



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Эксплуатация транспортных систем и логистика»

Учебное пособие по дисциплине

«Теория механизмов и машин»

Авторы
Косенко Е. Е.,
Косенко В. В.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения направлений 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Эксплуатация транспортных систем и логистика»

Косенко Е.Е.,

к.т.н., доцент кафедры «Эксплуатация транспортных систем и логистика»

Косенко В.В.



Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Раздел 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	5
1.1 Классификация кинематических пар.....	5
1.2 Кинематические цепи	8
1.3 Структурные группы и их классификация	12
1.4 Структурный анализ механизма	13
Раздел 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ	16
2.1 Задачи и методы кинематического анализа	16
2.2 Графический метод.....	16
2.3 Графоаналитический метод	18
Раздел 3. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ.....	29
3.1 Задача силового расчета, классификация сил.....	29
3.2 Статическая определимость структурных групп.....	30
3.3 Силы инерции звеньев механизма	31
3.5 Силовой расчет начального звена	36
3.6 Силовой расчет механизма	38
Раздел 4. ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ.....	44
4.1 Режимы работы машины. Уравнение движения машины.....	44
4.2 Приведение сил	45
4.3 Приведение масс	47
Раздел 5. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС	53
5.1 Общие сведения об уравновешивании	53
5.2 Уравновешивание вращающихся масс	53
5.3 Динамическое уравновешивание ротора.....	56
5.4 Балансировка роторов	58
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	62

ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие машиностроения неразрывно связано с созданием новых, более совершенных конструкций механизмов и машин. Проектирование схем новых машин и механизмов различного по функциональному назначения и конструктивному исполнению базируется на общих законах механики, изучаемых в рамках курса теории механизмов и машин (ТММ).

В своем изложении ТММ опирается на сведения, полученные студентами при изучении физики, математики, черчения, теоретической механики. ТММ является базовой дисциплиной, изучающей решение задач анализа и задач синтеза механизмов и машин.

Задачи анализа включают проведение структурного, кинематического и динамического исследования свойств механизмов и машин.

Задачей синтеза является проектирование схем механизмов и машин по заданным кинематическим и динамическим условиям.

Таким образом, анализ современного развития машиностроения в области расчета и проектирования машин и механизмов показывает, что знания, полученные при изучении курса ТММ нужны и инженеру-конструктору, чтобы рационально спроектировать машину, и инженеру-технологу - чтобы эффективно использовать машину, и инженеру - эксплуатационщику - чтобы правильно эксплуатировать машину.

РАЗДЕЛ 1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

1.1 Классификация кинематических пар

Элементарной составной частью любого механизма является звено. Звенья бывают простые и сложные.

Простые звенья – звенья, состоящие из одной детали.

Сложные звенья – звенья, состоящие из нескольких деталей, иногда сложные звенья могут состоять из различных материалов, жёстко связанных между собой. Подавляющее большинство звеньев – сложные звенья.

Два звена могут соединяться друг с другом с помощью кинематических пар.

Кинематической парой называется подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев.

Кинематические пары классифицируются по следующим трём признакам:

- по количеству отнимаемых у звеньев движений;
- по виду контактирующих поверхностей;
- по способу образования или замыкания.

По первому признаку кинематические пары делятся на пять классов (первый класс – одно отнятое движение; второй класс – два отнятых движения и т.д.). При этом число степеней подвижности можно определить по формуле: $H = 6 - S$. Примеры кинематических пар различных классов представлены на рис.1.1.

Кинематическая пара первого класса может быть представлена как шар на плоскости (рис. 1.1). Пластина отнимает у положенного на нее шара только движение вдоль оси Oz перпендикулярно к опорной поверхности.

Кинематическая пара второго класса может быть представлена как цилиндр на опорной плоскости (рис. 1.1). Кинематическая пара третьего класса может быть представлена как шаровой шарнир (рис. 1.1).

Кинематическая пара четвертого класса конструктивно представлена валом во втулке (рис. 1.2). Возможные движения – вращение вокруг оси x и движение вдоль этой оси.

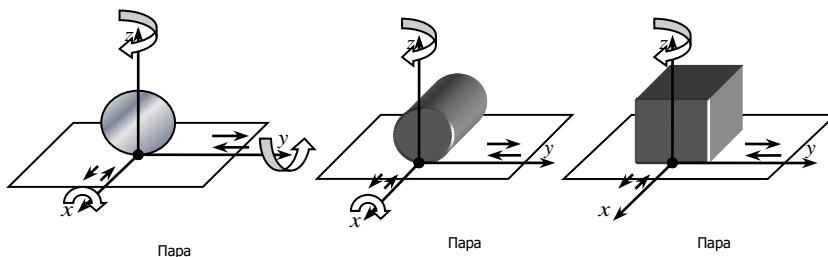


Рис. 1.1

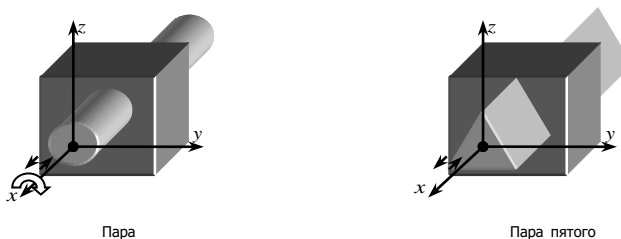


Рис. 1.2

Кинематическая пара пятого класса конструктивно может быть представлена тем же валом во втулке, если на вале имеются буртик и стопорное кольцо, отнимающее возможность движения вдоль оси x (рис. 1.2). Остается возможным только одно движение - вращение вокруг оси.

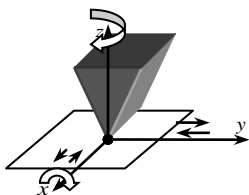
По второму признаку кинематические пары разделяют на высшие и низшие. В высших парах контакт происходит по линии или в точке, а в низших контакт происходит по поверхности. Преимущество низших пар состоит в том, что усилие в зоне контакта распределяется на большую площадь и в них сильнее контактные напряжения. Преимущество высших пар заключается в том, что в механизмах с этими парами более просто получить требуемый закон движения выходного звена.

По третьему признаку кинематические пары делятся на пары с геометрическим замыканием и пары с силовым замыканием. В парах с геометрическим замыканием соединение звеньев обеспечивается геометрической формой звеньев. В парах с силовым замыканием для удержания контакта необходимы внешние силы. Примеры классификации пар показаны на рис. 1.3.

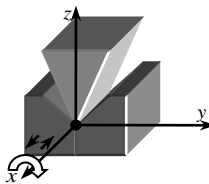
Кроме этого, в зависимости от числа налагаемых связей на подвижность каждого из звеньев, все пары делятся на пять классов. Число степеней подвижности обозначается за H . Число налагаемых связей обозначается за S

Пока звенья не соединены в кинематическую пару, то каждое звено имеет 6 степеней свободы: три возможных поступательных перемещения вдоль трех неподвижных координатных осей и три вращательных движения вокруг этих осей.

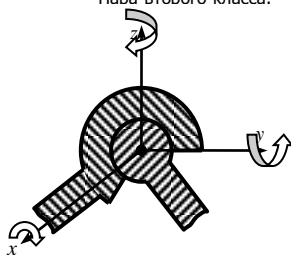
Соединение двух звеньев в кинематическую пару приводит к тому, что при движении относительно друг друга звенья не имеют возможности осуществлять все движения свободного тела, т. е. теряют некоторые из степеней свободы. Ограничения, наложенные на относительное движение звеньев, называют связями. Комбинация связей во всех контактных точках, зависящая от конструктивной формы элементов кинематической пары, приводит к тому или иному виду относительного движения.



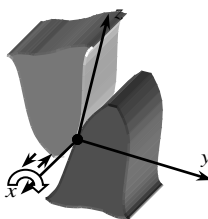
Пара второго класса:



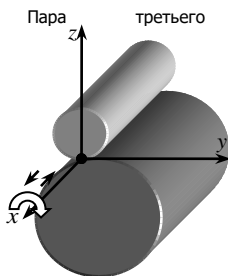
Пара четвёртого



Пара третьего

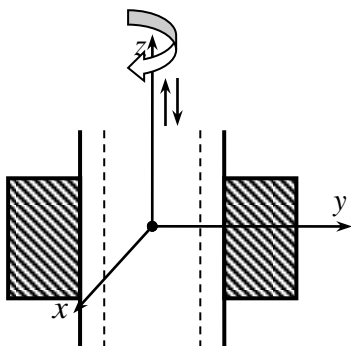


Пара четвёртого



Пара четвёртого класса:

$S=4$ Рис. 1.3 - Примеры классификации пар



Рассмотрим кинематическую пару «винт-гайка» (рис. 1.4). Число степеней подвижности этой пары H равно 1, а число налагаемых связей S равно 5. Это пара будет являться парой пятого класса, свободным можно выбрать только один вид движения для винта или гайки, а второе движение будет сопутствующим.

Рис. 1.4 –
Кинематическая пара
«винт-гайка»

1.2 Кинематические цепи

Звенья, соединённые кинематическими парами, образуют кинематические цепи.

Как пространственные (есть точки звеньев, перемещающиеся в не параллельных плоскостях), так и плоские (точки звеньев перемещаются в параллельных плоскостях) кинематические цепи бывают простые и сложные, замкнутые и незамкнутые.

Кинематические цепи являются простыми, если все звенья входят в состав не более двух кинематических пар, и сложными, если хотя бы одно из звеньев входит в состав трёх и более кинематических пар (рис. 1.5, а).

Сложная кинематическая цепь - кинематическая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, образующее с другими звеньями более двух кинематических пар (рис. 1.5, б).

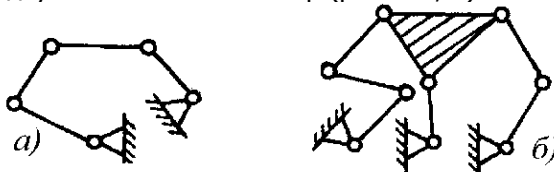


Рис. 1.5 - Сложная кинематическая цепь

Замкнутая кинематическая цепь - кинематическая цепь, каждое звено которой образует с другими звеньями не менее двух кинематических пар (рис. 1.5, а).

Незамкнутая кинематическая цепь - кинематическая цепь, в которой есть хотя бы одно звено, образующее только одну кинематическую пару (рис. 1.5, 6).

На рис. 1.6 показана плоская, простая, незамкнутая кинематическая цепь. Неподвижное звено кинематической цепи называется стойка и на схемах обозначается "0".

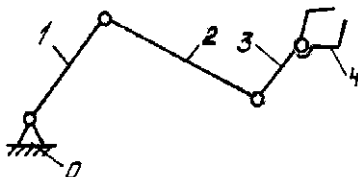
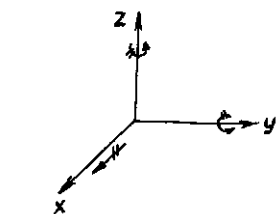


Рис. 1.6 - Незамкнутая кинематическая цепь

Пусть имеется пространственная кинематическая цепь, состоящая из m звеньев, соединенных кинематическими парами различных классов. При этом p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 - число кинематических пар 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го классов соответственно. Каждое звено до соединения кинематической парой с другим звеном обладало шестью степенями свободы, а m звеньев - $6m$ степенями свободы. После соединения звеньев кинематическими парами каждая пара 1-го класса накладывает одно условие связи, 2-го класса - два, 3-го класса - три, 4-го класса - четыре, 5-го класса - пять условий связи.

Тогда, общее число степеней свободы кинематической цепи в пространстве можно определить из выражения:

$$H = 6m - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \quad (1.1)$$



условия связи

В плоской цепи на все звенья наложено три общих условия связи условия связи условия связи (рис. 1.7). Поэтому m несвязанных звеньев такой цепи обладают $(6 - 3)m = 3m$ степенями свободы.

Тогда уравнение для определения числа степеней свободы плоской цепи примет вид:

$$H = 3m - 2p_5 - 1p_4 \quad (1.2)$$

В качестве примера определим число степеней свободы кинематической цепи, изображенной на рис. 1.8.

Так как кинематическая цепь плоская, то воспользуемся выражением (1.2):

$$H = 3m - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 0 = 5.$$

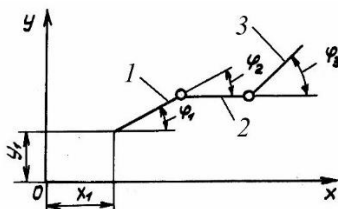


Рис. 1.8 - число степеней свободы кинематической цепи

Число степеней свободы кинематической цепи - число независимых возможных перемещений или число обобщенных координат, определяющих положение всех звеньев цепи относительно некоторой системы координат.

В данном примере $H = 5$, т. е. пять обобщенных координат ($x_1, y_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) определяют положение цепи на плоскости $хоу$.

Учитывая, что в механизмах одно из звеньев кинематической цепи принимается за неподвижное, общее число степеней свободы для пространственной цепи уменьшится на 6, а для плоской на 3.

$$W = H - 6 = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (1.3)$$

где $n = m - 1$ - число подвижных звеньев.

Равенство (1.3) носит название структурной формулы пространственной кинематической цепи Сомова - Малышева. На основании (1.2) для плоской цепи:

$$W = H - 3 = 3n - 2p_5 - p. \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) носит название формулы Чебышева.

Степень подвижности механизма определяется числом степеней свободы W относительно стойки. Для того чтобы осуществлялось требуемое преобразование движений, необходимо, чтобы степень подвижности цепи совпадала с числом ее начальных звеньев. Таким образом, степень подвижности определяет условия, при котором данная кинематическая цепь будет удовлетворять понятию механизм.

Вычислим степень подвижности механизма, представленного в условных обозначениях (структурная схема), на рис. 1.9.

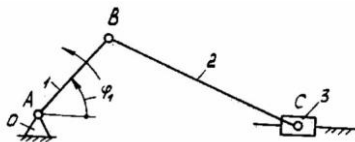


Рис. 1.9 - степень подвижности механизма

Кинематические пары обозначены заглавными латинскими буквами.

Воспользуемся формулой Чебышева (1.4):

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Условие $W = 1$ означает, что при одном начальном звене (на рисунке 1.9 - звено 1) данная кинематическая цепь удовлетворяет понятию механизм.

В 1914 г. русским ученым Л.В. Ассуром был сформулирован принцип образования механизмов путем последовательного присоединения к группе начальных звеньев (стойка и начальные звенья) простейших кинематических цепей с нулевой степенью подвижности. Кинематические цепи с нулевой степенью подвижности являются простейшими кинематическими цепями и получили название групп Ассура или структурных групп. В дальнейшем с целью упрощения будем рассматривать плоские механизмы, в состав которых входят только кинематические пары 5-го класса. В соответствии с (1.4) выражение для определения степени подвижности структурных групп $W_{гр}$ примет вид:

$$W_{гр} = 3n - 2p_5 - p_4 = 0, \quad (1.5)$$

откуда

$$p_5 = 3/2n. \quad (1.6)$$

Условию (1.6) удовлетворяют только следующие сочетания звеньев и кинематических пар:

$$n = 2, p_5 = 3; n = 4, p_5 = 6; n = 6, p_5 = 9; \dots$$

Таким образом, структурные группы должны содержать четное число звеньев и в полтора раза большее число кинематических пар 5-го класса.

