ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Вычислительные системы
и информационная безопасность»

Учебное пособие

«Алгоритмы обработки искаженных сигналов»

Автор
Цветкова О.Л.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

«Учебное пособие» предназначено для студентов очной формы обучения направления 10.03.01 Информационная безопасность.

Авторы

доцент, к.т.н,
доцент кафедры «Вычислительные системы и информационная безопасность»
Цветкова О.Л.

Оглавление

1. Понятие о первичной и вторичной обработке сигналов. Помехи (шумы)

Под **системами цифровой обработки сигналов** понимают комплекс алгоритмических, аппаратных и программных средств. Как правило, системы содержат специализированные технические средства предварительной (или первичной) обработки сигналов и специальные технические средства для вторичной обработки сигналов. Это связано с тем, что в общем случае на входе системы ЦОС наблюдается смесь полезного сигнала и помех (шумов) разной природы.

Задачей предварительной обработки сигнала является подавление помех — задача фильтрации сигнала, решение которой обеспечивает улучшение отношения сигнал/помеха.

Кроме того, при предварительной обработке решается задача обнаружения сигнала и определения местоположения его источника. На этапе предварительной обработки в ряде случаев формируются также некоторые количественные оценки сигнала (амплитуда, частота, фаза).

Полученная в результате предварительной обработки полезная информация поступает в систему вторичной обработки для идентификации обнаруженного сигнала, его классификации и выдачи информации об обнаруженных сигналах оператору или формирования управляющего воздействия.

Виды помех (шумов). В общей форме **влияние помех на регистрируемый сигнал** записывается в следующем виде:

$$y(t) = F(s(t), q(t)),$$

где $s(t)$ — информационная (полезная) часть сигнала; $q(t)$ — помеха.

Источники помех бывают внутренние и внешние.

Внутренние помехи могут быть присущи физической природе источников сигналов, как, например, тепловые шумы электронных потоков в электрических цепях или дробовые эффекты в электронных приборах, или возникают в измерительных устройствах и системах передачи и обработки сигналов от влияния различных дестабилизирующих факторов — температуры, повышенной влажности, нестабильности источников питания, влияния механических вибраций на гальванические соединения, и т.п.

Внешние источники помех бывают искусственного и естественного происхождения. К искусственным источникам помех относятся индустриальные помехи — двигатели, переключатели, генераторы сигналов различной формы и т.д. Естественными источниками помех являются молнии, флуктуации магнитных полей, всплески солнечной энергии, и т.д.

Помехи подразделяются на флуктуационные, импульсные и периодические.

Флуктуационные (шумовые) помехи представляют хаотический и беспорядочный во времени процесс в виде нерегулярных случайных всплесков различной амплитуды. **Флуктуации** — это случайные отклонения физических величин от своих средних значений.

Импульсные помехи во многом похожи на шумовые помехи и проявляются как в виде отдельных импульсов, так и в виде последовательности импульсов, форма и параметры которых имеют случайный характер. Причинами импульсных помех являются резкие броски тока и напряжения в промышленных установках, транспортных средствах, а также природные электрические явления. Распределение импульсных помех, как правило, симметричное с произвольной плотностью распределения.

Периодические помехи вызываются периодическими низкочастотными или высокочастотными полями линий электропередач, силовых электроустановок и др. Если основная мощность помех сосредоточена на отдельных участках диапазона частот, например, на частоте напряжения промышленной сети или кратна этой частоте, то такие помехи называют **сосредоточенными**.

Белый шум подразумевает наличие сигнала на всех частотах, который к тому же меняется по амплитуде. Мощность в таком сигнале одинакова на всех частотах. Амплитуда на любой отдельно взятой частоте изменяется в широких пределах. Это изменение подчиняется закону распределения энергии в сигнале, известному как распределение Гаусса. На деле, это означает, что большую часть времени сигнал имеет «усредненный» уровень, но может существенно изменяться как в большую, так и в меньшую сторону по случайному закону.

