ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Автоматизация и математические моделирование в нефтегазовом комплексе»

Учебно-методическое пособие

и варианты заданий

по дисциплине

«Дифференциальные уравнения»

Авторы

Козинкина А.И.,

Паринова Л.И.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Приведены краткие теоретические сведения по дифференциальным уравнениям и их системам, примеры решения и контрольные задания. Предназначены для студентов 2-го курса направления подготовки 03.03.01 «Прикладные математика и физика» очной формы обучения.

Авторы

доктор технических наук А.И. Козинкина,
старший преподаватель Л.И. Паринова

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания посвящены изложению методов решения типовых задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Подбор задач направлен на разъяснение основных идей, понятий, теоретических фактов и их практического применения. Цель – помочь студентам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в различных областях естествознания.

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, содержащее независимые переменные, их функцию, а также производные (или дифференциалы) этой функции.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

содержащее одну независимую переменную *x*, искомую функцию $y = \varphi(x)$ и ее производную первого порядка y'. В разрешенном относительно y' виде обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид: $y' = f(x, y)$.

Решением дифференциального уравнения называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывная в области D на плоскости XOY, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество для всех допустимых значений переменной.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C, принадлежащих некоторому множеству;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что

$(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ называется любое решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$.

З*адачей Коши* для уравнения первого порядка называется задача нахождения частного решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $y_0 = f(x_0)$.

1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимся переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (2)$$

Для решения дифференциального уравнения (2) необходимо вспомнить о том, что

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Тогда уравнение (2) можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad (3)$$

Применим метод разделения переменных. Для этого посредством алгебраических преобразований представим уравнение (3) в таком виде, чтобы в каждой части дифференциального уравнения содержались и функции, и дифференциал, зависящие от одной переменной.

Считая, что $g(y) \neq 0$, умножим обе части уравнения (3) на множитель $\frac{dx}{g(y)}$ получим:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \qquad (4)$$

Интегрируя (4), получаем общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C \qquad (5)$$

Получив общий интеграл, необходимо проверить, имеет ли уравнение $g(y) = 0$ решение $y = b$, которое является решением (2) и которое невозможно получить из (5). Если такое решение $y = b$ существует, то оно называется особым решением.

Пример 1. 1

Найти общий интеграл уравнения

$$y' = tgxtgy \qquad (6)$$

Решение. Учитывая, что

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad (7)$$

получаем

$$\frac{dy}{dx} = tgxtgy \qquad (8)$$

Умножая обе части (8) на $\frac{dx}{tgy}$, получаем

$$\frac{dy}{tgy} = tgxdx$$ или $$ctgydy = tgxdx \qquad (9)$$

Интегрируя левую и правую часть (9), получаем

$$\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C \qquad (10)$$

(В данном случае постоянную C можно представить как логарифм другой постоянной)

Преобразуя (10), получаем общий интеграл исходного дифференциального уравнения (6):

$$\sin y \cos x = C \qquad (11)$$

Пример 1. 2

Найти частное решение уравнения:

$$xy + \sqrt{1+x^2}\, y' = 0, \qquad (12)$$

удовлетворяющее условию:

$$y(0) = 1. \qquad (13)$$

Решение.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, разделим переменные:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\frac{dy}{y} \qquad (14)$$

Интегрируя (14), найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$\sqrt{1+x^2} = -\ln|y| + C \qquad (15)$$

Учитывая (13), найдем постоянную C:

$$\sqrt{1+0} = -\ln|1| + C, \quad C = -1$$

Подставляем найденное значение постоянной C в (15):

$$\sqrt{1+x^2} = -\ln|y| - 1 \qquad (16)$$

Преобразуя (16), получаем частное решение уравнения (12):

$$y = e^{-(1+\sqrt{1+x^2})} \qquad (17)$$

1.2 Однородные дифференциальные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, которое можно представить в виде:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (18)$$