Структурные группы характеризуются классом и порядком. Класс структурной группы определяется числом кинематических пар наиболее сложного контура. Порядок структурной группы определяется числом свободных элементов кинематических пар, которыми группа присоединяется к другим звеньям (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1

Число свободных элементов кинематических пар

Группа Ассура	Наиболее сложный контур	Число кинематических пар в контуре	Класс группы	Порядок группы
		2	2	2
		3	3	3
		4	4	2

Группы второго класса, как наиболее распространенные в плоских механизмах, различаются по виду. Вид структурной группы второго класса определяется числом и расположением поступательных пар (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Число и расположение поступательных пар

Вид группы	Структурная группа	Чередование кинематических пар	Механизм
1		ВВВ	
2		ВВП или ПВВ	
3		ВПВ	
4		ПВП	
5		ВВП или ППВ	

1.3 Структурные группы и их классификация

Структурный анализ механизма заключается в изучении его строения. При этом необходимо:

а) выяснить, из каких звеньев и кинематических пар состоит кинематическая цепь;

б) вычислить степень подвижности и определить, удовлетворяет ли данная кинематическая цепь понятию "механизм";

в) выделить структурные группы, определить их класс, порядок и вид;

г) выделить группу начальных звеньев, степень подвижности которой должна быть равна степени подвижности всего механизма;

д) определить класс механизма.

При проведении структурного анализа структурные группы следует выделять, начиная с группы наиболее удаленной от начального звена.

Кривошип - звено рычажного механизма, которое может совершать полный оборот вокруг неподвижной оси и входит во вращательную пару с подвижным звеном.

Коромысло - звено, которое может совершать неполный оборот вокруг неподвижной оси и входит во вращательную пару с подвижным звеном.

Шатун – звено, образующее кинематические пары с подвижными звеньями.

Ползун - звено, образующее поступательную пару со стойкой.

Кулиса - звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее поступательную пару с подвижным звеном.

1.4 Структурный анализ механизма

При выполнении структурного анализа и вычислении степени подвижности возможны противоречия, связанные с появлением лишних степеней свободы или пассивных связей.

Лишние степени свободы - степени свободы, не влияющие на характер движения механизма в целом. Рассмотрим рис. 1.11, а.

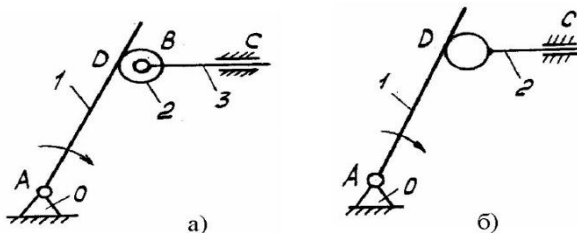


Рис. 1.11 Схема для расчета

Вычислим степень подвижности:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2,$$

где $n = 3$ - число подвижных звеньев;

$p_5 = 3$ - число низших кинематических пар (A, B, C);

$p_4 = 1$ - число высших кинематических пар (D).

Вращение ролика вокруг оси B не влияет на характер движения остальных звеньев механизма, т.е. дает лишнюю степень свободы. На рис. 1.11, б показан механизм без лишней степени свободы:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Пассивные связи - связи, не накладывающие ограничений на движение звеньев механизма.

На рис. 1.12, а представлен механизм с пассивной связью:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0.$$

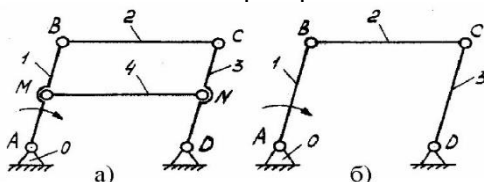


Рис. 1.12 - Механизм с пассивной связью

Звено 4 с кинематическими парами M и N вносит пассивную связь. На рис. 1.12, б показан механизм без пассивной связи: $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$.

В ряде случаев, с целью упрощения исследований, целесообразно строить заменяющие механизмы, в состав которых входят только низшие кинематические пары 5-го класса. При этом заменяющий механизм должен обладать прежней степенью подвижности и сохранять мгновенное относительное движение звеньев.

При построении заменяющих механизмов необходимо избавляться от высших кинематических пар. На рис. 1.13 пунктирами показаны схемы заменяющих механизмов: высшая кинематическая пара образована путем соприкосновения звеньев

своими криволинейными поверхностями (рис. 1.13, а); высшая пара образована путем соприкосновения звеньев с криволинейной и плоской поверхностями (рис. 1.13, б).

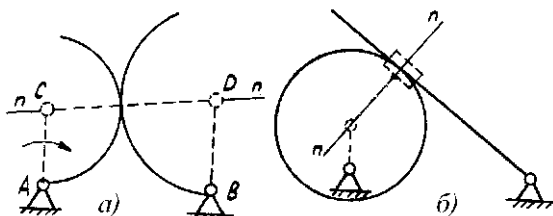


Рис. 1.13 - Схема для расчета

Как видно из рисунков, через точку контакта проведены нормали, на которых отмечены центры кривизны. В центрах кривизны помещены вращательные пары. Если центр кривизны одного из звеньев в точке контакта находится в бесконечности (для прямой), то в этом случае дополнительно вводится поступательная пара (см. рис.1.13,б). Таким образом, высшая кинематическая пара эквивалентна одному звену, образующему две низшие кинематические пары 5-го класса (рис. 1.14).

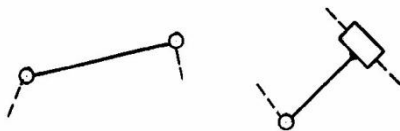


Рис. 1.14 - Низшие кинематические пары 5-го класса

РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

2.1 Задачи и методы кинематического анализа

Задачами кинематического анализа механизма являются:

а) определение положений звеньев и построение траекторий точек;

б) определение линейных скоростей и ускорений точек звеньев механизма;

в) определение угловых скоростей и ускорений звеньев механизма.

С целью проведения кинематического анализа механизмов используют различные методы:

а) графический (метод кинематических диаграмм) - наглядный, но неточный;

б) графоаналитический (метод планов) - наглядный и достаточно точный для предварительных расчетов;

в) аналитический - более точный, чем графический и графоаналитический, однако не обладает наглядностью и довольно трудоемкий;

г) экспериментальный - не требует допущений, предполагаемых в трех предыдущих методах (размеры звеньев точно соответствуют чертежу, а сами звенья абсолютно жесткие, отсутствуют зазоры в кинематических парах), благодаря чему учитываются все факторы, оказывающие влияние на кинематику механизма, но требует наличия механизма и соответствующей аппаратуры, обладает большой трудоемкостью.

На примере плоских рычажных механизмов 2-го класса рассмотрим графический и графоаналитический методы кинематического анализа.

2.2 Графический метод

Для проведения кинематического анализа графическим методом необходимо построить совмещенные планы механизма.

Совмещенные планы механизма - планы механизма, выполненные в одной системе координат для ряда последовательных значений обобщенной координаты, т. е. для ряда последовательных положений начального звена.

План механизма - кинематическая схема механизма для заданного положения начального звена.

Совмещенные планы механизма должны быть построены с

учетом принятого масштабного коэффициента длины.

Масштабный коэффициент - число, показывающее, сколько единиц физической величины содержится в одном миллиметре чертежа.

На рис. 2.1 показаны совмещенные планы кривошипно-ползунного механизма. Масштабный коэффициент длины принят как $\mu_l = l_{AB} / AB$, (м/мм).

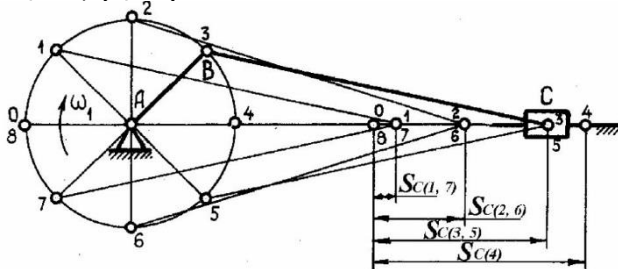


Рис. 2.1 - Совмещенные планы кривошипно-ползунного механизма

На рис. 2.2, а построена диаграмма перемещений точки C в зависимости от времени $S_c = S_c(t)$.

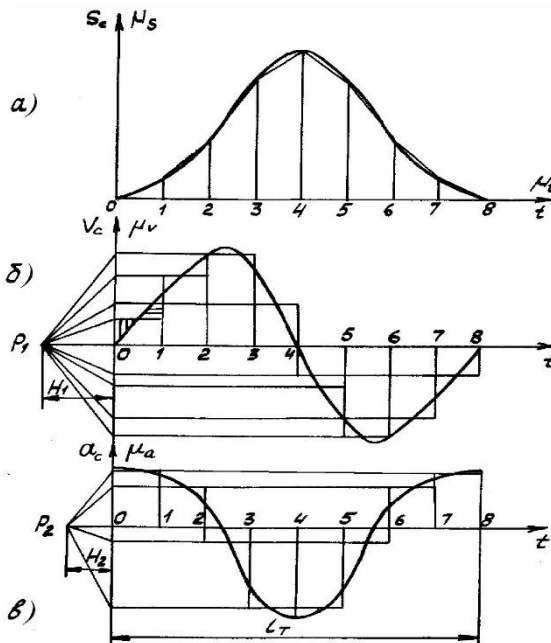


Рис. 2.2 - Диаграмма перемещений точки C
По оси абсцисс отложено время. Масштабный коэффициент

времени принят $\mu_t = T / lT$ (с/мм), где T - время одного оборота кривошипа, а lT - отрезок в мм, изображающий это время. По оси ординат отложено перемещение точки C . В данном случае принято $\mu_s = \mu_l$.

Диаграмму скоростей $V_c = V_c(t)$ можно получить методом графического дифференцирования функции $S_c = S_c(t)$. Существуют различные методы графического дифференцирования. Рассмотрим метод хорд, который заключается в том, что на каждом участке кривую $S_c = S_c(t)$ заменяем хордой, т. е. неравномерное движение приближенно заменяем равномерным (с постоянной скоростью). Для этого, выбрав произвольно полюсное расстояние H_1 , из точки P_1 проводим лучи, параллельные хордам. Отрезки на оси ординат, отсекаемые этими лучами, показывают постоянные скорости на соответствующих участках (рис. 2.2, б). Затем проводим плавную кривую таким образом, чтобы площади фигур, расположенных с обеих сторон кривой, на каждом участке были одинаковы.

Для построения диаграммы ускорений $a_c = a_c(t)$ графически дифференцируем функцию $V_c = V_c(t)$ (см. рис. 2.2, в).

Масштабные коэффициенты для скоростей и ускорений вычислим из зависимостей:

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \cdot H_1} \left(\frac{m \cdot c^{-1}}{мм} \right);$$

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \cdot H_2} \left(\frac{m \cdot c^{-2}}{мм} \right);$$

2.3 Графоаналитический метод

Графоаналитический метод кинематического анализа механизмов предполагает аналитическую запись векторных уравнений и графическое их решение, т. е. построение планов скоростей и ускорений.

Правила составления векторных уравнений.

1-й случай. Две точки принадлежат одному звену и удалены друг от друга на расстояние AB (рис. 2.3)

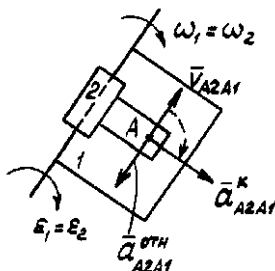
$$V_B = V_A + V_{BA},$$

где $V_{BA} = \omega \cdot l_{AB}$.

$$\bar{a}_R = \bar{a}_A + \bar{a}_{RA}'' + \bar{a}_{RA}' ,$$

где $a_{RA}'' = \omega^2 l_{AR}$, $a_{RA}' = \varepsilon l_{AR}$.

Рис. 2.3 - Правила составления векторных уравнений
2-й случай. Две точки принадлежат двум звеньям, образующим поступательную пару, и в данный момент времени геометрически совпадают (рис. 2.4):



$$\bar{V}_{A2} = \bar{V}_{A1} + \bar{V}_{A2A1},$$

$$\bar{a}_{A2} = \bar{a}_{A1} + \bar{a}_{A2A1}^k + \bar{a}_{A2A1}^{\text{отн}},$$

где $a_{A2A1}^k = 2\omega_1 \cdot V_{A2A1}$.

Рис. 2.4 - Правила составления векторных уравнений
Направление $\bar{a}_{A2A1}^{\text{отн}}$ определяется поворотом на 90° V_{A2A1} в сторону ω_1 .

2.4 Правила записи векторных уравнений для скоростей и ускорений

Построение планов скоростей и ускорений для структурных групп 2 класса

осуществляется следующим образом.

1-й случай. Структурная группа 1-го вида (рис. 2.5, а).

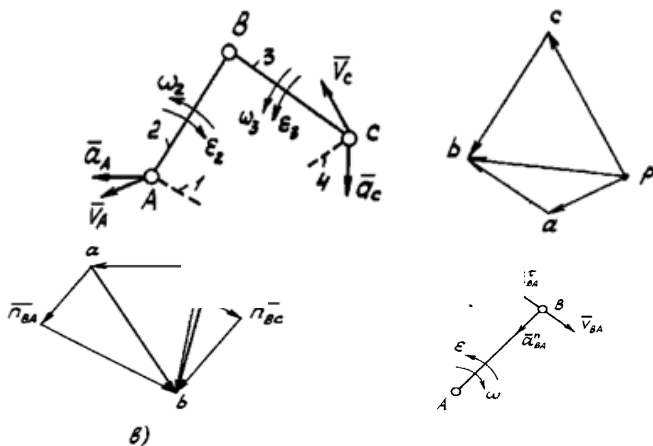


Рис. 2.5 - Правила составления векторных уравнений
 Дано: V_A, V_C, a_A, a_C . Определить: $V_B, \omega_2, \omega_3, a_B, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Запишем векторные уравнения для скоростей:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \\ \vec{V}_C &= \vec{V}_B + \vec{V}_{BC}. \end{aligned} \right.$$

Примем масштабный коэффициент μ_V . Определим длину отрезков, изображающих известные скорости:

$$|\overline{pa}| = \frac{V_A}{\mu_V} \text{ (мм)}; \quad |\overline{pc}| = \frac{V_C}{\mu_V} \text{ (мм)}.$$

Зная направления относительных скоростей $V_{BA} \perp AB, V_{BC} \perp BC$ (рис. 2.5, б), строим их план.

План скоростей - это графическое построение, представляющее собой плоский пучок лучей выходящих из одной точки (полюса Р), концы которых изображают векторы абсолютных скоростей, а отрезки, соединяющие эти концы - векторы относительных скоростей.

Вычисляем скорости:

$$\begin{aligned} V_B &= |pb| \cdot \mu_V \quad (m/s); & V_{BA} &= |ab| \cdot \mu_V \quad (m/s); \\ V_{BC} &= |cb| \cdot \mu_V \quad (m/s). \end{aligned}$$

Определим угловые скорости звеньев:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} \text{ рад/с}; \quad \omega_3 = \frac{V_{BC}}{l_{BC}} \text{ рад/с}.$$

Покажем направления угловых скоростей.