Высокочастотные помехи — это неопределенный по амплитуде и длительности сигнал в диапазоне от 100 Гц до 100 МГц, который искажает синусоиду напряжения в сети и, таким образом, негативно влияет на работу любого электрооборудования. Источниками высокочастотных помех являются различные электрические устройства: электродвигатели, генераторы, сварочные аппараты и т.п. Помехи такого рода подавляются путем установки режекторного (заградительного) фильтра.

В зависимости от характера воздействия на сигнал помехи разделяют на аддитивные и мультипликативные.

Аддитивные (налагающиеся) помехи суммируются с сигналом, не зависят от его значений и формы и не изменяют информативной составляющей самого сигнала. Как правило, аддитивные помехи порождаются флуктуациями. Природа флуктуаций обычно определяется природой физических процессов. Многие физические величины представляют собой результаты усреднения определенных параметров физических процессов, дискретных и случайных по своей природе.

Так, например, тепловой шум регистрируемого напряжения на резисторах электрических цепей обуславливается флуктуациями теплового движения носителей зарядов — случайностью процесса дрейфа отдельных электронов по резистору, по суммарной интенсивности движения которых и формируется падение напряжения на резисторе.

Дискретной является природа электромагнитных видов излучения — дискретный квант энергии излучения (фотон) определен значением $h\nu$, где h — постоянная Планка; ν — частота. Флуктуации физических величин, дискретных и случайных по своей природе, принципиально неустранимы, и речь может идти только о том, чтобы уменьшать их относительную величину.

Действие аддитивной помехи на сигнал описывается выражением:

$$y(t) = s(t) + q(t).$$

Мультипликативные (деформирующие) помехи могут изменять форму информационной части сигнала, иметь зависимость от его значений и от определенных особенностей в сигнале и т.п. При известном характере мультипликативных помех возможна коррекция сигнала на их влияние. Природа мультипликативных помех обычно связана с изменениями условий измерений, параметров каналов передачи данных и систем их обработки, т.е. когда случайные помехи накладываются не на сам сигнал непосредственно, а на системы, в которых этот сигнал формируется и обращается, вызывая опосредствованные искажения сигнала, как линейные, так и нелинейные.

Действие мультипликативной помехи на сигнал описывается выражением:

$$y(t) = v(t)s(t),$$

где $v(t)$ — мультипликативная помеха.

В общем случае в сигнале могут присутствовать оба вида помех:

$$y(t) = v(t)s(t) + q(t).$$

Математическое описание помех. В математическом описании помехи представляются **случайными функциями времени.** Как правило, помехи относятся к классу стационарных случайных процессов, и характеризуются своими распределениями и моментами распределений, как их числовыми параметрами. Основное распределение большинства шумовых сигналов — **нормальное (гауссов процесс)**. Это объясняется тем, что распределение сумм независимых случайных величин, из которых складываются случайные помехи, сходится к нормальному, вне зависимости от характера распределения слагаемых (теорема Ляпунова).

Момент распределения первого порядка выражает среднее значение (постоянную составляющую) случайного процесса:

$$M\{q\} = \overline{q} = \int_{-\infty}^{+\infty} q \cdot p(q)dq,$$

где $p(q)$ — плотность вероятностей значений q.

Центральный момент второго порядка определяет дисперсию процесса:

$$D\{q\} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \overline{q})^2 \cdot p(q)dq.$$

Дисперсия выражает мощность переменной составляющей процесса. Корень квадратный из значения дисперсии, т.е. значение σ, является средним квадратическим значением разброса случайных значений q относительно среднего значения $\overline{q}$.

Сигнал с аддитивной помехой обычно характеризуют отношением средних мощностей сигнала и помехи, которое кратко называют **отношением сигнал-помеха**:

$$S / N = \left(\frac{P_S}{P_N}\right),$$

где P_S — мощность полученного сигнала; P_N — мощность уровня шумов.

2. Метод скользящего среднего

Процедура восстановления, повышения достоверности данных, снижения уровня помех называется **сглаживанием**.

В качестве алгоритма предварительной обработки данных обычно используется **процедура сглаживания по методу скользящего среднего (скользящего усреднения)**.

