

Электромагнитные поля и волны

СКИФ



Кафедра «Радиоэлектроника»

Лекционный курс

Авторы

Звездина М.Ю., Шокова Ю.А.

Аннотация

Лекционный курс предназначен для обучения бакалавров по направлению 11.03.2 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Рассматриваются основные понятия теории распространения электромагнитных волн.

Авторы



**Звездина Марина
Юрьевна –**

**ДОКТОР ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК,
ДОЦЕНТ, ЗАВ. КАФЕДРОЙ
«РАДИОЭЛЕКТРОНИКА»**



**Шокова Юлия
Александровна –**
**КАНДИДАТ ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК,
ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ
«РАДИОЭЛЕКТРОНИКА»**

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Модуль 1. Основные законы электродинамики | 7 |
| 1.1 Введение. Основные уравнения электродинамики | 7 |
| 1.1.1 Введение. Основные понятия электродинамики | 7 |
| 1.1.2 Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах..... | 10 |
| 1.1.3 Метод комплексных амплитуд | 13 |
| 1.2 Основные законы электромагнитного поля | 15 |
| 1.2.1 Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения | 15 |
| 1.2.2 Основные теоремы электродинамики | 20 |
| 1.2.3 Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга..... | 22 |
| 1.3 Волновые уравнения | 24 |
| 1.3.1 Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников | 24 |
| 1.3.2 Решение системы уравнений Максвелла для свободного пространства | 27 |
| Модуль 2. Излучение электромагнитных волн в свободное пространство | 32 |
| 2.1 Электродинамические потенциалы электромагнитного поля | 32 |
| 2.1.1 Возбуждение электромагнитного поля заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме | 32 |
| 2.1.2 Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля..... | 33 |
| 2.1.3 Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов | 36 |
| 2.1.4 Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов | 37 |
| 2.2 Электромагнитные поля элементарных источников | 39 |
| 2.2.1 Общие характеристики электромагнитного поля элементарных источников..... | 39 |
| 2.2.2 Поля элементарных электрического и магнитного вибраторов. Диаграмма направленности | 42 |
| 2.2.3 Сферические волны. Поле электрического и магнитного вибраторов..... | 46 |

| | |
|---|-----------|
| 2.2.4 Цилиндрические волны. Структура поля линейного электрического и магнитного излучателей..... | 48 |
| 2.3 Поле системы элементарных излучателей | 49 |
| 2.3.1 Принцип Гюйгенса-Кирхгофа..... | 49 |
| 2.3.2 Излучатель Гюйгенса..... | 52 |
| 2.3.3 Принцип получения остронаправленного излучения..... | 54 |
| Модуль 3. Плоские электромагнитные волны в неограниченных средах..... | 59 |
| 3.1 Электромагнитные волны в различных средах | 59 |
| 3.1 Классификация сред..... | 59 |
| 3.1.2 Плоские однородные волны в изотропных средах без потерь | 60 |
| 3.1.3 Плоские волны в средах с потерями. Дисперсия электромагнитных волн..... | 64 |
| 3.1.4 Поляризация плоских волн..... | 66 |
| 3.2 Распространение волн в гиротропных средах..... | 68 |
| 3.2.1 Плоские однородные волны в ферритах при подмагничивании. Резонансное поглощение | 68 |
| 3.2.2 Особенности распространения электромагнитных волн в продольно намагниченном феррите | 70 |
| 3.2.3 Особенности распространения электромагнитных волн в поперечно намагниченном феррите | 73 |
| 3.3 Волновые явления вблизи границы раздела сред | 76 |
| 3.3.1 Нормальное падение плоских волн на границу раздела сред | 76 |
| 3.3.2 Нормальное и наклонное падение плоских волн на границу раздела сред. Двойное лучепреломление..... | 78 |
| 3.3.3 Плоские неоднородные волны на границе раздела сред..... | 81 |
| 3.3.4 Приближенные граничные условия Леонтовича | 83 |
| Модуль 4. Регулярные линии передачи электромагнитной энергии..... | 85 |
| 4.1 Уравнение электродинамики для направляемых волн | 85 |
| 4.1.1 Уравнения электродинамики для направляемых волн | 85 |
| 4.1.2 Полюсы волноводы | 89 |

| | |
|--|------------|
| 4.2 Волноводы с волнами типа Т | 95 |
| 4.2.1 Коаксиальный волновод..... | 95 |
| 4.2.2 Полосковые и микрополосковые линии | 97 |
| 4.2.3 Линии поверхностных волн. Замедляющие структуры | 99 |
| 4.2.4 Диэлектрические волноводы. Оптические волноводы и световоды | 104 |
| 4.3 Электромагнитные колебания в полых резонаторах | 107 |
| 4.3.1 Электромагнитные колебания в объемных резонаторах..... | 107 |
| 4.3.2 Поля в полых прямоугольных и круглых резонаторах..... | 110 |
| 4.3.3 Добротность объемных закрытых резонаторов | 111 |
| 4.4 Длинные линии | 115 |
| 4.4.1 Длинные линии и их параметры..... | 115 |
| 4.4.2 Методика нахождения параметров линии с помощью измерительной линии..... | 119 |
| 4.4.3 Круговая диаграмма полных сопротивлений | 123 |
| Модуль 5. Дифракция электромагнитных волн | 126 |
| 5.1 Электродинамические задачи дифракции | 126 |
| 5.1.1 Строгая постановка дифракционных задач. Метод разделения переменных..... | 126 |
| 5.1.2 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящем бесконечном круглом цилиндре | 128 |
| 5.2 Дифракция электромагнитных волн на клине и шаре | 134 |
| 5.2.1 Дифракция электромагнитных волн на бесконечном идеально проводящем клине и полуплоскости | 134 |
| 5.2.2 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящем шаре..... | 140 |
| 5.3 Метод интегральных уравнений и метод геометрической теории дифракции ... | 143 |
| 5.3.1 Классификация методов решения задач дифракции электромагнитных волн..... | 143 |
| 5.3.2 Интегральные уравнения внешних задач электродинамики..... | 145 |
| 5.3.2 Метод геометрической оптики | 148 |
| 5.3.4 Метод геометрической теории дифракции | 150 |
| 5.3.5 Приближение Гюйгенса-Кирхгофа..... | 151 |

| | |
|--|------------|
| 5.4 Компьютерные методы решения задач электродинамики | 153 |
| 5.4.1 Постановка задачи и представление полей..... | 153 |
| 5.4.2 Метод моментов и его разновидности. Проекционная модель задачи | 154 |
| 5.4.3 Сеточные методы. Метод конечных элементов..... | 157 |
| 5.5 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ В СИСТЕМАХ РАДИОСВЯЗИ..... | 160 |
| 5.5.1 КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ | 160 |
| 5.5.2 Интегральные уравнения для задачи дифракции плоской волны на круговом металлическом цилиндре | 162 |
| 5.5.3 Проверка полученных интегральных уравнений с известными аналитическими решениями..... | 165 |
| 5.5.4 Применение метода коллокаций для численного решения интегрального уравнения . | 167 |
| 5.5.5 Оценка погрешности вычислений | 169 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ | 172 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А | 173 |
| A1 Основные теоретические сведения векторного анализа | 173 |
| A2 Наиболее часто используемые векторные соотношения | 175 |
| A3 Некоторые функции, используемые при описании полей | 176 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б | 183 |
| Решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на круговом бесконечном металлическом цилиндре | 183 |
| B1 Постановка задачи | 183 |
| B2 Общее описание решения краевой задачи на основе метода Фурье..... | 185 |
| B3 Решение задачи нахождения распределения поверхностного тока в случае падения E -поляризованной плоской волны..... | 191 |
| B4 Решение задачи нахождения распределения поверхностного тока в случае падения H -поляризованной плоской волны..... | 195 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ В | 198 |

Модуль 1. Основные законы электродинамики

1.1 Введение. Основные уравнения электродинамики

Введение. Основные понятия электродинамики. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Метод комплексных амплитуд.

1.1.1 Введение. Основные понятия электродинамики

Одним из основных элементов системы беспроводной связи является антенна. Носителем данных в такой линии являются электромагнитные волны. Описание основных закономерностей электромагнитных полей осуществляется с помощью электродинамики.

Электродинамика – это наука, описывающая поведение **электромагнитного поля**, осуществляющего взаимодействие между зарядами. По определению (ГОСТ 19880-74) **электромагнитное поле** представляет собой вид материи, определяемый во всех точках двумя векторными величинами, которые характеризуют две его стороны, называемые соответственно электрическим полем и магнитным полем, и оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы, зависящие от их скорости и заряда. Классическая электродинамика является **макроскопической**, поскольку оперирует со значениями электромагнитных величин, усредненными по времени и пространству. Усреднение производится для интервалов времени, значительно больших периодов обращения или колебания элементарных заряженных частиц в атомах или молекулах, а также для участков поля, объемы которых во много раз превышают объемы атомов и молекул.

Простейшие электрические и магнитные явления были известны еще в древние времена. Однако лишь в 1600г. английский ученый У. Гильберт впервые их разграничил. В семнадцатом – первой половине восемнадцатого веков проводились многочисленные опыты с наэлектризованными телами. Во второй половине 18 века началось количественное изучение электрических явлений. Следующий этап в развитии электродинамики связан с работами немецких физиков Г. Ома, определившего количественную зависимость электрического тока от напряжения в цепи (1826г.) и К.Ф. Гаусса, сформулировавшего в 1830г. основную теорему электростатики (теорему Гаусса). В 1820г. датским физиком Х. Эрстедом было сделано наиболее фундаментальное открытие: он обнаружил связь между электрическими и магнитными явлениями. В том же году А. Ампер обнаружил взаимодействие, возникающее на расстоянии между двумя проводниками, по которым пропускается ток. Он же ввел термин «электродинамический» и ввел гипотезу о взаимосвязи между природным магнетизмом и существованием в магните круговых токов.

В 30–40-х годах XIX века в развитие электродинамики внес большой вклад английский ученый М. Фарадей – основоположник общего учения об электромагнитных явлениях, в котором все электрические и магнитные процессы рассматриваются с единой точки зрения. В 1831 году Фарадей открыл явление

электромагнитной индукции – возбуждение электромагнитного тока в контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Первая математическая формулировка законов электромагнитной индукции была дана немецким физиком Ф. Нейманом в 1845г. Им же были введены важные понятия само- и взаимоиндукции токов, поля сил.

Однако как таковая электродинамика получила свое развитие и завершение в работах Дж. Максвелла. Опираясь на эмпирические законы электромагнитных явлений и вводя гипотезу о порождении магнитного поля переменным электрическим полем, Максвелл в 1855 году записал в дифференциальной форме первый вариант системы уравнений электродинамики, не включающий еще понятие тока смещения. Фундаментальные уравнения классической электродинамики, названные его именем, были получены в 1864 году. В своей работе «Динамическая теория электромагнитного поля» было сформулировано понятие электромагнитного поля как физической реальности, имеющей собственную энергию и конечное время распространения, определяющее запаздывающий характер электромагнитного взаимодействия. Из уравнений Максвелла вытекало важное следствие – существование электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. После экспериментов немецкого физика Г. Герца (1886–1889), обнаружившего существование электромагнитных волн, теория Максвелла получила решающее подтверждение. Современная форма уравнений Максвелла появилась в 1884 году после опубликования работ Хевисайда, Герца и Гиббса. Они не только переписали систему уравнений в векторном виде, но и симметризовали ее, переформулировав в терминах поля. В связи с этим современная формулировка называется в ряде источников уравнениями Максвелла-Герца.

Классическая электродинамика, основанная на уравнениях Максвелла, лежит в основе многочисленных приложений электро- и радиотехники, СВЧ и оптики. Одним из первых приложений явились попытки установить беспроводную связь с помощью электромагнитных волн, завершившиеся созданием радио (А.С. Попов, 1896г.).

С открытием новых факторов и созданием новых теорий значение классической электродинамики не уменьшилось, были определены лишь границы ее применимости. В этих пределах уравнения Максвелла сохраняют силу, являясь фундаментом большинства разделов электродинамики, радиотехники, включая теорию и технику антенн.

Одним из проявлений существования ЭМ поля является воздействие его с силой Лоренца \vec{F} на движущийся со скоростью \vec{v} электрический заряд Q

$$\vec{F}(p, t) = Q(\vec{E}(p, t) + [\vec{v}, \vec{B}(p, t)]), \quad (1)$$

где $\vec{E}(p, t)$ - вектор напряженности электрического поля,

$\vec{B}(p, t)$ – вектор магнитной индукции,

p - точка наблюдения,

t - время.

Кроме функций \vec{E} , \vec{B} для описания ЭМ поля вводятся вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}(p,t)$ и вектор электрической индукции (электрического смещения) $\vec{D}(p,t)$. Векторы \vec{D} и \vec{H} характеризуют состояние среды под действием ЭМ поля. Векторы \vec{E} и \vec{D} описывают электрическое поле, а \vec{B} , \vec{H} - магнитное поле. По установившейся традиции магнитное поле в вакууме предпочтительно характеризуют его напряженностью \vec{H} , часто называемый просто магнитным вектором.

Единицы измерения данных векторов: вектора напряженности электрического поля \vec{E} - В/м; вектора напряженности магнитного поля \vec{H} - А/м.

Между векторами ЭМ поля в линейных изотропных средах существует следующая связь (материальные уравнения):

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (2a) \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (2b)$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon$, $\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$ - абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно;

$$\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36 \cdot \pi) \text{ Ф/м},$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} - \text{электрическая и магнитная постоянные};$$

ε, μ - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Кроме перечисленных выше векторных величин в электродинамике используется понятие скалярного поля **объемной плотности электрического заряда** ρ

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (3)$$

и **векторного поля объемной плотности тока проводимости** \vec{j}

$$\vec{j} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta S}. \quad (4)$$

В соотношениях (3) и (4) Δq - заряд, содержащийся в объеме ΔV ; ΔS - площадка, ориентированная перпендикулярно движению зарядов; \vec{i}_0 - орт нормали, указывающий направление движения; ΔI - ток, проходящий через ΔS . Предельные переходы в данных формулах следует понимать как условные, поскольку как бы ни уменьшался объем ΔV или элементарная площадка ΔS , они все же должны содержать достаточно большое число элементарных частиц.

Уравнения (2) вместе с законом Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5)$$

называют **уравнениями состояния линейной изотропной среды**. Здесь σ - удельная проводимость или просто проводимость вещества, измеряемая в [См/м²].

Одной из важных особенностей данного уравнения является коллинеарность (параллельность) векторов напряженности электрического поля и его источника – объемной плотности тока проводимости.

1.1.2 Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

Теоретической основой электродинамики, как отмечалось ранее, являются сформулированные в конце XIX века Джеймсом Максвеллом уравнения. Данная система введена аксиоматически, является постулатами электродинамики и подтверждается результатами современных исследований. Существует две формы записи системы уравнений Максвелла: дифференциальная и интегральная. Это обусловлено тем, что интегральная форма, основана на экспериментальных данных и удобна для физической трактовки получаемых результатов, а дифференциальная форма удобна для вывода теоретических положений электродинамики. Для вакуума система уравнений Максвелла имеет вид:

Дифференциальная форма

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (6a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6б)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (6в)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (6г)$$

Интегральная форма

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \vec{I}, \quad (7a)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}, \quad (7б)$$

$$\oint_L \vec{D} d\vec{s} = q, \quad (7г)$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (7д)$$

Переход от дифференциальной записи уравнений Максвелла к интегральной осуществляется с использованием теории векторных функций, в частности, использовании теоремы Остроградского-Гаусса и теоремы Стокса.

Дадим физическую трактовку полной системы уравнений Максвелла.

Первое уравнение (6а), (7а) описывает закон полного тока (обобщенный закон Ампера), определяет значения вихря магнитного поля и гласит, что токи смещения поля наравне с токами проводимости образуют магнитное поле и являются вихрями этого поля (интегральная форма). Электрический ток любого вида (проводимости, переноса, смещения) сопровождается существованием связанного с ним магнитного поля. Закон изменения электрического поля во времени определяет закон распределения магнитного поля в пространстве.

Заслуга Максвелла состоит в том, что он дополнил правую часть закона Ампера **плотностью тока смещения**

$$\vec{j}_c = d\vec{D} / dt. \quad (8)$$

Второе уравнение Максвелла (6б), (7б) носит название закона электромагнитной индукции (закон Фарадея) и объясняет причину возникновения вихревого электрического поля: изменяющееся во времени магнитное поле сопровождается существованием связанного с ним электрического поля. Закон изменения магнитного поля во времени определяет закон распределения электрического поля в пространстве.

По аналогии с первым уравнением Максвелла величину $d\vec{B} / dt = \vec{j}_c^M$ в правой части второго уравнения Максвелла можно рассматривать как **плотность магнитного тока смещения**.

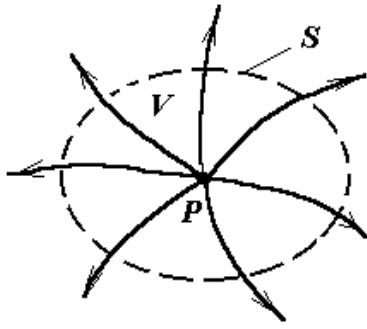
Максвелл обобщил закон электромагнитной индукции Фарадея, постулировав равенство (7б) для **произвольного замкнутого контура**, проходящего в любой среде, в том числе и для воображаемого контура.

Третье и четвертое уравнения Максвелла описывают источники электрического и магнитного поля. Наиболее просто дать их физическую трактовку можно с использованием **закона сохранения заряда**: заряд не уничтожается и не создается из ничего. Если заряд не остается постоянным (т.е. уменьшается или увеличивается), то причиной этого является пересечение поверхности, ограничивающей объем ΔV или площадку ΔS , носителями зарядов. Математической формулировкой данного закона является **уравнение непрерывности тока**:

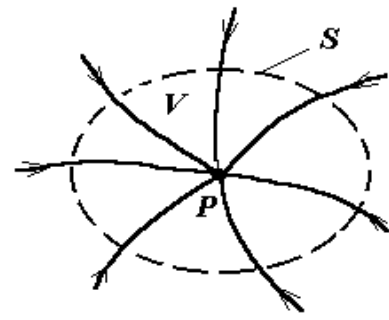
$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (9)$$

Приведенная формулировка закона сохранения заряда легко интерпретируется на основе использования представления о векторных линиях, как показано на рисунке 1.

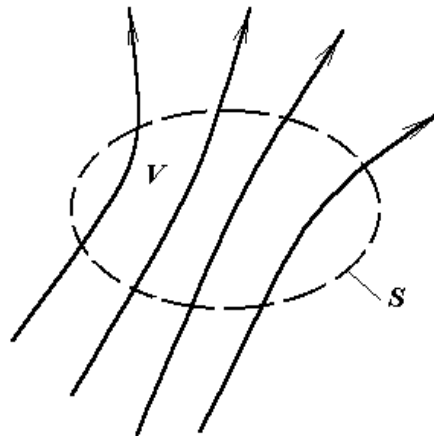
Если где-либо в рассматриваемой области плотность заряда ρ убывает ($\partial \rho / \partial t < 0$), то при этом $\operatorname{div} \vec{j} > 0$, а, следовательно, там начинаются линии вектора объемной плотности тока проводимости (точка истока, рисунок 1,а). В случае возрастания плотности заряда ($\partial \rho / \partial t > 0$) $\operatorname{div} \vec{j} < 0$, т.е. в данных точках расположены стоки (рисунок 1,б). Если первоначальное распределение заряда в рассматриваемой области не зависит от времени ($\partial \rho / \partial t = 0$, $\operatorname{div} \vec{j} = 0$), то либо векторные линии плотности тока \vec{j} пронизывают область V насквозь, либо $\vec{j} = 0$ (рисунок 1,в).



а) $\partial\rho/\partial t < 0, \operatorname{div} \vec{j} > 0$
 (заряд уменьшается; исток)



б) $\partial\rho/\partial t > 0, \operatorname{div} \vec{j} < 0$
 (заряд возрастает, сток)



в) $\partial\rho/\partial t = 0, \operatorname{div} \vec{j} = 0$ (заряд не изменяется)

Рисунок 1 – Физическая трактовка уравнений Максвелла

Исходя из вышесказанного, **третье уравнение Максвелла** (обобщение теоремы Гаусса) (6в), (7в) определяет в качестве источников электрического поля (источков и стоков в соответствии с трактовкой, приведенной на рисунках 1а и 1б) электрические заряды.

Четвертое уравнение Максвелла (принцип непрерывности магнитного потока или теорема Гаусса для магнитного поля) (6г), (7г) описывает соленоидальные свойства магнитного поля (рисунок 1.в) и гласит, что магнитное поле не имеет истоков или стоков. В природе свободные магнитные заряды (массы) отсутствуют.

Анализ первых двух уравнений Максвелла показывает, что при любом изменении во времени электрического поля возникает вихревое магнитное поле (первое уравнение), любое изменение магнитного поля создает, в свою очередь, вихревое электрическое поле (второе уравнение), как показано на рисунке 2. На нем приводится так называемая трактовка в виде совокупности «золотых» и «серебряных» колец. Первые иллюстрируют силовые линии вектора напряженности магнитного поля, а вторые – электрического. Несложно заметить, что сторонний источник (на рисунке 2 – электрический вибратор, возбуждаемый

генератором переменного напряжения, электрический ток стороннего источника) возбуждает в соответствии с законом Ампера (часть первого уравнения Максвелла) вихревое магнитное поле, изменяемое во времени («золотое кольцо»). Изменяемый во времени поток магнитной индукции, как следует из закона индукции Фарадея (второе уравнение Максвелла), вихревое электрическое поле, также изменяющееся во времени («серебряное» кольцо). В свою очередь изменяемое во времени электрическое поле (ток смещения) в силу первого уравнения Максвелла порождает вихреобразное изменение магнитного поля («золотое» кольцо) и т.д. Таким образом, переменные электрические и магнитные поля не существуют независимо друг от друга, они непрерывно переходят одно в другое. Следует также отметить еще одно важное следствие данной трактовки: необходимость применения в радиосвязи источников переменного напряжения. вдали от стороннего источника поля порождаются уже токами смещения, т.е. изменением полей во времени. Для источников постоянного напряжения процесс возбуждения вихреобразного поля закончится на первом этапе созданием «золотого» кольца. Остальных колец в принципе быть не может, поскольку не происходит изменение полей во времени.

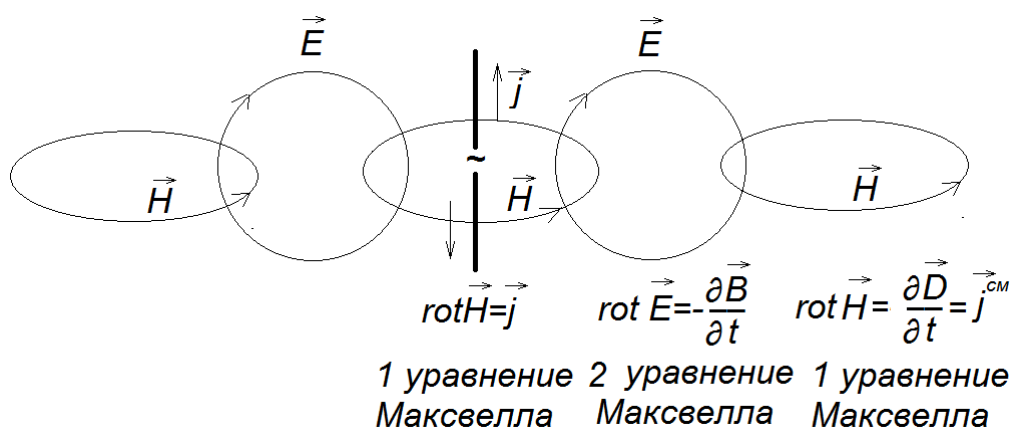


Рисунок 2. – Физическая трактовка первых двух уравнений Максвелла

Уравнения с дивергенциями векторов показывают, что непрерывность линий электрического поля нарушается в местах скопления электрических зарядов (третье уравнение), а линии магнитного поля непрерывны, т.е. магнитных зарядов не существует (четвертое уравнение). Заметим, что в точках пространства, в которых действуют так называемые **сторонние** (не зависящие от поля) **токи** \vec{j}^{cm} и заряды ρ^{cm} , последние должны быть учтены в правых частях первого и третьего уравнений Максвелла соответственно.

1.1.3 Метод комплексных амплитуд

Электромагнитные поля в изотропных линейных однородных средах без сторонних источников подчиняются уравнениям Максвелла от четырехмерных векторных функций (три пространственные координаты и время). Это приводит к

большим вычислительным затратам при нахождении структуры электромагнитного поля. В то же время в связи для передачи голосовых сообщений наиболее часто применяются гармонические колебания, временная зависимость для которых описывается в общем случае множителем $\exp(\pm i\omega t) = \cos(\omega t) \pm i \sin \cos(\omega t)$. Векторные составляющие для такого типа сигнала могут быть представлены выражениями вида:

$$\vec{U}(p, t) = \vec{U}(p) \exp[i(\omega t + \psi(p))]. \quad (10)$$

Входящее в выражение (10) произведение амплитуды вектора $\vec{U} = \vec{E}, \vec{H}$ на экспоненциальный множитель, содержащий его начальную фазу, называют комплексной амплитудой вектора \vec{U} и обозначают точкой над вектором

$$\dot{U}(p) = \vec{U}(p) \cdot \exp(i\psi). \quad (11)$$

Мнимая единица, входящая в соотношения (10) и далее, обозначена в соответствии с традициями электродинамики символом i ($i = \sqrt{-1}$). В радиотехнике для этого понятия применяется символ j .

Поскольку комплексная амплитуда не является функцией времени, то возможен переход от уравнений Максвелла относительно мгновенных значений векторов к уравнениям относительно комплексных амплитуд. Данный подход называется **методом комплексных амплитуд**. При этом выражения за счет отбрасывания при записи соотношений временной зависимости упрощаются. Ограничением данного метода является возможность его применения только для гармонических сигналов.

Приведем примеры упрощения получаемых соотношений. Так, изменяя в уравнениях Максвелла (6) порядок дифференцирования и учитывая, что дифференцирование комплексного выражения мгновенного значения величины по времени эквивалентно умножению его на $i\omega$:

$$\frac{d}{dt}(\dot{A} \cdot \exp(i\omega t)) = i\omega \dot{A} \exp(i\omega t), \quad (12)$$

получим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + i\omega \vec{D}, & \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \vec{B}, \\ \text{div } \vec{D} &= \dot{\rho}, & \text{div } \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В данных уравнениях, описывающих квазистационарные процессы, опущена являющаяся общей временная зависимость $\exp(i\omega t)$. Следует отметить, что в литературе, где применяется метод комплексных амплитуд, обязательно упоминается вначале, какое выражение используется для описания временной зависимости. Это обусловлено тем, что в электродинамике возможно использование временной зависимости как $\exp(i\omega t)$, так и $\exp(-i\omega t)$. Определение знака в показателе экспоненты будет в дальнейшем определять вид функций, применяемых для описания волновых процессов.

1.2 Основные законы электромагнитного поля

Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения. Основные теоремы электродинамики. Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга.

1.2.1 Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме, приведенные в лекции 1 и используемые для описания структуры поля, теряют смысл для граничных областей, разделяющих среды с различными параметрами. С точки зрения физики в этих областях происходит изменение параметров среды (диэлектрической ε_a и магнитной μ_a проницаемостей, а также удельной проводимости σ). Причем изменение указанных параметров в точке наблюдения через границу раздела сред происходит скачком на границе поверхности тела. Математически это означает, что параметры ε , μ , σ (или хотя бы один из них) терпят разрыв как функции нормали. В связи с этим возникает необходимость дополнения уравнений Максвелла значениями полей на границе раздела сред, т.е. так называемыми **граничными условиями**. Указанные граничные условия устанавливаются с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

Прежде чем рассматривать граничные условия, доопределим понятия плотности заряда и тока, вводя соответственно термины – **плотность поверхностного заряда и плотность поверхностного тока**.

Как известно, каждый из векторов, описывающих электромагнитное поле, на границе раздела можно разложить на нормальную и тангенциальную (касательную) составляющие:

$$\vec{F} = \vec{\nu}_0 F_\nu + \vec{\tau}_0 F_\tau. \quad (1)$$

При этом в точке M , лежащей на достаточно гладкой поверхности S раздела сред 1 и 2 (рисунок 1), всегда можно выделить столь малую окрестность ΔS , что данный элемент поверхности можно считать плоским. В данной точке M орт нормали $\vec{\nu}_0$ (направление из среды 2 в 1) может быть дополнен до правой тройки двумя ортогональными ортами $\vec{\tau}_0$ и $\vec{\zeta}_0$, лежащими на ΔS . Если орт $\vec{\tau}_0$ выбран так, что он совпадает по направлению с проекцией некоторого вектора поля \vec{F} на ΔS , то имеем разложение (1). Введением такого допущения из рассмотрения исключаются точки, лежащие вблизи изломов и резких изгибов границы или в области быстрого изменения хотя бы одной из сред. Масштабом при оценке малости расстояния служат размеры тела, длина волны (для переменных полей), а также требуемая детализация структуры поля в пространстве (разрешающая способность метода).