Запишем векторные уравнения для ускорений:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}; \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^{\tau}. \end{aligned} \right.$$

Вычислим нормальные ускорения:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}}; \quad a_{BC}^n = \omega_3^2 l_{BC} = \frac{v_{BC}^2}{l_{BC}}.$$

Принимаем масштабный коэффициент μ_a и вычисляем отрезки, изображающие известные ускорения:

$$|\overline{pa}| = \frac{a_A}{\mu_a} \text{ (мм)}; \quad |\overline{pc}| = \frac{a_C}{\mu_a} \text{ (мм)}; \quad |\overline{an}_{BA}| = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} \text{ (мм)};$$

$$|\overline{cn}_{BC}| = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a} \text{ (мм)}.$$

Строим план ускорений, зная направления тангенциальных ускорений:

$$a_{RA}^t \perp AB; \quad a_{RC}^t \perp BC \text{ (рис. 2.5, в).}$$

План ускорений - это графическое построение, представляющее собой плоский пучок лучей выходящих из одной точки (полюса π), концы которых изображают векторы абсолютных ускорений, а отрезки, соединяющие эти концы - векторы относительных ускорений.

Вычислим ускорения:

$$a_{RA}^t = |n_{RA} b| \mu_a (\overline{\quad}); \quad a_{RC}^t = |n_{RC} b| \mu_a (\overline{\quad});$$

$$a_R = |pb| \mu_a (\overline{\quad}).$$

Определим угловые ускорения звеньев

$$\varepsilon_2 = \frac{\overline{BA}}{\overline{\quad}} (\overline{\quad}); \quad \varepsilon_3 = \frac{\overline{BC}}{\overline{\quad}} (\overline{\quad}).$$

Покажем направления угловых ускорений.

Случай 1. Структурная группа 2-го вида (рис. 2.6, а).

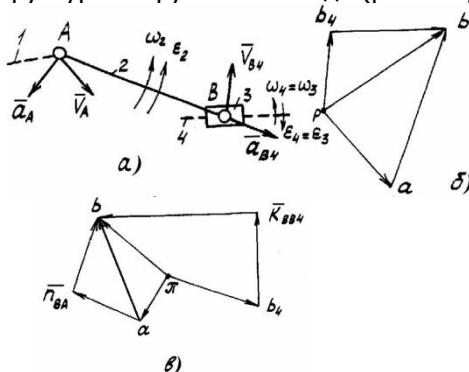


Рис. 2.6 - Правила составления векторных уравнений
Дано: $V_A, V_{B4}, \omega_4, a_A, a_{B4}, \varepsilon_4$. Определить: $V_B, \omega_2, a_B, \varepsilon_1$.

При рассмотрении этой и последующих структурных групп

опущены вычисления, связанные с заданными и определяемыми скоростями и ускорениями. Поэтому при построении планов скоростей и ускорений рассматриваемых структурных групп следует ориентироваться на пример вычислений для структурной группы 1-го вида.

Запишем векторные уравнения и построим планы скоростей и ускорений (рис. 2.6, б, в):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B_2A}; \quad \omega_2 = \frac{v_{B_2A}}{l_{AB}}; \quad \omega_3 = \omega_4. \\ \vec{\epsilon}_2 = \frac{v_{B_2A}}{l_{AB}}; \quad \epsilon_3 = \epsilon_4. \end{array} \right.$$

Случай 2. Структурная группа 3-го вида (рис. 3,7, а).

Дано: VA, VB, aA, aB . Определить: $VB_3, \omega_2, \omega_3, aB_3, \epsilon_2, \epsilon_3$.

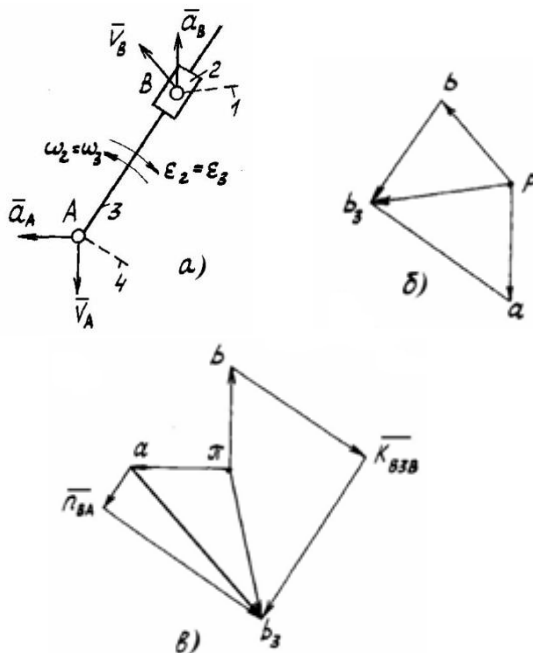


Рис. 2.7 - Правила составления векторных уравнений

Запишем векторные уравнения и построим планы скоростей и ускорений (рис. 2.7, б, в):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{B_3} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B_3B}; \\ \vec{v}_{B_3} = \vec{v}_A + \vec{v}_{B_3A}. \end{array} \right. \quad \omega_3 = \frac{v_{B_3A}}{l_{AB}}; \quad \omega_2 = \omega_3.$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{B_2} = \bar{a}_B + \bar{a}_{B_2B}^k + \bar{a}_{B_2B}^{\text{отн}}; \\ \bar{a}_{B_2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{B_2A}^n + \bar{a}_{B_2A}^{\tau} \end{cases} \quad a_{B_2B}^k = 2\omega_3 V_{B_2B};$$

$$a_{B_2A}^n = \omega_3^2 l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}; \quad \varepsilon_{2,3} = \frac{a_{B_2A}^{\tau}}{l_{AB}}.$$

Случай 4. Структурная группа 4-го вида (рис. 2.8, а).

Дано: $\varepsilon_2 = \varepsilon_3, V_{A_1}, V_{A_4}, \omega_1, \omega_4, a_{A_1}, a_{A_4}, \varepsilon_1, \varepsilon_4$.

Определить: $V_A, \omega_2, \omega_3, a_A, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

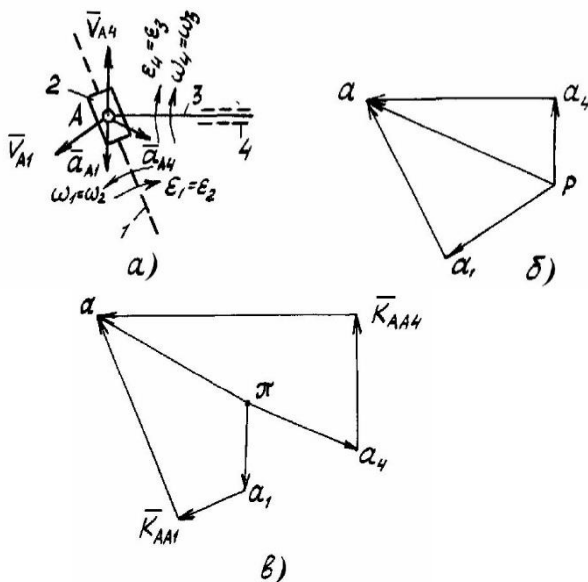


Рис. 2.8 - Правила составления векторных уравнений

Запишем векторные уравнения и построим планы скоростей и ускорений (рис. 2.8, б, в):

$$\begin{cases} \bar{V}_A = \bar{V}_{A_1} + \bar{V}_{AA_1}; \\ \bar{V}_A = \bar{V}_{A_4} + \bar{V}_{AA_4} \cdot \omega_2 = \omega_1; \quad \omega_3 = \omega_4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_A = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}_{AA_1}^k + \bar{a}_{AA_1}^{\text{отн}}; \\ \bar{a}_A = \bar{a}_{A_4} + \bar{a}_{AA_4}^k + \bar{a}_{AA_4}^{\text{отн}}. \end{cases}$$

$$a_{AA_1}^k = 2V_{AA_1} \omega_1; \quad a_{AA_4}^k = 2V_{AA_4} \omega_4; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4.$$

Случай 5. Структурная группа 5-го вида (рис. 2.9, а).

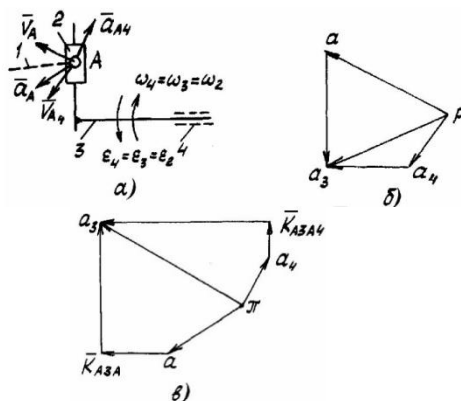


Рис. 2.9 - Правила составления векторных уравнений
 Дано: V_A , V_{A4} , ω_4 , a_A , a_{A4} , ε_4 . Определить: V_{A3} , ω_3 , a_{A3} , ε_2 , ε_3 .

Запишем векторные уравнения для скоростей и ускорений и построим планы скоростей и ускорений (рис. 1.9, б, в):

$$\begin{cases} \bar{V}_{A_3} = \bar{V}_A + \bar{V}_{A_2A_3}; \\ \bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{A_4} + \bar{V}_{A_3A_4} \cdot \omega_2 = \omega_3 = \omega_4; \\ \bar{a}_{A_3} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A_2A_3}^k + \bar{a}_{A_2A_3}^{\text{отн}}; \\ \bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_4} + \bar{a}_{A_3A_4}^k + \bar{a}_{A_3A_4}^{\text{отн}}. \end{cases}$$

$$a_{A_3A_2}^k = 2V_{A_3A_2}\omega_2; \quad a_{A_3A_4}^k = 2V_{A_3A_4}\omega_4, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4.$$

В качестве примера построим планы скоростей и ускорений для механизма, представленного на рис. 2.10. Построение планов скоростей и ускорений механизма проводится по структурным группам в порядке их присоединения к начальному звену.

Вычертим кинематическую схему механизма, приняв масштабный коэффициент μ_l (м/мм). Угловая скорость начального звена задана, причем $\omega_1 = \text{const}$, $\varepsilon_1 = 0$.

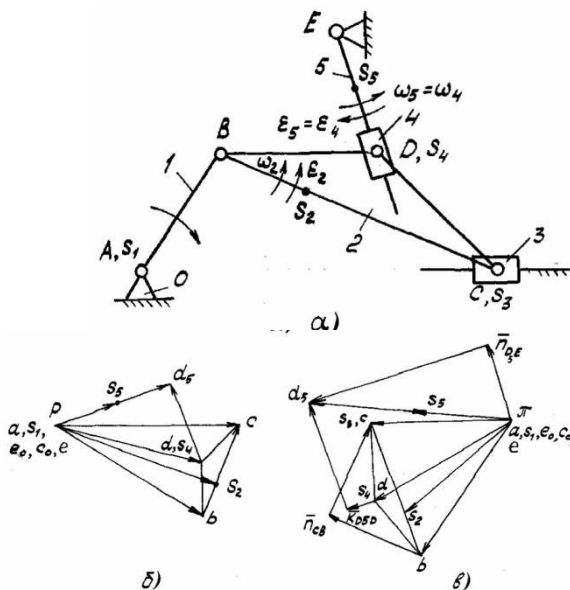


Рис. 2.10 - Правила составления векторных уравнений

Рассмотрим группу начальных звеньев 0, 1.

$$V_B = \omega_1 l_{AB}; V_B \perp AB.$$

Рассмотрим структурную группу 2,3:

$$\overline{V_B} = \overline{V_C} + \overline{V_{BC}} \quad \overline{V_B} = \overline{V_D} + \overline{V_{BD}} \quad \overline{V_C} = \overline{V_D} + \overline{V_{CD}}$$

Выберем масштабный коэффициент $\mu_V = \frac{V_B}{pb}$ и построим план скоростей (рис. 2.10, б):

Скорости точек S_2 и D , принадлежащие второму звену, найдем, используя свойство подобия плана скоростей, которое заключается в том, что фигура на плане скоростей звена, образованная относительными скоростями точек, и фигура, образованная одноименными точками звена, подобны, сходственно распо-

ложены и повернуты друг относительно друга на 90° .

Для определения на плане скоростей конца вектора точки D построим Δbcd подобный ΔBCD , а для нахождения конца вектора скорости точки S_2 запишем равенства отношений:

$$\frac{|\overline{bs_2}|}{|\overline{bc}|} = \frac{BS_2}{BC}; |\overline{bs_2}| = |\overline{bc}| \frac{BS_2}{BC} \text{ (мм)}.$$

Находим местоположения точек d , S_2 и соединяем их с полюсом плана скоростей.

Рассмотрим структурную группу 4,5:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{V}_{D_5} = \overline{V}_D + \overline{V}_{D_5 D} \quad | \quad V_{D_5 D} \parallel DE, \\ \overline{V}_{D_5} = \overline{V}_E + \overline{V}_{D_5 E} \quad | \quad V_E = 0, \quad V_{D_5 E} \perp ED. \end{array} \right.$$

Достраиваем план скоростей и определяем VS_5 , используя свойство подобия плана скоростей:

$$\frac{|\overline{es}_5|}{|\overline{ed}_5|} = \frac{ES_5}{ED}; \quad |\overline{es}_5| = |\overline{ed}_5| \frac{ES_5}{ED}$$

(мм).

Вычисляем скорости:

$$\begin{aligned} V_C = V_{S_2} &= |\overline{pc}| \mu_V \quad (\text{м/с}); & V_D = V_{S_4} &= |\overline{pd}| \mu_V \quad (\text{м/с}); \\ V_{D_5} &= |\overline{pd}_5| \mu_V \quad (\text{м/с}) \\ V_{CB} &= |\overline{bc}| \mu_V \quad (\text{м/с}); & V_{S_2} &= |\overline{ps}_2| \mu_V \quad (\text{м/с}); \\ V_{S_5} &= |\overline{ps}_5| \mu_V \quad (\text{м/с}); \\ V_{D_5 D} &= |\overline{dd}_5| \mu_V \quad (\text{м/с}). \end{aligned}$$

Определяем угловые скорости:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \omega_2 = 0; \quad \omega_4 = \omega_5 = \frac{V_{D_5 E}}{l_{DE}} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Построение плана ускорений производим в том же порядке, что и построение плана скоростей. Рассмотрим группу начальных звеньев 0,1.

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_1^2 l_{AB}; \quad a_B \parallel AB.$$

Рассмотрим структурную группу 2,3:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^n + \overline{a}_{CB}^r \quad | \quad a_{CB}^n \parallel CB, a_{CB}^r \perp CB, \\ \overline{a}_C = \overline{a}_{C_0} + \overline{a}_{CC_0}^k + \overline{a}_{CC_0}^{\text{отн}} \quad | \quad a_{C_0} = 0, a_{CC_0}^{\text{отн}} \parallel AC. \end{array} \right.$$

Вычисляем a_{CB}^n и $a_{CC_0}^k$:

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{CB} = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} \frac{V_{CB}}{l_{CB}} \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)^2; \quad a_{CC_0}^k = 2\omega_2 V_{CC_0} = 0 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)^2.$$

Выберем масштабный коэффициент:

$$\mu_a = \frac{V_B}{l_{CB}} \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)^2.$$

Вычислим отрезок, изображающий a_{CB}^n :

$$|\overline{bn}_{CB}| = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} \quad (\text{мм}).$$

Построим план ускорений (рис. 2.10, в).