Это уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными для функции. Для этого необходимо сделать замену переменных: $t=\dfrac{y}{x}$, где $y=y(x)$. Откуда $y=tx$, $y'=t'x+t$. Тогда (18) для t примет вид:

$$t'x+t=f(t).$$

Учитывая, что $t'=\dfrac{dt}{dx}$, получаем $\dfrac{dt}{f(t)-t}=\dfrac{dx}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Замечание. Для того чтобы проверить, является ли дифференциальное уравнение первого порядка однородным, достаточно воспользоваться алгоритмом:

а) заменить в уравнении $F(x,y,y')=0$ x на αx, y на αy;

б) убедиться в том, что после алгебраических преобразований исходное уравнение можно привести к виду $\alpha^n F(x,y,y')=0$

Пример 1.3

Найти общий интеграл уравнения

$$x+2y-xy'=0 \qquad (19)$$

Решение.

1. Проверим, действительно ли уравнение (19) является однородным дифференциальным уравнением первого порядка

Способ 1.

Разделив обе части (19) на x, легко можно получить: $1+2\dfrac{y}{x}-y'=0$ или $y'=1+2\dfrac{y}{x}$, что представляет собой $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Способ 2.

При помощи замены x на αx, y на αy, (19) приводится к виду: $\alpha\left(x+2y-xy'\right)=0$

2. Убедившись в том, что уравнение (19) действительно является однородным дифференциальным уравнением первого по-

рядка, сделаем замену: $t = \dfrac{y}{x}$

($y = tx$, $y = t'x + t$).

Подставляя в (19), получаем:

$1 + 2t - t'x - t = 0$, $1 + t = t'x$,

Учитывая, что $t' = \dfrac{dt}{dx}$, имеем:

$$1 + t = x\frac{dt}{dx}. \qquad (20)$$

(20) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому для дальнейшего решения применим метод разделения переменных.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \qquad (21)$$

Интегрируем (21):

$$\ln|x| = \ln|1+t| + \ln|C| \qquad (22)$$

$$x = C(1+t)$$

$$x = C\left(1 + \frac{y}{x}\right) \qquad (23)$$

1.3 Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (24)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – известные функции, которые непрерывны на некотором интервале.

Для решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка применяется метод Бернулли, алгоритм которого состоит в следующем.

1. Решение ищем в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)v(x) \qquad (25)$$

($y' = u'v + v'u$)

Подставляя y и y' в (24), получаем:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \qquad (26)$$

Группируя по степеням функции $u(x)$, получаем:

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x)$$

2. Учитывая, что исходному уравнению должно удовлетворять именно произведение двух функций $u(x)v(x)$, одну из функций $u(x)$ или $v(x)$ можно выбрать произвольно. В качестве $v(x)$ возьмем любое частное решение дифференциального уравнения $v' + p(x)v = 0$. Тогда (26) предстает в виде:

$$u'v = q(x).$$

Т.о., (24) можно представить в виде системы двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases} \qquad (27)$$

3. Решая (27), находим $u(x)$ и $v(x)$, которые подставляем в (25). В результате находим общее решение дифференциального уравнения (24).

Пример 1.4

Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad (28)$$

Решение.

Решение ищем в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)v(x) \qquad (29)$$

$$y' = u'v + v'u$$

Подставляя y и y' в (28), получаем:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Группируя по степеням функции $u(x)$, получаем

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \qquad (30)$$

(30) можно представить в виде системы двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \qquad (31)$$

Решаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

Учитывая, что $v' = \dfrac{dv}{dx}$, получаем

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \qquad (32)$$

Интегрируя (32), получаем:

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x} \qquad (33)$$

Подставляем (33) во второе уравнение (31):

$$u'\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad (34)$$

(34) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Представляя $u' = \dfrac{du}{dx}$, получаем:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$ или

$$du = \frac{dx}{x} \quad (35)$$

Интегрируя (35), получаем:

$$u = \ln|x| + C \quad (36)$$

(33) и (36) подставляем в (29) и получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = (\ln|x| + C)\frac{1}{x} \quad (37)$$

1.4 Дифференциальные уравнения типа Бернулли

Дифференциальным уравнением типа Бернулли называется уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \text{ где } \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1 \quad (38)$$

Для решения уравнения (38) необходимо обе части уравнения разделить на y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{p(x)}{y^{\alpha+1}} = q(x)$$

Заменив $z = \frac{1}{y^{\alpha+1}}$ ($z' = -(\alpha+1)\frac{y'}{y^{\alpha}}$), уравнение (38) можно привести к линейному дифференциальному уравнению.