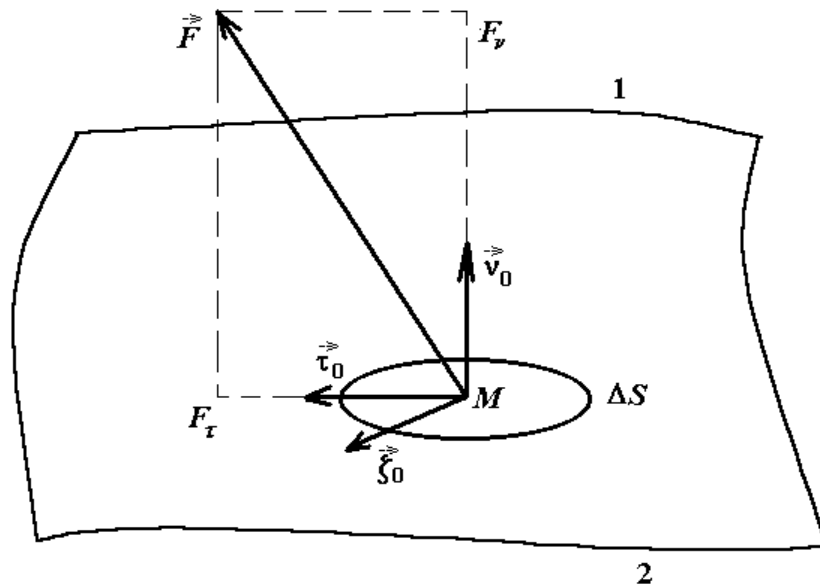


Рисунок 1 – Разложение вектора в базис

В ряде случаев на границе раздела сред могут располагаться микроскопические носители заряда, как неподвижные, так и образующие ток проводимости. Поскольку в классической электродинамике принимается, что такого рода заряд не занимает объема, то полагается, что **заряд** является **поверхностным**, определяемым, как было показано на предыдущей лекции, выражением

$$\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (2)$$

В паре с данным понятием на прошлой лекции вводилось понятие объемной плотности поверхностного электрического тока $\vec{j}^{\text{э.ст}}$, которая связана с поверхностным током

$$\vec{\eta}^{\text{э}} = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta \ell}. \quad (3a)$$

соотношением:

$$\vec{j}^{\text{э.ст}}(\vec{r}) = \vec{\eta}(\vec{\tau}, \vec{\zeta}) \delta(v - v'), \quad (3b)$$

где $v' = 0$ на поверхности S.

С учетом введенных величин граничные условия для векторов электрического поля записываются следующим образом. Вектор электрической индукции подчиняется закону:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2)_{\nu_0} = \rho, \quad (4)$$

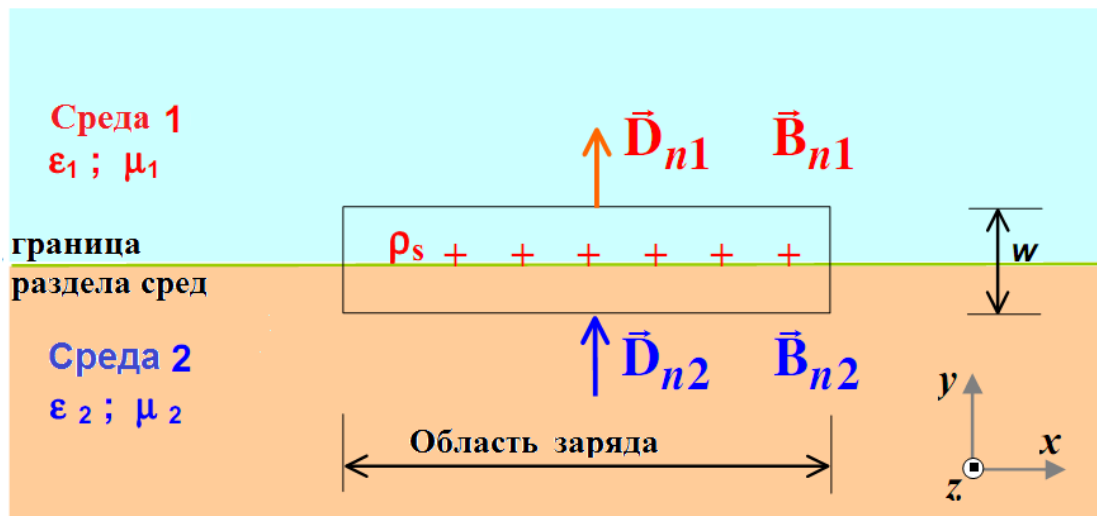
т.е. в граничных областях разность нормальных компонент вектора электрической индукции в обеих средах равна плотности поверхностного заряда ρ . Если

граница не несет заряда ($\rho = 0$), то нормальная компонента вектора \vec{D} при переходе границы остается непрерывной.

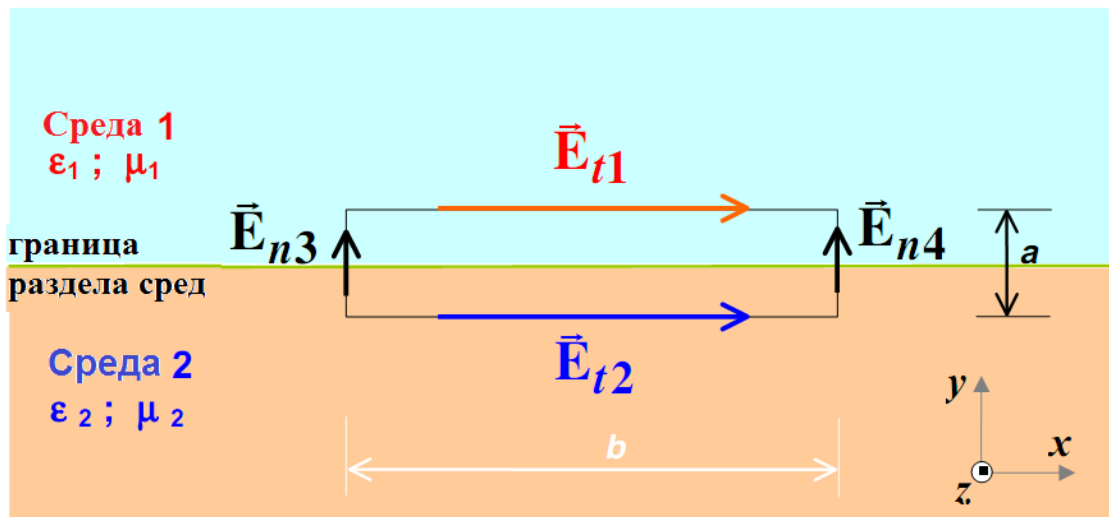
Тангенциальная компонента вектора напряженности электрического поля \vec{E} при переходе границы раздела сред всегда остается непрерывной:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}_0 = 0 \quad \text{или} \quad [\vec{v}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0. \quad (5)$$

Второе соотношение из (2.5) более удобно в том смысле, что орт \vec{v}_0 выбирается однозначно. Доказательство данных условий не представляет сложностей, и может быть выполнено на основе применения интегральной формы уравнений Максвелла. Пояснения соотношений (4) и (5) даны на рисунке 2.



а



б

Рисунок 2. – Физическая трактовка граничных условий для электрического поля

Граничные условия для векторов магнитного поля записываются следующим образом.

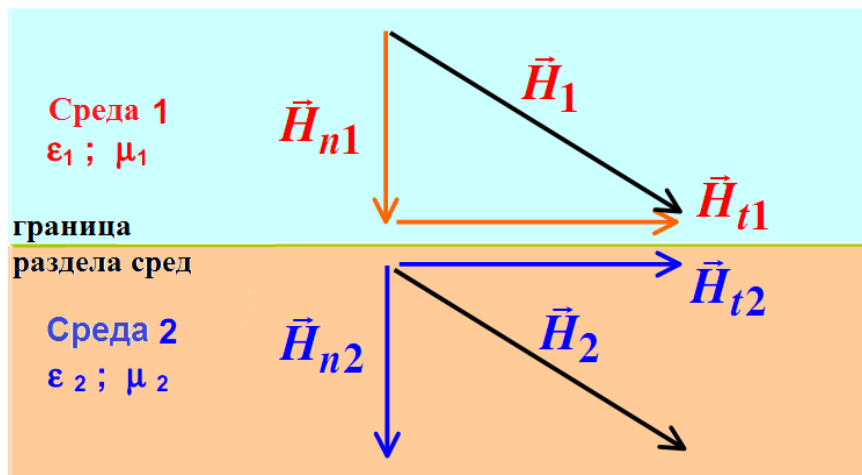
Нормальная компонента вектора магнитной индукции \vec{B} всегда непрерывна

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{v}_0 = 0. \quad (6)$$

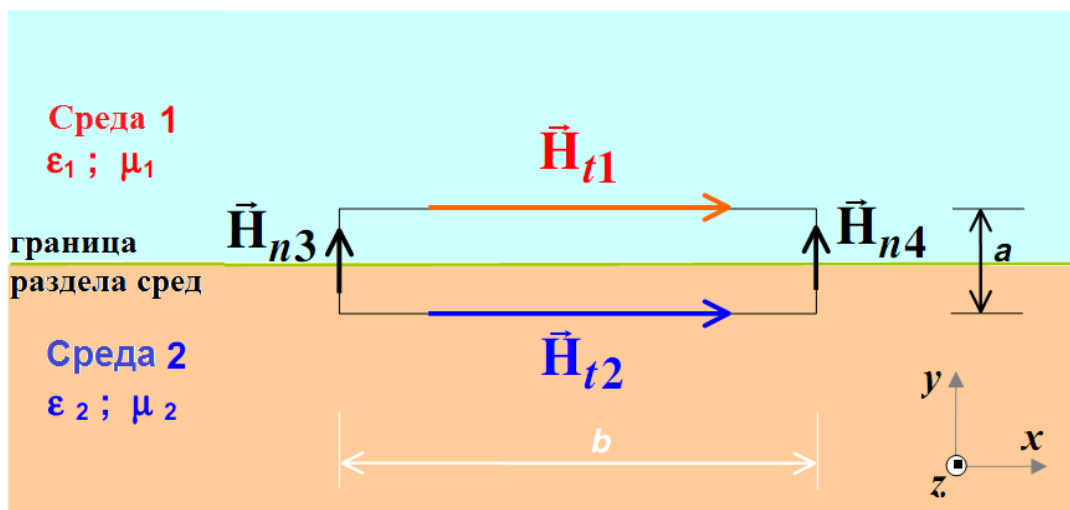
Тангенциальные компоненты вектора \vec{H} на границе раздела сред претерпевают разрыв, равный плотности поверхностного электрического тока

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \vec{\tau}_0 = \vec{\eta} \quad \text{или} \quad [\vec{v}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{\eta}. \quad (7)$$

Пояснения граничных условий для магнитного поля показаны на рисунке 3.



а



б

Рисунок 3. – Физическая трактовка граничных условий для магнитного поля

Интересно проследить определенную аналогию между граничными условиями для векторов электромагнитного поля. Так, **непрерывными на границе раздела двух сред являются тангенциальные составляющие напряженности электрического поля \vec{E} и нормальная компонента вектора магнитной индукции \vec{B}** . Это связано с отсутствием в природе магнитных зарядов и, следовательно, магнитных токов. В свою очередь, **тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля \vec{H} и нормальная компонента вектора индукции электрического поля \vec{D} терпят на границе раздела сред разрывы, равные соответственно плотности поверхностного электрического тока и плотности поверхностного электрического заряда**.

Рассмотрим частный случай, важный для практического применения: одна из сред на границе раздела является **идеально проводящей** ($\sigma \rightarrow \infty$).

Как известно, в идеальном проводнике электромагнитное поле не может существовать - оно вытесняется в бесконечно тонкий слой у поверхности S . Если же внешнее электрическое поле данной (второй) среды отлично от нуля, то под его действием устанавливается такое перераспределение свободных зарядов, которое компенсирует внешнее поле. Граничные условия при этом принимают вид:

При наличии поверхностных зарядов и токов При отсутствии поверхностных зарядов и токов

$$[\vec{v}_0, \vec{E}_1] = \rho, \quad (8a) \quad [\vec{v}_0, \vec{E}_1] = 0, \quad (9a)$$

$$[\vec{v}_0, \vec{H}_1] = \vec{\eta}, \quad (8b) \quad [\vec{v}_0, \vec{H}_1] = \vec{j}^{\text{э.см}}. \quad (9b)$$

В формуле (9б) $\vec{j}^{\text{э.см}}$ - объемная плотность вторичного (индуцированного) поверхностного электрического тока, которая связана с поверхностным током соотношением (3б).

В ряде случаев, например, когда границы рассматриваемой области уходят на бесконечность или когда граничная поверхность имеет геометрически сингулярные точки (например, изломы), можно получить несколько математически корректных решений уравнений Максвелла, среди которых лишь одно верно описывает исследуемое физическое явление. В таких случаях для обеспечения единственности решения оказывается необходимым ввести некоторые дополнительные физические ограничения.

При решении задачи для свободного пространства, когда все источники сосредоточены в конечной области, таким дополнительным ограничением, определяющим поведение полей на бесконечности, является **условие излучения**, которое можно сформулировать двумя различными способами:

Для **изотропной непоглощающей среды** поведение полей на бесконечности определяется **условием излучения Зоммерфельда**, имеющее для гармонических волн вид:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial R} + ik \vec{E} \right) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial R} + ik \vec{H} \right) = 0. \quad (10)$$

Данное условие можно сформулировать следующим образом: амплитуда поля на больших расстояниях от источника должна убывать, по крайней мере, как обратная от данного расстояния величина, а фаза поля должна быть такой же, как у уходящей на бесконечность волны.

1.2.2 Основные теоремы электродинамики

В основе электродинамики лежит полная система уравнений Максвелла. Кроме того, для упрощения физической трактовки ряда явлений при решении задач используются сформулированные на их основе леммы и теоремы.

Так, **теорема единственности** утверждает, что электромагнитное поле в любой момент времени в любой точке объема определяется уравнениями Максвелла при заданных источниках однозначно, если в каждой точке объема даны начальные значения векторов напряженности электрического и магнитного полей и если известны граничные значения касательных проекций одного из векторов в точках поверхности S для любого момента времени. Доказательство данной теоремы осуществляется с использованием условий излучения, рассмотренных выше.

Одним из эффективных математических приемов, используемом при решении в общей форме задачи возбуждения электромагнитного поля в пространстве с произвольно расположенными неоднородностями, а также при доказательстве ряда принципиальных положений в электродинамике, является **лемма Лоренца**. Данная лемма выводится на основе использования двух первых уравнений Максвелла и звучит следующим образом. Если система сторонних

источников $\vec{j}_1^{э.см.}$, $\vec{j}_1^{м.см.}$ возбуждает в пространстве электромагнитный процесс \vec{E}_1, \vec{H}_1 , в то время как системе $\vec{j}_2^{э.см.}$, $\vec{j}_2^{м.см.}$ отвечают поля \vec{E}_2, \vec{H}_2 (рисунок 4), то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - \operatorname{div}[\vec{E}_2, \vec{H}_1] &= \vec{j}_1^{э.см.} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{м.см.} \vec{H}_2 - \\ &- \vec{j}_2^{э.см.} \vec{E}_1 + \vec{j}_2^{м.см.} \vec{H}_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Более содержательной в физическом смысле и широко используемой при решении электродинамических задач является **интегральная форма леммы Лоренца**:

$$\begin{aligned} \oint_S \{ [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] \} d\vec{s} &= \\ &= \int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{э.см.} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{м.см.} \vec{H}_2 \right\} dv - \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{э.см.} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{м.см.} \vec{H}_1 \right\} dv. \end{aligned} \quad (12)$$

На основе леммы Лоренца может быть сформулирован один из важнейших принципов электродинамики – **принцип взаимности**. Для этого в лемме Лоренца полагаем, что сторонние токи сосредоточены в ограниченной области, а поверхность S имеет бесконечный радиус. Если первые сторонние токи сосредоточены в области V_1 , а вторые сторонние токи – в области V_2 , то соотношение (12) можно записать в виде:

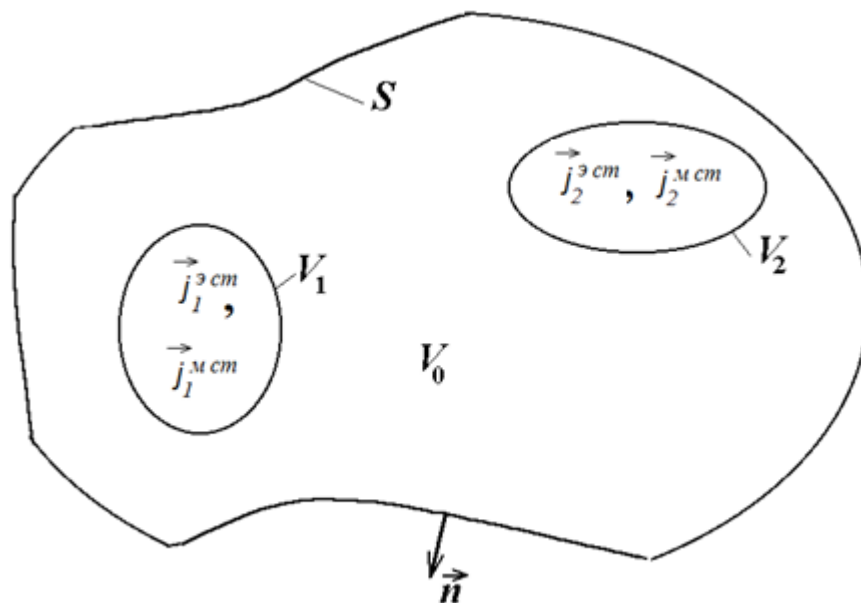


Рисунок 4. – Геометрия задачи к описанию леммы Лоренца

$$\int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{\text{э.см}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{м.см}} \vec{H}_2 \right\} dv = \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{\text{э.см}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{м.см}} \vec{H}_1 \right\} dv. \quad (13)$$

Анализ соотношения (13) показывает его симметрию, совершенно независимую от характеристик среды. Единственное ограничение заключается в предположении об изотропности среды.

Одним из важнейших и наиболее часто используемых следствий леммы Лоренца, находящем применение в различных областях радиофизики, теории и технике антенн, является теорема эквивалентных токов. Эквивалентность тангенциальных составляющих полей и токов в электродинамике получила название теоремы эквивалентных поверхностных токов. Указанная теорема позволяет находить поле в любой точке пространства при известном решении задачи дифракции – поле вспомогательного диполя и известном распределении полей на поверхности S .

Рассмотрим краткий вывод и выделим основные моменты, существенные для последующего излучения. Пусть в формуле (13) поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 будет искомым (обозначим его \vec{E}, \vec{H} , токи $\vec{j}_1^{\text{э}}, \vec{j}_1^{\text{м}}$ обозначим $\vec{j}^{\text{э}}, \vec{j}^{\text{м}}$), а поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 –

вспомогательным. В качестве вспомогательного возьмем поле электрического диполя с единичным моментом, ориентированным вдоль вектора \vec{a} . Обозначим вспомогательное поле через $\vec{E}_e^{\circ}, \vec{H}_e^{\circ}$. Тогда $\vec{j}_2^{\circ} = \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, $\vec{j}_2^M = 0$. Подставляя данное распределение тока в (12), получаем

$$\vec{a} \vec{E}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\circ} \vec{E}_e^{\circ} - \vec{j}^M \vec{H}_e^{\circ} \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_e^{\circ} + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_e^{\circ} \right\} ds. \quad (14a)$$

Аналогично, взяв в качестве вспомогательного поля \vec{E}_e^M, \vec{H}_e^M магнитного диполя с единичным моментом и направленного вдоль вектора \vec{b} (при этом $\vec{j}_2^M = \vec{b} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, $\vec{j}_2^{\circ} = 0$), получим

$$\vec{b} \vec{H}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\circ} \vec{E}_e^M - \vec{j}^M \vec{H}_e^M \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_e^M + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_e^M \right\} ds. \quad (14b)$$

В формулах (14) векторы $\vec{J}^{\circ} = [\vec{n}, \vec{H}]$ и $\vec{J}^M = -[\vec{n}, \vec{E}]$ являются, напомним, эквивалентными поверхностными токами, а сами соотношения описывают теорему эквивалентных токов.

1.2.3 Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга

Введем понятие стороннего источника. **Сторонними источниками** электромагнитного поля называют такие источники, которые возбуждают данное поле, но сами от него не зависят, так как их поддерживают посторонние по отношению к исследуемому полю физические явления.

Электромагнитное поле является носителем энергии. Пусть среда является линейной и изотропной. Выделим мысленно объем V , в котором существуют сторонние источники электромагнитного поля. Энергия в выделенном объеме может изменяться во времени за счет двух процессов:

внутри данного объема электромагнитная энергия может превращаться в другие, неэлектромагнитные формы энергии (внутренняя энергия тел, называемая часто тепловой энергией, химическая энергия, кинетическая энергия ускоренных частиц и т.д.), или же возникающая из неэлектромагнитных форм;

энергия, оставаясь электромагнитной, может вытекать из данного объема или втекать в него через поверхность S , ограничивающую данный объем.

Математическая запись данного утверждения имеет вид:

$$p_{ст} = P + \frac{dw}{dt} + \oint, \quad (15)$$

где $p_{ст}$ - мощность поля, создаваемая сторонними источниками;

P - мощность, отдаваемая полем веществу;

dw/dt - мощность, идущая на изменение энергии электромагнитного поля в объеме V ;

\oint - мощность поля, выходящая сквозь замкнутую поверхность S , которая ограничивает объем V и называемая **поток**ом мощности или же **мощностью излучения**. Единица измерения мощности – Вт=Дж/с=А·В.

Используя первые два уравнения Максвелла и не учитывая потери энергии на поляризацию и намагничивание, формулу (15) можно преобразовать к виду:

$$-\vec{E}\vec{j}^{ст} = \sigma\vec{E}^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0\epsilon \frac{\vec{E}^2}{2} + \mu_0\mu \frac{\vec{H}^2}{2} \right) + \text{div}[\vec{E}, \vec{H}], \quad (16)$$

называемому **теоремой Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме**.

После интегрирования соотношения (2.16) по выделенному объему V , получаем **теорему Умова-Пойнтинга в интегральной форме**:

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} + \int_V \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv + \int_V \sigma \vec{E}^2 dv = - \int_V \vec{j}^{э.см.} \vec{E} dv. \quad (17)$$

К числу основных положений электродинамики принадлежат следующие выражения для отдаваемой мощности P и мощности излучения \oint :

$$P = \int_V \vec{j} \vec{E} dv, \quad (18) \quad \oint = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}. \quad (19)$$

В соотношениях (16), (17), (19) получаемый в результате векторного умножения вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] \quad (20)$$

называется **вектором Пойнтинга**, определяет **плотность потока мощности**, а также направление распространения волны. Единицами измерения которой, как следует из (20), являются В/м·А/м=Вт/м².

Дадим физическую трактовку входящих в соотношение (16) членов, показанную на рисунке 5. Первое слагаемое описывает поток энергии или мощность излучения через замкнутую поверхность S . Третье слагаемое есть работа, совершаемая электромагнитным полем. В правой части стоит величина, определяющая работу сторонних сил. Второе слагаемое определяет изменение энергии (мощности) электромагнитного поля во времени.

$$\underbrace{\sigma \vec{E}^2}_{\text{нагрев вещества}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0\epsilon \frac{\vec{E}^2}{2} + \mu_0\mu \frac{\vec{H}^2}{2} \right)}_{\text{колебательные процессы}} + \underbrace{\text{div}[\vec{E}, \vec{H}]}_{\text{проход энергии (излучение)}} = \underbrace{-\vec{E}\vec{j}^{ст}}_{\text{энергия стороннего источника}}$$

Рисунок 5. – Физическая трактовка составляющих теоремы Умова-Пойнтинга

Второе слагаемое в (16) может быть представлено в виде двух слагаемых, описывающих энергию электрического и магнитного полей:

$$W = W^M + W^Э, \quad (21)$$

где
$$W^m = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu \overline{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \overline{B} \overline{H} dv, \quad (22a)$$

$$W^e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon \overline{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \overline{D} \overline{E} dv. \quad (22b)$$

Комплексный вектор Пойнтнинга в данном случае будут описываться выражениями:

$$\dot{P} = \frac{1}{2} [\dot{E}, \dot{H}^*]. \quad (23)$$

Введем понятия активного, нейтрального и пассивного балансов. **Баланс** считается **активным**, когда $\varphi > 0$, т.е. преобладает отдача энергии во внешнее пространство. Если $\varphi = 0$, то **баланс** считается **нейтральным**. **Пассивный баланс** соответствует случаю, когда поглощение преобладает над излучением.

1.3 Волновые уравнения

Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников. Уравнения Гельмгольца. Решение системы уравнений Максвелла для свободного пространства.

1.3.1 Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников

Рассмотренные в первой лекции уравнения Максвелла при наличии линейной зависимости полей в материальных уравнениях являются системой линейных уравнений в частных производных первого порядка. От них обычно переходят к уравнениям в частных производных второго порядка относительно вектора \vec{E} (или вектора \vec{H}), позволяющих понять суть волновых процессов, обусловленных возбуждением электромагнитных полей в свободном пространстве. Известно, что электромагнитное поле в пространстве может существовать даже в отсутствие каких бы то ни было зарядов (и токов). Электромагнитные поля, существующие в пустоте при отсутствии зарядов, называют **электромагнитными волнами**.

Волновые процессы представляют собой общий класс явлений. Однако, несмотря на бесконечное разнообразие физических процессов, вызывающих волны, образование волн происходит по одному общему пути. Возмущение, произошедшее в какой-нибудь точке в известный момент времени, проявляется спустя некоторое время на некотором расстоянии от начальной точки, т.е. передает с определенной скоростью. Для описания распространения электромагнитных волн применяются волновые уравнения. **Волновым**

уравнением обычно называют уравнение волны в дифференциальной форме. В декартовой системе координат волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \nabla^2 S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\nabla^2 S = \Delta = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа (лапласиан) или набла квадрат.

Лапласиан представляет собой векторный дифференциал, зависящий от используемой системы координат, Для произвольной системы координат он определяется соотношением

$$\nabla^2 \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}. \quad (*)$$

Двукратное дифференцирование скалярной величины приводит к лапласиану, являющемуся скалярной функцией координат:

$$\text{div grad } \psi = \nabla^2 \psi.$$

Следует также отметить, что за знак лапласиана допустимо выносить лишь те координатные орты, которые имеют одинаковое направление во всех точках пространства.

С использованием данных замечаний рассмотрим переход из системы уравнений Максвелла к уравнениям в частных производных второго порядка. Данный переход осуществляется путем умножения всех членов первого уравнения Максвелла на ε^{-1} , а второго – на μ^{-1} и применения к полученным соотношениям операции *rot*. Это позволяет записать

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \vec{H} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} + \text{rot } \frac{\vec{j}}{\varepsilon}, \quad \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{E} \right) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}. \quad (2)$$

Теперь входящие в правые части $\text{rot } \vec{E}$ и $\text{rot } \vec{H}$ заменим выражениями, вытекающими из первых двух уравнений Максвелла. Это дает

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \vec{H} \right) + \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \text{rot } \frac{\vec{j}}{\varepsilon}, \quad \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{E} \right) + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (3)$$

где $c^2 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$ – скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве, равная $2,998 \dots \cdot 10^8$ м/с.

В однородной среде ($\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) постоянные коэффициенты ε^{-1} , μ^{-1} могут быть вынесены за знаки операций дифференцирования, поскольку операция *rot* представляет собой совокупность частных производных. В результате таких преобразований и с учетом тождества $\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$ получаем

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \frac{\vec{j}}{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{grad } \rho + \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (4)$$

При записи соотношений (4) учтен закон сохранения заряда, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Рассмотрим применение формул (4) для анализа волновых процессов распространения электромагнитных волн в свободном пространстве. В этом случае $\varepsilon=1$ и $\mu=1$, $\sigma=0$, $\vec{j}^{cm} = 0$, $\rho^{cm}=0$. Из последнего уравнения системы (4) следует, что $\vec{j} = 0$. При этих условиях выражения (4) приобретают вид **волновых уравнений**

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Перейдем к рассмотрению общего случая волновых уравнений произвольной электромагнитной системы источников. Для этого вновь обратимся к соотношениям (4). Правые части этих уравнений в общем случае нельзя рассматривать как известные. Это определяется тем, что плотность тока в правой части в силу последней зависимости из (3) содержит слагаемое, зависящее от напряженности электрического поля. Однако при $\sigma=0$ (среда без потерь) $\vec{j} = \vec{j}^{cm}$ и соответственно $\rho = \rho^{cm}$, поскольку эти величины связаны законом сохранения заряда. Уравнения (5) с левыми частями из (4) называют **уравнениями Даламбера** относительно мгновенных значений напряженности электрических и магнитных полей:

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \vec{j}^{ct}, \quad \nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{grad} \rho^{ct} + \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{j}^{ct}}{\partial t}. \quad (6)$$

При отсутствии изменений во времени уравнения Даламбера (5) переходят в **уравнения Пуассона**

$$\nabla^2 \vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{j}^{cm}, \quad \nabla^2 \vec{E} = (\varepsilon \varepsilon_0)^{-1} \operatorname{grad} \rho^{cm}. \quad (7)$$

Интересно отметить, что к этим же уравнениям Пуассона приводит пренебрежение токами смещения ($\partial \vec{D} / \partial t = 0$) при сохранении временной зависимости векторов поля.