Ускорения точек D и S_2 найдем по свойству подобия плана ускорений: фигура на плане ускорений звена, образованная относительными ускорениями точек, и фигура, образованная одноименными точками звена, подобны и сходственно расположены. Поэтому для определения a_D строим Δbcd подобный ΔBCD , а для нахождения ускорения точки S_2 составляем пропорцию в виде равенства:

$$\frac{|\overline{bS_2}|}{|\overline{bc}|} = \frac{BS_2}{BC}; \quad |\overline{bS_2}| = |\overline{bc}| \cdot \frac{BS_2}{BC}.$$

Рассмотрим структурную группу 4,5:

$$\begin{cases} \overline{a}_{D_5} = \overline{a}_D + \overline{a}_{D_5D}^k + \overline{a}_{D_5D}^{\text{отн}} \\ \overline{a}_{D_5} = \overline{a}_E + \overline{a}_{D_5E}^n + \overline{a}_{D_5E}^{\tau} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} a_{D_5D}^k \perp DE, a_{D_5D}^{\text{отн}} \parallel DE, \\ a_E = 0, \quad a_{D_5E}^{\tau} \perp DE. \end{array} \right.$$

Определим ускорения $a_{D_5D}^k$ и $a_{D_5E}^n$:

$$a_{D_5D}^k = 2\omega_4 V_{D_5D} \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)}, \quad a_{D_5E}^n = \omega_2^2 l_{DE} = \frac{V_{D_5E}^2}{l_{DE}} \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)}.$$

Вычислим отрезки, изображающие эти ускорения:

$$|\overline{dk}_{D_5D}| = \frac{a_{D_5D}^k}{\mu_a} \text{ (мм)}; \quad |\overline{en}_{D_5E}| = \frac{a_{D_5E}^n}{\mu_a} \text{ (мм)}.$$

Достраиваем план ускорений и находим ускорение точки S_5 из соотношения:

$$\frac{|\overline{es_5}|}{|\overline{ed_5}|} = \frac{\overline{es_5}}{\overline{ed_5}}; \quad |\overline{es_5}| = |\overline{ed_5}| \frac{\overline{es_5}}{\overline{ed_5}} \text{ (мм)}.$$

Вычислим ускорения:

$$a_C = a_{S_3} = |\overline{pc}| \mu_a \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)}; \quad a_D = a_{S_4} = |\overline{pd}| \mu_a \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)};$$

$$a_{D_5} = |\overline{pd_5}| \mu_a \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)}; \quad a_{CB}^{\tau} = |\overline{n_{CB}c}| \mu_a \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)};$$

$$a_{D_5E}^{\tau} = |\overline{n_{D_5E}d_5}| \mu_a \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)}; \quad a_{S_2} = |\overline{ps_2}| \mu_a \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)};$$

$$a_{S_5} = |\overline{ps_5}| \mu_a \frac{\text{м}}{(\text{с}^2)}.$$

Определяем угловые ускорения звеньев:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^T}{l_{CB}} \frac{\text{рад}}{(\text{с}^2)}; \quad \varepsilon_3 = 0; \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \frac{a_{D_5E}^T}{l_{D_5E}} \frac{\text{М}}{(\text{с}^2)}.$$

Покажем направления угловых ускорений на кинематической схеме механизма.

РАЗДЕЛ 3. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ

3.1 Задача силового расчета, классификация сил

Задачей силового расчета механизма является определение сил, действующих на звенья механизма, реакций в кинематических парах и внешней силы или внешнего момента сил.

Эта задача имеет большое практическое значение для расчета на прочность, жесткость, износоустойчивость, для учета сил трения, определения мощности и др. Силовой расчет механизма может быть произведен различными методами. Рассмотрим метод кинетостатики как наиболее распространенный метод силового анализа.

Метод кинетостатики - силовой расчет механизма при заданном законе движения с использованием принципа Д-Аламбера.

Принцип Д-Аламбера заключается в том, что механическая система находится в равновесии под действием внешних сил, реакций связей и сил инерции. Таким образом, при применении принципа Д-Аламбера для силового расчета можно пользоваться уравнениями статики, если кроме внешних сил и реакций связей к звеньям приложить силы инерции.

В первом приближении рассмотрим силовой расчет без учета сил трения.

Действующие в машинах силы можно разделить на следующие группы:

- движущие силы, совершающие положительную работу;
- силы производственного сопротивления, совершающие отрицательную работу;
- силы тяжести подвижных звеньев, работа которых на одних участках движения является положительной, а на других - отрицательной.
- силы упругости пружин - могут совершать как положительную, так и отрицательную работу;
- силы взаимодействия между звеньями механизма (реакции в кинематических парах), нормальные составляющие которых не совершают работы, а касательные составляющие (силы трения) совершают отрицательную работу;
- силы инерции, возникающие при неравномерном движении звеньев.

3.2 Статическая определимость структурных групп

Структурные группы второго класса содержат кинематические пары 5-го класса (вращательные или поступательные). Без учета сил трения равнодействующая распределенной по поверхности нагрузки во вращательной кинематической паре пройдет через центр шарнира (рис. 3.1), а в поступательной кинематической паре - направлена по нормали к поверхности контакта (рис. 3.2). Неизвестными являются во вращательной паре - величина и направление реакции, а в поступательной - величина и точка приложения. Таким образом, из трех характеристик силы (величина, направление и точка приложения), в парах 5-го класса неизвестными остаются две характеристики.

Рассмотрим одно звено, образующее две кинематические пары 5-го класса. Для одного звена в плоской системе можно составить три уравнения равновесия, а неизвестных - четыре (по две в каждой кинематической паре). Следовательно, одно звено представляет собой статически неопределимую механическую систему. Выясним, какая плоская кинематическая цепь будет статически определимой.

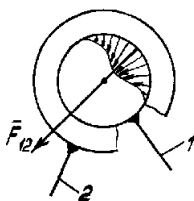
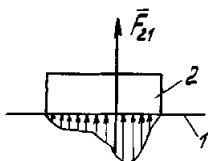


Рис. 3.1 - Центр шарнира Рис. 3.2 - Поверхность контакта

Предположим, что кинематическая цепь состоит из n звеньев. Тогда для нее можно составить $3n$ уравнений равновесия. Если звенья этой цепи соединены кинематическими парами 5-го класса в количестве p_5 , то число неизвестных будет $2p_5$. Тогда равенство числа неизвестных числу уравнений, то есть условие статической определимости кинематической цепи будет иметь вид $3n = 2p_5$ или $p_5 = 3n/2$. Такое сочетание звеньев и кинематических пар соответствует признакам структурных групп. Следовательно, структурные группы статически определимы.

Отсюда следует, что определение реакций в кинематических парах механизма необходимо производить по

структурным группам. Порядок рассмотрения структурных групп при силовом расчете обратный тому, который должен соблюдаться в кинематическом анализе.

3.3 Силы инерции звеньев механизма

Для звена, совершающего плоскопараллельное движение, все элементарные силы инерции можно привести к главному вектору (\bar{F}_u) и главному моменту (\bar{M}_u) сил инерции (рис. 3.3).

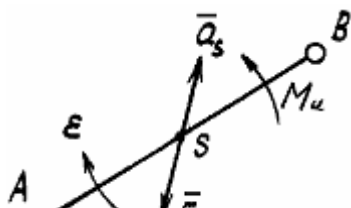


Рис. 3.3 -

Главный вектор и момент сил инерции $m \cdot \bar{a}_S$, $M_u = 0$ (рис. 3.4, а);

Главный вектор сил инерции $F_u = -m \cdot a_s$,

приложен в центре масс и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс. Главный момент сил инерции приложен к звену и направлен в сторону, ускорению (рис. 3.4).
лучаи:

поступательное движение, $\bar{F}_u = -$

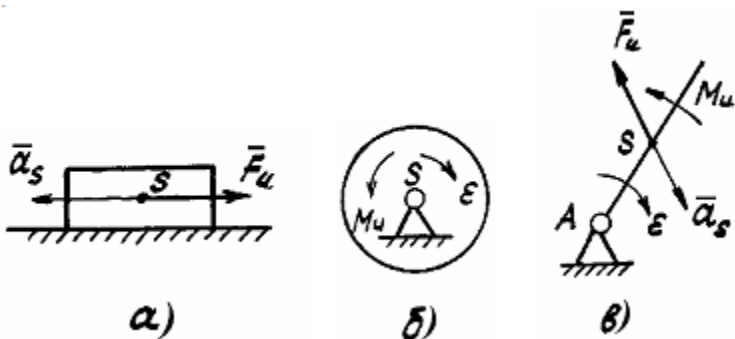


Рис. 3.4 - Главный момент сил инерции

звено совершает неравномерное вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс, $\bar{F}_u = 0$, $\bar{M}_u = -J_S \cdot \bar{\epsilon}$ (рис. 3.4, б);

звено совершает неравномерное вращательное движение вокруг оси, не проходящей через центр масс, $\bar{F}_u = -m \cdot \bar{a}_S$, $\bar{M}_u = -J_S \cdot \bar{\epsilon}$ (рис. 3.4, в).

Главный вектор и главный момент сил инерции можно заменить одним вектором, если момент представить парой сил, равных главному вектору (рис. 3.5). Тогда плечо их действия

составляет:

$$h = Mu/F_u. \quad (3.1)$$

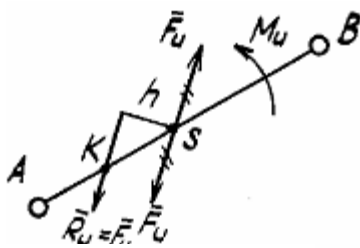


Рис. 3.5 - Момент представленный парой сил

В этом случае две равные и противоположно направленные силы, приложенные в точке S , взаимно уравниваются и остается только одна сила $R_u = F_u$, линия действия которой

пересекает звено в точке K . Эта сила и всех сил инерции звена.

Рассмотрим структурные группы второго класса пяти видов. 1-ый вид.

К звеньям группы приложим внешние заданные силы, силы веса, силы инерции и неизвестные реакции связей. В данном случае (рис. 3.6, а) силы F_2 и F_3 и моменты сил M_2 и M_3 - условные силы и моменты сил, учитывающие внешние силы, силы веса и силы инерции.

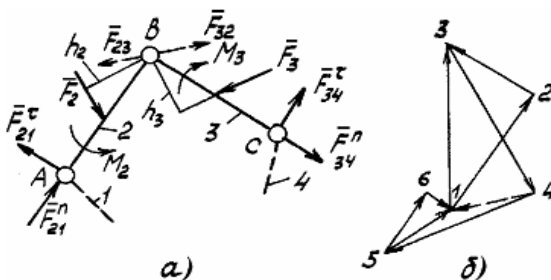


Рис.3.6 - Условные силы и моменты сил

В точках A и C прикладываем реакции связей, у которых известны только точки приложения, а величины их и направления - не известны. Запишем условие равновесия группы в векторной форме

$$\sum_{2,3} F = 0. \quad \Rightarrow F_{21} + F_2 + F_3 + F_{34} = 0 \quad (3.2)$$

Решить это векторное уравнение нельзя, т.к. для F_{21} и F_{34} имеем четыре неизвестных (величины и направление реакций F_{21} и F_{34}). Разложим каждую из них на две составляющие: по оси звена и перпендикулярную оси звена, т. е.

$$\bar{F}_{21} = \bar{F}_{21}^n + \bar{F}_{21}^t; \quad \bar{F}_{34} = \bar{F}_{34}^n + \bar{F}_{34}^t.$$

Тангенциальные составляющие можно определить, записав уравнение равновесия каждого звена в отдельности в виде суммы моментов всех сил относительно точки В.

$$\sum M_B = 0, \quad -F_{21}^t l_{AB} + F_2 \cdot h_2 \cdot \mu_1 + M_2 = 0,$$

откуда $F_{21}^t = (F_2 \cdot h_2 \cdot \mu_1 + M_2) / l_{AB},$

или $F_{21}^t = (F_2 \cdot h_2 + \overset{M_2}{\dots}) / AB.$

$$\sum M_C = 0, \quad -F_{34} l_{BC} + F_3 \cdot h_3 \cdot \mu_1 + M_3 = 0,$$

откуда $F_{34} = (F_3 \cdot h_3 \cdot \mu_1 + M_3) / l_{BC},$

или $F_{34} = (F_3 \cdot h_3 + \overset{M_3}{\dots}) / BC.$

3) Воспользовавшись выражением (3.2), получим

$$F_{21} + F_{21} + F_2 + F_3 + F_{34} + F_{34} = 0.$$

$$1-2 \quad 2-3 \quad 3-4 \quad 4-5 \quad 5-6 \quad 6-1$$

Имеем две неизвестных величины F_{21}^n и F_{34}^n . Выбираем масштабный коэффициент μ_F (Н/мм) и вычисляем отрезки, изображающие известные силы:

$$|2-3| = \frac{F_{21}^t}{\mu_F} \text{ (мм)}; \quad |3-4| = \frac{F_2}{\mu_F} \text{ (мм)}; \quad |4-5| = \frac{F_3}{\mu_F}$$

$$\text{(мм)}; \quad |5-6| = \frac{F_{34}^t}{\mu_F} \text{ (мм)}.$$

Построим план сил. В первую очередь изобразим известные силы, а затем проведем линии действия неизвестных по величине сил F_{21} и F_{34} до их взаимного пересечения (рис. 3.6, б). Вычислим реакции:

$$F_{21} = |1-3| \cdot \mu_F, \quad F_{34} = |5-1| \cdot \mu_F$$

4) Необходимо еще найти реакцию, приложенную к звену 2 со стороны звена 3 (F_{23}) или реакцию, приложенную к звену 3 со стороны звена 2 (F_{32}). Они равны, но противоположно направлены. Поэтому достаточно определить любую из них. Для этого необходимо рассмотреть равновесие одного звена:

$$\sum \bar{F} = 0. \quad \bar{F}_{21} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0.$$

$$1-3 \quad 3-4 \quad 4-1$$

Удобно воспользоваться уже построенным планом сил, соединив точки 4 и 1.

Тогда $F_{23} = |4-1| \cdot \mu_F.$

2-ой вид.

Реакцию во внешней вращательной кинематической паре, как и в предыдущем примере, раскладываем на две

составляющие F_{21}^n и F_{21}^t (рис. 3.7, а).