Пример 1.5.

Найти общий интеграл уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4 \quad (39)$$

Решение.

Разделим обе части (39) на y^4:

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{xy^3} = x^2 \quad (40)$$

сделаем замену:

$$z = \frac{1}{y^3}, \quad (41)$$

тогда $z' = -3\dfrac{y'}{y^4}$

Подставляя z и z' в (40), получаем: $z' - 3\dfrac{z}{x} = -3x^2$.
Решение ищем в виде произведения двух функций

$$z(x) = u(x)v(x) \quad (42)$$

$$z' = u'v + v'u$$

Подставляем z и z' в (40):

$$u'v + v'u - 3\frac{uv}{x} = -3x^2, \quad u'v + u\left(v' - 3\frac{v}{x}\right) = -3x^2,$$

получаем систему двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' - 3\dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = -3x^2 \end{cases} \quad (43)$$

Первое уравнение системы (43) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его методом разделения переменных:

$$v' - 3\frac{v}{x} = 0, \quad v' = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = 3\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 3\ln|x|,$$
$$v = x^3$$

Найденное значение функции $v(x)$ подставляем во второе уравнение (43) и находим значение функции $u(x)$:

$$u'x^3 = -3x^2, \quad u' = -\frac{3}{x}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{3}{x}, \quad du = -\frac{3}{x}dx,$$
$$u = -3\ln|x| + C$$

Найденные значения функций $v(x)$ и $u(x)$ подставляем в (42):

$$z = (-3\ln|x| + C)x^3$$

Учитывая (41), находим общий интеграл исходного уравнения:

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{\left(-3\ln|x|+C\right)x^3}}$$

2 Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида:

$$F(x,y,y',y'')=0, \qquad (1)$$

содержащее независимую переменную, неизвестную функцию, а также ее производные первого и второго порядка.

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$y=\varphi(x,C_1,C_2), \quad (2)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

З*адачей Коши* для дифференциального уравнения второго порядка называется задача нахождения частного решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 – заданные числа.

2.1 Уравнения, допускающие понижение порядка

Один из типов уравнений, допускающих понижение порядка, имеет вид:

$$y''=f(x) \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) применяется метод двукратного последовательного интегрирования:

$$y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2 \qquad (4)$$

Пример 2.1.

Решить задачу Коши:

$$y''=e^{2x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0 \qquad (5)$$

Решение.

Интегрируя (5), найдем y':

$$y'=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1 \qquad (6)$$

Интегрируя (6), найдем y:

$$y = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2 \qquad (7)$$

Учитывая начальные условия задачи Коши, а также формулы (6) и (7), найдем константы C_1 и C_2:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}e^{2\cdot 0} + C_1\cdot 0 + C_2 = 1 \\ \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + C_1 = 0 \end{cases}$$

, откуда

$$\begin{cases} C_2 = \frac{3}{4} \\ C_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Т.о., решение задачи Коши (5) имеет вид:

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \qquad (8)$$

2.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами называются уравнения вида:

$$y'' + p_1y' + p_2y = 0, \qquad (9)$$

где p_1, p_2 – действительные числа

По теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения для того, чтобы записать общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, достаточно найти $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые частные решения. Тогда общее решение будет иметь вид:

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (10)$$

Решение уравнение (9) ищется в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторая константа. Находим y' и y'', подставляя их в (10), получаем:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2\right) = 0 \quad (11)$$

Учитывая, что $e^{\lambda x} \neq 0$, получаем:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \quad (12)$$

Уравнение (12) является квадратным.

Уравнение (12) называется *характеристическим уравнением однородного дифференциального уравнения второго порядка* (15), а его корни – λ_1 и λ_2 – *характеристическими числами*.

От вида корней характеристического уравнения зависит вид общего решения уравнения (9).