Уравнения Даламбера (6) справедливы при произвольной временной зависимости функций, описывающих электромагнитное поле, в том числе и для гармонических процессов. Выполняя преобразования, аналогичные выполненным при выводе соотношений (6) с учетом того, что $\partial / \partial t \rightarrow i\omega$, $\partial^2 / \partial t^2 \rightarrow -\omega^2$, приходим к уравнениям второго порядка относительно комплексных амплитуд – **уравнениям Гельмгольца**

$$\nabla^2 \vec{H}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon \mu \vec{H}_m(\vec{r}) = -\operatorname{rot} \vec{j}_m^{ct}(\vec{r}), \quad (8a)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon \mu \vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \text{grad } \rho_m^{\text{CT}}(\vec{r}) + i \omega \mu_0 \mu \vec{j}_m^{\text{CT}}(\vec{r}). \quad (86)$$

В свободном пространстве при отсутствии сторонних зарядов получаем однородные уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{H}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon \mu \vec{H}_m(\vec{r}) = 0, \quad (9a)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon \mu \vec{E}_m(\vec{r}) = 0. \quad (96)$$

1.3.2 Решение системы уравнений Максвелла для свободного пространства

Как было показано выше, решение системы уравнения Максвелла может быть сведено к решению волновых уравнений. Рассмотрим получение решения на примере волновых уравнений (5). При этом будем полагать, что рассматриваемый волновой процесс зависит только от r и t (r – расстояние от точки источника электромагнитных волн до точки наблюдения, отсчитываемое в направлении распространения волны), то есть волна распространяется вдоль одной координаты, например x . Такие волны называются плоскими.

Перепишем уравнения (5) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

где u является составляющей либо вектора \vec{E} либо вектора \vec{H} . Для решения данного уравнения преобразуем его к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0.$$

Введем новые переменные, имеющие размерность времени:

$$\xi = t - \frac{x}{c} \quad \text{и} \quad \eta = t + \frac{x}{c}.$$

Обратное преобразование дает

$$t = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad x = c \frac{\eta - \xi}{2}.$$

Преобразование производных выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

В новых переменных уравнение (10) вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Решение данного уравнения, как известно, имеет вид:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \text{ или}$$

$$u(x, t) = f_1\left(x - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(x + \frac{r}{c}\right), \quad (11)$$

Физическая трактовка решения волнового уравнения проста. Если в момент времени $t=0$ графически изобразить функции $f_1\left(x - \frac{r}{c}\right)$ и $f_2\left(x + \frac{r}{c}\right)$, то в последующие моменты времени данные функции будут смещаться вдоль оси $0x$ со скоростью света c как целое, но в разные стороны: функция f_1 вправо, а функция f_2 - влево, как показано на рисунке 1.

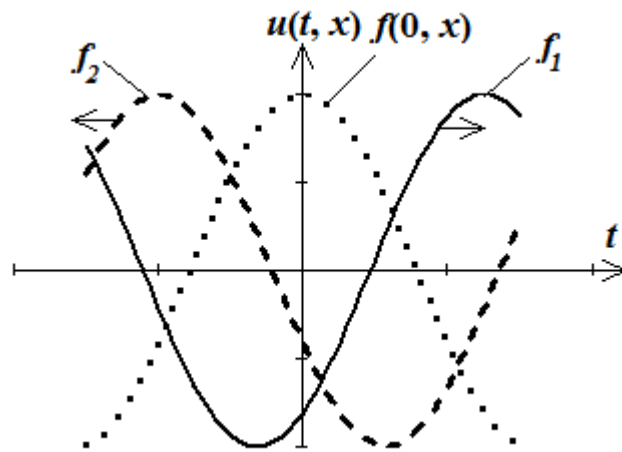


Рисунок 1. – Физическая трактовка решения волнового уравнения

Рассмотрим другой частный случай волнового уравнения, который дает нам возможность составить решение. Положим, что источники электромагнитного поля имеют точечный характер. В этом случае поле и все его характеристики являются функциями только расстояния r от точки, где находится источник поля, до точки наблюдения и не зависят от угловых координат. Поэтому в сферической системе координат волновое уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

После введения функции $v = ur$ уравнение (12) сводится к уравнению (10), но записанному относительно функции v и расстояния r .

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

Пользуясь результатами решения (10), можно записать, что в случае точечных источников решение описывается функцией

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f_1\left(x - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{2} f_2\left(x + \frac{r}{c}\right). \quad (14)$$

Как и ранее аргументы функций f_1 и f_2 , как видно из (14), «распространяются» в направлении радиуса r со скоростью c и $-c$ и имеют одинаковые значения во всех точках одного и того же радиуса, т.е. на сфере. Таким образом, решение (14) представляет собой совокупность сферических волн, т.е. волн, у которых волновые поверхности, или поверхности равных фаз,

суть сферы. Причем первое частное решение $\frac{1}{2} f_1\left(x - \frac{r}{c}\right)$ описывает волну,

которая распространяется со скоростью c от центра возмущения в бесконечность. Эта волна носит название расходящейся волны. Второе частное решение

$\frac{1}{2} f_2\left(x + \frac{r}{c}\right)$ описывает волну, которая движется с той же скоростью из

бесконечности к центру и называется сходящейся волной. Таким образом, решение имеет волновой характер.

С математической точки зрения оба решения волновых уравнений – функции f_1 и f_2 – совершенно равноправны. Однако с точки зрения физической реализации только функция f_1 удовлетворяет условию излучения и, следовательно, имеет физический смысл.

Отметим существенную особенность функций, описывающих волновые

процессы. Они всегда содержат множители вида $f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)$, характер зависимости которых от расстояния в фиксированный момент времени повторяет характер зависимости от времени в фиксированной точке пространства.

Проследим также, чем отличаются решения однородных волновых уравнений (5) и однородных Гельмгольца (9).

Конкретизируя решение однородного уравнения Гельмгольца, приходим к представлению в гармонических волнах

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \tilde{f}_1\left(\omega t - \omega \frac{r}{c}\right), \quad (15a) \quad \vec{H} = \vec{H}_1 \tilde{f}_1\left(\omega t - \omega \frac{r}{c}\right). \quad (15b)$$

Введем параметр $k = \omega/c$, называемый волновым числом. Последнее определяет пространственный период изменения функций \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 при изменении координаты r , при смещении на который аргумент периодической функции изменяется на 2π . Этот пространственный период или путь, проходимый волной за период колебания, называется длиной волны и обозначается символом λ , таким образом, $k\lambda = 2\pi$. Волновое число, следовательно, определяется двумя выражениями

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (16)$$

Из проведенного сравнения следует, что переход от произвольной временной зависимости к гармоническим колебаниям позволяет ввести важные понятия длины волны и волнового числа, связанных с определенным значением частоты.

Выражения (15) являются волновыми уравнениями. Однако, чтобы они удовлетворяли уравнениям Максвелла, на них следует наложить еще дополнительные условия. В качестве них используем третье и четвертое уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{div} \vec{E} &= \operatorname{div}(\vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]) = -i\vec{k}\vec{E}, \\ 0 = \operatorname{div} \vec{H} &= \operatorname{div}(\vec{H}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]) = -i\vec{k}\vec{H}. \end{aligned} \quad (17)$$

Равенство нулю означает, что $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{H} \perp \vec{k}$. Кроме того, несложно установить, что $\vec{E} \perp \vec{H}$. Для этого подставим в представление полей методом комплексных амплитуд в первые два уравнения Максвелла. В результате получаем:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \omega} [\vec{k}\vec{H}], \quad \vec{H} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \omega} [\vec{k}\vec{E}]. \quad (18)$$

Достаточно умножить одно из выражений (18) на \vec{H} или на \vec{E} , чтобы получить

$$\vec{E}\vec{H} = 0. \quad (19)$$

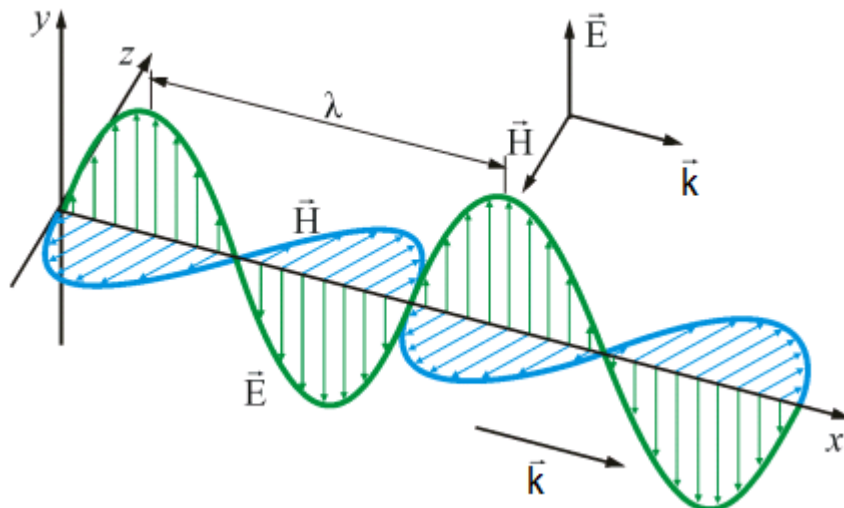


Рисунок 2 – Ориентация векторов электромагнитной волны

Из соотношения (19) следует, что векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов в том порядке, в котором они написаны. При этом волновой вектор \vec{k} определяет направление

распространения волны, а векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются в плоскости, перпендикулярном направлению вектора \vec{k} , как показано на рисунке 2.

Таким образом, электромагнитная волна в указанных условиях является поперечно-поляризованной (направление колебаний перпендикулярно направлению распространения). В силу линейности уравнений Максвелла, или, что то же самое, в силу суперпозиции полей, решением является любая сумма полей, у которых векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в указанной плоскости.

Модуль 2. Излучение электромагнитных волн в свободное пространство

2.1 Электродинамические потенциалы электромагнитного поля

Возбуждение электромагнитного поля заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме. Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля. Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов. Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов.

2.1.1 Возбуждение электромагнитного поля заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме

Одним из важнейших результатов, полученных Максвеллом, явилось доказательство волновой природы электромагнитного поля: изменение во времени электрического поля приводят к изменению магнитного поля, неоднородного в пространстве, и наоборот. В физике колебательное движение непрерывной среды принято называть **волновым процессом**. Волновые уравнения и уравнения Гельмгольца для гармонических сигналов, полученные из уравнений Максвелла в предыдущей лекции, являются моделью данного процесса. Решением данных дифференциальных уравнений второго порядка имеет вид:

$$u(x, t) = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad (1)$$

Каждое из двух входящих в соотношение (1) частных решений представляет собой так называемую **волновую функцию** или **волну**. Волна имеет произвольную форму и распространяется в свободном пространстве в двух противоположных направлениях со скоростью света $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

Первое слагаемое представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении (расходящейся волны), второе слагаемое - волну, приходящую из бесконечности со скоростью света (сходящаяся волна).

Кроме того, из уравнения баланса энергии для переменного электромагнитного поля следует, что электромагнитная энергия переносится волнами из объема, где действуют переменные сторонние токи, в окружающее этот объем пространство, где этих токов нет.

Процесс распространения в пространстве электромагнитных волн с конечной скоростью и утративших связь со своими источниками (переменными зарядами и токами), называется **излучением электромагнитных волн**.

Во многих практических задачах часто требуется непосредственно связать величину сторонних электрических токов, являющихся источниками электромагнитного поля, с векторами \vec{E} и \vec{H} в любой точке пространства, т.е. определить структуру электромагнитного поля. К таким задачам относятся, прежде всего, большинство задач из теории излучающих антенн. С математической точки зрения задачи о возбуждении электромагнитных волн заданными источниками сводятся к решению системы неоднородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\text{э.ст.}}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}^{\text{м.ст.}}, \quad (2a)$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho^{\text{э.ст.}}, \quad \mu_a \operatorname{div} \vec{H} = \rho^{\text{м.ст.}}. \quad (26)$$

Соответственно для гармонических сигналов в вакууме ($\sigma = 0$) первые два уравнения Максвелла могут быть записаны в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} - i\omega \varepsilon_a \vec{E} &= \vec{j}^{\text{см.э}}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + i\omega \mu_a \vec{H} &= -\vec{j}^{\text{см.м}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В соотношениях (1) и (2) $\vec{j}^{\text{см.э}}$ и $\vec{j}^{\text{см.м}}$ - векторы объемных плотностей сторонних электрического и магнитного токов; $\rho^{\text{э.ст.}}$, $\rho^{\text{м.ст.}}$ - соответственно сторонние электрический и магнитный заряды.

Кроме того, для получения единственного решения системы (2) и (3) должны быть дополнены соответствующими граничными условиями.

2.1.2 Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля

Непосредственное решение системы уравнений Максвелла для случая сторонних источников, как и неоднородных волновых уравнений весьма сложно. Одним из наиболее простых способов решения задачи об излучении является применение искусственного приема, заключающегося в использовании потенциалов электромагнитного поля. **Потенциалы электромагнитного поля** – это энергетические характеристики, которые вводятся для описания поля наряду с силовыми характеристиками – напряженностью электрического поля \vec{E} и индукцией магнитного поля \vec{B} .

В электродинамике понятие потенциалов было впервые введено Максвеллом в своей известной системе уравнений, включающей в то время 20 уравнений.

Позднее Хевисайдом и Герцем потенциалы были выведены из известной системы уравнений Максвелла, содержащей в настоящий момент 4 уравнения. В электродинамике используются различные потенциалы. Так, потенциалы Герца применяются для решения задач в цилиндрической системе координат, потенциалы Дебая – при решении дифракционных задач на сфере, потенциалы Фарадея – при проектировании антенн. В данной лекции будем рассматривать электродинамические потенциалы для произвольной системы координат.

Вспомогательный векторный потенциал \vec{A}° вводится с помощью четвертого уравнения Максвелла

$$\mu_a \vec{H} = \text{rot } \vec{A}^{\circ}. \quad (4)$$

Поскольку дивергенция вихря произвольного вектора равна фиктивному магнитному заряду, равному нулю, то данное соотношение является справедливым.

Выражение для электрического скалярного потенциала может быть получено путем подстановки соотношения (3) во второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме и изменении порядка дифференцирования. В результате преобразований данное уравнение Максвелла принимает вид

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5)$$

Учитывая тождество $\text{rot grad } u = 0$, можно положить, что стоящее под знаком rot выражение равно $\text{grad } u^{\circ}$, где u° - некоторая скалярная функция. Следовательно,

$$\vec{E} = -\text{grad } u^{\circ} - \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t}. \quad (6)$$

Знак «минус» перед $\text{grad } u^{\circ}$ введен для того, чтобы в случае электростатического поля функция совпадала с обычным выражением для электростатического потенциала.

Подставив выражения (4) и (6) в первое уравнение Максвелла и учитывая материальные уравнения, получим

$$(\mu_0 \mu)^{-1} \text{rot rot } \vec{A}^{\circ} = \vec{j}^{\circ cm} - \varepsilon_0 \varepsilon \left(\text{grad } \frac{\partial u^{\circ}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}^{\circ}}{\partial t^2} \right) - \sigma \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t} - \sigma \text{grad } u^{\circ}. \quad (7)$$

После преобразования с использованием тождества $\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$ левой части уравнения (7) перейдем к равенству

$$\nabla^2 \vec{A}^{\circ} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^{\circ}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu \vec{j}^{\circ cm} + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A}^{\circ} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial u^{\circ}}{\partial t} + \sigma u^{\circ} \right) - \sigma \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t}. \quad (8)$$

Упростим полученное соотношение. Как уже отмечалось, вектор \vec{A}° был определен с точностью до градиента произвольной функции. Следовательно, можно потребовать, чтобы вектор \vec{A}° удовлетворял дополнительному условию

$$\operatorname{div} \vec{A}^{\circ} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial u^{\circ}}{\partial t} + \sigma u^{\circ} = 0. \quad (9)$$

Соотношение (9) принято называть **условием калибровки (калибровка Лоренца)**. С учетом калибровки волновое уравнение (8) приобретает вид

$$\nabla^2 \vec{A}^{\circ} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^{\circ}}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t} - \mu_0 \mu \vec{j}^{\circ cm}. \quad (10)$$

Аналогичное уравнение получается и для скалярного потенциала u° :

$$\nabla^2 u^{\circ} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}^{\circ}}{\partial t} - \frac{\rho^{\circ cm}}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (11)$$

Введенные здесь электродинамические потенциалы рассматриваются в представлении $\vec{j}^{\circ cm} = 0$ и $\rho^{\circ cm} = 0$. Это соответствует случаю, когда электромагнитное поле возбуждается только сторонними электрическими токами и зарядами. Именно поэтому рассматриваемые функции \vec{A}° и u° получили название соответственно **электрического векторного и электрического скалярного потенциалов**. Размерность электрических векторного и скалярного потенциалов соответственно [В•с/м] и [А·Гн/м].

В случае, когда источниками электромагнитного поля могут являться также и формально введенные магнитные токи и заряды, вводятся соответственно магнитные векторный и скалярный потенциалы. Связь векторного магнитного потенциала с вектором напряженности электрического поля определяется соотношением:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^m. \quad (12)$$

Выражения для магнитных потенциалов получаются аналогичными рассуждениями, но при использовании второго уравнения Максвелла и соотношения (12). Окончательно, можно записать:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} u^m - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t} - \sigma \vec{A}^m, \quad \operatorname{div} \vec{A}^m + \mu_0 \mu \frac{\partial u^m}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

$$\nabla^2 \vec{A}^m - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}^m}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t} = -\vec{j}^m, \quad \nabla^2 u^m - \frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u^m}{\partial t} = \frac{\rho^m}{\mu_0 \mu}. \quad (14)$$

Единицей измерения скалярного магнитного потенциала является [А]. В отличие от калибровки Лоренца для электрических потенциалов (9) при введении

калибровки для магнитных потенциалов понятие магнитной проводимости не вводилось, поэтому в данном выражении отсутствует третье слагаемое.

Совокупность уравнений (10), (11), (13) и (14) описывает соотношения для мгновенных значений электродинамических потенциалов.

2.1.3 Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов

Для получения аналогичных соотношений для комплексных амплитуд перейдем от мгновенных значений электродинамических потенциалов к комплексным амплитудам электродинамических потенциалов. При переходе так же, как и ранее, будем учитывать, что $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$, $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$.

В результате для векторного и скалярного электрических потенциалов однородных и изотропных сред, в которых отсутствуют магнитные потери ($\tilde{\mu}_a = \mu_0\mu$) и диэлектрический гистерезис ($\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_0\epsilon - i\sigma^3/\omega$) записывается следующая совокупность уравнений:

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0\mu} \text{rot } \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}), \quad (15)$$

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = -\text{grad } u_m^{\text{э}}(\vec{r}) - i\omega\mu_0\mu \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}). \quad (16)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\vec{j}_m^{\text{э}cm}, \quad (17)$$

$$\nabla^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\frac{\rho_m^{\text{э}ст}}{\epsilon_0\epsilon}, \quad (18)$$

где $\gamma = ik = \omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\tilde{\mu}_a} = k_\alpha - ik_\beta$ - коэффициент распространения, являющийся в общем случае комплексной величиной;

k_α - коэффициент затухания;

k_β - коэффициент фазы.

Аналогичная совокупность уравнений может быть записана и для магнитных векторного и скалярного электродинамических потенциалов:

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon} \text{rot } \vec{A}_m^M(\vec{r}), \quad (19)$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = -\text{grad } u_m^M(\vec{r}) - \tilde{\epsilon}_a \vec{A}_m^M(\vec{r}), \quad (20)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_m^M(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^M(\vec{r}) = -\vec{j}_m^Mcm, \quad (21)$$

$$\nabla^2 u_m^M(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^M(\vec{r}) = -\frac{\rho_m^{M.c.c.}}{\mu_0 \mu}. \quad (22)$$

В соотношениях (17), (18), (21), (22), называемых **неоднородными уравнениями Гельмгольца** относительно комплексных амплитуд векторных и скалярных электродинамических потенциалов.

По найденным значениям векторных потенциалов определяются компоненты электромагнитного поля:

$$\vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{A}^{\text{э}} + \frac{1}{i\omega\tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \vec{A}^{\text{э}} - \text{rot } \vec{A}^M, \quad (23)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}^{\text{э}} - i\omega\tilde{\epsilon}_a \vec{A}^M + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \vec{A}^M. \quad (24)$$

2.1.4 Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов

Решение неоднородных уравнений Гельмгольца поясним на примере решения неоднородных волновых уравнений для электрических векторного и скалярного электродинамических потенциалов, записанных для однородных и изотропных сред, в которых отсутствуют магнитные потери и диэлектрический гистерезис. При этом будем считать, что волновое число имеет комплексное значение: $\tilde{k} = k_\beta - ik_\alpha$. Это позволяет переписать уравнения (17), (18) в уже рассматриваемом ранее виде неоднородных волновых уравнений:

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\vec{J}^{\text{э.ст}}, \quad (25)$$

$$\nabla^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\frac{\rho^{\text{э.ст}}}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (26)$$

Несложно заметить, что данные уравнения являются неоднородными волновыми уравнениями. Их решение начинается с предположения, что источник поля (сторонний электрический ток с вектором объемной плотности $\vec{j}^{\text{э.ст}}$) занимает весьма малую область $\Delta V \rightarrow 0$ вблизи начала координат, как показано на рисунке 1. Во всем остальном пространстве поле удовлетворяет однородным волновым уравнениям, т.е. уравнениям (25), (26) с нулевой правой частью. В силу сферической симметрии решения скалярного уравнения (26) относительно источника будем считать решение не зависящим от углов φ, θ в сферической системе координат, т.е. $\partial u_m^{\text{э}} / \partial \varphi = 0, \partial u_m^{\text{э}} / \partial \theta = 0$. Тогда лапласиан из (26) упрощается, а решение представляет собой две сферических волны, распространяющихся от источника в сторону возрастания значений r

(расходящуюся волну) и сходящуюся к источнику волну. Причем существование второй волны не удовлетворяет условиям излучения и принципу причинности (причина должна опережать следствие).

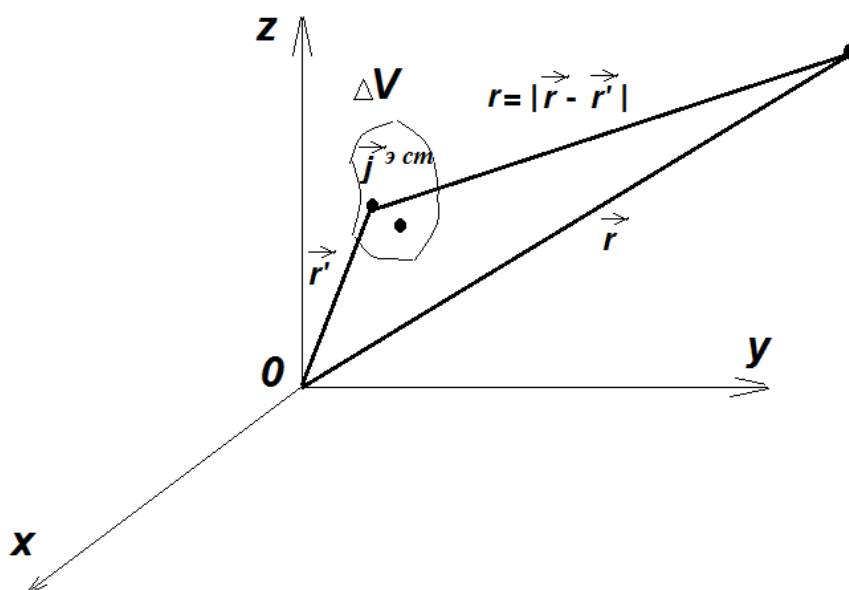


Рисунок 1. – Геометрия задачи

В результате решение задачи принимает вид

$$u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{B}{r} \exp(-i\tilde{k}r). \quad (27)$$

Коэффициент B пропорционален интенсивности источника. С понижением частоты коэффициент распространения $\tilde{k} \rightarrow 0$, и естественно предположить, что в пределе данное выражение совпадает с выражением для поля электростатического заряда, т.е.

$$B = \frac{\rho_m^{\text{э.с.т}} \Delta V}{4\pi\epsilon_a}. \quad (28)$$

Возвращаясь к произвольной частоте и считая объем V , где расположены сторонние силы, также произвольным, получаем

$$u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_m^{\text{э.с.т}} \exp(-i\tilde{k}r)}{4\pi\epsilon_a r} dv. \quad (29)$$

Представляя векторное уравнение тремя скалярными проекциями в декартовой системе координат и применяя полученное решение для каждой из проекций с заменами

$$\frac{\rho_m^{\text{э.с.т}}}{\tilde{\epsilon}_a} \rightarrow \tilde{\mu}_a \vec{J}_{m,x,y,z}^{\text{э.с.т}}, \quad u_m^{\text{э}} \rightarrow A_{m,x,y,z}^{\text{э}}, \quad (30)$$

получим решение для векторного электродинамического потенциала:

$$\vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_V \vec{j}_m^{\text{э.ст}}(\vec{r}') \frac{\exp(-i\tilde{k}r)}{r} dv. \quad (31)$$

Соотношение (31) называется **интегралом Кирхгофа для запаздывающих потенциалов**. Оно удовлетворяет условиям теоремы единственности для внешней задачи электродинамики. Экспоненциальной множитель соответствует конечной скорости распространения волны от источника со скоростью $v = \omega / \beta$, благодаря чему его воздействие доходит до точки с радиус-вектором \vec{r} с запаздыванием на время

$$t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta r}{\omega}. \quad (34)$$

Таким образом, векторный потенциал в точке с радиус-вектором \vec{r} в момент времени t является функцией токов в точке расположения источников, существовавших в более ранний момент времени. Данное положение называется **теоремой запаздывающих потенциалов**, а электродинамические потенциалы называются запаздывающими.

Поскольку токи и заряды меняются по гармоническому закону, то экспоненциальный множитель в среде без потерь записывается в виде

$$\exp[i\omega(t - r/v)] = \exp(i\omega t) \exp(-i\omega r/v) = \exp(i\omega t) \exp(-ik_\beta r). \quad (35)$$

Таким образом, применительно к гармоническим процессам запаздывание на время $t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta r}{\omega}$ учитывается множителем $\exp(-ik_\beta r)$ и означает сдвиг по фазе на величину $\omega r/v$.

2.2 Электромагнитные поля элементарных источников

Общие характеристики электромагнитного поля элементарных источников. Поля элементарных электрического и магнитного вибраторов. Диаграмма направленности. Сферические волны. Поле электрического и магнитного вибраторов. Цилиндрические волны. Структура поля линейного электрического и магнитного излучателей.

2.2.1 Общие характеристики электромагнитного поля элементарных источников

На предыдущей лекции было рассмотрено понятие излучения, при котором излучаемое электромагнитное поле порождается действием сторонних сил, описываемых сторонними зарядами и токами. Полученное решение задачи об излучении было записано с использованием электродинамических потенциалов, которые для гармонических полей определяются формулой:

$$\vec{A}_m^{(M)}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a(\tilde{\epsilon}_a)}{4\pi} \int_V \vec{J}_m^{(M).CT}(\vec{r}') \frac{\exp(-ikr)}{r} dv'. \quad (1)$$

Экспоненциальный множитель, входящий в данное выражение представляет собой **функцию Грина свободного пространства** $G(\vec{r}, \vec{r}')$ (\vec{r} - радиус-вектор, описывающей точку, в которой определяется поле; \vec{r}' - радиус-вектор, описывающей положение точки источника; $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$). Геометрия задачи показана на рисунке 1). Функция Грина является решением соответствующего волнового уравнения или уравнения Гельмгольца при правой части в виде дельта-функции Дирака. Единицы ее измерения - м⁻¹. Функция Грина является истокообразной, т.е. описывает возбуждение поля. Математически данное явление соответствует обращению в нуль знаменателя, т.е. случай, когда расстояние между точкой, в которой расположен источник, и точкой, в которой ищется поле, совпадают.