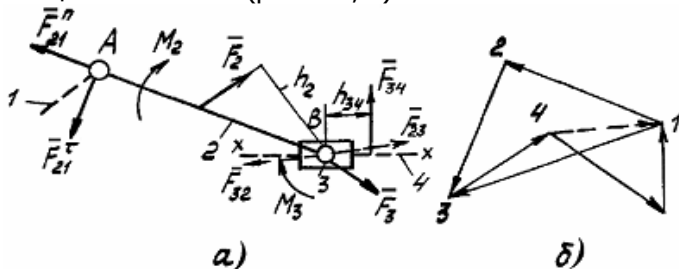


Рис. 3.7 - Реакция во внешней вращательной кинематической паре

Реакция в поступательной паре известна по направлению - перпендикулярна оси $x-x$, а ее точка приложения определится расстоянием h_{34} :

$$\sum_2 M_B = 0, \rightarrow \overline{M_2} F_{21}^t AB + F_2 h_2 + \frac{-a}{\mu_1} = 0; \rightarrow F_{21}^t = (F_2 h_2 + \frac{-a}{\mu_1}) / AB.$$

$$\sum_{0,2,3} F = 0, \rightarrow F_{21} + F_{21} + F_2 + F_3 + F_{34} = 0.$$

(рис. 3.7.6),

$$\text{откуда } F_{21} = |1 - 3| \mu_F, F_{34} = |5 - 1| \mu_F.$$

$$\sum_{2,3} \frac{M}{\mu_1} = 0, \rightarrow -\frac{-a}{\mu_1} + F_{34} h_{34} = 0, \rightarrow h_{34} = \frac{a}{\mu_1 F_{34}}$$

$$\sum_2 F = 0, \rightarrow F_{21} + F_2 + F_{23} = 0 \quad (\text{рис. 3.7,6}),$$

$$\text{откуда } F_{23} = |4 - 1| \mu_F.$$

3-ий вид.

В шарнире B разложим реакцию на составляющие F_{21} и F_{21}^t , а в шарнире A реакцию F_{34} покажем пока с произвольным направлением (рис. 3.8, а).

$$\sum_{2,3} M_A = 0, \rightarrow -F_{21}^t AB - F_2 h_2 - \frac{-a}{\mu_1} + \overline{M_2} + F_{34} h_{34} = 0,$$

$$F_{21}^t = (F_2 h_2 - \frac{-a}{\mu_1} + \overline{M_2} + F_{34} h_{34}) / AB = 0.$$

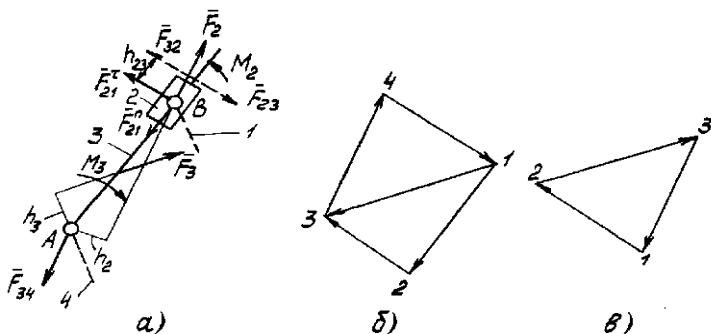


Рис. 3.8 - Реакция в шарнире

$$\sum_2 F = 0, \quad F_{21} + F_{21} + F_2 + F_{23} = 0, \quad (\text{рис.3.8,б}),$$

$$F_{21} = |1 - 3|\mu_F; \quad F_{23} = |4 - 1|\mu_F.$$

$$3) \quad \sum_2 M_B = 0, \rightarrow -\frac{M_2}{h_1} + F_{23}h_{23} = 0; \rightarrow h_{23} = \frac{M_2}{F_{23}h_1}.$$

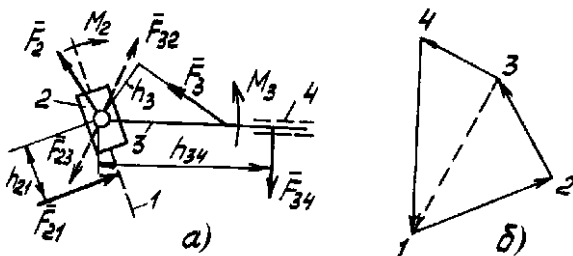
$$4) \sum_3 F = 0, \rightarrow F_{32} + F_3 + F_{34} = 0, \quad (\text{рис. 3.8, в}),$$

$$\text{откуда} \quad F_{34} = |3 - 1|\mu_F.$$

На расчетной схеме группы Ассур вместо реакции F_{34} с произвольным направлением приложим реакцию F_{34} с полученным направлением.

4-й вид (рис. 3.9, а).

Рис. 3.9 – Виды реакций



$$\sum_{2,3} F = 0, \rightarrow F_{21} + F_2 + F_3 + F_{34} = 0,$$

(рис. 3.9, б),

$$\text{откуда} \quad F_{21} = |1 - 2|\mu_F; \quad F_{34} = |4 - 1|\mu_F.$$

$$\sum_2 M_A = 0, \rightarrow -F_{21} h_{21} - \frac{M_2}{\mu_1} = 0, \rightarrow h_{21} = \frac{M_2}{-F_{21}}$$

$$\sum_3 M_A = 0, \rightarrow -F_{34} h_{34} + \frac{M_2}{\mu_1} + F_3 h_3 = 0, \rightarrow h_{34} = (M_2 + F_3 h_3) / F_{34}$$

$$\sum_2 F = 0, \rightarrow F_{21} + F_2 + F_{23} = 0, \rightarrow F_{23} = |3 - 1| \mu_F$$

1-2 2-3 3-1

5-й вид (рис. 3.10, а).

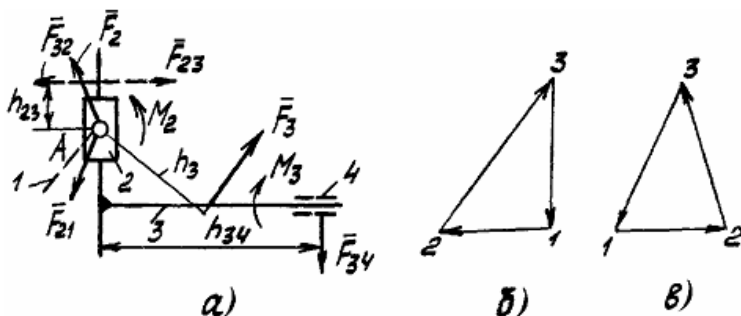


Рис.3.10 – Виды реакций

$$1) \sum_3 F = 0, \rightarrow F_{32} + F_3 + F_{34} = 0, \text{ (рис. 3.10, б),}$$

$$\text{откуда } F_{32} = |1 - 2| \mu_F, \quad F_{34} = |3 - 1| \mu_F.$$

$$2) \sum_2 F = 0, \rightarrow F_{23} + F_2 + F_{21} = 0, \text{ (рис. 3.10, в),}$$

$$\text{откуда } F_{21} = |3 - 1| \mu_F.$$

$$3) \sum_2 M_A = 0, \rightarrow -F_{23} h_{23} + \frac{M_2}{\mu_1} = 0, \rightarrow h_{23} = \frac{M_2}{-F_{23}}$$

$$4) \sum_{2,3} M_A = 0, \rightarrow -F_{34} h_{34} + \frac{M_2}{\mu_1} + F_3 h_3 + \frac{M_3}{\mu_1} = 0, \text{ откуда } h_{34} = (-M_3 / \mu_1 + F_3 h_3 + M_2 / \mu_1) / F_{34}.$$

3.5 Силовой расчет начального звена

При силовом расчете начального звена определяется внешняя сила $F_{вн}$ или внешний момент сил $M_{вн}$, которые

уравновешивают силы, приложенные к начальному звену из условия заданного закона его движения, а также реакция со стороны стойки. Примем, что начальное звено совершает равномерное вращательное движение, т.е. $\omega_1 = const$. Необходимость определения F_{BH} или M_{BH} зависит от конструкции передаточного механизма. Если кривошипный вал приводится во вращение непосредственно от электродвигателя (валы их соединены муфтой), то к кривошипу приложен внешний момент M_{BH} (рис. 3.11, а). Если же кривошипный вал получает вращение от электродвигателя через зубчатую передачу, то к кривошипу приложена внешняя сила F_{BH} , действующая по линии зацепления зубчатой передачи (рис. 3.11, в).

Рассмотрим первый случай.

Внешний момент найдем из условия:

$$\sum_1 M_A = 0; \rightarrow -M_{BH} + F_{12}h_{12}\mu_1 = 0; \rightarrow M_{BH} = F_{12}h_{12}\mu_1$$

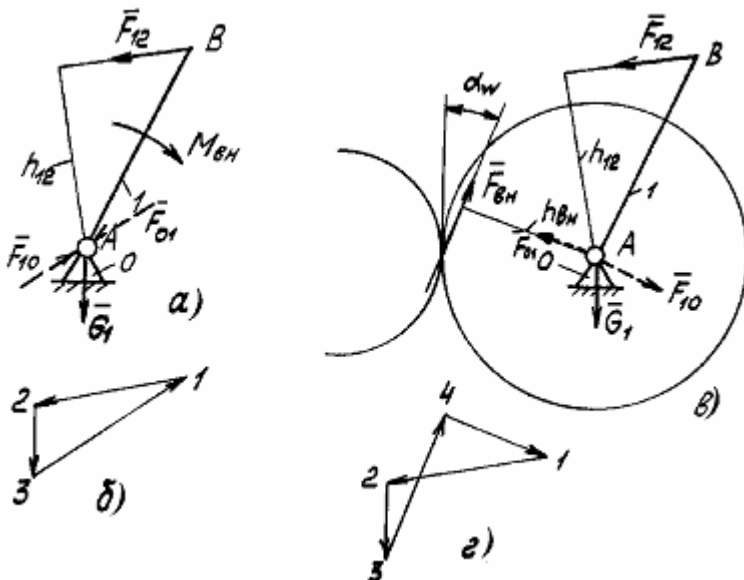


Рис. 3.11 – Силы действующие по линии зацепления зубчатой передачи

Реакцию со стороны стойки определим из плана сил:

$$\sum_1 F = 0, \quad F_{12} + G_1 + F_{10} = 0 \quad (\text{рис.3.11,б}), \quad F_{10} = |3 - 1|\mu_F.$$

1-2 2-3 3-1

Для второго случая:

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0; \rightarrow -F_{\text{вн}} h_{\text{вн}} + F_{12} h_{12} = 0; \rightarrow F_{\text{вн}} =$$

$$\sum_1 F = 0; \rightarrow F_{12} + G_1 + F_{\text{вн}} + F_{10} = 0 \quad (\text{рис. 3.11, г}), \rightarrow F_{10} = |4 - 1| \mu_F.$$

1-2 2-3 3-4 4-1

3.6 Силовой расчет механизма

Рассмотрим силовой расчет механизма (см. рис 3.12). Для силового расчета дополнительно дано: M_5 , m_2, m_3, m_4, m_5 , JS_2 , JS_5 (m_1 , JS_1 , JS_4 - пренебрегаем). Требуется определить реакции в кинематических парах и внешний момент.

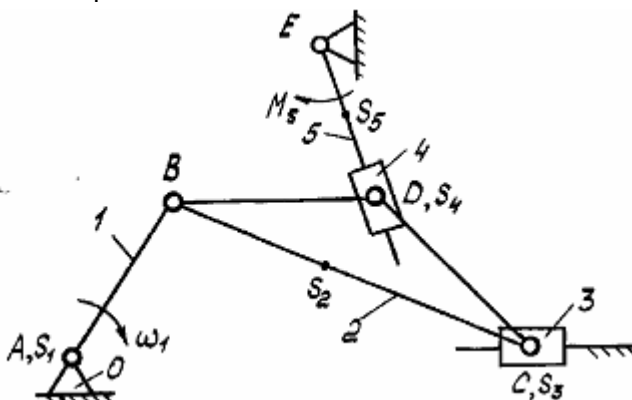


Рис. 3.12 - Силовой расчет механизма

Рассмотрим структурную группу 4-5 (рис. 3.13, а).

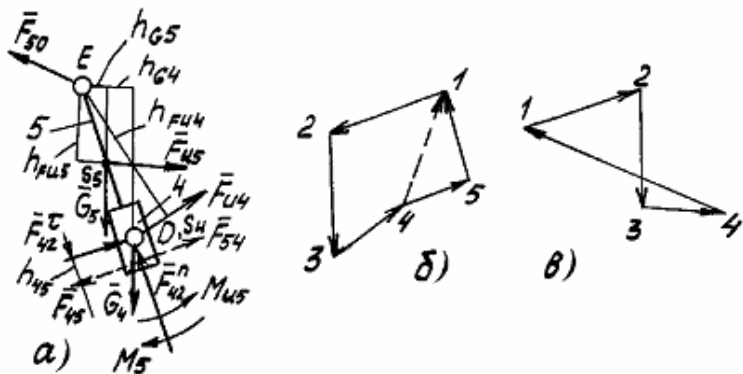


Рис. 3.13 - Структурная группа 4-5

Вычислим веса звеньев и силы инерции:

$$G_4 = m_4g; G_5 = m_5g; \bar{F}_{u4} = -m_4 \bar{a}_{S4}; F_{u5} = -m_5 \bar{a}_{S5}; \bar{M}_{u5} = -J_{S5} \varepsilon_5.$$

Силы инерции приложим в центрах масс (S_4 и S_5), направляя их обратно ускорениям этих точек (см. рис. 3.10, в), момент сил инерции прикладываем к пятому звену в направлении, обратном ε_5 (см. рис. 3.10, а). Порядок расчета группы третьего вида представлен выше.

$$1) \sum_{4,5} M_F = 0, \rightarrow -F_{42}^T DE + G_4 h_{G4} + G_5 h_{G5} - F_{u4} h_{Fu4} - F_{u5} h_{Fu5} - \frac{M_{u5}}{D} + \frac{M_5}{D} = 0, \rightarrow F_{42}^T = (G_4 h_{G4} + G_5 h_{G5} - F_{u4} h_{Fu4} - F_{u5} h_{Fu5} - \frac{M_{u5}}{D} + \frac{M_5}{D}) / D.$$

$$2) \sum_4 F = 0; \rightarrow \begin{matrix} F_{45} \\ 1-2 \end{matrix} + \begin{matrix} G_4 \\ 2-3 \end{matrix} + \begin{matrix} F_{u4} \\ 3-4 \end{matrix} + \begin{matrix} F_{42} \\ 4-5 \end{matrix} + \begin{matrix} F_{42} \\ 5-1 \end{matrix} = 0.$$

Выберем масштабный коэффициент μ_F (Н/мм). Вычислим отрезки, изображающие известные силы:

$$\left| \overline{2-3} \right| = \frac{G_4}{\mu_F}$$

$$\left| \overline{3-4} \right| = \frac{F_{u4}}{\mu_F} (\text{мм}); \quad \left| \overline{4-5} \right| = \frac{F_{42}^T}{\mu_F} (\text{мм}).$$

Построим план сил (рис. 3.13, б) и вычислим реакции:

$$F_{45} = \left| \overline{1-2} \right| \mu_F; F_{42} = \left| \overline{4-1} \right| \mu_F.$$

$$\sum_4 M_D = 0; \rightarrow F_{45} \cdot h_{45} = 0; \rightarrow h_{45} = 0.$$

$$\sum_5 \bar{F} = 0; \rightarrow \bar{F}_{54} + \bar{G}_5 + \bar{F}_{u5} + \bar{F}_{50} = 0$$

1-2 2-3 3-4 4-1

Выберем масштабный коэффициент μ_F (Н/мм) и построим план сил, учитывая, что $F_{54} = -F_{45}$. Вычислим реакцию: $F_{50} = |4 - 1| \cdot \mu_F$ (рис.3.13, в).