Возможны три ситуации:

а) λ_1 и λ_2 – действительные числа и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения (9) будет иметь вид:

$$y_{oo} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}; \quad (13)$$

б) λ_1 и λ_2 – действительные числа и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда общее решение уравнения (9) будет иметь вид:

$$y_{oo} = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2 x\right) \quad (14)$$

в) λ_1 и λ_2 – комплексно сопряженные числа и $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тогда общее решение уравнения (9) будет иметь вид:

$$y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) \quad (15)$$

Пример 2.2.

Найти общие решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' + y' - 2y = 0$

б) $y'' - 8y' + 16 = 0$

в) $y''+4=0$

Решение.

а) $y''+y'-2y=0$ (16)

Составим характеристическое уравнение:

$\lambda^2+\lambda-2=0$

И, воспользовавшись формулой для вычислений коней квадратного уравнения, решим его:

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$, откуда $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$

λ_1 и λ_2 - действительные числа, причем $\lambda_1\neq\lambda_2$. Следовательно, общее решение уравнения (16) будет иметь вид:

$y_{oo}=C_1e^{-2x}+C_2e^x$.

б) $y''-8y'+16=0$

Составим характеристическое уравнение:

$\lambda^2-8\lambda+16=0$ (17)

и, воспользовавшись формулой для вычислений коней квадратного уравнения, решим его:

$\lambda_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{0}}{2}=4$, λ_1 и λ_2 - действительные числа, причем $\lambda_1=\lambda_2$. Следовательно, общее решение уравнения (17) будет иметь вид:

$y_{oo}=e^{4x}(C_1+C_2x)$.

в) $y''+4=0$ (18)

Составим характеристическое уравнение:

$\lambda^2+4=0$

и решим его:

$\lambda^2=-4$, $\lambda_{1,2}=\pm2i$ λ_1 и λ_2 – комплексно сопряженные числа и $\lambda_{1,2}=0\pm2i$. Общее решение уравнения (9) будет иметь вид:

$y_{oo}=e^0(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$,

$$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

2.2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \quad (19)$$

где $f(x)$ – известная функция, которая непрерывна на некотором промежутке.

По теореме о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{хн}}(x), \qquad (20)$$

где $y_{\text{оо}}(x)$- общее решение дифференциального уравнения (20), $y_{\text{чн}}(x)$ - некоторое частное решение (20) .

Учитывая, что λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения (12), а функция $f(x)$ в (19) представима в виде:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (21)$$

где $P_n(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены от x с известными коэффициентами степени n и m соответственно, частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ можно искать в виде:

$$y_{\text{чн}}(x) = x^r e^{\alpha x}(V_d(x)\cos\beta x + S_d(x)\sin\beta x) \qquad (22)$$

где

$$r = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha + i\beta \text{ не является корнем (16)} \\ 1, \text{ если } \alpha + i\beta \text{ является однократным корнем (16)} \\ 2, \text{ если } \alpha + i\beta \text{ является двукратным корнем (16)} \end{cases} \qquad (23)$$

а $V_d(x)$, $S_d(x)$ – многочлены от x степени d с неизвестными коэффициентами, $d = \max\{n,m\}$. Коэффициенты многочленов $V_d(x)$, $S_d(x)$ вычисляются при помощи метода неопределенных коэффициентов.

Пример 2.3.

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $2y'' + y' - y = 32e^x$ (24)

Решение.

1. Найдем $y_{oo}(x)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения (24).

Составим характеристическое уравнение:

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad (25)$$

И, воспользовавшись формулой для вычислений коней квадратного уравнения, решим его:

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$, $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ – действительные числа, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Следовательно, общее решение уравнения (24) будет иметь вид:

$$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

2. Найдем $y_{чн}(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (24).

Сравнивая $f(x) = 32e^x$ с (21), получаем, что $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $n = 0$, $m = 0$. Учитывая, что $\alpha + i\beta = 1$ и сравнивая полученный результат с корнями характеристического уравнения (25), получаем $r = 0$. Находим $d = \max\{n, m\} = 0$.