При проведении операции восстановления зашумленного сигнала по **трем точкам** значения сигнала в первой и последней точках интервала дискретизации приравнивается значениям искаженного сигнала в соответствующих точках: $f_1^{(3)} = f_1$, $f_{last}^{(3)} = f_{last}$. Тогда значения восстановленного сигнала в остальных промежуточных точках определяется по следующей формуле: $f_i^{(3)} = \left(f_{i-1} + f_i + f_{i+1}\right)/3$.

При сглаживании зашумленного сигнала по **пяти точкам**:

$$f_1^{(5)} = f_1, \quad f_2^{(5)} = f_2,$$

$$f_{last-1}^{(5)} = f_{last-1}, \quad f_{last}^{(5)} = f_{last},$$

$$f_i^{(5)} = \left(f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2}\right)/5.$$

Правильный выбор количества точек k, участвующих в вычислении среднего, определяет качество отделения высокочастотной помехи от более низкочастотного полезного сигнала. Уменьшение k ведет к недостаточному выравниванию экспериментальных данных, а завышение — к искажению существенных особенностей дискретной функции. Поскольку частотные спектры полезного сигнала и помехи заранее неизвестны, количество точек k усреднения обычно подбирают экспериментально. Обычно процедуру сглаживания начинают со значений $k = 3,\ 5$ и увеличивают в случае необходимости после анализа полученных результатов сглаживания.

3. Метод наименьших квадратов

Эффективного снижения уровня помех можно достичь применением **метода наименьших квадратов**, который основан на минимизации суммы квадратов отклонений некоторой аппроксимирующей функции от исходной зашумленной функции в каждой точке.

В этом методе выполняется **аппроксимация** (замена) искаженной функции на «близкую» функцию, которая представляется суммой базисных функций умноженных на коэффициенты. Выбор вида базисных функций основан на том, какие изначально имелись данные (т.е. если исходная зашумленная функция «похожа» на синусоиду или косинусоиду, то следует выбрать в качестве базисных функций тригонометрические). Количество слагаемых в аппроксимирующей функции определяется экспериментально.

Пусть имеется дискретная функция $y_i = f(x_i),\ i = 0,1 \ldots n$ зашумленная некоторыми помехами, требуется найти многочлен степени m, для которого среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(F(x_i) - y_i)^2} \text{ минимально.}$$

В этом случае функция $F(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)$ обеспечивает аппроксимацию исходного сигнала и снижение уровня помех. Здесь $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$ — базисные функции, а $a_0, \ldots, a_m$ — коэффициенты, подлежащие определению.

С целью определения коэффициентов $a_0, \ldots, a_m$ необходимо найти такую функцию $F(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$, отклонение значений которой от заданной дискретной функции $y_i = f(x_i)$ минимально:

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n}(F(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i)^2 . \qquad (1)$$

Этот функционал геометрически представляет собой сумму отклонений значений y_i от значений аппроксимирующей функции $F(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$ в точках x_i.

Необходимым условием минимума функции многих переменных является равенство нулю ее частных производных по независимым переменным. В функционале (1) независимыми переменными являются коэффициенты $a_0, \ldots, a_m$. Тогда можно составить систему линейных алгебраических уравнений $m+1$ порядка, относительно неизвестных $a_0, \ldots, a_m$, которые доставляют минимум функционалу (1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=0}^{n}(F(x_i, a_0, a_1,..., a_m) - y_i)\varphi_0(x_i) = 0, \\ ... \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum\limits_{i=0}^{n}(F(x_i, a_0, a_1,..., a_m) - y_i)\varphi_m(x_i) = 0. \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))\varphi_0(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i), \\ ... \\ \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))\varphi_m(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\varphi_m(x_i), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} a_0\varphi_0^2(x_i) + ... + \sum\limits_{i=0}^{n} a_m\varphi_m(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i), \\ ... \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_0\varphi_0(x_i)\varphi_m(x_i) + ... + \sum\limits_{i=0}^{n} a_m\varphi_m^2(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\varphi_m(x_i). \end{cases} \quad (2)$$