Рассмотрим структурную группу 2-3 (рис. 3.14, а)

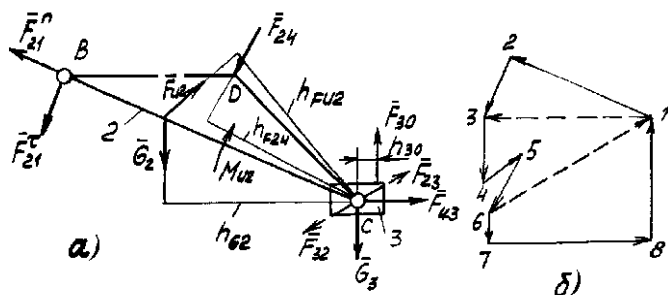


Рис. 3.14 - Структурная группа 2-3

$$G_2 = m_2 g; G_3 = m_3 g; \bar{F}_{u2} = -m_2 \bar{a}_{S2}; \bar{F}_{u3} = -m_3 \bar{a}_{S3};$$

$$\bar{M}_{u2} = -J_{S2} \bar{\varepsilon}_2; \bar{F}_{24} = -\bar{F}_{42}.$$

1)

$$\sum_2 M_C = 0; \rightarrow -F_{21}^r BC - G_2 h_{G2} + F_{u2} h_{Fu2} - F_{24} h_{F24} + \frac{M_{H2}}{\mu_1} = 0; \rightarrow$$

$$F_{21}^r = (-G_2 h_{G2} + F_{u2} h_{Fu2} - F_{24} h_{F24} + \frac{M_{H2}}{\mu_1}) / BC$$

2)

$$\sum_{2,3} \bar{F} = 0; \rightarrow \bar{F}_{21}^n + \bar{F}_{21}^r + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{F}_{24} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{u3} + \bar{F}_{30} = 0.$$

1-2 2-3 3-4 4-5 5-6 6-7
7-8 8-1

Выберем масштабный коэффициент μ_F (Н/мм). Вычислим отрезки, изображающие известные, силы:

$$\begin{aligned} |2-3| &= \frac{F_{21}^r}{\mu_F} & (\text{мм}); & & |3-4| &= \frac{G_2}{\mu_F} & (\text{мм}); \\ |4-5| &= \frac{F_{u2}}{\mu_F} & (\text{мм}); & & |5-6| &= \frac{F_{24}}{\mu_F} & (\text{мм}); \\ |6-7| &= \frac{G_3}{\mu_F} & (\text{мм}); & & |7-8| &= \frac{F_{u3}}{\mu_F} & (\text{мм}). \end{aligned}$$

Построим план сил (рис. 3.14, б) и вычислим реакции:

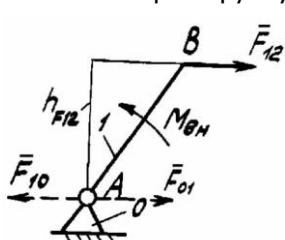
$$F_{21} = |1-3| \mu_F, F_{30} = |8-1| \mu_F.$$

$$3) \sum_{2,3} M_C = 0; \rightarrow F_{30} \cdot h_{30} = 0; \rightarrow h_{30} = 0.$$

$$4) \sum_{2,3} F = 0; \rightarrow F_{21} + G_2 + F_{u2} + F_{24} + F_{23} = 0.$$

Вспользуемся уже построенным планом сил:
 $F_{23} = |6-1| \cdot \mu_F.$

Рассмотрим группу начальных звеньев 0-1 (рис. 3.15).



$$\sum_1 M_A = 0; \rightarrow -M_{01} + F_{12} h_{F12} \mu_1 = 0 \rightarrow$$

$$M_{01} = F_{12} h_{F12} \mu_1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum F = 0; & \rightarrow F_{10} + F_{12} = 0; \\ F_{10} &= -F_{12}. \end{aligned}$$

Рис. 3.15 - Структурная группа 0-1

1

В одной из своих работ Н.Е. Жуковский показал, что равновесию механизма с одной степенью подвижности соответствует равновесие некоторого рычага. В основу доказательств был положен принцип возможных перемещений: сумма работ всех сил системы из n звеньев на возможных перемещениях равна нулю:

$$\sum_i^n F_i \delta_{Fi} = 0. \quad (3.3)$$

Механизм является кинематической цепью с вполне определенными движениями всех звеньев. Поэтому для механизма возможные перемещения являются и действительными. На основании этого выражение (3.3) можно записать в виде:

$$\sum_i^n F_i d_{Fi} = 0, \quad (3.4)$$

где d_{Fi} - проекция действительных перемещений на направления сил.

Дадим графическую интерпретацию выражения (3.4). Пусть на звено, у которого скорости точек A и B известны, действует сила F_i , приложенная в точке C (рис. 3.16, а). Найдя мгновенный центр вращения O , определим направление скорости точки C .

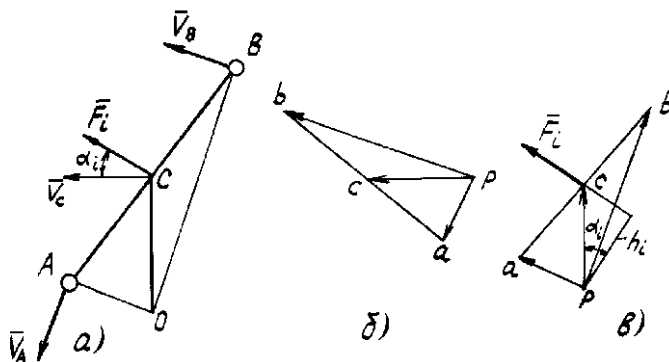


Рис. 3.16 – Действующие силы

Направление действительного перемещения точки C (d_{Si}) совпадает с направлением скорости V_C , а его проекция на направление силы будет:

$$d_{Fi} = d_{Si} \cos \alpha_i \quad (3.5)$$

Элементарная работа силы F_i

$$dA_i = F_i d_{Fi} = F_i d_{Si} \cos \alpha_i. \quad (3.6)$$

Т.к. $d_{Si} = V_C dt$, то $dA_i = F_i V_C \cos \alpha_i dt$. (3.7)

Величину скорости V_C можно определить по плану скоростей (рис. 3.16, б):

$$V_C = |\overline{pc}| \mu_V. \quad (3.8)$$

Подставляя выражение (3.8) в (3.7), получим:

$$dA_i = F_i |\overline{pc}| \mu_V \cos \alpha_i dt. \quad (3.9)$$

Повернем план скоростей на 90° и приложим силу F_i в точке

С.

Так как

$$h_i = |\overline{pc}| \cos \alpha_i. \quad (3.10)$$

Тогда (3.9) примет вид:

$$dA_i = F_i h_i \mu_V dt. \quad (3.11)$$

Из формулы (3.11) видно, что элементарная работа силы пропорциональна произведению этой силы на кратчайшее расстояние ее линии действия от полюса повернутого плана скоростей. Аналогичные выражения можно получить и для сил, действующих на другие звенья механизма. Поэтому для механизма выражение (3.7) с учетом (3.4) будет иметь вид:

$$dA_i = \sum_i^n F_i V_{Fi} \cos \alpha_i dt = 0. \quad (3.12)$$

или после сокращения на общий знаменатель dt :

$$dN_i = \sum_i^n F_i V_{Fi} \cos \alpha_i = 0, \quad (3.13)$$

где dN_i - мгновенная мощность силы F_i .

Анализ выражения (3.13) показывает, что, если механизм находится в равновесии, то сумма мгновенных мощностей всех сил, приложенных к звеньям механизма, равна нулю. Используя выражение (3.11), элементарную работу для механизма можно представить в виде:

$$dA_i = \sum_i^n F_i h_i \mu_{V_i} dt = \mu_V dt \sum_i^n F_i h_i = 0. \quad (3.14)$$

Так как $\mu_V \neq 0$, $dt \neq 0$, то:

$$\sum_i^n F_i h_i = 0. \quad (3.15)$$

Сравнивая выражения (3.11), (3.13), (3.15), можно сделать заключение, что произведение силы на расстояние ее линии действия от полюса повернутого плана скоростей пропорционально не только элементарной работе, но и мгновенной мощности.

На основании (3.15) теорема Н.Е. Жуковского о жестком рычаге сформулирована следующим образом:

- рычаг Жуковского - повернутый на 90° план скоростей, рассматриваемый как жесткий рычаг, вращающийся относительно неподвижной точки (полюса Р) и находящийся в равновесии под действием всех приложенных к нему сил.

Если на звенья механизма кроме сил действуют еще и моменты сил, то их удобнее всего представить парами сил. С помощью рычага Жуковского можно определить одну неизвестную силу, чаще всего $F_{Вн}$.

РАЗДЕЛ 4. ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ

4.1 Режимы работы машины. Уравнение движения машины

При работе машины можно выделить три режима: разбег, установившееся движение и выбег (рис. 4.1).

Время разбега характеризуется возрастанием скорости начального звена от нуля до некоторого значения, соответствующего началу установившегося движения.

Время установившегося движения характеризуется периодическим изменением скорости начального звена. Промежуток времени, по истечении которого положения, скорости и ускорения начального звена принимают первоначальные значения, и восстанавливается запас кинетической энергии, называется циклом установившегося движения механизма.

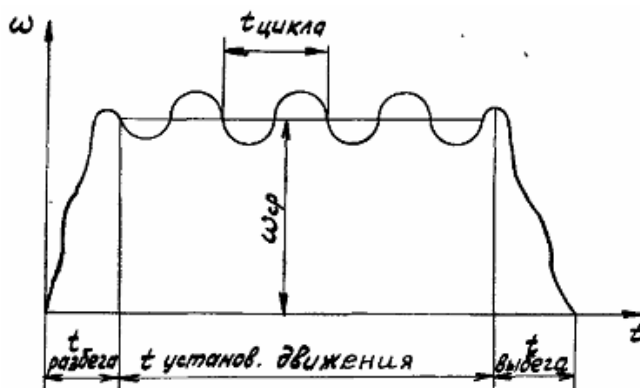


Рис. 4.1 – Режимы работы машины

Время выбега характеризуется убыванием скорости начального звена до нулевого значения.

В дальнейшем будем рассматривать только режим установившегося движения.

Уравнение движения машины можно записать, используя теорему об изменении кинетической энергии:

$$\Delta E = \sum A,$$

$$E_K - E_H = A_{\text{ДВ}} - A_{\text{ПС}} - A_{\text{тр}} \pm A_T \pm A_y,$$

где E_K - кинетическая энергия машины в конечный момент времени;

E_n - кинетическая энергии машины в начальный момент времени;

$A_{дв}$ - работа движущих сил;

$A_{ПС}$ - работа сил производственного сопротивления;

$A_{тр}$ - работа сил трения;

A_T - работа сил тяжести;

A_U - работа сил упругости.

Механизм машины является многозвенной системой, нагруженной различными силами и моментами. Определить закон движения такой системы сложно. Однако если механизм имеет одну степень подвижности, достаточно знать закон движения одного начального звена. Поэтому для удобства расчетов весь сложный многозвенный механизм можно заменить одним условным звеном, другими словами, - динамической моделью машины. К этому звену приложен приведенный момент сил, эквивалентный всей за-

данной нагрузке и это звено обладает приведенным моментом инерции - эквивалентом всей инерции механизма (рис. 4.2, а).

Динамическая модель может иметь и другой вариант (рис. 4.2, б). В этом случае все силы и массы приводятся в точку, в которой приложена приведенная сила и в которой сосредоточена приведенная масса.



Рис. 4.2 –

Моменты инерции

а)

б)

При переходе от реального механизма к его модели необходимо соблюсти при приведении сил равенство элементарных работ или мощностей, а при приведении масс - условие равенства кинетических энергий.

4.2 Приведение сил

Приведенный момент сил - условный момент сил, приложенный к звену приведения, элементарная работа или мощность которого равна сумме элементарных работ или мощностей всех приводимых сил и моментов сил.

Приведенная сила - условная сила, приложенная в точке приведения, элементарная работа или мощность которой равна

сумме элементарных работ или мощностей всех приводимых сил и моментов сил.

Рассмотрим приведение сил на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 4.3, а), для которого построен план скоростей (рис. 4.3. б).

Приведем силы F_2 , F_3 и момент сил M_2 к звену 1 (динамическая модель на рис. 4.3, в).

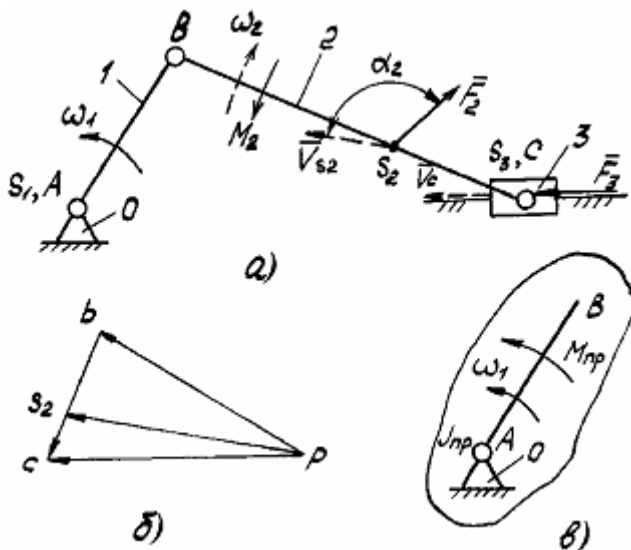


Рис. 4.3 - приведение сил на примере кривошипно-ползунного механизма

Выразим равенство мощностей:

$$M_{np} \omega_1 = F_2 V_{S2} \cos \alpha_2 + F_3 V_C \cos \alpha_3 - M_2 \omega_2, \quad (4.1)$$

где α_2 – угол $(\vec{F}_2, \vec{V}_{S2})$, α_3 – угол $(\vec{F}_3, \vec{V}_C) = 0$.
Тогда

$$M_{np} = (F_2 V_{S2} \cos \alpha_2 + F_3 V_C \cos \alpha_3 - M_2 \omega_2) / \omega_1. \quad (4.2)$$

В общем случае выражение (4.2) имеет вид:

$$M_{np} = \left[\sum F_i V_{Fi} \cos(\vec{F}_i, \vec{V}_{Fi}) + \sum M_i \omega_i \right] / \omega_{np}$$

(4.3)

В случае приведения сил не к звену, а в точку звена приведения, имеем:

$$F_{\text{пр}} = [\sum F_i V_{F_i} \cos(\bar{F}_i, \bar{V}_{F_i}) + \sum M_i \omega_i] / V_{\text{пр}}. \quad (4.4)$$

Приведенный момент инерции механизма - условный момент инерции, которым должно обладать звено приведения относительно оси его вращения, кинетическая энергия которого равна сумме кинетических энергий звеньев механизма.

Приведенная масса механизма - условная масса, сосредоточенная в точке приведения, кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий звеньев механизма.