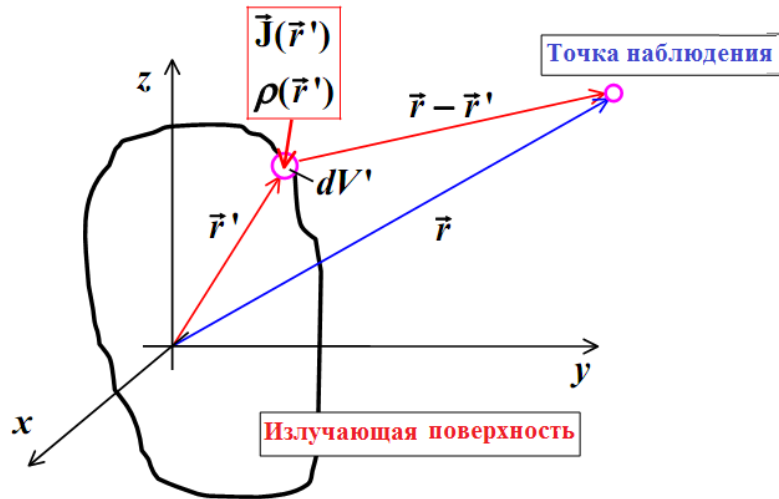


Рисунок 1. – Геометрия задачи о возбуждении точечного источника

Для нахождения структуры поля, возбуждаемого сторонним источником, необходимо подставить выражение в соотношение для электродинамического потенциала (1) конкретное распределение тока, а затем полученное выражение в соотношения, связывающие компоненты электромагнитного поля с электродинамическими потенциалами.

Приведем окончательные выражения, получаемые для компонент электромагнитного поля, возбуждаемого источниками магнитного и электрического типов. Так, если источник поля является магнитным, то вектор напряженности магнитного поля будет определяться выражением:

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{ik}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \left[\vec{j}_m^{cm}(\vec{r}', \vec{r}_0) \right] \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|) dv'. \quad (2)$$

Для источников электрического типа выражение для вектора напряженности электрического поля будет иметь вид:

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{ik}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \left[\vec{j}_m^{cm,m}(\vec{r}', \vec{r}_0) \right] \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|) dv'. \quad (3)$$

В соотношениях (2) и (3) радиус-вектор \vec{r}_0 определяется соотношением:

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4)$$

Выполним анализ поля излучения на основании представления компонент поля соотношениями (2) и (3). Подынтегральные выражения представляют собой сумму двух членов.

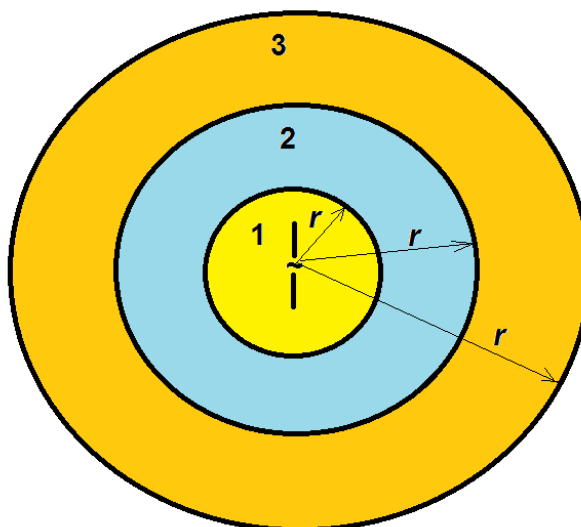


Рисунок 2. – Выделение зон вблизи источника излучения

Отношение слагаемых в подынтегральных функциях обоих выражений равно $ik|\vec{r} - \vec{r}'|$. Для непоглощающей среды величина $k=2\pi/\lambda$ является вещественной. В зависимости от соотношения величин $|\vec{r} - \vec{r}'|$ и λ может преобладать первый или второй член. Если величина $|\vec{r} - \vec{r}'|$ достаточно велика по сравнению с длиной волны и размерами области источников, то компоненты векторов электромагнитного поля все более приобретают пространственное распределение типа сферической волны. Данная область получила название **дальней (волновой) зоны или зоны излучения**, поскольку поле в данной зоне удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда. На рисунке 2 данная зона обозначена номером 3.

Если область источников мала по сравнению с длиной волны, то можно указать такую область расстояний $|\vec{r} - \vec{r}'| \ll \lambda$, когда преобладает первый член выражения. Данная область получила название ближней зоны (область с номером 1 на рисунке 2). Помимо указанных зон выделяют третью – промежуточную, в которой $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx \lambda$ (область 2 на рисунке 2).

2.2.2 Поля элементарных электрического и магнитного вибраторов. Диаграмма направленности

Рассмотрение структуры поля начнем со случая элементарных излучателей электрического и магнитного типов. Дадим определение элементарного излучателя.

Элементарным электрическим излучателем называют элемент электрического линейного тока, характеризуемый следующими особенностями: во-первых, его длина весьма мала по сравнению с длиной волны создаваемого им поля и, во-вторых, в каждый момент времени ток имеет одно и то же значение. Примером реализации элементарного электрического излучателя является диполь Герца - вибратор длиной ℓ значительно меньшей длины волны в вакууме λ и радиусом $a \ll \ell$, по которому протекает переменный электрический ток I_0 .

Элементарный магнитный излучатель – это воображаемый «проводник» длиной $\ell \ll \lambda$, по которому протекает фиктивный магнитный ток I_0^M . Примерами реализации элементарного магнитного излучателя являются рамка с током, а также щель в металлическом экране.

Рассмотрим структуру поля элементарного электрического излучателя. Прежде, чем записать вектор плотности тока \vec{j} в излучателе, сделаем несколько замечаний общего плана. Во-первых, об используемой системе координат. Для того чтобы получаемые выражения для компонент поля можно было разделить, используется та система координат, в которой одна из координатных поверхностей совпадает с поверхностью излучателя. Так, для точечного излучателя может применяться как декартова, так и сферическая системы координат. Для протяженных линейных источников, например, нитей электрического или магнитного тока, используется цилиндрическая

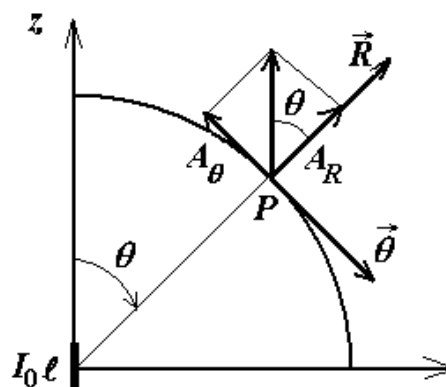


Рисунок 3 – Переход в сферическую систему координат

система координат. Во-вторых, в выбранной системе координат источник обычно ориентируют таким образом, чтобы его образующая совпадала с осью Oz . Отсчет одного из углов осуществляется от оси вибратора. С учетом сделанных выше замечаний для описания распределения тока в элементарном электрическом излучателе введем декартову систему координат, как показано на рисунке 3. Предположим, что излучатель ориентирован вдоль оси Oz . Распределение тока в излучателе в этом случае будет описываться выражением:

$$\vec{j}(\vec{r}') = \vec{z} I_0 \delta(x-0) \delta(y-0) \delta(z-0). \quad (6)$$

Нахождение составляющих электромагнитного поля произведем путем подстановки распределения тока (6) в соотношение (3).

По условию вибратор является источником электрического типа, следовательно, найдем векторный электрический потенциал. Подставляя выражение (6) в соотношение для векторного электрического потенциала (1) и учитывая основные свойства дельта-функции Дирака, после интегрирования по объему, в котором сосредоточен источник, в декартовой системе координат получаем:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{z} \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} I_0 \ell. \quad (7)$$

Далее для представления потенциала в каждой точке пространства (например, в точке P) перейдем от декартовой системы координат $Oxyz$ к сферической системе координат $OR\theta\varphi$. После преобразования, выполненного с использованием рисунка 3, компоненты векторного электрического потенциала будут иметь вид:

$$A_R = \left| \vec{A} \right| \cos \theta = \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} I_0 \ell \cos \theta, \quad (8a)$$

$$A_\theta = - \left| \vec{A} \right| \sin \theta = - \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} I_0 \ell \sin \theta, \quad (8b) \quad A_\varphi = 0.$$

Подставляя компоненты векторного электрического потенциала в соответствующие соотношения для компонент электромагнитного поля, получаем:

$$H_R = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi r^2} (1 + ikr) \sin \theta \exp(-ikr),$$

$$E_R = \frac{I_0 \ell}{2\pi \omega \varepsilon_a r^3} (1 + ikr) \cos \theta \exp(-ikr),$$

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell}{4\pi \omega \varepsilon_a r^3} (1 + ikr - k^2 r^2) \sin \theta \exp(-ikr), \quad E_\varphi = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим структуру поля в выделенных выше зонах: ближней и дальней. В ближней зоне все три возможные составляющие поля - E_R , E_θ и H_φ - отличны от нуля:

$$H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi r^2} \sin \theta, \quad E_R = \frac{-iI_0 \ell}{2\pi \omega \varepsilon_a r^3} \cos \theta, \quad E_\theta = \frac{-iI_0 \ell}{4\pi \omega \varepsilon_a r^3} \sin \theta. \quad (10)$$

При описании поля в дальней зоне можно отбросить слагаемые, имеющие порядок r^{-2} , т.е. можно пренебречь составляющей поля E_R по сравнению с E_θ . Следовательно, компоненты электромагнитного поля будут определяться только двумя компонентами

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell k^2}{4\pi \omega \varepsilon_a} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}. \quad (11)$$

Компоненты поля элементарного магнитного излучателя могут быть получены на основе использования **принципа двойственности**:

$$H_\theta = \frac{I^M_0 \ell k^2}{4\pi \omega \mu_a} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad E_\varphi = -\frac{I^M_0 \ell}{4\pi} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}. \quad (12)$$

Анализ формул (11) и (12) показывает, что возбуждаемые элементарными излучателями поля представляют собой уходящие на бесконечность сферические волны, как показано на рисунке 4. Математически данные волны описываются множителем $\exp(-ikr)/r$.

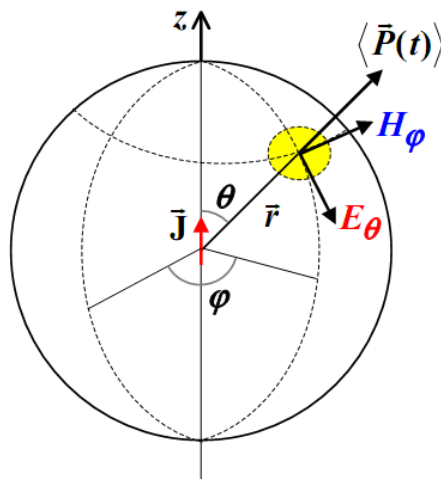


Рисунок 4. – Возбуждение сферической волны

В дальней зоне (при $r \rightarrow \infty$) поле является квазиплоским (отсутствует R -компонента поля), а соотношение между компонентами поля является постоянной величиной, называемой **волновым сопротивлением свободного пространства**

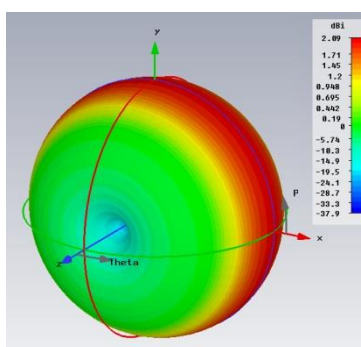
$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_\theta} = W_0 = 120\pi \text{ Ом}. \quad (13)$$

Из формул (11) и (12) следует, что элемент как электрического, так и магнитного токов вообще не излучает в направлении своей оси ($\theta=0^\circ$), а в экваториальной плоскости ($\theta=90^\circ$) излучение максимально.

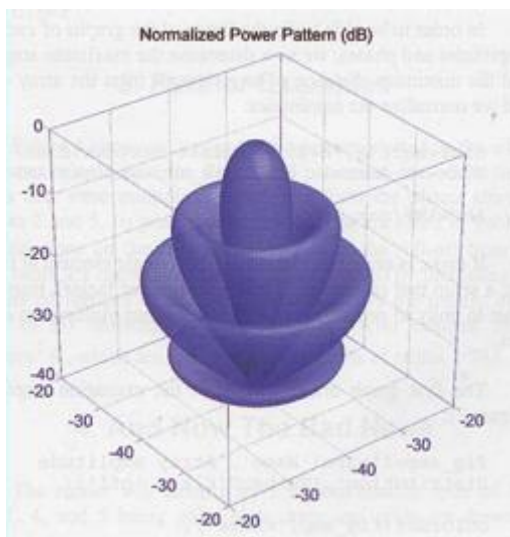
Распределение поля излучения в пространстве при $R=const$ характеризуется при помощи функции, называемой **характеристикой направленности**:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{|U(\theta, \varphi)|}{|U(\theta, \varphi)|_{\max}}. \quad (14)$$

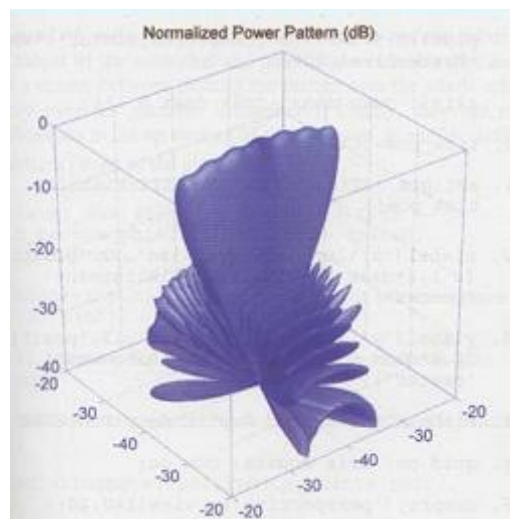
Традиционно для излучателей электрического типа используется характеристика направленности, полученная относительно распределения электрического поля ($U = E$), а для излучателей магнитного типа – относительно распределения магнитного поля ($U = H$). Для элементарных электрического и магнитного излучателей характеристика направленности имеет вид:



а

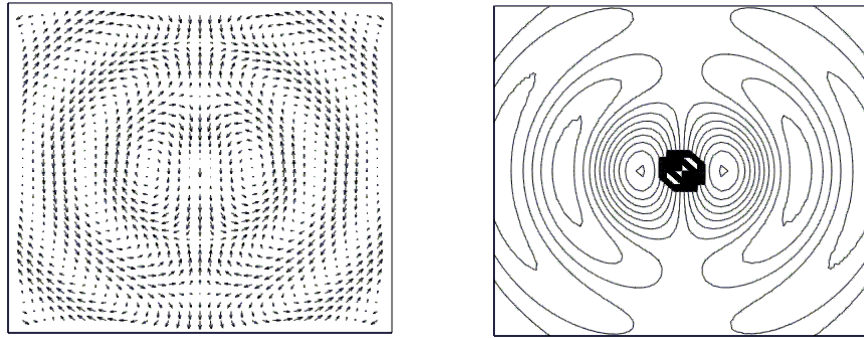


б



в

Рисунок 5. – Диаграммы направленности различной формы



а

б

Рисунок 6. – Структура поля точечного источника

$$F(\theta, \varphi) = |\sin \theta|. \quad (15)$$

График этой функции называется **диаграммой направленности**. Диаграмма направленности может быть построена в декартовой системе координат, в полярной системе координат, в цилиндрической системе координат, в сферической системе координат, в обобщенной системе координат. Примеры объемных диаграмм направленности для различных типов излучателей показаны на рисунке 5.

На рисунке 6 приводится структура поля диполя в горизонтальном (рисунок 6,а) и вертикальном (рисунок 6,б) сечениях. Анализ данных рисунков показывает, что электромагнитные волны представляют собой расходящиеся от источника сферические волны.

2.2.3 Сферические волны. Поле электрического и магнитного вибраторов

Перейдем к рассмотрению поля излучения, создаваемого источниками, имеющими конечные размеры L , однако, в отличие от элементарных излучателей, распределение тока вдоль излучателя не является постоянной величиной, а описывается законом

$$\vec{j}^{cm}(z) = \vec{i}_z \begin{cases} I^{\circ}(z) \exp[i\psi(z)], & z \in L, \\ 0 & z \notin L \end{cases}. \quad (16)$$

В данном соотношении $I^{\circ}(z)$ и $\psi(z)$ – заданные модуль и фаза тока. геометрия задачи показана на рисунке 7. Выражение для векторного электрического потенциала с использованием соотношения для функции Грина представим в виде:

$$\vec{A}^{\circ} = \vec{i}_x \frac{1}{4\pi} \int_L I^{\circ}(z') \exp[i\psi(z')] \frac{\exp(-ikr)}{r} dz', \quad (17)$$

в котором $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$.

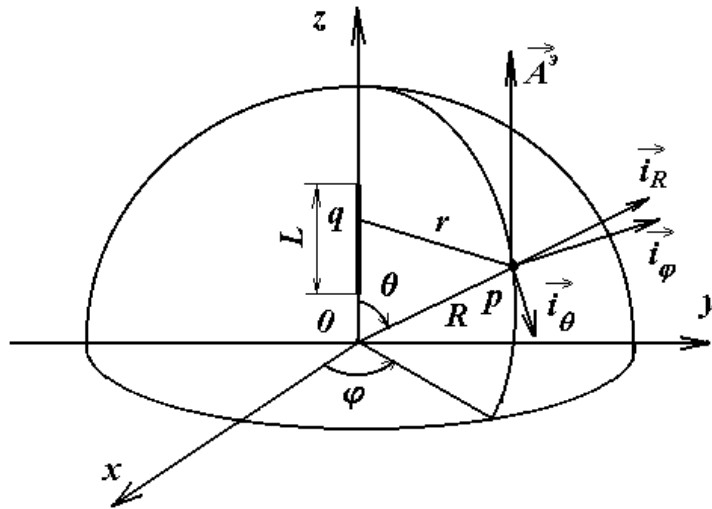


Рисунок 7. – Геометрия задачи о возбуждении сферической волны источником конечных размеров

Как и для элементарного электрического вибратора, векторный потенциал в произвольной точке пространства имеет только z-составляющую, а остальные компоненты (A_r , A_φ) равны нулю. Из равенства, связывающего векторный потенциал с вектором напряженности магнитного поля, получаем отличную от нуля компоненту поля:

$$H_\varphi = -\frac{\exp(-ikr)}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_z^e) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_z^e) \right\}. \quad (18)$$

Остальные компоненты (H_r , H_z) напряженности магнитного поля тождественно равны нулю. Далее, используя второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме, запишем равенства для компонент напряженности электрического поля в сферической системе координат

$$E_\varphi = 0, \quad E_r = \frac{\exp(-ikr)W}{kr \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\varphi), \quad E_\theta = \frac{\exp(-ikr)W}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi). \quad (19)$$

При $kr \rightarrow \infty$ (в **дальней зоне**) при больших расстояниях от источника излучения поле имеет две поперечные относительно направления распространения синфазные составляющие. Несмотря на то, что фронт волны (поверхность фаз) представляет собой сферу, что определяется множителем $\exp(-ikr)$, поле зависит еще и от угловой координаты θ . Такая волны называется **неоднородной сферической волной**.

Используя принцип взаимности, несложно сразу описать сферическую волну, возбуждаемую магнитным током.

2.2.4 Цилиндрические волны. Структура поля линейного электрического и магнитного излучателей

Рассмотрим теперь случай, когда источник является протяженным - линейным электрическим и магнитным излучателем, которые как видно из названия отличаются только типом тока, протекающим по нити.

Физическими моделями таких излучателей являются бесконечно длинный провод с радиусом, намного меньшим длины волны, по которому протекает электрический ток, и спиральный излучатель, длина которого много больше радиуса витка a и $a \ll \lambda$.

Решение задач об излучении бесконечных прямолинейных нитей с токами удобно проводить в цилиндрической системе координат. В данной системе координат распределение тока в бесконечно длинном прямолинейном электрическом излучателе описывается выражением

$$\vec{j}^{em}(\vec{r}') = \hat{i}_z I_0^e \delta(r - a) \delta(\varphi - 0), \quad (20)$$

где I_0^e – величина тока в точке питания.

Векторный электрический потенциал в цилиндрической системе координат определяется выражением:

$$\vec{A}^e(\vec{r}) = \hat{i}_z \frac{I_0^e}{4i} H_0^{(2)}(kr), \quad (21)$$

а отличные от нуля составляющие поля нити электрического тока имеют вид:

$$H_\varphi = \frac{I_0^e}{4i} k H_1^{(2)}(kr), \quad E_z = -\frac{I_0^e}{4i} kW_0 H_0^{(2)}(kr), \quad (22)$$

где $H_n^{(2)}(\cdot)$ - функция Ганкеля 2-го рода n -го порядка.

Для излучателя магнитного типа соответствующие компоненты поля в дальней зоне также могут быть получены с помощью принципа двойственности и имеют вид:

$$E_\varphi = -\frac{I_0^m}{4i} H_1^{(2)}(kr), \quad H_z = -\frac{I_0^m k}{4W} H_0^{(2)}(kr). \quad (23)$$

При $kr \rightarrow \infty$ данные компоненты поля при использовании асимптотического представления функции Ганкеля для больших значений аргумента могут быть представлены в виде:

$$H_\varphi = \sqrt{\frac{k}{8\pi r}} \exp[-ikr + i\pi/4], \quad E_z = -H_\varphi W_0. \quad (24)$$

Таким образом, электромагнитное поле, возбуждаемое нитью синфазного тока, распространяется в направлениях, перпендикулярных нити, как показано на рисунке 8.

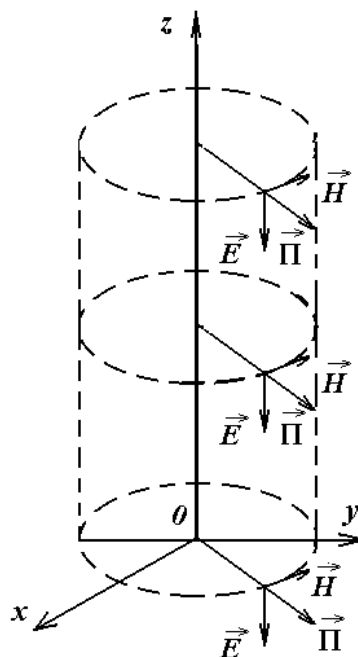


Рисунок 8. – Структура цилиндрической волны, возбуждаемой нитью тока

Поле имеет две поперечные относительно направления распространения синфазные составляющие E_z и H_ϕ , т.е. возбуждаемое поле является T -волной. Фаза составляющих векторов поля волны меняется по r при $kr \rightarrow \infty$ по закону бегущей волны. Фронт волны представляет собой бесконечный цилиндр с осью, совпадающей с нитью тока. Амплитуды составляющих векторов поля убывает с ростом r по закону, определяемому функцией $\sqrt{\frac{1}{r}}$. Составляющие векторов поля однородны по азимутальному углу ϕ и по координате z . Волну этого типа называют **однородной цилиндрической волной**.

2.3 Поле системы элементарных излучателей

Принцип Гюйгенса-Кирхгофа. Излучатель Гюйгенса. Принцип получения остронаправленного излучения.

2.3.1 Принцип Гюйгенса-Кирхгофа

При анализе конкретных излучающих систем распределение токов в системе часто бывает либо неизвестно, либо имеет крайне сложный характер. В то же время можно считать известным поле в некоторой замкнутой поверхности, охватывающей излучающую систему. В этих случаях поле, излучаемое системой, можно найти непосредственно по значениям векторов \vec{E} и \vec{H} на этой поверхности, т.е. вместо действительных источников используются их эквиваленты. Данное обстоятельство было отмечено при формулировке теоремы эквивалентных поверхностных токов.

Рассмотрим более подробно физическую интерпретацию данной теоремы. Напомним, что данный искусственный прием (или метод) позволяет рассчитать электромагнитное поле любой ограниченной в пространстве системы источников, если известны касательные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} на некоторой замкнутой фиктивной поверхности S , охватывающей данные источники, как показано на рисунке 1.

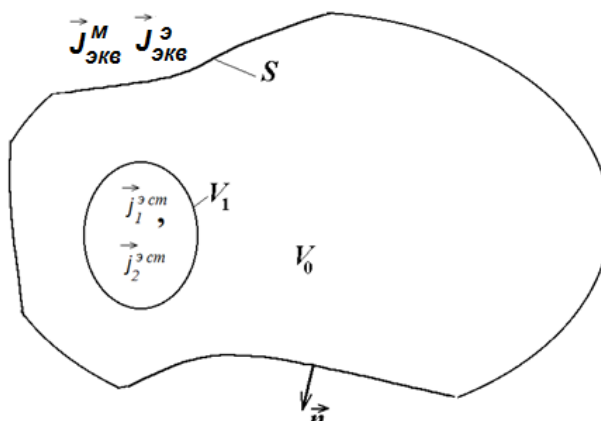


Рисунок 1. – Геометрия задачи о введении эквивалентных источников

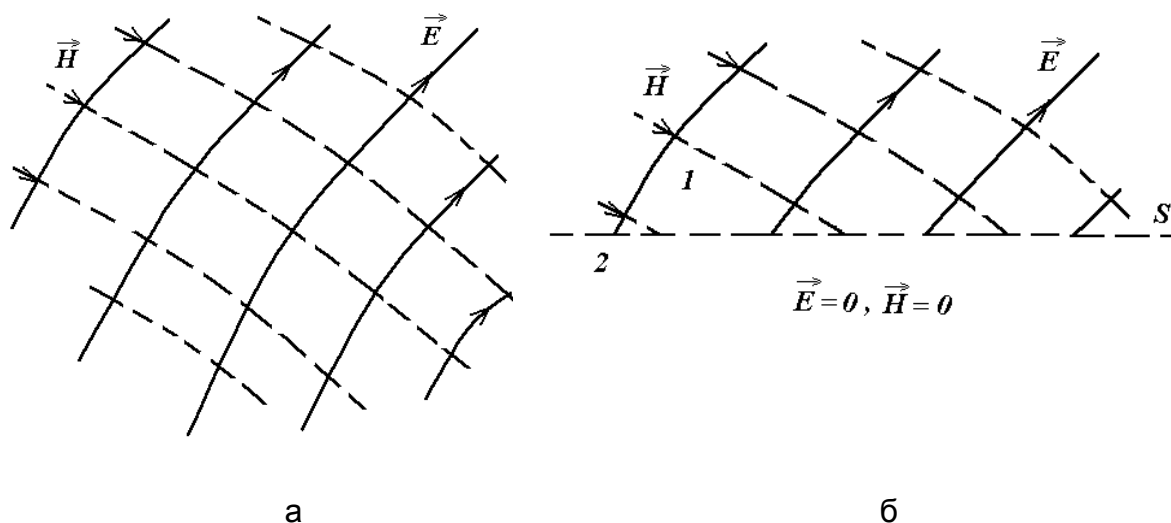


Рисунок 2 – Переход к системе фиктивных источников

Эквивалентные поверхностные источники вводятся следующим образом. Пусть некоторое электромагнитное поле характеризуется векторами \vec{E} , \vec{H} , силовые линии которого приведены на рисунке 2,а. Предположим, что это же поле существует только в области 1 и отсутствует в области 2 (рисунок 2,б). Выясним, какие условия надо поставить на границе S (штриховая линия), чтобы их действие оказалось эквивалентным отображенному полю. При переходе через границу S все компоненты векторов поля теперь будут обрываться. Как известно, разрывы нормальной компоненты вектора электрической индукции и тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля соответствуют

существованию поверхностного электрического заряда и поверхностного электрического тока. Поскольку в области 2 ток отсутствует, то можно записать следующие выражения:

$$\rho = \varepsilon_0 \varepsilon (\vec{E}^S, \vec{\nu}), \quad \vec{j} = [\vec{\nu}, \vec{H}^S] \quad (1)$$

(индекс S обозначает поля на границе раздела). На границе S имеются также разрывы нормальной компоненты вектора магнитной индукции и тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля, что противоречит граничным условиям. Для устранения данного противоречия вводятся, как известно, понятия магнитного заряда и магнитного тока. Хотя с физической точки зрения магнитные заряды и токи не существуют, они могут быть определены при помощи соотношений

$$\rho^M = \mu_0 \mu (\vec{H}^S, \vec{\nu}), \quad \vec{j}^M = [\vec{E}^S, \vec{\nu}]. \quad (2)$$

Таким образом, первоначальное поле \vec{E} , \vec{H} будет существовать в области 1 вплоть до границы S (без продолжения в область 2), если на поверхности S распределены электрические и магнитные заряды и токи, связанные с полем соотношениями (1) и (2). В теореме эквивалентных поверхностных токов для их обозначения используются понятия эквивалентных поверхностных токов. Впервые это положение было сформулировано Гюйгенсом. Математическая формулировка принципа Гюйгенса впервые была дана Кирхгофом. В связи с этим данный принцип обычно называют **принципом Гюйгенса-Кирхгофа**. Согласно этому принципу, каждую точку фронта некоторой волны можно принять за источник локальной сферической волны; новое положение фронта волны может быть найдено при учете действия всех локальных волн, т.е. при помощи условных поверхностных источников. Иллюстрация данного принципа показана на рисунке 3.



