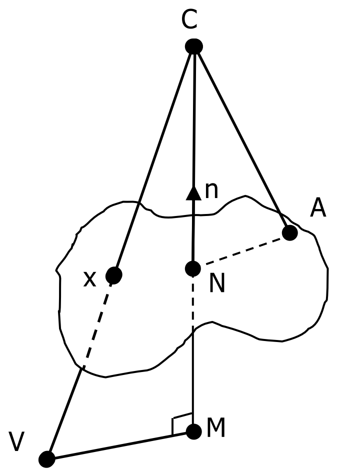
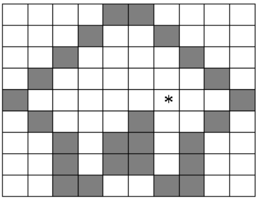


Рис. 3.1.

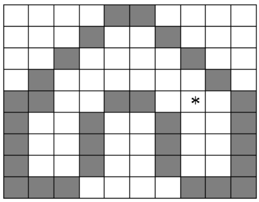
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Алгоритм заливки с затравочным пикселом

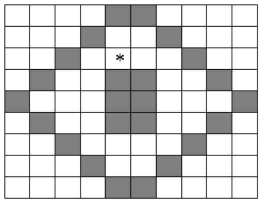
Осуществить заливку замкнутой растровой фигуры методом «С затравочным пикселом». Изображения контуров для различных вариантов приведены на рисунке, где темные клетки означают пикселы, принедлежащие контуру, а клетки, помеченные знаком '*' — затравочные пикселы для соответствующего номера варианта. Расписать последовательность шагов.



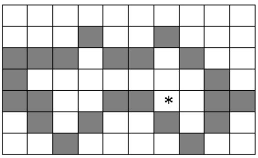
Вариант 1



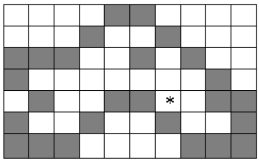
Вариант 2



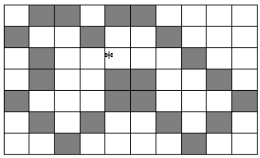
Вариант 3



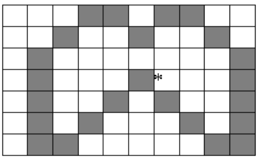
Вариант 4



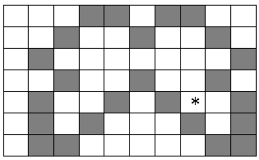
Вариант 5



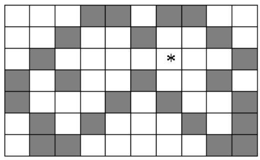
Вариант 6



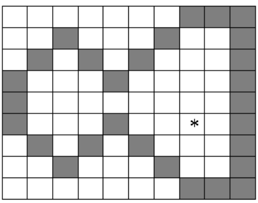
Вариант 7



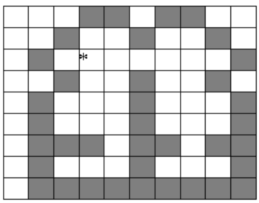
Вариант 8



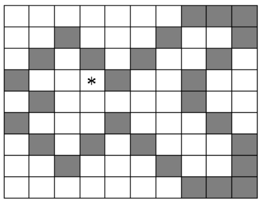
Вариант 9



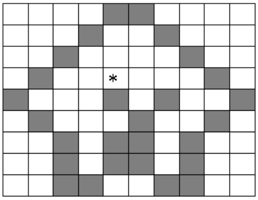
Вариант 10



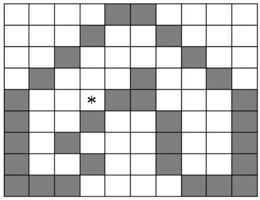
Вариант 11



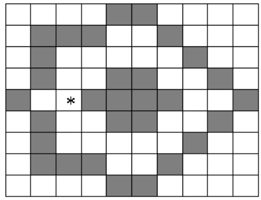
Вариант 12



Вариант 13



Вариант 14



Вариант 15

2. Уравнение прямой

Получить уравнение прямой, проходящей через точки А и В.