Воспользуемся рис. 4.3. Выразим равенство кинетических энергий

$$\frac{J_{\text{пр}} \omega_1^2}{2} = \frac{J_{S_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_{S_2}^2}{2} + \frac{J_{S_2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_{S_3}^2}{2}, \quad (4.5)$$

из которого получим:

$$J_{\text{пр}} = (J_{S_1} \omega_1^2 + m_2 V_{S_2}^2 + m_3 V_{S_3}^2) / \omega_1^2. \quad (4.6)$$

В общем виде приведенный момент инерции и приведенная масса определяются зависимостями:

$$J_{\text{пр}} = (\sum J_{S_i} \omega_i^2 + \sum m_i V_{S_i}^2) / \omega_{\text{пр}}^2, \quad (4.7)$$

$$m_{\text{пр}} = (\sum J_{S_i} \omega_i^2 + \sum m_i V_{S_i}^2) / V_{\text{пр}}^2. \quad (4.8)$$

4.3 Приведение масс

Запишем выражение для кинетической энергии механизма, используя динамическую модель:

$$\omega = \sqrt{\frac{2E}{J_{\text{пр}}}}, \quad (4.9)$$

откуда

$$E = \frac{J_{\text{пр}} \omega^2}{2}. \quad (4.10)$$

Угловую скорость звена приведения можно определить,

если известно отношение $E/J_{пр}$. Эту задачу можно решить графически, построив график

$E = E(J_{пр})$ - диаграмму энергомасс (рис. 4.4).

Кривая энергомасс, соответствующая времени разбега, имеет восходящий характер, а на выбеге - нисходящий. На участке установившегося движения, соответствующем одному циклу, кривая имеет замкнутый характер и повторяется столько раз, сколько будет циклов за время установившегося движения.

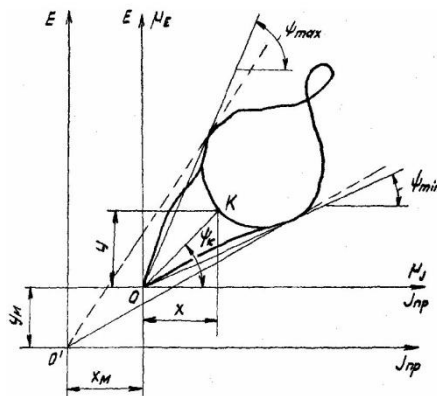


Рис. 4.4 - График диаграммы энергомасс

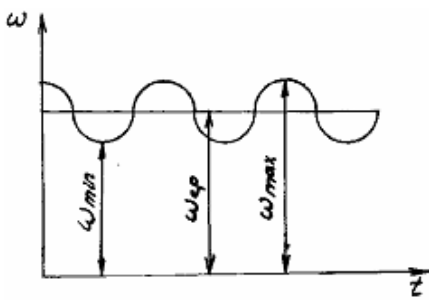
На основании (4.10) запишем значение угловой скорости для некоторого положения K:

$$\omega = \sqrt{2 \frac{y \mu_E}{x \mu_J}} = \sqrt{2 \operatorname{tg} \psi_K \frac{\mu_E}{\mu_J}} \quad (4.11)$$

Максимальное и минимальное значения угловой скорости в режиме установившегося движения соответственно будут равны:

$$\omega_{max} = \sqrt{2 \operatorname{tg} \psi_{max} \frac{\mu_E}{\mu_J}} \quad (4.12)$$

$$\omega_{min} = \sqrt{2 \operatorname{tg} \psi_{min} \frac{\mu_E}{\mu_J}} \quad (4.13)$$



На рис. 4.5 показан график $\omega = \omega(t)$ для режима установившегося движения.

Изменение угловой скорости

характеризуется коэффициентом неравномерности движения механизма. Коэффициент неравномерности движения механизма - отношение амплитуды колебания угловой скорости начального звена к ее среднему значению за один цикл установившегося движения механизма, то есть

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}} \quad (4.14)$$

Причины непостоянства угловой скорости начального звена:

1) неравенство друг другу работы движущих сил и работы сил сопротивления внутри цикла вследствие того, что приведенные моменты сил движущих

и сил сопротивления изменяются по разным законам;

2) непостоянство приведенного момента инерции механизма вследствие изменения в течение цикла скоростей центров масс звеньев и их угловых скоростей.

Для нормальной работы машины необходимо, чтобы коэффициент неравномерности движения δ не превышал допустимого значения. Ниже приведены допустимые коэффициенты неравномерности движения для некоторых типов машин:

- насосы - $\delta = 0,03 \dots 0,2$;

- металлообрабатывающие станки - $\delta = 0,02 \dots 0,05$;

- двигатели внутреннего сгорания - $\delta = 0,004 \dots 0,015$;

- прессы - $\delta = 0,1 \dots 0,14$.

При проектировании механизма часто возникает необходимость уменьшения коэффициента δ .

Эту задачу можно решить постановкой маховика.

Маховик - дополнительное тело вращения, предназначенное для обеспечения заданного коэффициента неравномерности движения механизма.

На рис. 4.4 штриховыми линиями показаны касательные к кривой энергомасс после постановки маховика. Разность между углами Ψ_{max} и Ψ_{min} уменьшается. Следовательно, уменьшается и амплитуда изменений угловой скорости ($\omega_{max} - \omega_{min}$). Момент инерции маховика $J_M = x_M \cdot \mu_j$, кинетическая энергия маховика $E_M = y_M \cdot \mu_E$.

4.4 Расчет маховика

Как указывалось выше, подбором массы и момента инерции

маховика можно заставить начальное звено механизма двигаться с заданным отклонением от некоторой его средней скорости.

Маховик является как бы аккумулятором кинетической инерции механизма, накапливая ее во время ускоренного движения и отдавая обратно при замедленном движении.

Существуют различные методы определения момента инерции маховика - как приближенные, так и точные.

Рассмотрим один из наиболее распространенных точных методов, основанный на построении кривой энергомасс.

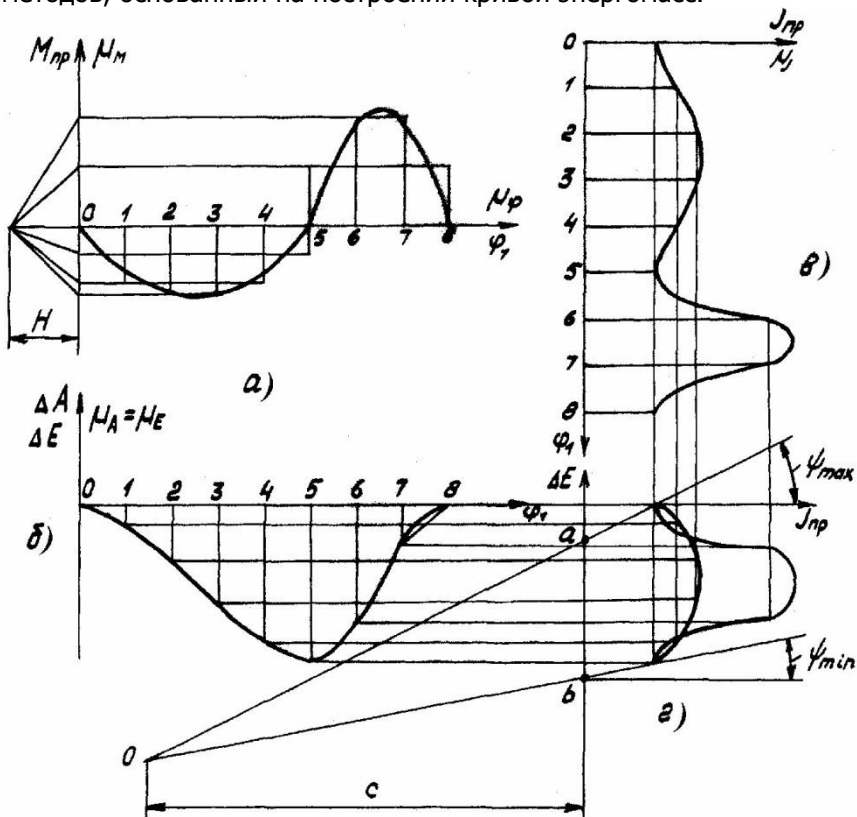


Рис 4.6 - Силы действующие на звенья механизма

Для построения кривой энергомасс необходимо выполнить следующие расчеты и построения:

- 1) все силы, действующие на звенья механизма, привести к начальному звену (звену приведения) в виде $M_{пр}$ по (4.3) и построить график $M_{пр} = M_{пр}(\psi_1)$, приняв масштабные коэффициенты μ_M и μ_ψ (рис. 4.6, а);
- 2) методом графического интегрирования кривой

приведенного момента сил получить избыточную работу $\Delta A = \Sigma A$. На основании теоремы

об изменении кинетической энергии $\Delta E = \Sigma A$, поэтому полученный график является также графиком изменения кинетической энергии (рис. 4.6, б). Графическое интегрирование обратно графическому дифференцированию, рассмотренному в 3.2 и на рис. 3.2. Масштабный коэффициент для избыточной работы и приращения кинетической энергии будет $\mu A = \mu M \cdot \mu \varphi \cdot H$, где H – полюсное расстояние при интегрировании, принятое произвольно.

3) Массы звеньев и их моменты инерции привести к начальному звену в виде $J_{пр}$ (4.7) и построить график $J_{пр} = J_{пр}(\psi_1)$, приняв масштабные коэф-

фициенты μJ и $\mu \psi$ (рис. 4.6, в). Такое расположение графика принято для удобства построения кривой энергомасс.

Построить кривую энергомасс, исключая графически параметр ψ_1 из графиков $\Delta E = \Delta E(\psi_1)$ и $J_{пр} = J_{пр}(\psi_1)$ (рис. 4.6, г).

5) К полученной кривой провести две касательные под углами ψ_{max} и ψ_{min} , которые согласно (4.12) и (4.13) соответствуют угловым скоростям ω_{1max} и ω_{1min} , обеспечивающим требуемый коэффициент неравномерности движения δ .

Найдем зависимость углов ψ_{max} и ψ_{min} от δ .

Решая совместно выражения

$$\omega_{1cp} = \frac{\omega_{1max} + \omega_{1min}}{2} \delta = \frac{\omega_{1max} - \omega_{1min}}{\omega_{cp}} \quad (4.15)$$

$$\omega_{1max} = \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right); \quad \omega_{1min} = \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Возведем в квадрат левые и правые части (4.15):

$$\omega_{1max}^2 = \omega_{1cp}^2 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2; \quad \omega_{1min}^2 = \omega_{1cp}^2 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2. \quad (4.16)$$

Возведем в квадрат левые и правые части (4.12) и (4.13):

$$\omega_{1max}^2 = 2 \operatorname{tg} \psi_{max} \frac{\mu_E}{\mu_J}; \quad \omega_{1min}^2 = 2 \operatorname{tg} \psi_{min} \frac{\mu_E}{\mu_J}. \quad (4.17)$$

Подставив в (4.16) выражения (4.17), получим:

$$2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\max} = \omega_{1\text{ср}}^2 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 ;$$

$$2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\min} = \omega_{1\text{ср}}^2 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 . \quad (4.18)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_E} \omega_{1\text{ср}}^2 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 ;$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_E} \omega_{1\text{ср}}^2 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 . \quad (4.19)$$

Проводим касательные к кривой $\Delta E = \Delta E(J_{\text{пр}})$ и находим их точку пересечения O (рис. 4.6, г). Требуемый момент инерции маховика $J_M = c \cdot \mu_J$.

При малых значениях коэффициента δ разность между углами ψ_{\max} и ψ_{\min} незначительна и точка пересечения касательных часто находится за пределами чертежа. В этом случае удобно выразить момент инерции маховика через отрезок ab :

$$J_M = \frac{ab \cdot \mu_E}{\omega_{1\text{ср}}^2 \delta} . \quad (4.20)$$

РАЗДЕЛ 5. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС

5.1 Общие сведения об уравнивании

Из года в год растут рабочие скорости машин. В настоящее время применяются электродвигатели с числом оборотов *12 000 об/мин*, двигатели внутреннего сгорания - *5 000 об/мин*, центрифуги - *40 000 об/мин*. С увеличением скорости растет производительность машин. Однако, вместе с тем растут и ускорения, а, следовательно, и силы инерции, которые могут превосходить силы веса в сотни тысяч раз.

Силы инерции вызывают дополнительные динамические нагрузки в кинематических парах, увеличение сил трения, вибрации в звеньях и фундаменте, а при резонансе могут привести к поломке.

Поэтому при проектировании ставится задача рационального подбора таких масс звеньев механизма, которые бы обеспечили полное или частичное устранение указанных динамических нагрузок. Эта задача носит название "Уравнивание масс механизма" или "Уравнивание сил инерции звеньев механизма" и делится на две самостоятельные задачи:

- 1) уравнивание вращающихся масс;
- 2) уравнивание динамических нагрузок на фундамент механизма.

Любое вращающееся тело, соединенное кинематическими парами со стойкой, называется ротором. Даже симметричный по конструкции ротор может быть неуравновешен вследствие неоднородности материала, неточности изготовления, погрешностей монтажа.

5.2 Уравнивание вращающихся масс

Выделим три случая неуравновешенности ротора (рис. 5.1).

1) Статически неуравновешенный ротор - ротор, у которого главный вектор сил инерции не равен нулю, а главный момент сил инерции равен нулю ($\bar{F}_u \neq 0, \bar{M}_i = 0$). В этом случае главная центральная ось инерции параллельна оси вращения ротора (рис. 5.1, а).

2) Моментно неуравновешенный ротор - ротор, у которого главный вектор сил инерции равен нулю, а главный момент сил инерции не равен нулю ($\bar{F}_u = 0, \bar{M}_i \neq 0$). В этом

случае главная центральная ось инерции и ось вращения ротора пересекаются в центре масс (рис. 5.1, б).

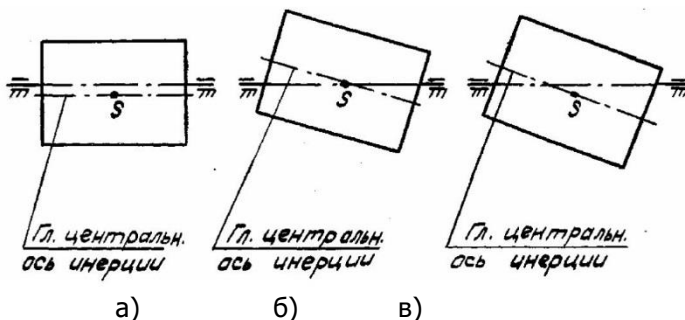
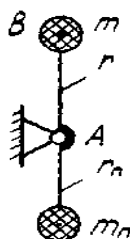


Рис. 5.1 - Случаи неуравновешенности ротора

3) Динамически неуравновешенный ротор - ротор, у которого и главный вектор, и главный момент сил инерции не равны нулю ($\bar{F}_i \neq 0, \bar{M} \neq 0$). В этом случае главная центральная ось инерции и ось вращения ротора пересекаются вне центра масс или скрещиваются (рис. 5.1, в).