Рисунок 3 – Иллюстрация принципа Гюйгенса-Кирхгофа

Под **фронтом волны** обычно понимается поверхность, отделяющую область, в которой в данный момент уже имеют место колебания, от области, в которую волна еще не успела распространиться. В случае монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в неограниченной области, под фронтом волны понимают любую поверхность равных фаз.

Сделанный вывод означает, что поле в объеме можно рассматривать не только как результат излучения реальных сторонних источников (электрических токов и зарядов), но и как результат излучения эквивалентных источников, распределенных на некоторой поверхности. При этом для определения источников достаточно знать поле на поверхности.

2.3.2 Излучатель Гюйгенса

Согласно принципу Гюйгенса, элементы поверхности S с заданным распределением поля могут фигурировать как элементарные излучатели (**элементы Гюйгенса**). Магнитное поле, действующее на данном элементе, заменяется эквивалентным поверхностным током, а электрическое поле – эквивалентным магнитным током.

Определим направленные свойства элемента Гюйгенса. Для этого рассмотрим простейший элемент в виде прямоугольной площадки $\Delta S = \Delta x \times \Delta y$ на плоскости $z=0$, нормальной фронту плоской однородной волны, как показано на рисунке 4.

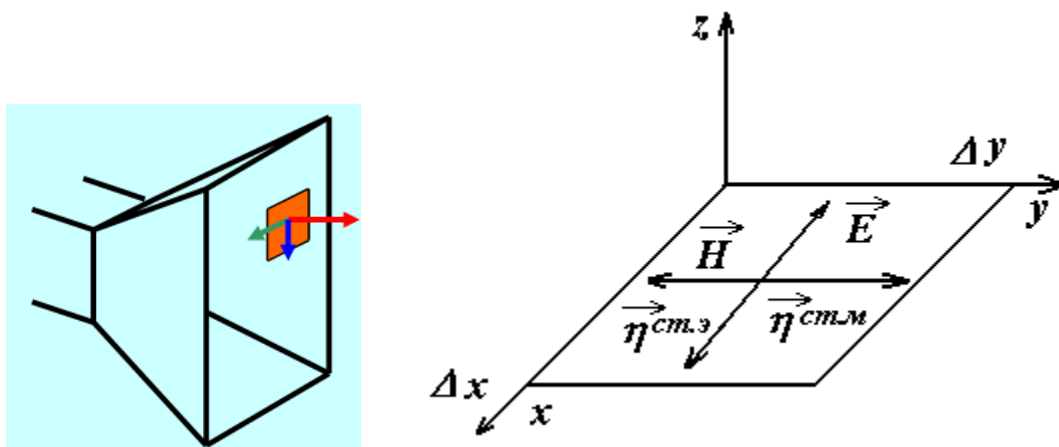


Рисунок 4 – Переход к эквивалентным поверхностным токам

Плотности эквивалентных электрического и магнитного поверхностных токов, протекающих на поверхности $\Delta S = \Delta x \Delta y$ (причем $\Delta x \ll \lambda$, $\Delta y \ll \lambda$), описываются во введенной системе координат выражениями:

$$\vec{\eta}^{ct.э} = [\vec{z}, \vec{H}], \quad \vec{\eta}^{ct.м} = [\vec{E}, \vec{z}]. \quad (3)$$

Поле в дальней зоне элемента Гюйгенса, расположенного в экваториальной плоскости сферической системы координат, записывается в виде:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{ik\left|\vec{\eta}^{cm.э}\right|\Delta SW_0}{4\pi}(1+\cos\theta)\left(\vec{\theta}\sin\varphi-\vec{\varphi}\cos\varphi\right)\frac{\exp(-ikr)}{r}, \\ \vec{H} &= -\frac{ik\left|\vec{\eta}^{cm.э}\right|\Delta S}{4\pi}(1+\cos\theta)\left(\vec{\theta}\cos\varphi+\vec{\varphi}\sin\varphi\right)\frac{\exp(-ikr)}{r}.\end{aligned}\quad (4)$$

Формулы (4) получены на основе выражений для компонент поля элементарных электрического и магнитного вибраторов с учетом преобразования координат. Преобразование координат обусловлено тем, что при получении соотношений для каждого элементарно излучателя была использована система координат, в которой отсчет угла θ осуществляется от оси вибратора (соответственно, электрического и магнитного). При совмещении излучателей электрического и магнитного типов (образовании поверхностного элемента) отсчет угла φ осуществляется от оси Ox , совпадающей с направлением плотности поверхностного электрического тока, а угла θ - от оси Oz , перпендикулярной плоскости поверхностного элемента.

Анализ соотношений (4) показывает, что, во-первых, структура поля в дальней зоне элемента Гюйгенса отличается от структуры полей элементарных излучателей, на основе которых данный элемент образован. Так, если составляющие комбинированный излучатель элементы имеют в дальней зоне по одной отличной от нуля компоненте поля, т.е. одну компоненту характеристики направленности, то элемент Гюйгенса в дальней зоне имеют по две компоненты, отличные от нуля: θ - и φ - компоненты.

Во-вторых, нормированная характеристика направленности элемента Гюйгенса также отличается от соответствующей характеристики элементарных излучателей электрического и магнитного типов. Отличия заключаются в том, что характеристика направленности элемента Гюйгенса является векторной величиной:

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = \vec{\theta} F_{\theta}(\theta, \varphi) + \vec{\varphi} F_{\varphi}(\theta, \varphi). \quad (5)$$

Каждая из компонент характеристики направленности, записанных, например, относительно напряженности электрического поля, так называемые амплитудные характеристики направленности, зависит от двух углов и описывается соотношениями:

$$F_{\theta} = (1 + \cos\theta) \sin\varphi; \quad F_{\varphi} = (1 + \cos\theta) \cos\varphi. \quad (6)$$

Характеристика направленности излучателя, записанная относительно мощности излучения, определяется выражением:

$$F(\theta, \varphi) = F_{\theta}^2(\theta, \varphi) + F_{\varphi}^2(\theta, \varphi) = (1 + \cos\theta)^2. \quad (7)$$

Как и для элементарных излучателей электрического и магнитного типов вектор Пойнтинга имеет только одну отличную от нуля компоненту Π_R :

$$\Pi_R = \Pi_R = \frac{1}{2} (E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^*) = \frac{k^2 (E_m^S)^2 \Delta S^2}{32\pi^2 W_0 r^2} (1 + \cos \theta)^2. \quad (8)$$

Анализ соотношений (4) и (8) показывает, что если амплитуда компонент электрического и магнитного полей элемента Гюйгенса убывают с увеличением расстояния как r^{-1} , что соответствует условию излучения Зоммерфельда, то плотность потока мощности электромагнитного поля обратно пропорциональна квадрату расстояния между элементом Гюйгенса и точкой наблюдения поля.

Графическое изображение характеристики направленности элемента Гюйгенса - диаграмма направленности - в произвольной плоскости $\varphi = const$ есть кардиоида.

2.3.3 Принцип получения остронаправленного излучения

Принципы получения остронаправленного излучения проиллюстрируем на примере излучения сторонних электрических и магнитных токов, распределенных на прямоугольной поверхности, как показано на рисунке 5.

Пусть на плоской прямоугольной поверхности размерами a и b заданы электрические и магнитные поля $\vec{E}_m^S = \vec{i}_x E_0$, $\vec{H}_m^S = \vec{i}_y \frac{E_0}{W}$. Достаточно малые элементы поверхности являются элементами Гюйгенса, рассмотренными выше.

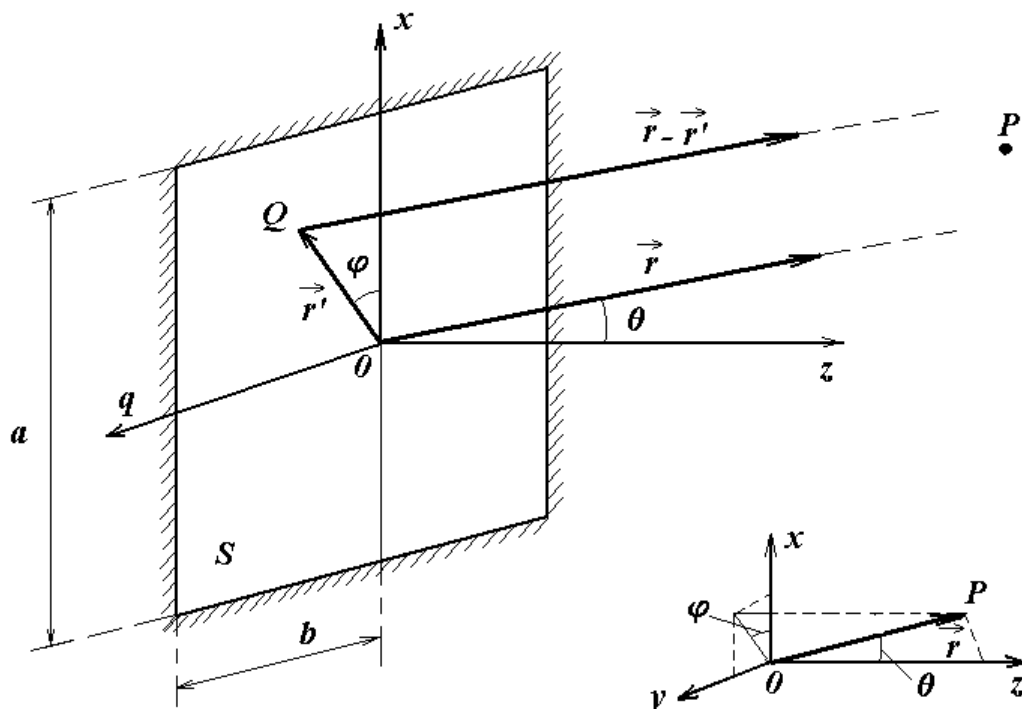


Рисунок 5 – Геометрия задачи

В связи с этим для нахождения характеристик направленности такой поверхности можно воспользоваться уже полученными выражениями, описывающими поле излучения Гюйгенса (4), и провести интегрирование по поверхности S . При этом выражение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля имеет вид:

$$\vec{E}_m = \vec{i}_x \frac{ikE_0}{4\pi} \int_S (1 + \cos \theta') \left\{ \vec{\theta}_0 \cos \varphi' - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi' \right\} \frac{\exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'. \quad (9)$$

В соотношении (9) $|\vec{r} - \vec{r}'|$ есть радиальная координата системы координат, связанной с элементом Гюйгенса: текущая точка интегрирования \vec{r}' в декартовой системе координат есть $(x', y', 0)$, а фиксированная точка наблюдения $\vec{r} = (x, y, z)$ - точка, в которой определяется поле.

При нахождении поля в дальней зоне отнесем точку наблюдения так далеко, чтобы векторы $|\vec{r} - \vec{r}'|$ и \vec{r} можно было считать параллельными. Поскольку в дальней зоне все точки поверхности S имеют одинаковые угловые координаты $\theta' = \theta$ и $\varphi' = \varphi$, множитель $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ можно заменить на $\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{r}$ (все это следует из параллельности векторов $|\vec{r} - \vec{r}'|$ и \vec{r}), под интегралом (9) остается только экспоненциальный множитель

$$\vec{E}_m = \vec{i}_x \frac{ikE_0}{4\pi} (1 + \cos \theta) \left\{ \vec{\theta}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi \right\} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|) dx' dy'. \quad (10)$$

Следует отметить, что, несмотря на то, что при нахождении амплитуды поля использовалась аппроксимация $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r$, экспоненту под интегралом нельзя принять за $\exp(-ikr)$, так как размеры пластины a и b не малы по сравнению с длиной волны. В связи с этим разложим $|\vec{r} - \vec{r}'|$ в ряд, в котором отброшены члены второго порядка малости:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \\ &= \sqrt{r^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2} = r - \frac{xx' + yy'}{r}. \end{aligned}$$

Внося этот ряд в показатель экспоненты интеграла (10), получаем

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(ik \frac{xx' + yy'}{r}\right) dx' dy' = \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(\frac{ikxx'}{2r}\right) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(\frac{iky y'}{2r}\right) dy' =$$

$$= ab \frac{\sin\left(\frac{kax}{2r}\right)}{\frac{kax}{2r}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kby}{2r}\right)}{\frac{kby}{2r}}. \quad (11)$$

Окончательно выражение для поля в дальней зоне принимает вид

$$\vec{E}_m = iE_0 ab \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \left\{ \vec{\theta}_0 \cos\varphi - \vec{\varphi}_0 \sin\varphi \right\} (1 + \cos\theta) \times \\ \times \frac{\sin\left(\frac{ka \sin\theta \cos\varphi}{2}\right)}{\frac{ka \sin\theta \cos\varphi}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb \sin\theta \sin\varphi}{2}\right)}{\frac{kb \sin\theta \sin\varphi}{2}}. \quad (12)$$

Так же, как и для элементарных вибраторов, поле прямоугольного отверстия в дальней зоне представляет собой сферическую волну. Эта волна является локально плоской.

Из выражения (12) следует, что характеристика направленности $F(\theta, \varphi)$ определяется зависимостью

$$F(\theta, \varphi) = (1 + \cos\theta) \left| \frac{\sin u}{u} \right| \left| \frac{\sin v}{v} \right|, \quad (13)$$

где $u = \frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi$,

$v = \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi$.

Первый множитель в (13), зависящий только от θ , есть не что иное, как характеристика направленности элемента Гюйгенса (7). Множитель вида $\left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)$ ($\xi = u, v$) отображает эффект наложения локальных волн, создаваемых всеми элементами Гюйгенса на поверхности S и называется **интерференционным множителем**. При $a \gg \lambda$ и $b \gg \lambda$ соответствующий интерференционный множитель фактически и определяет характеристику направленности в области малых θ .

Проанализируем излучение прямоугольной пластины в зависимости от θ при $\varphi=0$ (E -плоскость – плоскость ориентации вектора \vec{E}) и $\varphi=\pi/2$ (H -плоскость – плоскость ориентации вектора \vec{H}). Характеристика направленности описывается соотношениями:

$$F^E(\theta) = (1 + \cos\theta) \left| \frac{\sin \xi^E}{\xi^E} \right|, \quad F^H(\theta) = (1 + \cos\theta) \left| \frac{\sin \xi^H}{\xi^H} \right|, \quad (14)$$

где $\xi^E = \frac{ka}{2} \sin \theta$ и $\xi^H = \frac{kb}{2} \sin \theta$.

На рисунке 6 показан график функции $F(\xi) = \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right|$. Как видно, при $\xi=0$ функция имеет главный максимум, соответствующий максимуму излучения при $\theta=0$, т.е. в направлении z . Поскольку в (14) при малых углах θ можно пренебречь влиянием множителя $(1 + \cos \theta)$, то об угловой ширине зоны наибольшего излучения можно судить по характеру интерференционного множителя.

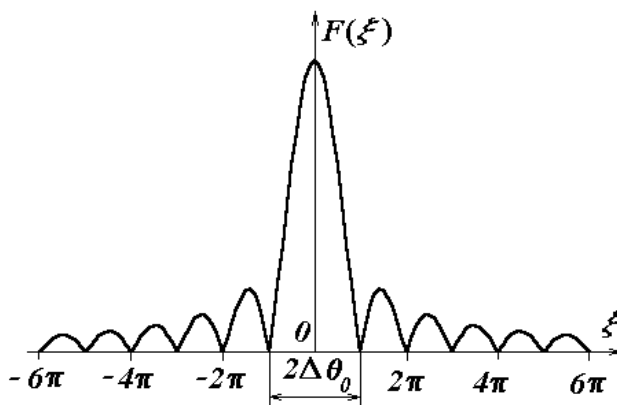


Рисунок 6 – График функции $F(\xi)$

Угловая ширина «луча» как зоны, ограниченной ближайшими к главному максимуму нулями, называется диаграммой направленности по нулевому уровню и определяется при выполнении условий:

$$2\Delta\theta_0^E \approx \frac{2\lambda}{a}, \quad 2\Delta\theta_0^H \approx \frac{2\lambda}{b}. \quad (15)$$

Данные формулы являются математической формулировкой принципов получения остронаправленного излучения:

- суперпозиция слабонаправленных источников;
- одинаковая ориентация источников;
- синфазность токов.

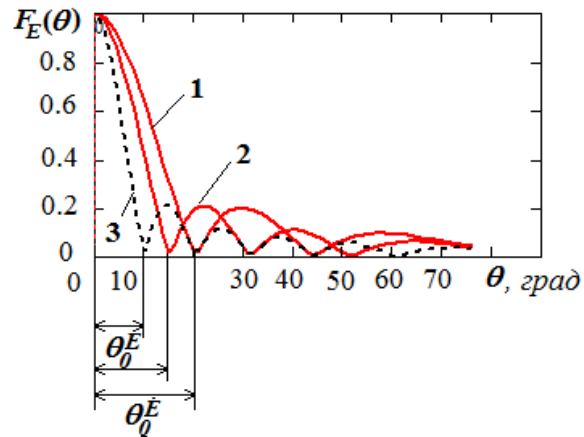
Указанные принципы находят широкое применение в теории антенн.

В таблице 1 приводятся результаты исследований зависимости полуширины главного лепестка диаграммы направленности «по нулям» от размеров прямоугольного отверстия.

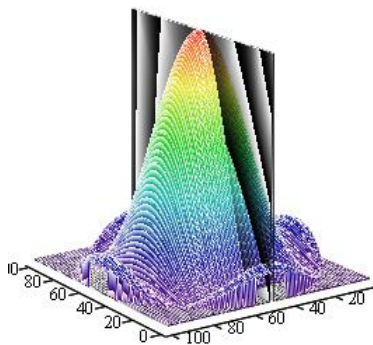
Таблица 1 - Зависимость полуширины главного лепестка ДН «по нулям» от размеров прямоугольного отверстия

| Размер отверстия, a/λ | Полуширина главного лепестка ДН, $\Delta\theta_0^E$ | Номер кривой на графике |
|-------------------------------|---|-------------------------|
| 1,432 | 20 | 1 и рисунок 7,б |
| 3,82 | 15 | 2 и рисунок 7,в |
| 5,73 | 10 | 3 и рисунок 7,г |

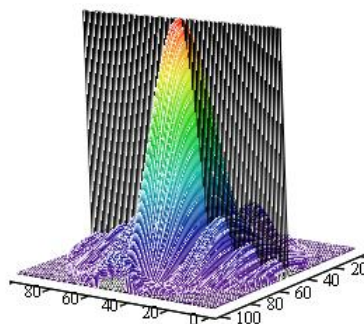
На рисунке 7 приводятся диаграммы направленности отверстия. При этом на рисунке 7,а приводятся плоские сечения диаграмм направленности отверстий различной ширины, обеспечивающих формирование главного лепестка диаграммы направленности требуемой формы. Обозначение кривых приведено в таблице 1. На рисунках 7,б-г приводятся объемные диаграммы направленности для отверстий указанных размеров. Вертикальная плоскость показывает положение плоскости сечения на рисунке 7,а.



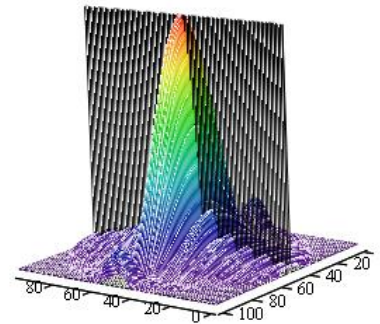
а



б



в



г

Рисунок 7. – Зависимость ширины главного лепестка ДН от размера отверстия

Приведенные результаты хорошо иллюстрируют принцип получения остронаправленного излучения, т.е. зависимость между размером отверстия и шириной главного лепестка: чем шире размер отверстия по одной из координат, тем уже получаемый в данном сечении главный лепесток ДН.

Модуль 3. Плоские электромагнитные волны в неограниченных средах

3.1 Электромагнитные волны в различных средах

Классификация сред. Плоские однородные волны в изотропных средах без потерь. Плоские однородные волны в изотропных средах с потерями. Дисперсия электромагнитных волн. Поляризация плоских волн.

3.1 Классификация сред

Как уже отмечалось выше, распространение электромагнитных волн происходит в среде, параметры которой определяются диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями и удельной проводимостью σ среды. В зависимости от соотношения данных переменных проводят классификацию сред. В качестве критерия разделения используют:

а) соотношение омических и диэлектрических потерь. Среда делится на диэлектрики, полупроводники и проводники.

б) Зависимость параметров среды от ориентации векторов и направления распространения волны - изотропные и анизотропные среды.

в) Зависимость параметров среды от уровня электромагнитного поля. Выделяют линейные и нелинейные среды.

Рассмотрим более подробно данную классификацию.

а) Разделение осуществляется по соотношению действительной и мнимой частей относительной комплексной диэлектрической проницаемости, описываемой формулой:

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha - i \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 (\varepsilon - i 60 \lambda_0 \sigma), \quad (1)$$

где λ_0 - длина волны в вакууме.

В зависимости от соотношения действительной (ε_α) и мнимой ($60\lambda_0\sigma$) частей относительной комплексной диэлектрической проницаемости, описывающих соответственной ток смещения и ток проводимости, имеем следующее деление сред, иллюстрируемой рисунком 1:

$$\varepsilon \begin{cases} \ll \\ \approx \\ \gg \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} \ll \\ \approx \\ \gg \end{matrix}} \right\} 60\lambda_0\sigma \begin{matrix} \text{проводник} \\ \text{полупроводник} \\ \text{диэлектрик} \end{matrix}$$

Рисунок 1. – Критерий разделения сред в зависимости от соотношения диэлектрических и омических потерь

- среда является диэлектриком, если $\varepsilon \gg 60\lambda_0\sigma$ (ток смещения превышает ток проводимости);

- среда является полупроводником, если $\varepsilon \approx 60\lambda_0\sigma$ (токи равны);

- среда является проводник, если $\varepsilon \ll 60\lambda_0\sigma$ (ток проводимости превышает ток смещения).

б) В соответствии со вторым критерием классификации сред идет разделение сред на изотропные и анизотропные. В изотропных средах вектор \bar{B} параллелен вектору \bar{H} , а вектор \bar{D} - вектору \bar{E} , абсолютные магнитная μ_α и диэлектрическая ε_α проницаемости сред являются скалярными величинами. В анизотропных средах магнитная и (или) диэлектрическая проницаемости сред являются тензорными величинами, а вектора индукций не параллельны соответствующим векторам напряженностей поля. Если тензором является магнитная проницаемость, то **анизотропию называют магнитной**. Если тензором является диэлектрическая проницаемость, то **анизотропию называют диэлектрической**. В частном случае, когда от нуля отличны только диагональные элементы и еще два первых элемента, среды называются **гиотропными**. Такой средой являются, например, ферриты и плазма. Иллюстрация данного критерия показана на рисунке 2.

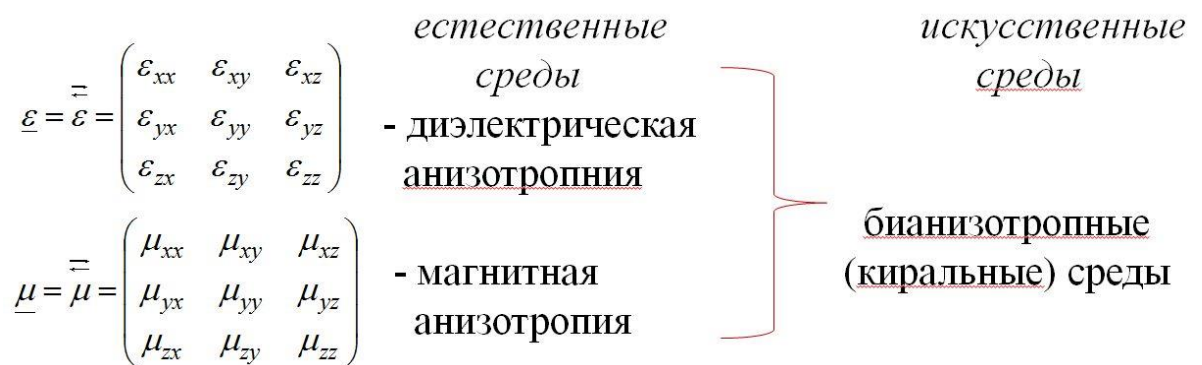


Рисунок 2. – Разделение сред по зависимости свойств среды от направления распространения волны

в) В соответствии с третьим признаком классификации среды делятся на **линейные** и **нелинейные**. Линейными называют среды, у которых ε, μ, σ не зависят от электромагнитного поля. В противном случае среды называются нелинейными.

Примером нелинейных сред является ионосфера, подвижность электронов которой зависит от напряженности электромагнитного поля.

3.1.2 Плоские однородные волны в изотропных средах без потерь

При рассмотрении электромагнитных полей, создаваемых элементарными вибраторами, было выяснено, что порождаемые ими волны являются сферическими, т.е. их поверхности равных фаз представляют собой

концентрические сферы с центром в середине вибратора. Было отмечено, что в дальней зоне волна представляет собой локально плоскую (т.е. не имеет радиальной составляющей).

Для упрощения решения многих практически важных задач вводят понятие плоской волны. **Плоской волной** называют волну, фронт которой имеет бесконечную протяжённость, причём амплитуды и фазы векторов поля во всех точках фронта одинаковы. **Волна** называется **однородной**, если ее амплитуда постоянна во всех точках фазового фронта, и **неоднородной**, если ее амплитуда зависит от координат точек фазового фронта. (**Фазовым фронтом** волны называется поверхность, проходящую через точки с одинаковыми фазами).

Иллюстрация процесса распространения плоской волны приведено на рисунке 3.

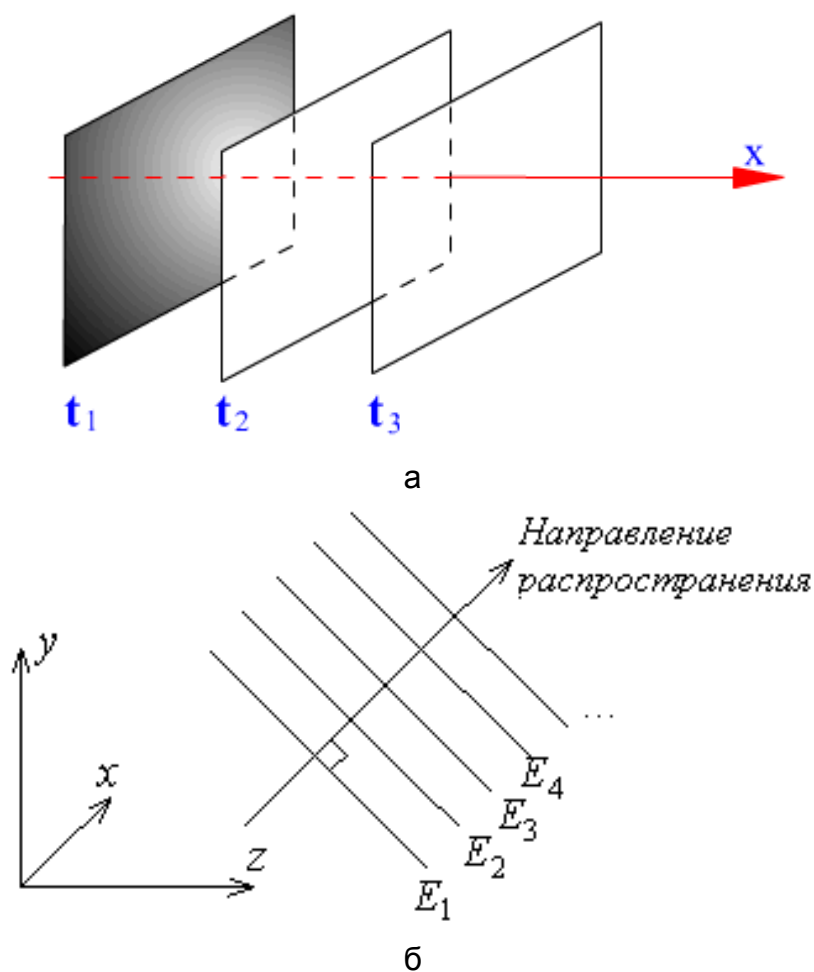


Рисунок 3. – Процесс распространения плоской волны

Плоских волн в природе не существует, т.к. потребовался бы бесконечно протяжённый источник. Однако на большом удалении от источника волна может считаться локально плоской.

Любая волна характеризуется такими величинами как фазовая скорость, длина волны и направление распространения. Данные параметры были проиллюстрированы на рисунке 2 п.1.3.