В результате, частное решение неоднородного уравнения (24) будет иметь вид:

$$y_{чн} = e^{1\cdot x}(A\cos(0 \cdot x) + B\sin(0 \cdot x)) = Ae^x \quad (26)$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = Ae^x$$

$$y''_{чн} = Ae^x$$

Подставляем $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в (24):

$2Ae^x + Ae^x y - Ae^x = 32e^x$, $2Ae^x = 32e^x$, откуда $A = 16$ и $y_{чн} = 16e^x$

Согласно (20), общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (24) будет иметь вид:

$$y_{он} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + 16e^x \qquad (27)$$

Пример 2.4.

Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = 2\sin x + 2\cos x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \qquad (28)$$

Решение.

1. Найдем $y_{оо}(x)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения (28). Для уравнения:

$$y'' + y = 0 \qquad (29)$$

составим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm i$ – комплексные числа, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Следовательно, общее решение уравнения (29) будет иметь вид:

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. Найдем $y_{чн}(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (28).

Сравнивая $f(x) = 2\sin x + 2\cos x$ с (21), получаем, что $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 0$, $m = 0$. Учитывая, что $\alpha + i\beta = i$ и сравнивая полученный результат с корнями характеристического уравнения (29), получаем $r = 1$. Находим $d = \max\{n, m\} = 0$

В результате, частное решение неоднородного уравнения (28) будет иметь вид:

$$y_{чн} = e^{0\cdot x} x^1 (A\cos x + B\sin x) = x(A\cos x + B\sin x) \qquad (30)$$

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = (A\cos x + B\sin x) + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y''_{чн} = -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x$$

Подставляем $y_{чн}$ и $y''_{чн}$ в (28):

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 2\sin x + 2\cos x$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в правой и левой частях уравнения, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 2B = 2 \end{cases},$$

откуда $A = -1$, $B = 1$ и $y_{чн} = x(-\cos x + \sin x)$

Согласно (20), общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (28) будет иметь вид:

$$y_{он}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x(-\cos x + \sin x) \quad (31)$$

Учитывая начальные условия задачи Коши, а также формулу (31)

найдем константы C_1 и C_2. Для этого найдем

$$y'_{он}(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x + (-\cos x + \sin x) + x(-\sin x + \cos x)$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$

Т.о., решение задачи Коши (28) будет иметь вид:

$$y_{он}(x) = \sin x + x(-\cos x + \sin x).$$

3 Системы дифференциальных уравнений

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется совокупность n, $n \in \mathrm{N}$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases},$$

(1)

где $y_j = y_j(x)$, $j = 1,\ldots, \mathrm{n}$ – искомые функции, $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $i, j = 1,\ldots, \mathrm{n}$, которые являются коэффициентами системы, и $f_i = f_i(x)$, которые являются свободными членами, – известные функции, непрерывные на некотором промежутке $(a,b) \subset R$.

Множество непрерывно-дифференцируемых на (a,b) функций $y_j = y_j(x)$, $j = 1,\ldots, \mathrm{n}$ при подстановке которых в (1) каждое уравнение системы обращается на (a,b) в верное тождество, называется *решением системы* (1).

Нормальная система дифференциальных уравнений называется однородной, если для всех свободных членов выполняется условие $f_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots, \mathrm{n}$. В противном случае система (1) называется неоднородной.

Допускается запись системы (1) в матричной форме: $Y'y = A \cdot Y + F$, где $A = ((a_{ij}))$ – матрица системы, $F = (f_1, f_2,\ldots, f_n)^T$ – вектор-столбец свободных членов, $Y = (y_1, y_2,\ldots, y_n)^T$ – столбец неизвестных, $Y' = (y_1', y_2',\ldots, y_n')^T$ – столбец производных от известных функций.

Теория решений неоднородных нормальных линейных систем дифференциальных уравнений напоминает теорию решений одного линейного дифференциального уравнения порядка n. Общее решение неоднородной системы (1) имеет вид:

$$Y_{OH} = Y_{OO} + Y_{ЧН},$$

где Y_{OO} – общее решение соответствующей однородной системы

$$Y' = A \cdot Y \quad ,(2)$$

а $Y_{ЧН}$ – какое – либо частное решение неоднородной системы (1).