№ вар	A	B
1	1,3,5	2,1,1
2	3,3,2	2,9,6
3	1,6,3	3,0,7
4	2,9,4	2,8,3
5	2,1,1	1,2,0
6	2,2,2	3,0,1
7	3,4,5	1,7,3
8	2,6,2	8,2,5
9	4,2,1	5,6,2
10	2,4,5	4,1,3
11	2,6,3	1,1,2
12	1,7,-1	-3,-2,1
13	9,2,6	1,3,12
14	2,-3,-4	0,1,2
15	1,4,-6	-6,3,2

3. Координаты точки пересечения прямых

Вычислить координаты точки пересечения прямых АВ и CD, лежащих на плоскости.

№ вар	A	B	C	D
1	1,-3	-2,2	2,1	0,7
2	-3,3	3,4	2,9	2,3
3	1,6	5,4	3,0	2,1
4	2,3	1,9	2,8	-2,2
5	2,1	1,0	1,2	2,6
6	2,2	-2,6	3,0	2,5

7	3,5	1,6	1,7	3,4
8	1,4	2,5	-3,1	5,4
9	2,4	5,1	4,1	-1,0
10	1,7	2,1	-2,3	1,4
11	2,3	1,-5	1,1	2,6
12	8,-1	2,2	3,-2	1,1
13	1,3	2,1	7,6	2,3
14	0,3	2,-2	1,-3	4,5
15	-1,7	5,3	2,1	6,-2

4. Уравнение плоскости

Получить уравнение плоскости, проходящей через 3 точки A, B и C, и уравнение нормали к этой плоскости.

№ вар	A	B	C
1	1,3,5	2,1,1	1,2,0
2	1,3,2	2,9,6	3,0,1
3	1,6,3	3,0,7	1,7,3
4	1,9,3	2,8,3	2,5,1
5	2,5,1	1,2,0	1,1,7
6	0,1,2	3,0,1	1,8,3
7	3,4,5	1,7,3	1,1,2
8	3,2,6	2,1,4	1,3,5
9	1,5,2	-2,1,7	3,6,2
10	-1,1,4	3,-1,7	2,6,3
11	2,6,3	1,1,2	2,9,7
12	1,2,6	-2,1,-5	2,6,1
13	2,6,4	1,-3,5	-5,2,-1
14	6,1,3	5,-3,-1	-3,2,1
15	-3,3,2	1,-3,5	2,5,6

5. Матрица преобразования на плоскости

Получить матрицу преобразования на плоскости для последовательного выполнения трех простейших преобразований в порядке перечисления в таблице.

№ вар	Преобр 1	Преобр 2	Преобр 3
1	Пов 30	Пов 115	Сдвиг X 2
2	Сдвиг Y 1	Пов 30	Сдвиг X 4

3	Сдвиг X 1	Масш X 2	Пов 45
4	Масш Y 2	Пов 120	Сдвиг X 1
5	Пов 90	Сдвиг X 2 Y 1	Пов 60
6	Масш X 2 Y 2	Пов 30	Сдвиг X 1 Y 3
7	Пов -90	Сдвиг X 1 Y 3	Пов 45
8	Масш X 2 Y 2	Пов 30	Пов 45
9	Масш X 2 Y 3	Пов -30	Сдвиг X 1 Y 2
10	Сдвиг X2 Y1	Пов 30	Сдвиг X4 Y2
11	Пов 120	Масш X 0.5 Y 2	Пов 60
12	Масш X 2 Z 3	Сдвиг X -2 Y4	Пов -45
13	Сдвиг X 1 Y2	Пов 60	Сдвиг X 1 Y -3
14	Пов -60	Сдвиг Y -1 Z 4	Пов 30
15	Пов -120	Масш X2 Y2 Z3	Сдвиг X 3 Y -12

В таблице используются сокращения:

— Пов α — поворот вокруг начала координат на угол α (положительный угол отсчитывается против часовой стрелки);

— Масш X x, Y y — масштабирование относительно осей X, Y соответственно, в x, y раз.