Фазовая скорость распространения плоской волны, т.е. скорость движения фазового фронта, в однородной среде без потерь определяется соотношением:

$$\vec{v}_\phi = \vec{i}_z \frac{\omega}{k_\beta} = \vec{i}_z \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \vec{v}_0. \quad (2)$$

Данная скорость, находящаяся из уравнения движения любой точки на фазовом фронте, фаза которого неизменна.

Длина волны, т.е. расстояние между двумя фазовыми фронтами волны, различающимися на 2π , определяется формулой:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{|\vec{v}_0|}{f}. \quad (3)$$

Назовем перпендикуляр к фронту волны **лучом**. Его направление обозначим ортом $\vec{i}_\perp = \vec{i}_z$, т.е. оно совпадает с направлением фазовой скорости \vec{v}_ϕ . Введем **волновой вектор** \vec{k} :

$$\vec{k} = \vec{i}_\perp \tilde{k} = \vec{i}_\perp (k_\beta - ik_\alpha), \quad (4)$$

совпадающий с направлением луча и равный по величине коэффициенту распространения волны в данной среде. В соотношении (4) k_β - коэффициент фазы; k_α - коэффициент затухания.

Перейдем теперь к рассмотрению характеристик плоской однородной волны в среде без потерь на примере идеального диэлектрика ($\mu_a = \mu_0$), полагая, что плоская волна распространяется вдоль оси z . При таком допущении и отсутствии источников сторонних токов уравнения Максвелла могут быть сведены к двум независимым системам дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_a E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -i\mu_a H_y \end{aligned} \right\}, \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial z} &= i\omega\varepsilon_a E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\mu_a H_x \end{aligned} \right\}, \quad (5b)$$

каждая из которых описывает соответствующую плоскую волну: (E_x, H_y) либо (E_y, H_x) . Причем данные системы описывают взаимно независимые поля, в каждом из которых векторы поля \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны.

Дальнейшие рассуждения будем проводить для системы (5a). Решение будем осуществлять путем сведения системы к однородному уравнению Гельмгольца относительно комплексной амплитуды вектора \dot{H}_y :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y = 0. \quad (6)$$

Поскольку для диэлектриков $\mu = 1$, то волновое число, входящее в данное соотношение, может быть переписано в виде:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu} = k_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad (7)$$

где $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ волновое число в вакууме.

Подставляя выражение (7) в определения длины волны (3) и фазовой скорости (2), можно сделать вывод, что в диэлектрике без потерь длина волны и фазовая скорость уменьшаются в $\sqrt{\varepsilon}$ раз по сравнению с аналогичными параметрами для вакуума.

Несложно убедиться, что частным решением уравнения (6) является

$$\dot{H}_y(z) = \dot{H}_y(0) \cdot \exp[-ikz]. \quad (8)$$

Выражение (8) описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z .

Найдём соотношение между поперечными компонентами E_x и H_y в плоской волне. Из первого уравнения (5а) имеем

$$E_x(z) = -\frac{\omega \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}}{\omega \varepsilon_a} \dot{H}_y(z) = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a} \cdot \dot{H}_y(z). \quad (9)$$

Величина $\sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ имеет размерность сопротивления и называется **волновым (характеристическим) сопротивлением среды**. Оно характеризует отношение ортогональных составляющих напряжённости электрического и магнитного поля. Для идеального диэлектрика волновое сопротивление среды чисто вещественно и определяется соотношением:

$$W = Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ [Ом]}. \quad (10)$$

Вещественный характер Z_c означает, что вектора \bar{E} и \bar{H} имеют одинаковую фазу. Вектор Пойнтинга, характеризующий направление распространения волны и величину плотности потока мощности, является вещественным

$$\bar{\Pi} = 0.5 \cdot [\bar{i}_x \cdot \dot{E}_x, \bar{i}_y \cdot \dot{H}_y^*] = \bar{i}_z \frac{E_x^2}{Z_c}. \quad (11)$$

Здесь $E_x = 0.707 \cdot |\dot{E}_x|$ - действующее значение.

Таким образом, имеется только активный поток энергии в направлении оси Oz . Плотность потока энергии не зависит от координат и от частоты. Скорость распространения энергии равна фазовой скорости.

Из простых физических соображений очевидно, что плоскую волну можно создать только в ограниченной части пространства.

3.1.3 Плоские волны в средах с потерями. Дисперсия электромагнитных волн

Для реальных сред воздействие электромагнитного поля вызывает два вида потерь в среде. **Потери первого вида** обусловлены **проводимостью** материала. Данные потери характерны для металлов и хороших проводников, а также для диэлектриков на низких частотах и в стационарных полях. **Потери второго вида** представляют собой **поляризационные** (диэлектрические или магнитные) потери, объясняемые трением при смещении заряженных частиц вещества в переменном электрическом поле или в магнитных материалах при перемагничивании. В результате наблюдается явление линейного диэлектрического (соответственно магнитного) гистерезиса, отставание по фазе векторов электрического \vec{D} (соответственно магнитного \vec{B}) смещения от вектора напряженности электрического \vec{E} (магнитного \vec{H}) поля. Отставанию по фазе соответствует комплексная (диэлектрическая или магнитная) проницаемость с отрицательной мнимой частью в материальных уравнениях. Данные проницаемости, напомним, могут быть представлены в виде:

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - i\epsilon''_a = \epsilon'_a (1 - i \operatorname{tg} \delta^\epsilon), \quad \tilde{\mu}_a = \mu'_a - i\mu''_a = \mu'_a (1 - i \operatorname{tg} \delta^\mu), \quad (12)$$

в которых, напомним, $\operatorname{tg} \delta^\epsilon = \frac{\epsilon''_a}{\epsilon'_a}$, $\operatorname{tg} \delta^\mu = \frac{\mu''_a}{\mu'_a}$ - соответственно тангенс угла

диэлектрических и магнитных потерь.

Рассмотрим более подробно потери, обусловленные проводимостью среды. В этом случае волновое число в диэлектрике с потерями будет комплексной величиной:

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a} = k_0 \cdot \sqrt{\tilde{\epsilon}} = k_0 \cdot \sqrt{\epsilon - i60\lambda_0\sigma}. \quad (13)$$

Представляя комплексный коэффициент распространения (13) через коэффициенты затухания и фазы, решение уравнения Максвелла принимает вид

$$\dot{H}(z) = \dot{H}_y(0) \cdot \exp[-\alpha z] \exp[-i\gamma z]. \quad (14)$$

Первый экспоненциальный множитель описывает поглощение энергии в среде за счет электрических и магнитных потерь, т.е. затухание волны. Второй экспоненциальный множитель указывает на волновой характер поля, на его движение.

Для реальных диэлектриков, у которых магнитные потери отсутствуют, а тангенс угла диэлектрических потерь хотя и мал, но имеет конечную величину, выражения для составляющих комплексного коэффициента распространения могут быть записаны в виде:

$$k_\beta = k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad k_\alpha = \frac{k}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega}{2} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \operatorname{tg} \delta. \quad (15)$$

Фазовая скорость в диэлектрике определяется формулой:

$$v_{\phi} = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k_{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (16)$$

Конечная величина тангенса диэлектрических потерь обуславливает сдвиг фаз между векторами \vec{E} и \vec{H} , и, соответственно комплексный характер как волнового сопротивления

$$W = Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a (1 - i \operatorname{tg} \delta)}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \exp\left(i \frac{\delta}{2}\right), \quad (17)$$

так и вектора Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \vec{i}_z \frac{E_x^2}{2|Z_c|} \exp(-2\alpha z) \exp\left(i \frac{\delta}{2}\right). \quad (18)$$

Появление реактивной составляющей описывает тепловые потери в среде. Средняя плотность потока энергии, описываемая соотношением

$$\vec{\Pi}_{\text{ср}} = \operatorname{Re}(\vec{\Pi}) = \vec{i}_z \frac{E_x^2}{2|Z_c|} \exp(-2\alpha z) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad (19)$$

экспоненциально убывает вдоль оси Oz со скоростью

$$\vec{v}_v = \frac{\operatorname{Re}(\vec{\Pi})}{w_{\text{ср}}}, \quad (20)$$

где $w_{\text{ср}}$ - средняя объемная плотность энергии. Модуль волнового сопротивления $|Z_c|$ описывается выражением

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (21)$$

Из изложенного выше следует, что свойства плоской волны, распространяющейся в среде с проводимостью и без потерь, различны. Основное отличие состоит в том, что в среде без потерь параметры плоской волны одинаковы при любых частотах, а в среде с конечной проводимостью они зависят от частоты. Зависимость свойств волны от частоты называется **дисперсией**, а соответствующие **среды – диспергирующими**.

Для хороших проводников $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - i\sigma/\omega \approx -i\sigma/\omega$ и магнитные потери отсутствуют, т.е. $\tilde{\mu}_a = \mu_a$. Коэффициент распространения волны будет определяться соотношением

$$\tilde{k} = i\omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = i\omega \sqrt{-i \frac{\sigma}{\omega} \mu_a} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_a \sigma}. \quad (22)$$

Введем величину

$$d_0 = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_a\omega}} \quad (23)$$

и назовем ее **толщиной скин-слоя** (глубиной поверхностного проникновения, толщиной поверхностного слоя).

Коэффициент распространения и его составляющие, а также выражение для фазовой скорости с учетом формулы (23) могут быть записаны в виде

$$\tilde{k} = \frac{1+i}{d_0}, \quad k_\alpha = \frac{1}{d_0}, \quad k_\beta = \frac{1}{d_0}, \quad v_\phi = \omega d_0. \quad (24)$$

3.1.4 Поляризация плоских волн

Выше мы рассмотрели плоскую волну E_x, H_y , определенную системой (5а). Всё сказанное в полной мере относится и к плоской волне E_y, H_x , описываемой системой (5б). В каждой из этих волн вектор \vec{E} , изменяясь по гармоническому закону, всё время остаётся коллинеарным самому себе. **Волну**, вектор \vec{E} которой в процессе распространения лежит в неподвижной плоскости, называют **линейно поляризованной**, а плоскость, проходящую через направление распространения электромагнитной волны и вектор \vec{E} - **плоскостью поляризации**.

Источниками линейно поляризованной волны являются, например, либо электрический либо магнитный вибраторы.

Если вектор \vec{E} будет иметь две составляющие E_x и E_y , возбуждаемые, например, двумя взаимно перпендикулярными элементарными электрическим вибраторами, то сдвиг фаз между ними будет определяться фазовыми соотношениями токов, питающих вибраторы. В общем случае выражение для вектора \vec{E} для локально плоской волны в дальней зоне будет определяться выражением

$$\vec{E} = \vec{i}_x E_x \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{i}_y E_y \cos(\omega t - kz + \varphi_2), \quad (25)$$

в котором φ_1, φ_2 - начальные фазы составляющих E_x и E_y в точке $z = 0$ в начальный момент времени ($t = 0$).

В зависимости от соотношения амплитуд и фаз линейных составляющих волны различаются поляризацией. Так, если амплитуды составляющих вектора \vec{E} равны между собой, а начальные фазы отличаются друг от друга на величину $\pm \pi/2$, то волна такого типа называется **волной с круговой поляризацией**. При чем вектор \vec{E} , оставаясь неизменным по величине, вращается вокруг оси Oz с угловой частотой ω . В случае, если вращение осуществляется по часовой стрелке (при удалении волны от наблюдателя), то говорят, что волна имеет **правую круговую поляризацию**, в противном случае – **левую круговую поляризацию**.

Следует отметить, что всякую линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн круговой поляризацией с правым и левым направлением вращения одинаковой круговой частоты, что иллюстрируется рисунком 4.

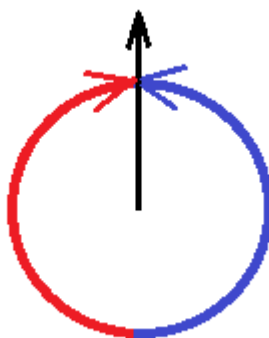


Рисунок 4. – Представление волны линейной поляризации суперпозицией двух волн круговой поляризации

При произвольном соотношении амплитуд и начальных фаз конец вектора \vec{E} в фиксированной точке пространства описывает эллипс. **Волны** такого типа называются **эллиптически поляризованными**.

Данные волны описываются параметрами поляризационного эллипса (см. рисунок 5):

- **коэффициентом эллиптичности** (коэффициентом равномерности поляризационного эллипса), равным отношению малой и большой полуосей эллипса

$$k_e = \frac{b}{a}, \quad (26)$$

- углом β_x (или β_y) наклона поляризационного эллипса к соответствующей оси;

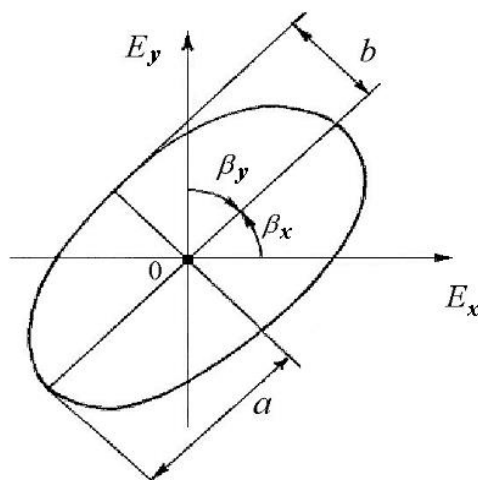


Рисунок 5 – Параметры поляризационного эллипса

- направлением вращения вектора \vec{E} .

Понятие линейной, круговой и эллиптической поляризации применимо не только для плоских волн. Например, сферические волны, создаваемые элементарным электрическим вибратором в дальней зоне, линейно поляризованы. Волны, создаваемые сложными излучателями, могут иметь круговую или эллиптическую поляризацию. В общем случае монохроматические волны всегда поляризованы.

3.2 Распространение волн в гиротропных средах

Плоские однородные волны в ферритах при подмагничивании. Резонансное поглощение. Особенности распространения электромагнитных волн в продольно намагниченном феррите. Особенности распространения электромагнитных волн в продольно намагниченном феррите.

3.2.1 Плоские однородные волны в ферритах при подмагничивании. Резонансное поглощение

Свойства анизотропных сред, как известно, зависят от направления распространения электромагнитной волны. Анизотропия в природе может быть либо магнитной, либо диэлектрической. Вещества, одновременно обладающие магнитной и диэлектрической анизотропией, получили название **бианизотропных** и созданы в конце 20 века искусственным путем включения в ферриты определенным образом ориентированных спиралек.

Особенности распространения волн будем проводить на примере ферритов и плазмы, обладающих соответственно магнитной и диэлектрической анизотропией.

Ферриты, относящиеся к классу ферритмагнетиков, представляют собой соединения оксида железа с оксидами других металлов и обладают высоким большим (до $10^7 \dots 10^8$ Ом•м) электрическим сопротивлением. Электродинамические свойства ферритов зависят от частоты, но изменяются в различных пределах. В диапазоне СВЧ на сантиметровых волнах величина относительной магнитной проницаемости приближенно равна единице. Рабочий диапазон частот ферритов - от 20МГц до 150ГГц. Для работы на разных частотах используются различные материалы.

В ненамагниченном состоянии ферриты представляют собой обычный диэлектрик, в котором магнитные моменты конгломерата областей ориентированы в различных направлениях. Механический и магнитный моменты, создаваемые вращением электрона вокруг своей оси соответственно под действием своей массы и действием заряда, направлены вдоль оси вращения в разные стороны. После приложения постоянного магнитного поля \vec{H} = ось вращения электрона ориентируется по направлению этого поля. Если ось вращения отклонить, она не сразу вернется в исходное положение, а будет

совершать так называемую прецессию вокруг исходного положения, напоминающую качанию оси волчка при ее отклонении от вертикали. Круговая частота прецессии зависит от величины постоянного магнитного поля и **гиромагнитного отношения** $\gamma = -2.21 \cdot 10^5$ Гц/(А•м), связывающего заряд и массу электрона:

$$\omega_M = |\gamma| H_0, \quad (1)$$

Данная частота получила название частоты **гиромагнитного резонанса или частоты прецессии** и соответствует угловой скорости вращения электрона.

Если на феррит помимо постоянного поля воздействует высокочастотное магнитное поле гармонической волны

$$\vec{H} = H_0 \exp(i\omega t), \quad (2)$$

имеющее в общем случае круговую поляризацию, то ось вращения электрона будет отклоняться, если переменное магнитное поле будет действовать перпендикулярно данной оси. Под действием переменного магнитного поля будут происходить вынужденные колебания спинов электронов, а амплитуда этих колебаний будет тем большей, чем ближе частота ω к круговой частоте прецессии ω_M . При совпадении частот ω и ω_M наступает явление **ферромагнитного резонанса**, играющее важную роль в применении ферритов. При этом вращающийся вектор переменного магнитного поля остается неподвижным относительно прецессирующего магнитного момента. Энергия, подводимая от высокочастотного магнитного поля, рассеивается в виде тепла в кристаллической решетке феррита, т.е. поглощается. Система проявляет себя подобно резонансному контуру в теории цепей. Свойства ферритов и условия возбуждения в нем резонансов проиллюстрированы таблицей 1.

Таблица 1 – Условия возбуждения резонансов в ферритах

| Без подмагничивания | Воздействие поля подмагничивания \vec{H}_0 | Воздействие поля подмагничивания \vec{H}_0 и переменного высокочастотного поля $\vec{H}_\sim = H_0 \exp(i\omega t)$ |
|---------------------|--|--|
| Обычный диэлектрик | Гиромагнитный резонанс на частоте ω_M Условие: ω_M = угловая скорость вращения электрона | Ферромагнитный резонанс Условие: $\omega = \omega_M$ = угловая скорость вращения электрона Энергия, подводимая от высокочастотного магнитного поля, рассеивается в виде тепла в кристаллической решетке феррита, т.е. поглощается. Система как резонансный контур в теории цепей |

Математически указанные физические явления находят свое отражение в тензорном характере магнитной проницаемости намагниченного феррита:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & -ia & 0 \\ ia & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\mu_x = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2} \right)$, (4a) $a = \mu_0 \frac{\omega_M \omega_0}{\omega^2 - \omega_M^2}$. (4б)

Случай $\omega_M = \pm\omega$ в соотношениях (4), т.е. совпадение частот вращения, соответствует явлению ферромагнитного резонанса. Входящая в указанные соотношения частота ω_0 связана с магнитной восприимчивостью среды χ^M : т.е. откликом среды на прилагаемое внешнее магнитное поле:

$$\omega_0 = |\gamma| \mu_0 \chi^M H_{=} = |\gamma| \mu_0 (\mu - 1) H_{=}. \quad (5)$$

3.2.2 Особенности распространения электромагнитных волн в продольно намагниченном феррите

Влияние направление распространения волны относительно направления поля подмагничивания на структуру волны в феррите рассмотрим на примере двух предельных случаев – распространению волны вдоль определенной оси (вдоль постоянного магнитного поля) и перпендикулярно ей. Все остальные возможные комбинации можно получить, используя принцип суперпозиции.

Начнем со случая, когда высокочастотное переменное магнитное поле линейной поляризации является продольным. Предположим, что

$$\vec{H}_{=} = \hat{i}_z H_{=}. \quad (6)$$

Геометрия эксперимента представлена рисунком 1.

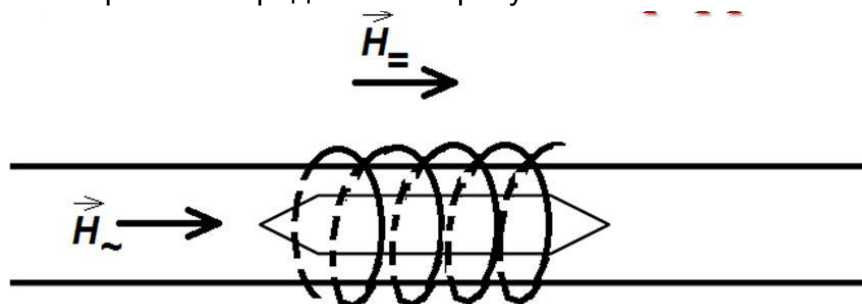


Рисунок 1. – Геометрия задачи о распространении электромагнитной волны в продольно намагниченном феррите

В этом случае $\partial/\partial x = \partial/\partial y \equiv 0$, $E_z = 0$, $H_z = 0$, и отличные от нуля уравнения Максвелла образуют систему:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon E_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = i\omega E_y, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega(\mu_x H_x - iaH_y), \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega(\mu_x H_y + iaH_x). \quad (7b)$$

На основе решения системы уравнений (7) получаются выражения, описывающие коэффициенты распространения волн (волновые числа) и волновые сопротивления соответственно:

$$k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon(\mu_x \pm a)}, \quad Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_x \pm a}{\varepsilon}}. \quad (8) \quad (9)$$

Первое волновое число (с плюсом, индекс 1) соответствует волне круговой поляризации с левым направлением вращения, второе волновое число (слагаемое с минусом, индекс 2) – волне с правым направлением вращения, т.е. волна линейной поляризации представляется в виде суперпозиции двух волн круговой поляризации. Причем, если в среде существуют обе волны круговой поляризации с равными амплитудами, то компоненты суммарного электромагнитного поля обладают следующими свойствами:

- компоненты напряженности магнитного поля колеблются в фазе, что соответствует линейной поляризации поля (суммарная компонента магнитного поля имеет ту же поляризацию, что и исходная волна);

- электрическое поле суммарной волны будет эллиптически поляризованным, поскольку $Z_1 \neq Z_2$, а, следовательно, амплитуды волн левого и правого направлений вращения различны (суммарная компонента электрического поля изменяет поляризацию с линейной на эллиптическую).

Угол наклона вектора \vec{H} и оси поляризационного эллипса электрического поля определяется формулой:

$$\theta = \arctg\left(\frac{H_y}{H_x}\right) = \theta' z, \quad (9)$$

где $\theta' = \frac{k_1 - k_2}{2}$ - постоянная Фарадея, характеризующая угол поворота поляризационного эллипса на единицу длины пути. Явление поворота поляризационного эллипса в зависимости от пройденного волной расстояния получило название эффекта Фарадея, а среды, в которых происходит данный эффект, получили название гиротропных, т.е. вращающихся.

Направление вращения плоскости поляризации зависит от соотношения величины постоянного магнитного поля и величины поля, соответствующего резонансу $H_{\text{рез}}$, определяем по аналогии с выражением (1):

$$H_{\text{рез}} = \frac{\omega}{|\gamma|}. \quad (10)$$

Различие коэффициентов распространения волн с левым и правым направлением вращения приводит к тому, что различаются и связанные с ними фазовые скорости:

$$v_{\phi 1,2} = \frac{\omega}{k_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_{1,2}}}, \quad (11)$$

в которых магнитные проницаемости волн с левым и правым направлением вращения описываются формулами:

$$\mu_{1,2} = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_m \pm \omega} \right). \quad (12)$$

Графики зависимостей величин относительной магнитной проницаемости для волн с левым и правым направлением вращения приведены на рисунке 2.

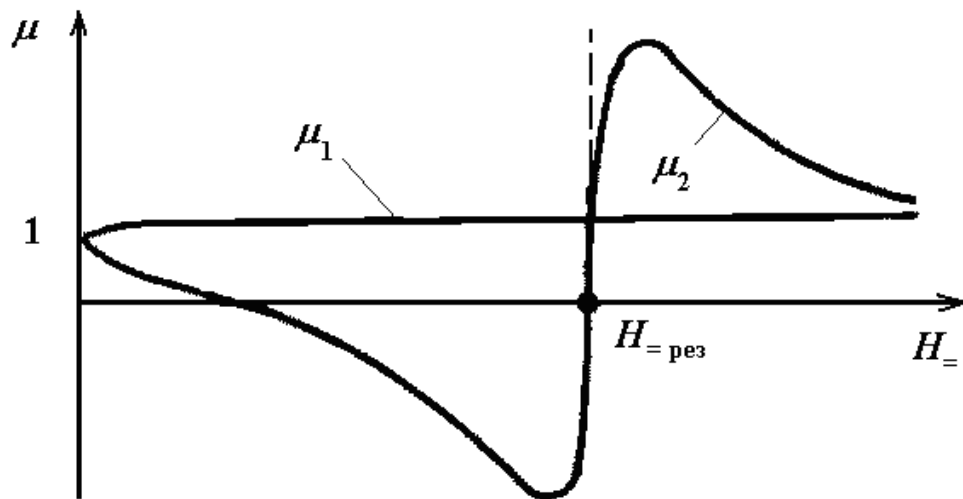


Рисунок 2. – Зависимость свойств среды от направления вращения волн круговой поляризации

Анализ соотношений (11) и рисунка 2 показывает, во-первых, что при совпадении направлений распространения волны и поля подмагничивания резонансное поглощение при ферромагнитном резонансе испытывает волна правого направления вращения (ее фаза обращается в нуль). Если изменить направление постоянного поля на противоположное, то изменится знак у коэффициента α , и резонансное поглощение будет испытывать волна левого направления вращения. Во-вторых, изменением величины ω_0 , т.е. постоянного магнитного поля, можно осуществлять управление требуемым образом параметрами феррита.

Следующая особенность - намагниченный феррит является невзаимной средой: из положения *A* (см. рисунок 3) вектор при движении волны в прямом направлении поворачивается в положение *B*, а при обратном – не возвращается в

А, а, продолжая вращаться в ту же сторону, приходит в положение С. Таким образом, *поле в гиротропной среде не подчиняется принципу взаимности.*

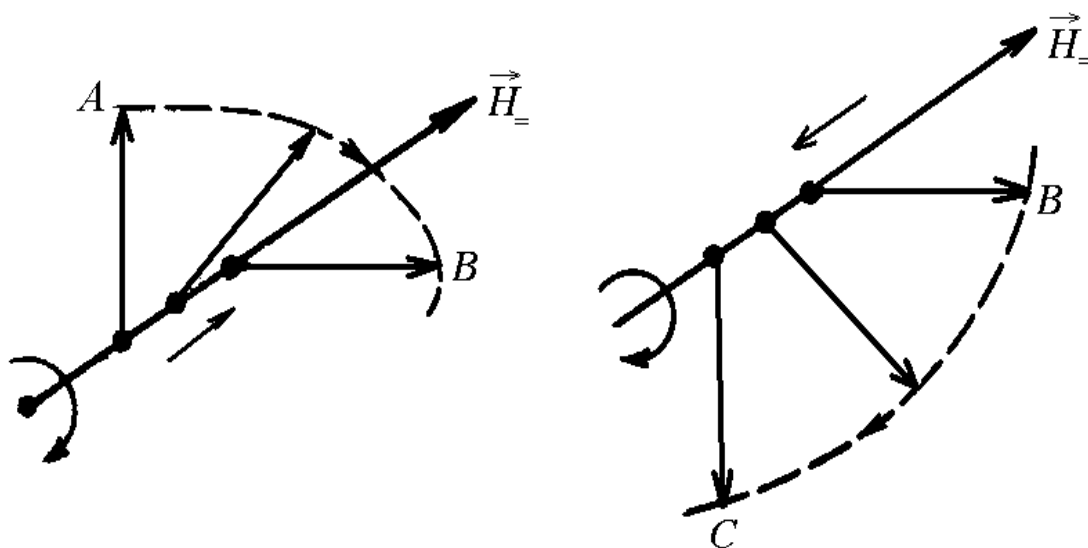


Рисунок 3 – Пояснение эффекта невзаимности подмагниченного феррита

В намагниченных ферритах, имеющих конечные размеры в поперечном сечении, наблюдается **эффект смещения поля**. Данный эффект возникает при отрицательных значениях μ_2 (нижний знак в формуле (14)), когда коэффициент распространения k_2 волны с правым направлением вращения, как несложно заметить из выражения (8), становится чисто мнимой величиной. Это соответствует волнам с экспоненциально убывающей вдоль оси Oz амплитудой, уменьшающейся не из-за тепловых потерь в среде, а вследствие эффекта отражения, вытеснения поля средой. При этом распространение волн с правым направлением вращения в феррите становится невозможным. При конечных в поперечном сечении размерах феррита волна данной поляризации вытесняется и распространяется вне ферритовой среды. Волны с левым направлением вращения при этом распространяется в ферритовой среде нормально.

3.2.3 Особенности распространения электромагнитных волн в поперечно намагниченном феррите

Рассмотрим второй частный случай ориентации векторов поля подмагничивания и поля высокочастотной вол, когда данные вектора взаимно перпендикулярны. Геометрия задачи для него показана на рисунке 4.