Структура общего решения соответствующей однородной системы определяется формулой:

$Y_{OO} = \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j$, где Y_1, …, Y_n – фундаментальная система однородных решений системы (2), C_1, …, C_n – произвольные постоянные.

Если коэффициенты системы a_{ij}, (i, j = 1, … n) представляют собой постоянные числа, то для нахождения фундаментальной системы применяется метод Эйлера, т.е. решения ищутся в виде:

$$Y_j = e^{\lambda_j x} \gamma_j \ (i, j = 1, \dots n),$$

где λ_j – некоторое число, $\gamma_j = (\gamma_{1j}, \dots, \gamma_{nj})^T$ – вектор-столбец с неизвестными компонентами γ_{kj} (k = 1, … n).

Неизвестное число λ_j и вектор γ_j определяются из матричного уравнения:

$$A\gamma_j = \lambda_j \gamma_j \qquad (3)$$

Если для числа λ_j существует ненулевой вектор γ_j такой, что выполнено равенство (3), то число λ_j называется собственным (характеристическим) значением системы (2)

Матричное уравнение (3) имеет нетривиальное решение γ_j тогда и только тогда, когда λ_j является корнем уравнения:

$$\det(A-\lambda E) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \ldots & & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\lambda & \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

где E – единичная матрица порядка n.

Уравнение (4) называется характеристическим (вековым) уравнением для системы (2) и представляет собой алгебраической уравнение степени n, решая которое можно найти λ_1, λ_2,…, λ_n. Для каждого λ_j, являющегося решением матричного уравнения (3) находим соответствующий ненулевой вектор γ_j, который называется собственным вектором системы (2).

Если все корни характеристического уравнения $\lambda_j \in R$, $j=1,\ldots,n$ и $\lambda_j \neq \lambda_i$, если $i \neq j$, то система вектор функций $Y_j = e^{\lambda_j x}\gamma_j$, $j=1,\ldots,n$ линейно независима и образует фундаментальную систему решений (2). Тогда

$$Y_{OO} = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}\gamma_j$$

или в координатной форме:

$$Y_{1OO} = C_1 e^{\lambda_1 x}\gamma_{11} + C_2 e^{\lambda_2 x}\gamma_{12} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\gamma_{1n}$$
$$Y_{2OO} = C_1 e^{\lambda_1 x}\gamma_{21} + C_2 e^{\lambda_2 x}\gamma_{22} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\gamma_{2n}$$
$$\ldots$$
$$Y_{nOO} = C_1 e^{\lambda_1 x}\gamma_{n1} + C_2 e^{\lambda_2 x}\gamma_{n2} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\gamma_{nn\backslash}$$

Если $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ - простой корень уравнения (4) , а γ_j - комплексный, соответствующий λ_j вектор, то также корнем уравнения (4) является и $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j$. Также можно отыскать вектор $\overline{\gamma_j}$, имеющий компоненты, комплексно-сопряженные компонентам вектора γ_j и соответствующий собственному значению $\overline{\lambda_j}$.

Легко можно отделить действительные и мнимые части у компонент вектор-столбцов $Y_j = e^{\lambda_j x}\gamma_j$ и $\overline{Y_j} = e^{\overline{\lambda_j} x}\overline{\gamma_j}$. В результате найдем две действительные вектор-функции, которые входят в фундаментальную систему однородных решений: $U_j = \operatorname{Re} Y_j$ и $V_j = \operatorname{Im} Y_j$.

Частное решение неоднородной системы (1) отыскивается при помощи метода вариации постоянных

$$Y_{ЧН} = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) Y_j(x)$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ можно найти из имеющей единственное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1' y_{11} + C_2' y_{12} + \ldots + C_n' y_{1n} = f_1 \\ C_1' y_{21} + C_2' y_{22} + \ldots + C_n' y_{2n} = f_2 \\ \ldots \\ C_1' y_{n1} + C_2' y_{n2} + \ldots + C_n' y_{nn} = f_n \end{cases} \qquad (5)$$

Пример 3.1.