— Сдвиг X x, Y y — сдвиг вдоль осей X, Y, соответственно, на величины x, y.

6. Матрица преобразования в пространстве

Получить матрицу преобразования в пространстве для последовательного выполнения трех простейших преобразований

№ вар	Преобр1	Преобр2	Преобр3
1	Пов X 30	Пов Y 25	Сдвиг X 2
2	Сдвиг Y 1	Пов X 30	Сдвиг Z 4
3	Сдвиг X 1	Масш X 2	Пов Y 45
4	Масш Y 2	Пов X 120	Сдвиг Z 1
5	Пов Y 90	Сдвиг X 2 Z 1	Пов Z 60
6	Масш X 2 Y 2	Пов Z 30	Сдвиг Y 1 Z 3
7	Пов X -90	Сдвиг Y 1 Z 3	Пов Z 45
8	Масш Y 2 Z 2	Пов Y 20	Сдвиг X2 Y-1
9	Масш X 2 Y 3	Пов Z -30	Сдвиг Y-1 Z 2
10	Сдвиг X 1 Z 1	Пов Y 45	Пов Z 60
11	Пов Y 120	Масш X 0.5	Пов X 60
12	Сдвиг Y 2 Z 3	Масш X 0.5 Y 2	Пов Y 30
13	Масш X 4 Y 3	Пов Y 60	Сдвиг X 1 Z 3
14	Сдвиг Y -4 Z 2	Пов X 45	Пов Y -120

15	Пов X -45	Сдвиг Y 4 Z -2	Пов Z 45

В таблице используются сокращения:

— Пов X α — поворот вокруг оси X на угол α (положительный угол отсчитывается против часовой стрелки при взгляде на острие оси);

— Масш X x, Y y, Z z — масштабирование относительно осей X, Y, Z, соответственно, в x, y, z раз.

— Сдвиг X x, Y y, Z z — сдвиг вдоль осей X, Y, Z, соответственно, на величины x, y, z.

7. Координаты вершин квадрата

Вычислить координаты вершин квадрата, заданного координатами одной из вершин и длиной стороны. Стороны квадрата до преобразования параллельны осям координат и плоскость квадрата параллельна плоскости 0xy. Осуществить преобразование, полученное предыдущем задании, над заданным квадратом. Получить координаты вершин квадрата после выполненного преобразования.

№ вар	Координаты одной из вершин квадрата	Длина стороны квадрата
1	2,6,5	2
2	1,3,2	5
3	1,6,3	6
4	1,9,3	7
5	2,5,1	3
6	0,1,2	6
7	3,4,5	4
8	2,0,5	3
9	3,5,4	5
10	2,1,4	4
11	2,4,3	3
12	-4,3,5	7
13	-3,1,4	5
14	3,-4,1	4
15	-4,2,3	2

8. Поворот квадрата

Повернуть квадрат, полученный в предыдущем задании, вокруг оси, проходящей через одну из вершин квадрата параллельно оси Z, на 30 градусов против часовой стрелки.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под преобразованием координат?
2. Однородные координаты и матричное представление двумерных преобразований.
3. Простейшие преобразования в двумерном пространстве.
4. Композиция двумерных преобразований.
5. Матричное представление в трехмерном пространстве.
6. Композиция преобразований в трехмерном пространстве.
7. Преобразование объектов. Преобразование как изменение систем координат.
8. Аффинные преобразования на плоскости.
9. Аффинное преобразование в трехмерном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перемитина Т.О. Компьютерная графика. — Томск: «Эль Контент», 2012.
2. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. — М.: Мир, 1989.
3. Порев В. Компьютерная графика: учебное пособие. — БХВ-Петербург: Питер, 2004. — 432 с.