Как в ранее рассмотренном случае скалярная система уравнений Максвелла также распадается на две группы независимых уравнений, каждая из которых описывает отдельную волну:

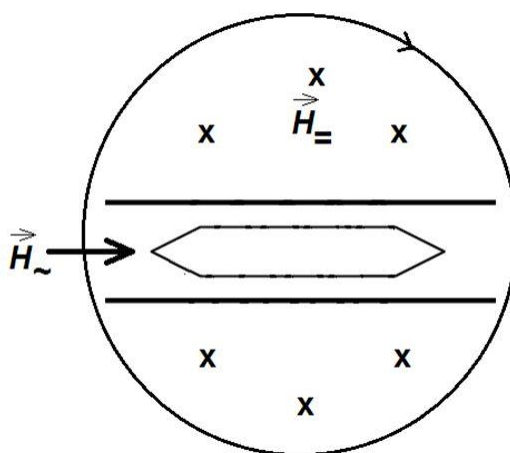


Рисунок 4. - Геометрия задачи о распространении электромагнитной волны в поперечно намагниченном феррите

$$\begin{cases} E_{0x} = 0, \\ kH_{0z} = \omega \varepsilon E_{0y}, \\ kH_{0y} = -\omega \varepsilon E_{0z}, \end{cases} \quad (13a) \quad \begin{cases} \mu_x H_{0x} = iaH_{0y}, \\ -kE_{0z} = \omega (iaH_{0x} + \mu_x H_{0y}), \\ kE_{0y} = \omega \mu H_{0z}. \end{cases} \quad (13b)$$

Система (13а) описывает волну, ничем не отличающуюся от обычной плоской волны в изотропной среде с параметрами ε , μ_0 (обыкновенная волна), имеющую магнитную составляющую, параллельную \vec{H}_0 .

Вторая система уравнений описывает волну, которая, в отличие от обыкновенной, имеет продольную составляющую магнитного поля (необыкновенная волна). Из первого уравнения системы (13б) следует, что магнитное поле поляризовано эллиптически в плоскости xOy , перпендикулярной \vec{H}_0 . В этом явлении проявляются гиротропные свойства феррита.

Поскольку относительная магнитная проницаемость необыкновенной волны μ_{\perp} , определяемая соотношением

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x}, \quad (14)$$

отличается от соответствующего параметра обыкновенной волны, то данные волны будут иметь и различные фазовые скорости, причем фазовая скорость необыкновенной волны будет зависеть от напряженности постоянного магнитного поля. При $\mu_x = 0$ $\mu_{\perp} \rightarrow \infty$ $v_{\text{необ}} = 0$, т.е. необыкновенная волна распространяться не будет. В этом случае наблюдается поперечный гиромангнитный резонанс. Для сравнения влияния ориентации векторов полей подмагничивания и высокочастотного магнитного поля на условия возбуждения резонансов на рисунке 5 зависимости свойств среды от величины поля

подмагничивания. При этом кривые 1, 2 соответствуют случаю параллельной ориентации векторов, а кривые 3, 4 – случаю перпендикулярной ориентации. Кривые 2, 4 иллюстрируют свойства среды для обыкновенной волны и волны с левым направлением вращения. Кривые 1 и 3 – для волны с правым направлением вращения и необыкновенной волны.

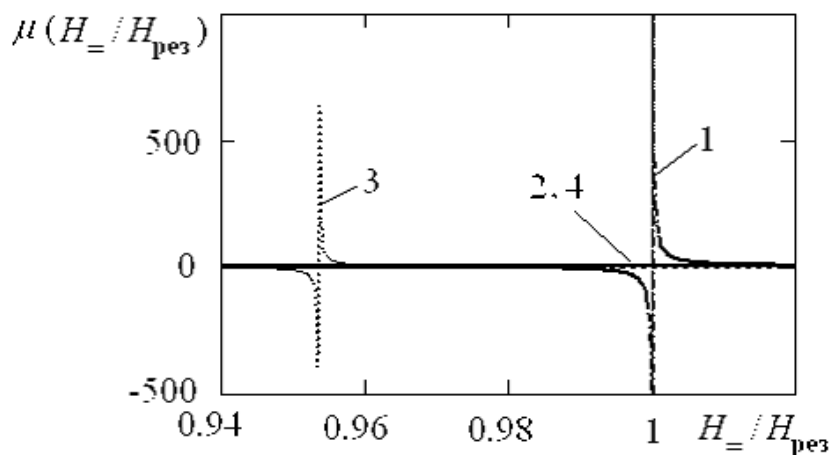


Рисунок 5. – Влияние ориентации векторов магнитных полей на величину возбуждаемых резонансов

Анализ данного рисунка позволяет сделать следующие выводы. Резонансы наблюдаются только для волны с правым направлением вращения (в случае параллельной ориентации полей) и для необыкновенной волны. Поперечный ферромагнитный резонанс обеспечить легче, поскольку требуемая напряженность поля на 4% меньше, чем для ферромагнитного резонанса при продольной ориентации полей. Для обыкновенной волны и волны с левым направлением вращения свойства феррита не зависят от величины поля подмагничивания.

Помимо поперечного резонанса при распространении волны в поперечном полю подмагничивания направлении наблюдается эффект зависимости поляризации волны от пройденного волной расстояния (эффект Коттона-Муттона), обусловленный неравенством фазовых скоростей обыкновенной и необыкновенной волн, т.е. сдвига фаз между ними:

$$\psi = (k_{\text{необ}} - k_{\text{об}})x. \quad (15)$$

При распространении волны поляризация суммарной волны электрического поля будет либо линейной, если фазовый сдвиг равен целому числу π , т.е. $\psi = n\pi$, либо эллиптической (во всех остальных случаях). Частный случай эллиптической поляризации – круговая поляризация – возможен при равенстве амплитуд $E_{0z} = E_{0y}$ (когда в точке $x = 0$ вектор напряженности электрического поля исходной волны направлен под углом 45° по отношению к оси Oy) в точках, где $\psi = (2n + 1)\pi / 2$.

3.3 Волновые явления вблизи границы раздела сред

Нормальное падение плоских волн на границу раздела сред. Наклонное падение плоских волн на границу раздела сред. Двойное преломление на границе раздела сред. Плоские неоднородные волны на границе раздела сред. Приближенные граничные условия Леонтовича.

3.3.1 Нормальное падение плоских волн на границу раздела сред

При распространении плоской электромагнитной волны в пространстве, представляющем собой области с различным значением параметров $\tilde{\varepsilon}_a$, $\tilde{\mu}_a$, σ и границами раздела в виде плоскостей, возникают отраженные и преломленные волны.

Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны **коэффициентами отражения и преломления**:

$$\dot{R}_E = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}, \quad \dot{T}_E = \dot{E}_{\text{пр}} / \dot{E}_{\text{пад}}. \quad (1)$$

Коэффициенты отражения и преломления обобщенно называются **коэффициентами Френеля** и находятся на основании граничных условий на плоскостях, разделяющих среды с различными значениями электродинамических параметров. При рассмотрении материалов лекции будем представлять волны в виде лучей. Это допустимо, поскольку плоскую границу можно считать бесконечно протяженной.

Для математической формулировки данных коэффициентов введем несколько понятий.

Плоскостью падения называют плоскость, в которой лежат направление распространения падающей волны и нормаль к поверхности раздела сред в точке падения.

В зависимости от ориентации вектора напряженности электрического поля в волне относительно границы раздела сред линейно поляризованные плоские волны условно делятся на вертикально- и горизонтально-поляризованные. Волну называют **вертикально-поляризованной** (поляризованной в плоскости падения, параллельно поляризованная волна), если вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости падения (рисунок 1,а). Если же вектор напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости падения и, следовательно, параллелен границе раздела, то волна называется **горизонтально-поляризованной** (или поляризованной нормально к плоскости падения, волна перпендикулярной поляризации) (рисунок 1,б). На рисунке 1,в показана геометрия задачи в объеме.

Направления распространения падающей, отраженной и прошедшей волн, отсчитываемые от нормали к поверхности раздела, связаны между собой законами Снеллиуса (Снелля):

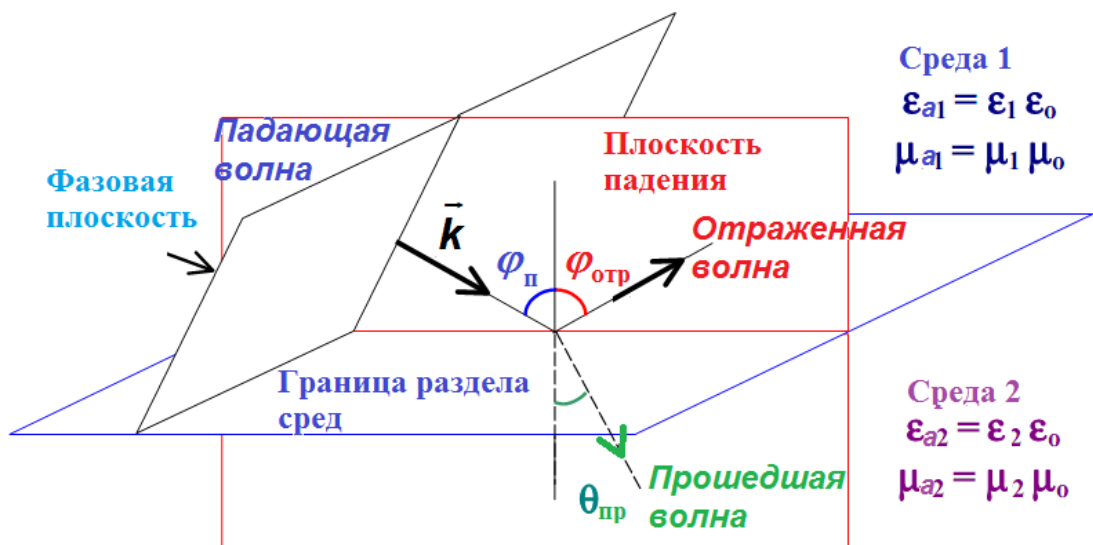
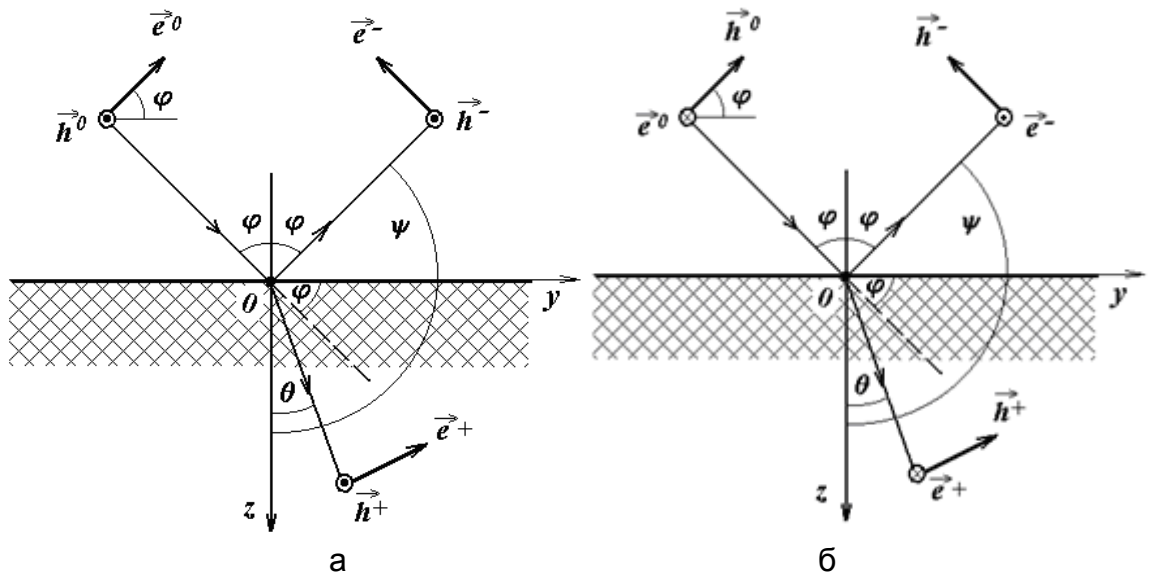
- угол падения равен углу отражения (1-й закон Снеллиуса);

- синусы углов падения и преломления относятся как постоянные распространения в соответствующих средах (2-й закон Снеллиуса):

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (2)$$

Для непоглощающих сред закон синусов записывается в виде

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{v_{\phi 1}}{v_{\phi 2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}}{\sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}, \quad (3)$$



в

Рисунок 1 – Геометрия задачи

где n_{12} - относительный коэффициент преломления (в оптике данный параметр определяется экспериментально). Из закона синусов следует, что отношение синусов углов падения и преломления равно постоянной величине, зависящей только от параметров граничащих сред.

С точки зрения электродинамики законы Снеллиуса – следствия уравнений Максвелла и связывают между собой фазовые скорости распространения волн в средах на границе раздела.

Для нахождения соотношения между амплитудами векторов электромагнитного поля падающей, отраженной и прошедшей волн используем граничные условия на границе раздела сред – плоскости $z = 0$. Записанные относительно тангенциальных компонент полей:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}, \quad \dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau} \quad \text{при } z = 0. \quad (4)$$

Приравнявая на границе раздела соотношения, описывающие электрические и магнитные поля, получаем выражения для полного поля:

$$\dot{E}_{\text{хпад}} + \dot{E}_{\text{хотр}} = \dot{E}_{\text{хпр}}, \quad \frac{\dot{E}_{\text{хпад}}}{W_1} - \frac{\dot{E}_{\text{хотр}}}{W_1} = \frac{\dot{E}_{\text{хпр}}}{W_2}, \quad (5)$$

в которых W_1, k_1, W_2, k_2 - соответственно волновые сопротивления и коэффициенты распространения в первой и во второй средах.

В частном случае нормального падения волны, т.е. $\varphi = 0$, разделив левые и правые части равенств (5) на амплитуду падающей волны и учитывая обозначения (1), получаем систему из двух линейных алгебраических уравнений:

$$1 + \dot{R} = \dot{T}, \quad \frac{1}{W_1} - \frac{\dot{R}}{W_1} = \frac{\dot{T}}{W_2}, \quad (6)$$

решая которую, получаем

$$\dot{R} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}, \quad \dot{T} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}. \quad (7)$$

Таким образом, коэффициенты Френеля при нормальном падении волны не зависят от поляризации.

3.3.2 Нормальное и наклонное падение плоских волн на границу раздела сред. Двойное лучепреломление

При наклонном падении волны появляется зависимость также и от взаимной ориентации плоскости поляризации и плоскости падения.

В случае параллельной (вертикальной) поляризации коэффициенты Френеля будут определяться соотношениями:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{W_1 \cos \varphi - W_2 \cos \theta}{W_1 \cos \varphi + W_2 \cos \theta}, \quad \dot{T}_{\parallel} = \frac{2W_2 \cos \varphi}{W_1 \cos \varphi + W_2 \cos \theta}. \quad (8)$$

В случае перпендикулярной (горизонтальной) поляризации данные коэффициенты принимают вид:

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{W_2 \cos \varphi - W_1 \cos \theta}{W_2 \cos \varphi + W_1 \cos \theta}, \quad \dot{T}_{\perp} = \frac{2W_2 \cos \varphi}{W_2 \cos \varphi + W_1 \cos \theta}. \quad (9)$$

Рассмотрим ряд частных случаев, полезных в практическом использовании.

Пусть вторая среда является идеальным металлом ($\sigma \rightarrow \infty$). В этом случае электрическое поле во второй среде, как уже отмечалось при изучении граничных условий, существовать не может, следовательно, коэффициенты прохождения T в случаях обеих поляризаций равны нулю. Соотношения (8), (9) принимают вид:

$$\dot{R}_{\parallel} = 1, \quad \dot{R}_{\perp} = -1, \quad \dot{T}_{\parallel} = \dot{T}_{\perp} = 0. \quad (10)$$

Анализ данных соотношений дает один очень важных вывод: отраженное электрическое поле перпендикулярно поляризованной волны после сдвинуто по фазе на π относительно падающего поля.

Второй частный случай: коэффициент отражения обращается в нуль. Физически это соответствует явлению полного прохождения волны во вторую среду. Угол падения, при котором возникает данное явление, называется углом Брюстера и определяется выражениями:

$$\operatorname{tg}(\varphi_{B\parallel}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \mu_2 \varepsilon_2 - \mu_1 \varepsilon_1}}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_{B\perp}) = \sqrt{\frac{\mu_2 \mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2}}. \quad (10a) \quad (10b)$$

Несложно заметить, что угол Брюстера не определен в случае немагнитных сред ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) при перпендикулярной поляризации и при параллельной поляризации в случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Таким образом, от границы раздела обычных диэлектриков перпендикулярно поляризованная волна отражается при любых углах падения.

На рисунке 2 показана структура электромагнитного поля вблизи границы раздела сред для двух значений углов падения волны, На рисунке 2,а показан случай падения волны не под углом Брюстера, а на рисунке 2,б – под углом Брюстера. Слева от вертикальной границы раздела сред размещается среда, из которой приходит падающая волны. Справа размещается среда, куда волна может пройти через границу раздела сред.

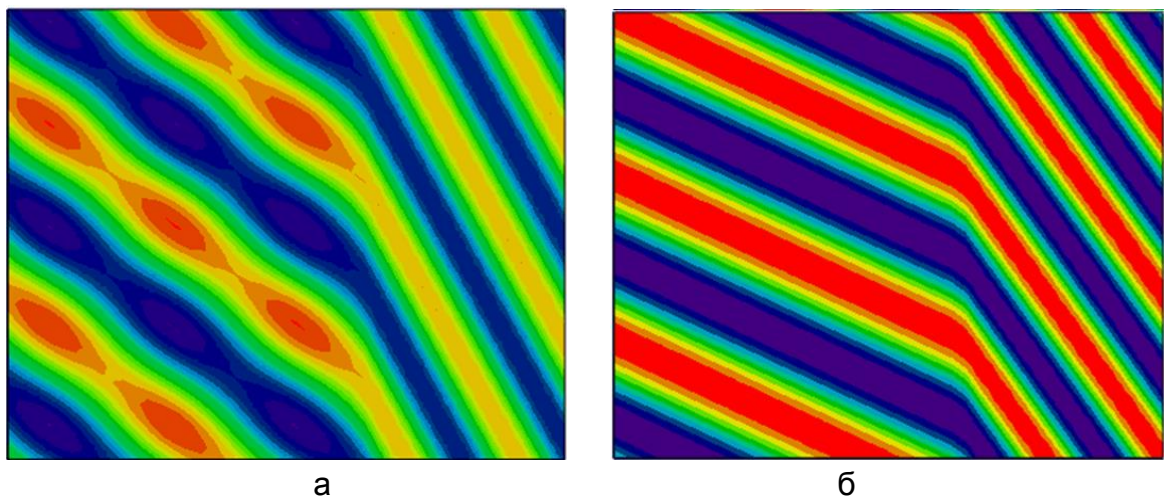


Рисунок 2 – Структура электромагнитного поля вблизи границы раздела сред

Анализ данного рисунка показывает, что при падении волны под углом Брюстера отсутствуют отраженная волна. Вследствие этого в первой среде не наблюдаются узлы и пучности стоячей волны, появляющиеся при интерференции падающей и отраженной волн.

Третий случай – **падающая волна имеет круговую или эллиптическую поляризацию**. Как уже отмечалось выше, данные волны можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных плоских волн, одна из которых поляризована перпендикулярно, а другая – параллельно плоскости падения. Так как условия существования угла Брюстера для параллельной и перпендикулярной поляризаций различны, то соотношение между амплитудами перпендикулярной и параллельной составляющих в отраженной и прошедшей волнах будет иным, чем в падающей волне. Это приводит к изменению поляризации отраженной и прошедшей волн по сравнению с падающей.

Четвертый случай – полное отражение на границе раздела двух диэлектриков. Если первая среда является оптически более плотной ($n_2 < n_1$ или $\epsilon_1 > \epsilon_2$), то из второго закона Снеллиуса следует, что в этом случае всегда выполняется условие $\theta > \varphi$, следовательно, найдется такое значение угла падения, при котором преломленная волна пойдет параллельно границе раздела сред, т.е. под углом $\varphi = 90^\circ$. Данное критическое значение угла падения носит название критического угла или угла полного внутреннего отражения:

$$\varphi_{\text{кр}} = \arcsin(n_2 / n_1). \quad (11)$$

При углах падения $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$ преломленной волны в обычном понимании не существует, энергия падающей волны полностью отражается внутрь первой среды. Физически это означает, что вдоль поверхности раздела распространяется так называемая поверхностная волна, амплитуда которой убывает при удалении от границы раздела по экспоненте. Геометрия задачи показана на рисунке 3.

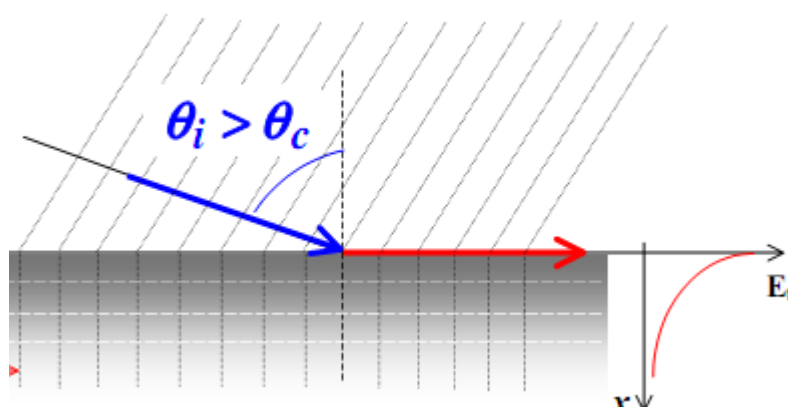


Рисунок 3. – Геометрия задачи для случая полного отражения на границе раздела сред (поверхностная волна)

Коэффициенты отражения для волн обеих поляризаций описываются соотношениями:

$$\begin{Bmatrix} R_{\parallel} \\ R_{\perp} \end{Bmatrix} = \mp \exp \left\{ 2i \operatorname{arctg} \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \\ \mu_1 / \mu_2 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}{\cos \varphi}} \right] \right\}. \quad (12)$$

Анализ данного выражения показывает, что модуль его равен 1. Коэффициент преломления становится комплексным, что означает затухание волны во второй среде по экспоненциальному закону. Данное явление широко используется в оптике при создании призм, изменяющих направление лучей.

Пятый частный случай - вторая среда является гиротропной. На предыдущей лекции, рассматривая свойства гиротропных сред, отмечалось, что при распространении волны в направлении, поперечном постоянному магнитному полю, волна расщепляется на две: обыкновенную и необыкновенную, имеющие различные фазовые скорости, а, следовательно, и различные коэффициенты преломления. Так как фазовые скорости последних различны, то соответствующие преломленные пути не совпадают. Данный **эффект** получил название **двойного лучепреломления**. Направления преломленных волн несложно найти, используя второй закон Снеллиуса

$$\frac{\sin \theta_{об}}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_{об}} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \theta_{нб}}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_{нб}}. \quad (13)$$

Аналогичные выводы могут быть сделаны и для среды с диэлектрической анизотропией.

3.3.3 Плоские неоднородные волны на границе раздела сред

Из изложенного выше ясно, что над поверхностью раздела, где существуют падающая и отраженная волны, результирующее поле представляет собой суперпозицию данных волн. При нормальном падении падающая и отраженная волны распространяются навстречу друг другу. В случае, когда вторая среда является идеально проводящая поверхность, результирующее поле описывается соотношениями:

$$\dot{E}_{\Sigma} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = 2iE_{\text{упад}} \sin kz. \quad (14a)$$

$$\dot{H}_{\Sigma} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}} = 2\dot{H}_{\text{хпад}} \cos kz. \quad (14б)$$

Таким образом, над проводящей плоскостью устанавливается волна с узлом электрического и пучностью магнитного полей на плоскости. В общем случае при $|\dot{E}_{\text{отр}}| < |\dot{E}_{\text{пад}}|$ над плоскостью раздела устанавливается комбинированная волна.

При наклонном падении плоской волны на границу раздела сред возникает более сложная структура результирующего поля, поскольку прямая и отраженная волны распространяются под углом друг к другу. В точках, где векторы \vec{E} прямой

и отраженной волн синфазны, находятся пучности электрического поля. В точках же, где векторы противофазны, будут располагаться узлы.

Выражение, определяющее положение n -го узла вдоль оси z («нуля» поля) волны, падающей под углом φ , имеет вид:

$$z_n = \frac{n\pi}{k \cos \varphi}. \quad (15)$$

Поверхности равных амплитуд параллельны плоскости раздела сред, а поверхности равных фаз, оставаясь плоскими, перпендикулярны ей. Над граничной поверхностью результирующая волна оказывается плоской, но неоднородной.

Так как векторы \vec{H} падающей и отраженной волн не параллельны друг другу, то можно говорить лишь об узлах и пучностях нормальных и тангенциальных составляющих. С узлами электрического поля совпадают узлы нормальной составляющей магнитного поля, а с пучностями – узлы касательной составляющей.

Выясним подробно свойства плоских неоднородных волн. Для этого падающую и отраженные волны разложим на составляющие, как показано на рисунке 4.

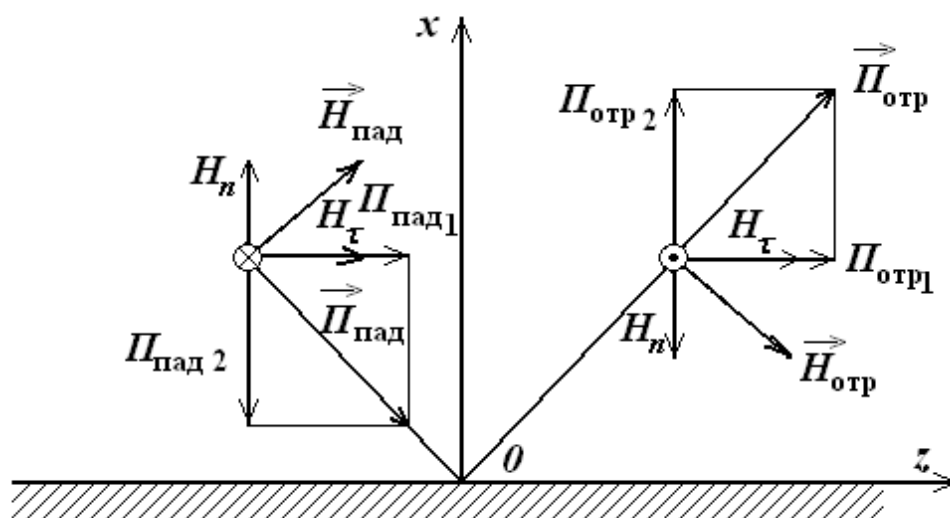


Рисунок 4 – Представление неоднородной волны в базис

При таком представлении падающей и отраженной волн поле над отражающей поверхностью можно рассматривать как результат интерференции двух пар бегущих волн. Одна пара – это волны, бегущие вдоль оси Ox навстречу друг другу. Известно, что сложение этих волн дает в результате стоячую волну. Следовательно, в направлении, перпендикулярном отражающей плоскости, энергия не передается. Другая пара волн распространяется в одну и ту же сторону и поэтому в этом направлении и осуществляется передача электромагнитной энергии. Суммарное поле описывается формулой:

$$\dot{E}_{y\Sigma}(x, z) = 2iE_{\text{упад}} \sin k_x x \exp(-ik_z z). \quad (16)$$

Здесь k_x, k_z - соответственно продольное и поперечное волновое число (коэффициенты фазы вдоль оси Ox и Oz). Структура результирующего поля вблизи металлической поверхности при отражении параллельно-поляризованной волны показана на рисунке 5.

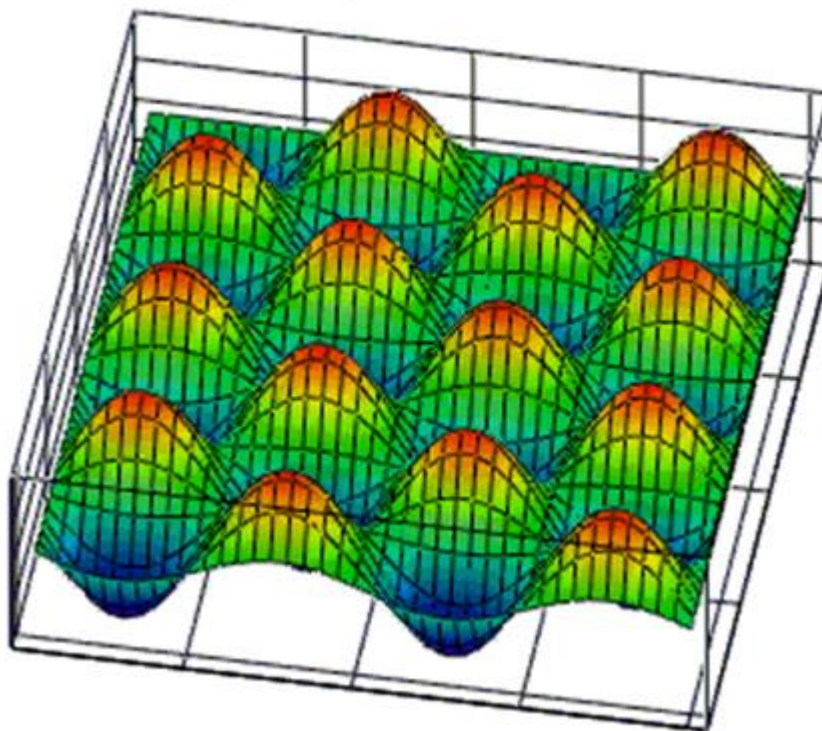


Рисунок 5. – Структура поля вблизи металлической поверхности

Таким образом, результирующее поле представляет собой волну, бегущую вдоль границы раздела, которая в данном случае играет роль направляющей системы. Однако в отличие от однородной волны амплитуда неоднородной волны изменяется от нуля до максимума в направлении, перпендикулярном границе раздела сред. Поскольку **волна** экспоненциально убывает по амплитуде при удалении от граничной поверхности (как бы прилипая к поверхности), то она называется **поверхностной**.