Найти общее решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + .tgx \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \qquad (6)$$

Решение.

1. Найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

Учитывая (4), найдем все собственные значения системы.

Матрица характеристического уравнения для системы (6) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Или

$$\lambda^2 + 1 = 0. \qquad (7)$$

Решая (7), находим собственные числа системы $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Для собственных чисел находим соответствующие собственные векторы.

а) $\lambda_1 = i$. Соответствующий собственный вектор $\gamma_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21})^T$ находится из уравнения $A\gamma_1 = \lambda_1\gamma_1$, которое в координатной форме равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_{21} = i\gamma_{11} \\ -\gamma_{11} = i\gamma_{21} \end{cases} \qquad (8)$$

Система (8) имеет бесконечное множество решений. Из любого уравнения системы можно получить нетривиальное решение. Так, например, полагая $\gamma_{11}=1$, из первого уравнения системы (8) получим $\gamma_{21}=i$. В результате $\gamma_1=(1,i)^T$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1=i$

б) $\lambda_2=-i$. Аналогично можно найти соответствующий λ_2 собственный вектор $\gamma_2=(1,-i)^T$.

Фундаментальная система решений однородной системы дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$Y_1=e^{ix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x+i\sin x\\ i\cos x-\sin x\end{pmatrix},$$

$$Y_2=e^{-ix}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x-i\sin x\\ -i\cos x-\sin x\end{pmatrix}$$

Отделим действительные и мнимые части координат, в результате получим действительные вектор-функции.

$$U==\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix} \text{ и } V==\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix},$$

которые образуют фундаментальную систему решений однородной системы дифференциальных уравнений.

Таким образом, общее решение однородной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$Y_{OO}=C_1U+C_2V=C_1\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix},$$

C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Применяя метод вариации постоянных, частное решение исходной системы будем искать в виде:

$$Y_{Ч.Н}=C_1(x)\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+C_2(x)\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix},$$

где неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ находятся из системы уравнений (5), которая в условиях нашего примера имеет вид:

$$\begin{cases}C_1'\cos x+C_2'\sin x=tgx\\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=0\end{cases} \qquad (9)$$

Решения систему (9), находим:

$C_1'=\sin x$ и $C_2'=\sin x\cdot tgx$

Откуда, интегрируя, получаем $C_1=\int\sin xdx=-\cos x$ и $C_2=\int\sin x\cdot tgxdx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=$

$$=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)dx=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x$$

Для общего решения неоднородной системы:

$$Y_{OH}=Y_{OO}+Y_{ЧН}=\left(\overline{C}_1+C_1(x)\right)\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+\left(\overline{C}_2+C_2(x)\right)\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

В координатной форме:

$$y_{1OH}\left(\overline{C}_1-\cos x\right)\cos x+\left(\overline{C}_2+\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x\right)\sin x$$

$$y_{2OH}-\left(\overline{C}_1-\cos x\right)\sin x+\left(\overline{C}_2+\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x\right)\cos x$$

(10)

В (10) C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Существует еще один метод решения нормальной системы дифференциальных уравнений – метод исключения. Смысл этого метода состоит в том, что Нормальная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

сводится к одному линейному дифференциальному уравнению

n-ого порядка для одной из искомых функций. Для этого какая-либо одна искомая функция дифференцируется, а все остальные искомые функции исключаются из системы. В результате решения линейного дифференциального уравнения n-ого порядка находится искомая функция, а затем и все остальные. Для этого они выражаются через найденную функцию и ее производные.

Пример 3.2

Применяя метод исключения, найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} y' = 3y + 2z \\ z' = -9y - 3z + 2x \end{cases} \qquad (11)$$

Решение.