Матрица этой системы уравнений носит название **матрица Грама** и имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}\varphi_0^2(x_i) & ... & \sum\limits_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_0(x_i) \\ ... & ... & ... \\ \sum\limits_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\varphi_m(x_i) & ... & \sum\limits_{i=0}^{n}\varphi_m^2(x_i) \end{pmatrix},$$

или можно записать следующим образом:

$$\Phi = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & ... & (\varphi_0, \varphi_m) \\ ... & ... & ... \\ (\varphi_0, \varphi_m) & ... & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix},$$

где $(\varphi_j, \varphi_k) = \sum\limits_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$.

Матрица Φ симметрична относительно главной диагонали (т.е. $\Phi_{ij} = \Phi_{ji}$), и если в качестве базисных функций выбраны линейно-независимые функции $\varphi_j(x)$, то определитель матрицы не равен нулю $\Delta\Phi \neq 0$ и система имеет единственное решение.

Расширенная матрица получается путем добавления справа столбца свободных членов:

$$Y_\Phi = \begin{pmatrix} (\varphi_0, y) \\ \dots \\ (\varphi_m, y) \end{pmatrix},$$

где $(\varphi_j, y) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_j(x_i)$.

Тогда систему уравнений (2) можно записать в векторно-матричном виде:

$$\Phi \cdot A = Y_\Phi, \quad (3)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец, содержащий неизвестные коэффициенты.

Систему уравнений (3) можно решить методом обратной матрицы $A = \Phi^{-1} \cdot Y_\Phi$ или методом Гаусса.

Однако можно было записать матрицу Φ, таким образом, чтобы каждый элемент матрицы содержал значения базисных функций в узловых точках:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots. & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}.$$

Матрица Φ_1 прямоугольная размерностью $(n+1)\times(m+1)$.

Тогда задача определения коэффициентов $a_0, \dots, a_m$ сводится к решению векторно-матричного уравнения:

$$\Phi_1 \cdot A = Y,$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Но поскольку матрица Φ_1 не квадратная, то для определения обратной матрицы необходимо выполнить следующие операции:

$$\Phi_1^T \cdot \Phi_1 \cdot A = \Phi_1^T \cdot Y,$$

$$A = (\Phi_1^T \cdot \Phi_1)^{-1} \cdot \Phi_1^T \cdot Y.$$

При использовании для аппроксимации **степенных функций** $F(x)$ будет иметь вид:

$F(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$, а матрица Φ_1:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} x_0^{\,0} & x_0^{\,1} & \dots & x_0^{\,m} \\ x_1^{\,0} & x_1^{\,1} & \dots. & x_1^{\,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{\,0} & x_n^{\,1} & \dots & x_n^{\,m} \end{bmatrix}.$$

При использовании **тригонометрических функций**:

$$F(x) = a_0 + a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right) + a_3 \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + a_4 \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + \dots$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sin\left(\frac{\pi x_0}{T}\right) & \cos\left(\frac{\pi x_0}{T}\right) & \dots & \sin\left(\frac{m\pi x_0}{T}\right) & \cos\left(\frac{m\pi x_0}{T}\right) \\ 1 & \sin\left(\frac{\pi x_1}{T}\right) & \cos\left(\frac{\pi x_1}{T}\right) & \dots & \sin\left(\frac{m\pi x_1}{T}\right) & \cos\left(\frac{m\pi x_1}{T}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin\left(\frac{\pi x_n}{T}\right) & \cos\left(\frac{\pi x_n}{T}\right) & \dots & \sin\left(\frac{m\pi x_n}{T}\right) & \cos\left(\frac{m\pi x_n}{T}\right) \end{bmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: Техносфера, 2012.

2. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. — М.: Техносфера, 2013.

3. Умняшкин С.В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие.— М.: Техносфера, 2012.

4. Умняшкин С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов: учебное пособие.— М.: Техносфера, 2016.

5. Шостак А.С. Прием и обработка сигналов: курс лекций Ч.2. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012.