Пусть масса m вращается с угловой скоростью ω вокруг оси A (рис. 5.2). В этом случае возникает сила



инерции, вызывающая переменное нагружение опоры A .

$$\bar{F}_u = -m \cdot a_B = -m \cdot \omega^2 \cdot \bar{r},$$

Установим противовес m_n , который приведет к возник

новению силы инерции F_{in} , равной по величине, но про-

Рис. 5.2 - Вращение масс

тивоположно направленной к силе инерции F_i , т.е.

$$\sum \bar{F}_{ui} = 0.$$

$$\bar{F}_u + \bar{F}_{un} = 0. \quad m \cdot \omega^2 \cdot \bar{r} + m_n \cdot \omega^2 \cdot \bar{r}_n = 0.$$

После преобразования получаем:

$$m\bar{r} + m_n\bar{r}_n = 0$$

Зная произведение $mnrn$, зададимся массой и определим радиус или наоборот.

В общем случае условие статического уравновешивания

можно записать как:

$$\sum_i^n m_i \bar{r}_i = 0. \quad (5.1)$$

Произведение mr называется дисбалансом. Рассмотрим статическое уравновешивание нескольких масс (рис. 5.3, а).

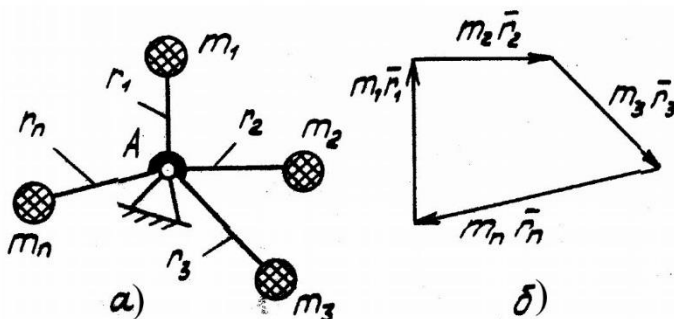


Рис. 5.3 - Статическое уравновешивание нескольких масс
Для того, чтобы центр масс совместить с точкой А, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sum_i^n \bar{F}_{ui} = 0 \quad \text{или} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_i^n m_i \cdot \bar{r}_i = 0.$$

$$m_1 \cdot \bar{r}_1 + m_2 \cdot \bar{r}_2 + m_3 \cdot \bar{r}_3 + m_n \cdot \bar{r}_n = 0.$$

Задаваясь масштабным коэффициентом, строим векторный многоугольник дисбалансов (рис. 5.3, б) и получаем дисбаланс противовеса $mnrn$, и его направление. Задаваясь массой, определим радиус или наоборот. Вместо постановки противовеса можно убрать массу с противоположной стороны, равную mn на расстоянии m .

Моментное уравновешивание ротора покажем на примере конструкции, представленной на рис. 5.4. Две вращающиеся в параллельных плоскостях массы $m1$ и $m2$, дисбалансы которых равны по величине, но противоположно направлены, т.е. $m1 \bar{r}_1 + m2 \bar{r}_2 = 0$, $Fu1 = Fu2$.

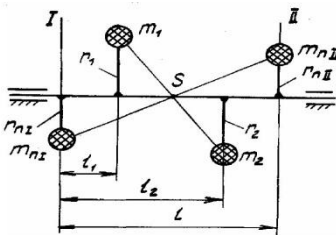


Рис. 5.4 -

Моментное
уравновешивание
ротора

Следовательно, центр масс лежит на оси вращения. Этот ротор статически уравновешен, но не уравновешен моментно. Выберем плоскости I и II, в которых установим противовесы.

Составим сумму носителями плоскости I:

$$\sum_i^n m_i \cdot \bar{r}_i \cdot l_i = 0$$

$$m_{nII} \cdot r_{nII} \cdot l_{nII} - m_2 \cdot \bar{r}_2 \cdot l_2 + m_3 \cdot \bar{r}_3 + m_1 \cdot \bar{r}_1 \cdot l_1 = 0.$$

Отсюда находим m_{nI} и m_{nII} , зная l , вычисляем m_{nII} . Теперь, задаваясь m_{nII} , определим m_{nI} .

Аналогично можно найти m_{nI} и m_{nII} . Если задано несколько масс, создающих моменты в разных плоскостях, то для моментного уравновешивания необходимо выполнить условие

$$\sum_i^n m_i \cdot \bar{r}_i \cdot l_i = 0$$

(5.2)

5.3 Динамическое уравновешивание ротора

В качестве примера рассмотрим вращающееся звено, состоящее из трех масс, расположенных в разных плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и общий центр масс их не лежит на оси вращения, то есть

$$\sum_i^n F_{ui} \cdot \bar{r}_i \neq 0 \quad \sum_i^n M_{ui} \neq 0 \quad . \text{ (рис. 5.5, а)}$$

Для динамического уравновешивания этого ротора необходимо выполнить условия (5.1) и (5.2), т.е.

$$\sum_i^n m_i \bar{r}_i = 0. \quad \sum_i^n m_i \cdot \bar{r}_i \cdot l_i = 0$$

Для постановки противовесов выберем плоскости I и II .
 Запишем условие (5.2) относительно плоскости I :

$$m_I \cdot \bar{r}_I \cdot l_I + m_2 \cdot \bar{r}_2 \cdot l_2 + m_3 \cdot \bar{r}_3 \cdot l_3 + m_{nII} \cdot \bar{r}_{nII} \cdot l = 0.$$

Векторы моментов повернем на 90° и будем направлять вдоль радиусов. Построим многоугольник моментов дисбалансов и определим $m_{nIIrIII}$, а затем m_{nIIrII} (рис. 5.5, б).

Запишем условие (5.1):

$$m_I \cdot \bar{r}_I + m_2 \cdot \bar{r}_2 + m_3 \cdot \bar{r}_3 + m_{nII} \cdot \bar{r}_{nII} + m_{nI} \cdot \bar{r}_{nI} = 0.$$

Из многоугольника дисбалансов определим $m_{nI}r_I$ (рис. 5.5, в). Задаваясь массами противовесов m_{nI} и m_{nII} , вычислим радиусы их установки, а направления установки определим по векторным многоугольникам.

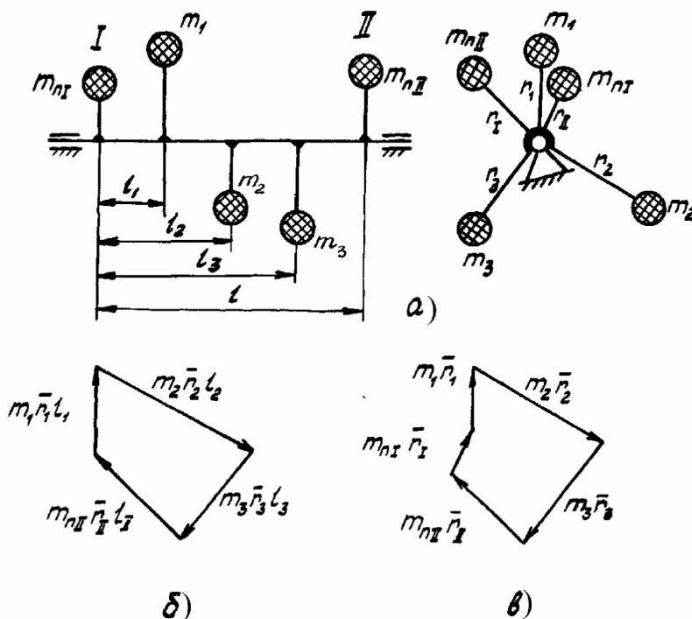


Рис. 5.5 - Многоугольник моментов дисбалансов

Эту задачу можно решать по-другому. Сначала выполнить условие (5.1), т.е. статически уравновесить ротор, установив один противовес в любой плоскости, а затем выполнить условие (5.2) относительно плоскостей I и II , установив еще два противовеса.

Произвести расчет для уравновешивания ротора так, как

было описано в 5.2, можно, если известны неуравновешенные массы и их расположение. Однако, на практике правильно спроектированная с точки зрения полного уравновешивания деталь все же может иметь некоторую неуравновешенность вследствие неоднородности материала, неточности обработки и т. п. Поэтому все быстровращающиеся детали проверяют опытно на специальных установках "балансировочных машинах".

Балансировка - технологическая операция, направленная на выявление и устранение неизвестной неуравновешенности.

5.4 Балансировка роторов

При ускоренном движении звеньев механизма неуравновешенные силы инерции вызывают динамические давления на опоры и фундамент. В режиме установившегося движения эти динамические давления имеют периодический характер, вызывают вибрации, особенно опасные в режиме резонанса. Для устранения вредного воздействия сил инерции на опоры и фундамент производят уравновешивание механизмов. При статическом уравновешивании добиваются, чтобы главный вектор сил инерции был равен нулю, ($\bar{F}_и = 0$), а при динамическом уравновешивании кроме статического, обеспечивается и моментное уравновешивание ($\bar{M}_и = 0$).

Статическое уравновешивание осуществляется постановкой противовесов, а моментное - с помощью дополнительных устройств или специальным расположением механизмов.

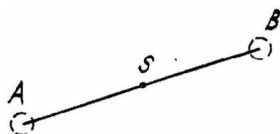
Рассмотрим только статическое уравновешивание механизмов, при котором обеспечивается условие

$$\bar{F}_и = 0. \quad (5.3)$$

Как известно, $F_u = -m \bar{a}S$, где aS - ускорение центра масс механизма. Условие (5.3) выполняется при $aS = 0$, что возможно только при неподвижном центре масс механизма. Обеспечить неподвижность центра масс можно постановкой противовесов на звенья механизма.

Рассмотрим один из методов расчета противовесов - метод заменяющих масс.

Пусть звено (рис. 5.6) совершает плоское или вращательное движение.



Сосредоточим массу звена в двух точках A и B. Значения m_A и m_B определим из соотношений:

$$m = m_A + m_B,$$

$$m_A \cdot l_{AS} = m_B \cdot l_{BS} \quad (5.4)$$

При этом центр масс системы m_A и m_B совпадает с центром масс звена и главный вектор сил инерции этой системы равен главному вектору сил инерции звена. Однако главный момент сил инерции системы m_A и m_B не равен главному моменту сил инерции звена. Поэтому метод заменяющих масс может быть применен только для статического уравновешивания.

Статическое уравновешивание механизма рассмотрим на примере шарнирного четырехзвенника (рис. 5.7, а).

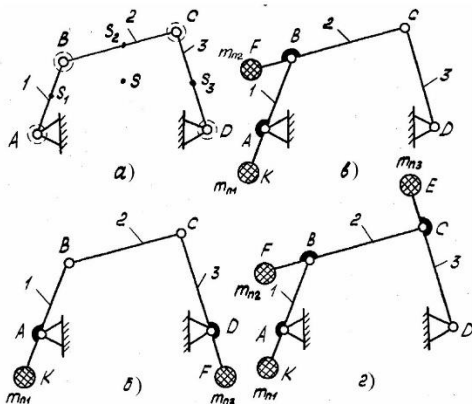


Рис. 5.7 - Статическое уравновешивание механизма
Разнесем массы звеньев по шарнирам:

$$m_1 = m_{1A} + m_{1B};$$

$$m_1 = m_1 \frac{l_{BS1}}{l_{AB}};$$

$$m_{1B} = m_1 \frac{l_{AS1}}{l_{AB}};$$

$$m_2 = m_{2B} + m_{2C};$$

$$m_{2C} = m_2 \frac{l_{DS3}}{l_{DC}};$$

$$m_{3D} = m_3 \frac{l_{CS3}}{l_{DC}};$$

Теперь в шарнирах будут сосредоточены массы

$$m_A = m_{1A}; \quad m_B = m_{1B} + m_{2B};$$

$$m_C = m_{2C} + m_{3C}; \quad m_D = m_{3D}.$$

Чтобы сделать центр масс механизма неподвижным, можно установить противовесы различным способом. Рассмотрим вариант установки противовесов, изображенный на рис. 5.7, б. Разместим на звеньях 1 и 3 противовесы таким образом, чтобы центры масс систем m_B , m_{n1} и m_C оказались в неподвижных точках A и D.

$$m_{n1} \cdot l_{AK} = m_B \cdot l_{AB}; \Rightarrow m_{n1} = m_B \frac{l_{AB}}{l_{AK}};$$

$$m_{n3} \cdot l_{DF} = m_C \cdot l_{CD}; \Rightarrow m_{n3} = m_C \frac{l_{CD}}{l_{DF}}.$$

После постановки противовесов в точках A и D будут сосредоточены массы:

$$m'_A = m_{1A} + m_B + m_{n1};$$

$$m'_D = m_{3D} + m_C + m_{n3}.$$

Центр масс механизма будет находиться между точками A и D и тоже будет неподвижным.

Аналогично можно рассчитать противовесы для вариантов на рис. 5.7, в и 5.7, г. В последнем случае центр масс механизма совпадает с точкой A.

Постановка противовесов увеличивает габариты механизма и утяжеляет его. Поэтому иногда производят лишь частичное уравновешивание главного вектора сил инерции (рис. 5.8).

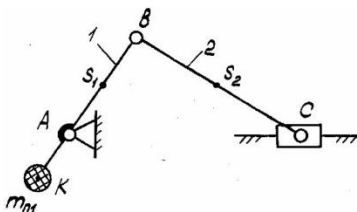


Рис. 5.8 - частичное уравновешивание главного вектора сил инерции

Рассредоточим массы звеньев по шарнирам:

$$m_1 = m_{1A} + m_{1B}; \quad m_2 = m_{2B} + m_{2C};$$

$$m_1 = m_{1A}; \quad m_B = m_{1B} + m_{2B};$$

$$m_C = m_{2C} + m_{3C}; \quad m_D = m_{3D};$$

Масса m_A неподвижна, масса m_B совершает вращательное

движение, масса m_C совершает поступательное движение.

Если установить противовес на первом звене, то этим самым уравновесим только вращающиеся массы:

$$m_{n1} \cdot l_{AK} = m_B \cdot l_{AB}; \quad m_{n1} = m_B \frac{l_{AB}}{l_{AK}};$$

Таким образом, после постановки противовеса механизм будет заменен двумя массами: $m^A = m_{IA} + m_A + m_{n1}$ неподвижной и m_C , движущейся поступательно. Поэтому центр масс механизма будет перемещаться горизонтально и сила инерции $\bar{F}_u = -(m_{2C} + m_3) \bar{a}_C$ не будет уравновешена. Для некоторых механизмов это допустимо.

При расчете противовесов для ряда звеньев можно не рассредоточивать массы по шарнирам. Например, в последнем случае массу первого звена можно не заменять двумя массами и массу противовеса рассчитать следующим образом:

$$m_{n1} \cdot l_{AK} = m_1 \cdot l_{AS1} + m_{2B} \cdot l_{AB};$$

$$m_{n1} = \frac{m_1 \cdot l_{AS1} + m_{2B} \cdot l_{AB}}{l_{AK}};$$

Данное замечание относится и к расчету противовесов шарнирного четырехзвенника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин: Учеб. Для втузов. -4-е изд., перераб. и доп. - М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1988.-640 с.

2. Теория механизмов и механика машин: Учеб. для втузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1998. - 496 с.

3. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин: Учебн. пособие для втузов /Под ред. К.В. Фролова. - 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Высш. шк., 1998. - 351 с.