Продифференцируем первое уравнение (11):

$$y'' = 3y' + 2z' \qquad (12)$$

Подставляем в (12) z' из второго уравнения системы, получаем:

$$y'' = 3y' + 2(-9y - 3z + 2x) = 3y' - 18y - 6z + 4x \qquad (13)$$

Их первого уравнения (11) выражаем z:

$$z = \frac{y' - 3y}{2} \qquad (14)$$

Подставляем (14) в (13):

$y'' = -9y + 4x$ или $y'' + 9y = 4x$

Решая получившееся линейное неоднородное уравнение второго порядка, находим его общее решение:

$$y_{OH} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{4}{9}x \qquad (15)$$

Учитывая (14) и (15), находим вторую компоненту z_{OH}:

$$z_{OH} = \frac{y'_{OH} - 3y_{OH}}{2} = -\frac{3}{2}\sin 3x(C_2 + C_1) + \frac{3}{2}\cos 3x(C_2 - C_1) + \frac{4}{9} - \frac{4}{3}x$$

Задания для самостоятельной работы

№	Найти общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений.
1	$\begin{cases} y' = 3y - 3z \\ z' = 6y - 6z + \cos 5x \end{cases}$
2	$\begin{cases} y' = 2y - 2z \\ z' = y + 5z - 4x \end{cases}$
3	$\begin{cases} y' = y + 2z + 3x \\ z' = 5y - 2z \end{cases}$
4	$\begin{cases} y' = y - 2z - 2\cos 2x \\ z' = 3y + 6z \end{cases}$
5	$\begin{cases} y' = 6y - 11z \\ z' = 5y - 10z + \sin 3x \end{cases}$
6	$\begin{cases} y' = -8y - 5z + 3\sin 2x \\ z' = 6y + 3z \end{cases}$
7	$\begin{cases} y' = -4y - 9z \\ z' = 4y + 8z + 6x \end{cases}$
8	$\begin{cases} y' = y - 2z - 4x \\ z' = y + 4z \end{cases}$
9	$\begin{cases} y' = -7y - 8z - \cos 3x \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$
10	$\begin{cases} y' = 3y - 13z - \cos 9x \\ z' = y - z \end{cases}$
11	$\begin{cases} y' = 8y + 2z + e^{8x} \\ z' = 10y - z \end{cases}$

12	$\begin{cases} y' = 5y - 5z \\ z' = 5y - 3z + 7x^2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} y' = 9y - 7z \\ z' = 7y - 5z + e^{-4x} \end{cases}$
14	$\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = 7y - 6z + \cos 2x \end{cases}$
15	$\begin{cases} y' = -3y - 7z \\ z' = 6y + 10z + 2\sin 4x \end{cases}$
16	$\begin{cases} y' = 3y - 5z \\ z' = 2z + \cos 4x \end{cases}$
17	$\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ z' = 6y - 2z + \sin 6x \end{cases}$
18	$\begin{cases} y' = 6y - 6z \\ z' = 5y - 7z + 2\sin 5x \end{cases}$
19	$\begin{cases} y' = 2y - 13z \\ z' = y - 2z + e^{5x} \end{cases}$
20	$\begin{cases} y' = 9y - 7z + 3x^2 \\ z' = 6y + 10z \end{cases}$
21	$\begin{cases} y' = -y - 3z \\ z' = 4y + 6z + 3x^2 \end{cases}$
22	$\begin{cases} y' = 6y + 5z + e^{2x} \\ z' = -9y - 6z \end{cases}$
23	$\begin{cases} y' = 2y - 13z \\ z' = y - 2z + e^{5x} \end{cases}$

24	$\begin{cases} y' = -2y + 8z - 8x^2 \\ z' = -2y + 6z \end{cases}$
25	$\begin{cases} y' = -4y + 4z \\ z' = -11y + 10z + x^2 \end{cases}$

СПИСОК ИССПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения.- М.: КомКнига/URSS, 2006

2. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения- СПб:Лань, 2008. (http://e.lanbook.com, С любой точки доступа для авторизованного пользователя)

3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - СПб:Лань, 2002. (http://e.lanbook.com, С любой точки доступа для авторизованного пользователя)

4. Соловьев И.А., Шевелев В.В., Червяков А.В. и др. Практическое руководство к решению задач по математике. Кратные интегралы, теория функций комплексного переменного, обыкновенные дифференциальные уравнения. - СПб:Лань, 2009. (http://e.lanbook.com, С любой точки доступа для авторизованного пользователя)