Экспоненциальное убывание амплитуды волны не связано с потерями во второй среде (они здесь не учитываются), а определяются тем, что в среднем энергия из первой среды во вторую не переходит.

3.3.4 Приближенные граничные условия Леонтовича

Во многих граничных задачах бывает необходимо найти поле только в одной области, где существуют падающая и отраженная волны. При строгом решении граничной задачи, чтобы учесть влияние второй среды необходимо рассматривать поле в обеих средах одновременно. Возникает справедливый

вопрос: нельзя ли задать такие граничные условия, которые дали бы возможность не рассматривать поле в той среде, где нам не нужно знать величину его? Как было показано М.А. Леонтовичем, такие граничные условия можно сформулировать, если вторая среда обладает большой проводимостью или большой проницаемостью. В этом случае, как было показано выше, поле во второй среде носит характер плоской волны, уходящей вглубь второй среды по нормали независимо от угла падения. При этом между векторами \vec{E} и \vec{H} во второй среде существует простая связь:

$$[\vec{n}, \vec{E}] = Z[\vec{n}, [\vec{H}, \vec{n}]]. \quad (17)$$

Нормаль \vec{n} должна быть направлена внутрь первой среды. Данное граничное условие называется **граничными условиями Леонтовича (или импедансными граничными условиями)**. Волновое сопротивление второй среды называется при этом поверхностным импедансом Z .

Импедансные граничные условия целесообразно применять лишь в тех случаях, когда из каких-либо предварительных соображений можно заранее найти приближенное выражение для поверхностного импеданса Z .

Так, в случае, когда вторая среда представляется собой металлическую поверхность конечной проводимости величины поверхностного импеданса определяется формулой:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_{a2}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a2}}{2\sigma}}(1+i). \quad (18)$$

Известны также выражения для тонких магнитоэлектрических слоев (одинарных и многослойных) на металлической поверхности, гофрированных структур, заполненных магнитоэлектриком.

Модуль 4. Регулярные линии передачи электромагнитной энергии

4.1 Уравнение электродинамики для направляемых волн

Уравнения электродинамики для направляемых волн. Полые волноводы.

4.1.1 Уравнения электродинамики для направляемых волн

Для передачи электромагнитной волны от источника к пункту назначения используются **линии передачи**. Поскольку данные линии осуществляют ведение волны по заданному пути, то они называются также **направляющими системами**, а волна называется **направляемой**. Направляющая **система** называется **регулярной**, если она прямолинейна и ее поперечное сечение неизменно по длине.

Основным требованием к направляющим системам является требование максимальной эффективности передачи энергии при экономической целесообразности линии. Это означает, что электромагнитная волна в устройствах и системах связи должна распространяться по определенному пути, не взаимодействуя без надобности с другими волнами, и достигать пункта назначения с наименьшими потерями.

Универсальных направляющих систем, удовлетворяющих данному требованию во всех диапазонах частот, не существует. Освоение каждого нового участка частотного спектра неизменно сопровождается созданием новых типов направляющих систем. Так, в настоящее время интенсивно осваиваются субмиллиметровый и оптический диапазоны.

Рассмотрим основные положения теории направляющих линий. Учитывая протяженность направляющей системы, при решении уравнений Максвелла целесообразно использовать обобщенную цилиндрическую ортогональную систему координат (u, v, z) , в которой образующая регулярной линии совпадает с осью Oz , как показано на рисунке 1. В этом случае зависимость поля в регулярной линии от поперечных координат u, v должна быть одинаковой во всех поперечных сечениях, а с изменением z могут изменяться лишь фазы и амплитуды векторов поля, т.е.

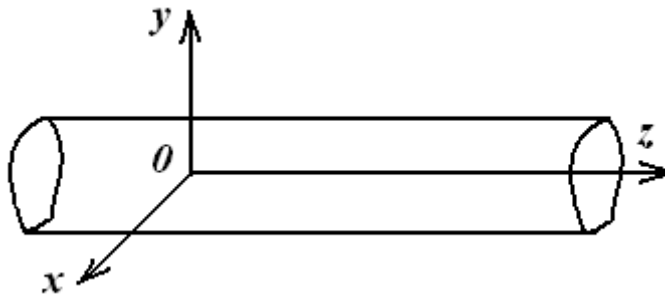


Рисунок 1. – Геометрия задачи о возбуждении волн в направляющей структуре



Рисунок 2 – Разложение вектора волнового числа в базис

$$\vec{E}(u, v, z) = \vec{E}_0(u, v) \exp(\pm \gamma z), \quad \vec{H}(u, v, z) = \vec{H}_0(u, v) \exp(\pm \gamma z). \quad (1)$$

В формулах (1) временная составляющая поля $\exp(i\omega t)$ в данных соотношениях опущена; $\exp(\pm \gamma z)$ - **множитель бегущей волны**; γ - коэффициент распространения волны в направляющей системе. Данный коэффициент связан с волновым числом среды $k = k_\beta - ik_\alpha$ в предположении о малых потерях в среде k_α соотношением $\gamma = ik_\beta = i\beta$ (k_β или β - коэффициент фазы).

Разложим коэффициент фазы в непоглощающей среде на продольную и поперечную составляющие, как показано на рисунке 2:

$$k^2 = \chi^2 + \beta^2. \quad (2)$$

В полученном соотношении, называемом **уравнением коэффициентов**, χ - **поперечный волновой коэффициент**.

Данное уравнение позволяет преобразовать векторные уравнения Гельмгольца для регулярной линии к скалярному виду:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + \chi^2 E_z = 0, \quad (3a) \quad \nabla_{\perp}^2 H_z + \chi^2 H_z = 0. \quad (3b)$$

Причем для нахождения структуры полного поля необходимо решить с учетом граничных условий только два дифференциальных уравнения. Остальные компоненты поля могут быть найдены с использованием соотношений:

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} E_z - \frac{i\omega\tilde{\mu}_a}{\chi^2} [\text{grad}_{\perp} H_z, \vec{i}_z], \quad (4a)$$

$$\vec{H}_{\perp} = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} H_z + \frac{i\omega\tilde{\epsilon}_a}{\chi^2} [\text{grad}_{\perp} E_z, \vec{i}_z]. \quad (4b)$$

В данных соотношениях знак « \perp » при градиенте показывает, что производные берутся только по поперечным координатам.

Для анализа режимов работы линии передачи преобразуем уравнение коэффициентов к виду:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \chi^2}. \quad (5)$$

Возможные типы решений и их физическая трактовка приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Типы решений и их физическая трактовка

| Соотношение k и χ | Тип β | Распространение колебаний | Режим работы линии передачи |
|--------------------------|--------------------|-----------------------------------|---|
| $k > \chi$ | Вещественное число | Бегущие волны | Докритический |
| $k = \chi$ | Нуль | Распространение волн прекращается | Критический |
| $k < \chi$ | Мнимое число | Нераспространяющиеся колебания | Закритический (режим отсечки). Волновод как реактивная нагрузка |

Анализ данных таблицы 1 показывает, что критический режим выделяется особо. Введем для него ряд определений.

Критическая частота определяется соотношением:

$$f_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi} = \frac{k}{2\pi\sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a}} = \frac{\chi}{2\pi\sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a}}, \quad (6)$$

в котором $\tilde{\epsilon}_a, \tilde{\mu}_a$ - параметры среды, заполняющей волновод.

Значение длины волны генератора, соответствующее данной частоте, называется **критической длиной волны** в исследуемом волноводе и определяется соотношением

$$\lambda_{кр} = 2\pi / \chi. \quad (7)$$

В соответствии с определением режимов работы волновода, распространение волны по направляющей системе имеет место лишь когда $\lambda_в < \lambda_{кр}$, т.е. если $f > f_{кр}$.

Учитывая (7), выражение (5) принимает вид:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (8)$$

где λ_0 - длина волны в свободном пространстве.

Закон зависимости длины волны в волноводе от длины волны в свободном пространстве носит название **дисперсионной характеристики волновода** и описывается формулой:

$$\lambda_в = \lambda_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (9)$$

Анализ данного соотношения показывает, что длина волны в волноводе всегда больше длины волны в неограниченном пространстве при той же частоте.

Фазовая скорость может быть найдена на основе использования выражения

$$v_{\phi} = c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}. \quad (10)$$

Рассмотрим типы направляемых волн в линии передачи. Как уже отмечалось ранее, перенос энергии в направляющих системах осуществляется вдоль оси z во введенной нами цилиндрической системе координат. Это означает, что вектор Пойнтинга, обуславливающей передачу энергии вдоль продольной оси направляющей системы, имеет продольную компоненту. Учитывая ортогональность вектора Пойнтинга и компонент электрического и магнитного полей, можно сделать вывод, что компоненты электромагнитного поля должны иметь поперечные составляющие.

Класс волны определяется наличием либо отсутствием продольных составляющих поля E и H , параллельных направлению распространения. При классификации используется два принципа: либо указывается, какой вектор имеет продольную составляющую, либо какой вектор целиком лежит в поперечной плоскости. Классификация в соответствии с данным принципом приведена в таблице 2 и пояснена на рисунке 3.

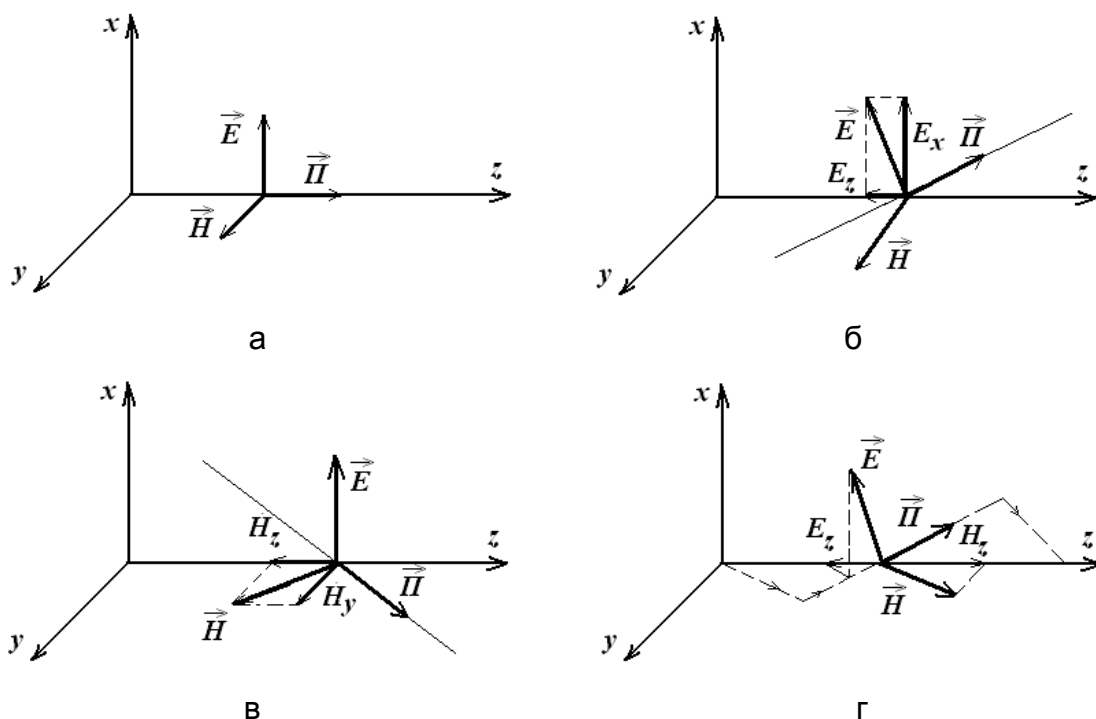


Рисунок 3 – Представление различных типов направляемых волн:
 а – ТЕМ-волна; б – Е-волна (ТМ-волна); в – Н-волна (ТЕ-волна); г – HE-волна

Таблица 2 - Зависимость класса волны от продольных составляющих

| Тип волны | Продольные составляющие полей |
|---|-------------------------------|
| <i>T</i> -волны (рисунок 3,а) | $E_z = 0, H_z = 0$ |
| <i>E</i> -волны (<i>TM</i> -волны) (рисунок 3,б) | $E_z \neq 0, H_z = 0$ |
| <i>H</i> -волны (<i>TE</i> -волны) (рисунок 3,в) | $E_z = 0, H_z \neq 0$ |
| Гибридные волны (<i>EH</i> - или <i>HE</i> -волны) (рисунок 3,г) | $E_z \neq 0, H_z \neq 0$ |

Тип волны, называемый также **модой**, определяется сложностью структуры поля волны данного класса (числом максимумов и минимумов поля в поперечном сечении) для конкретного направляющего устройства. Он обозначается двумя числовыми индексами, например, E_{01}, H_{11} .

4.1.2 Полые волноводы

Одними из основных типов полых (пустых) волноводов являются прямоугольный и круглый волноводы. Конструкция прямоугольного полого волновода показана на рисунке 4.

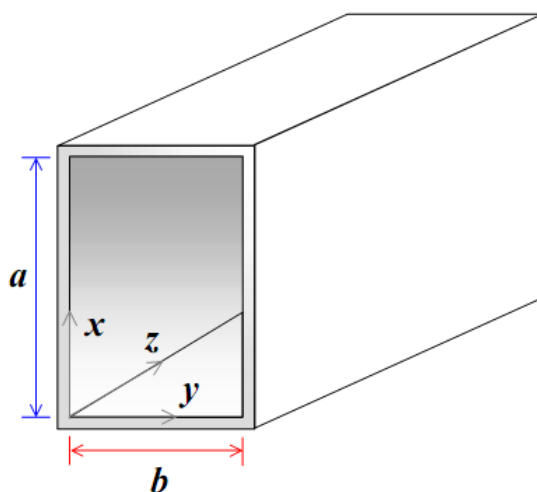


Рисунок 4. – Конструкция прямоугольного полого волновода

Рассмотрим структуру электромагнитного поля в прямоугольном волноводе. В данном волноводе, представляющем собой полую металлическую трубу, энергия распространяется только в виде волн *E* и *H*-типов.

Для понимания структуры поля в волноводе может быть использовано несколько подходов. Например, концепция Бриллюэна, рассматривающая поле в волноводе (кроме волн *TEM*) как результат сложения плоских однородных волн,

называемых **парциальными**, многократно отраженных от его граничных поверхностей. При таком подходе используется лучевая трактовка явлений в волноводах.

Рассмотрим концепцию парциальных волн на примерах.

Пусть направляемая волна распространяется вдоль некоторой оси z . Возможны два типа распространения электромагнитной волны, показанных на рисунке 5:

- распространение параллельно оси z (рисунок 5,а);
- распространение по ломаным (в общем случае по кривым) линиям при общем поступательном движении вдоль оси z (рисунок 5,б).

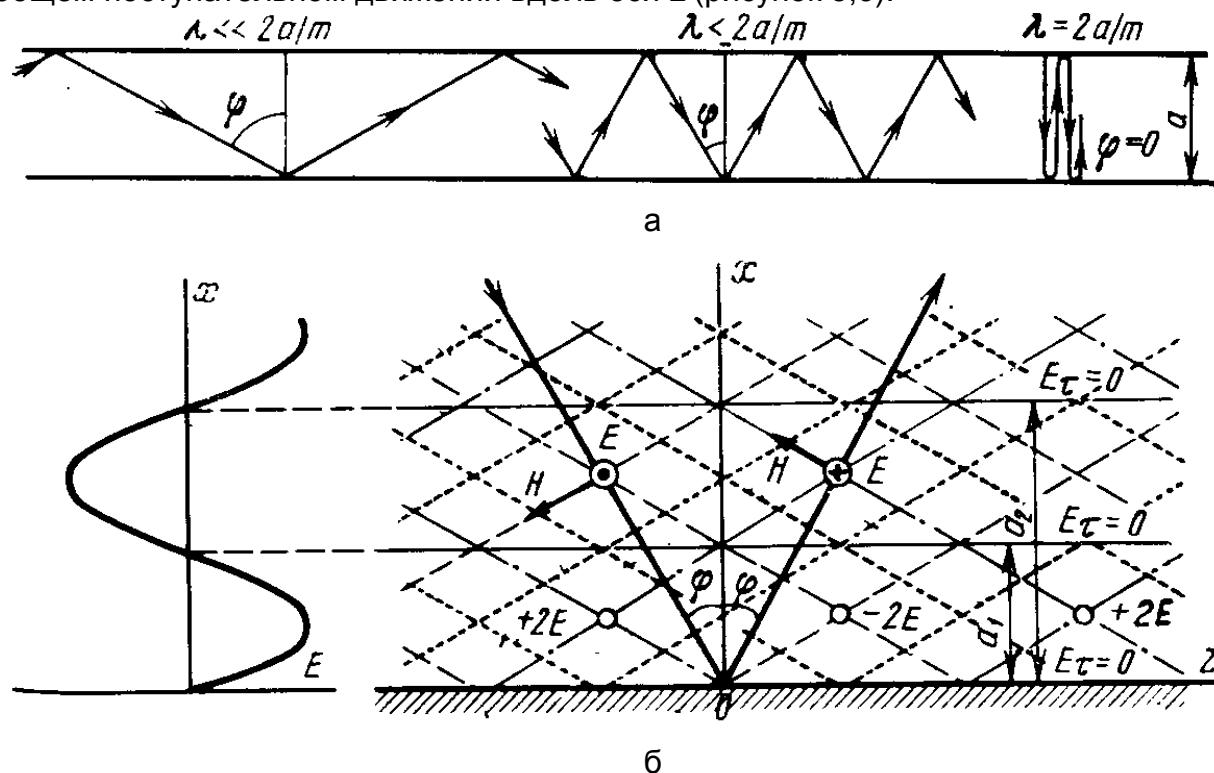


Рисунок 5. – Распространение электромагнитных волн в волноводе

В первом случае векторы электрического и магнитного поля должны находиться в плоскости, перпендикулярной оси z , т.е. имеет место волна TEM . Во втором случае векторы электрического и магнитного полей должны находиться в плоскостях, перпендикулярных соответствующим участкам ломаной или кривой линии и, следовательно, по меньшей мере один из векторов имеет направление, не перпендикулярное оси. Таким образом, второй случай соответствует волнам E - или H -, распространяющимся вдоль оси z . При этом парциальная TEM -волна распространяется вдоль линии, образующей угол φ с осью z . В силу того, что путь, пройденный за одно и то же время фронтом волны вдоль оси z , больше, чем по направлению распространения, фазовая скорость у волн E и H всегда превышает скорость света в среде.

При наклонном падении на границу суммарная волна может быть представлена в виде двух волн: стоячей – в плоскости, перпендикулярной

плоскости раздела, и бегущей – вдоль границы раздела сред (рисунок 3). Предположим теперь, что данное направление совпадает с образующей направляющей системы. Далее, в плоскости, проходящей через узлы стоячей волны электрического поля, описываемые условием $\sin \chi x = 0$, будем располагать вторую плоскость. Положение данной плоскости определяется выражением:

$$\chi x = \pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (11a)$$

или

$$a = \frac{m\pi}{\chi} = \frac{m\pi}{k \cos \varphi} = \frac{m\lambda}{2 \cos \varphi}. \quad (11b)$$

В соотношениях (11) индекс m указывает на число полуволн, укладывающихся между проводящими пластинами. При постоянных a и m угол падения парциальной волны зависит от λ : $\cos \varphi = m\lambda / (2a)$. Если $\lambda \ll 2a / m$, то угол φ близок к 90° , парциальные волны падают на стенки волновода полого. По мере роста длины волны угол φ уменьшается и, наконец, при $\lambda = 2a / m$ становится равным нулю, распространение волны прекращается. Таким образом, размер волновода ограничивает диапазон длин волн, которые способны в нем распространяться.

Ограничив пространство металлическими поверхностями еще в двух плоскостях, приходим к полю в прямоугольном волноводе, в котором распространяется волна типа E или поперечно-магнитная волна:

$$E_z = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot \exp(-\gamma_{mn} z). \quad (12)$$

Здесь B_{mn} - амплитуда гармоник, определяемой парой индексов m и n . Величины a и b связаны с геометрическими размерами прямоугольного волновода, как показано на рисунке 4.

Таким образом, поперечный волновой коэффициент волновода зависит от выбора чисел m и n :

$$\chi_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (12)$$

Каждой комбинации m и n соответствует своя структура поля, т.е. **мода**. **Волна**, имеющая минимальную критическую частоту из всех возможных волн, относящихся к рассматриваемому классу, называется **основной** или **волной основного типа**.

Дополним приведенные выше соотношения выражением, описывающим **характеристическое сопротивление волновода**. Данный параметр определяется отношением поперечных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} , для волн электрического типа описывается выражением

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (13)$$

Для поперечно-магнитных волн основной волной является волна E_{11} .

Для поперечно-электрической волны (H -волны) решение имеет вид

$$H_z = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \exp(-\gamma_{mn} z), \quad (14)$$

где A_{mn} - комплексная амплитуда гармоники с индексами m и n поля в волноводе.

Характеристическое сопротивление волновода для поперечно-электрических волн равно

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (15)$$

Если полагать что $a > b$, то низшим типом волн среди волн H является волна H_{10} , у которой $\lambda_{крH_{10}} = 2a$. Поскольку $\lambda_{крH_{10}} > \lambda_{крE_{11}}$, то волна H_{10} является низшим типом волн среди всех возможных типов волн в прямоугольном волноводе. Структура поля данной волны в различных сечениях прямоугольного волновода показана на рисунке 6.

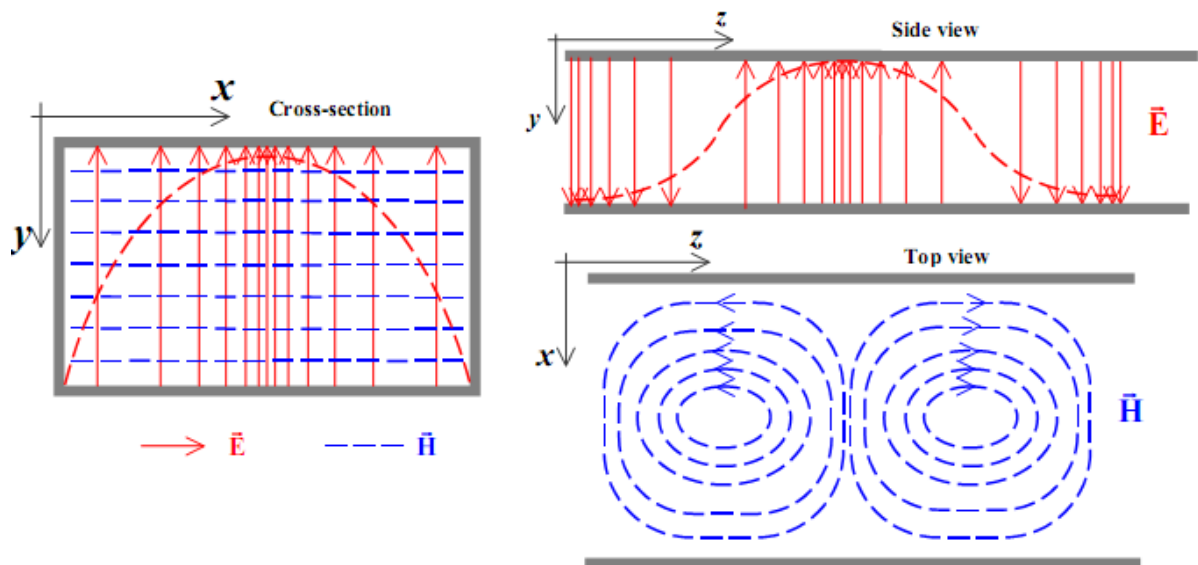


Рисунок 6. – Структура поля волны H_{10}

Мощность, переносимая волной любого типа в волноводе, определяется путем интегрирования вектора Пойнтинга по поперечному сечению S волновода. В частном случае волны основного типа H_{10} прямоугольного волновода данная формула принимает вид:

$$P = E_0^2 \frac{ab}{4W_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}. \quad (16)$$

Анализ выражений, описывающих характеристические сопротивления волн E - и H -типов показывает, что волновое сопротивление волн H в отличие от волн E больше, чем W_0 . Рисунки 7-9 иллюстрируют механизм распространения волн в прямоугольных волноводах, а также их структуру. При этом рисунки 8 и 9 иллюстрируют вид сверху на волновое поле в прямоугольном волноводе. На рисунках с индексами «а» показана ориентация векторов поля, а на рисунках с индексами «б» - поверхностных график амплитуд поля.

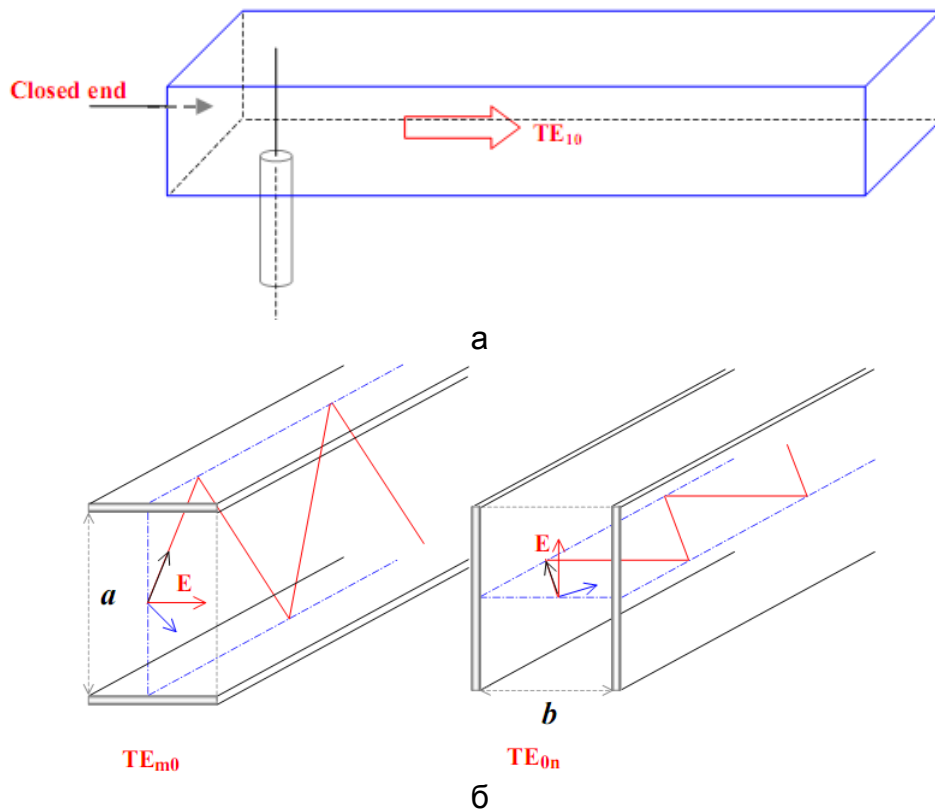


Рисунок 7. – Механизмы возбуждения и распространения мод TE-волн в прямоугольном волноводе

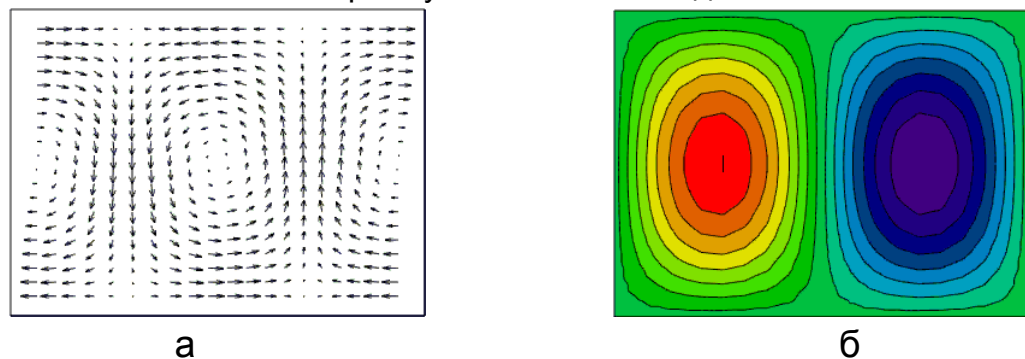
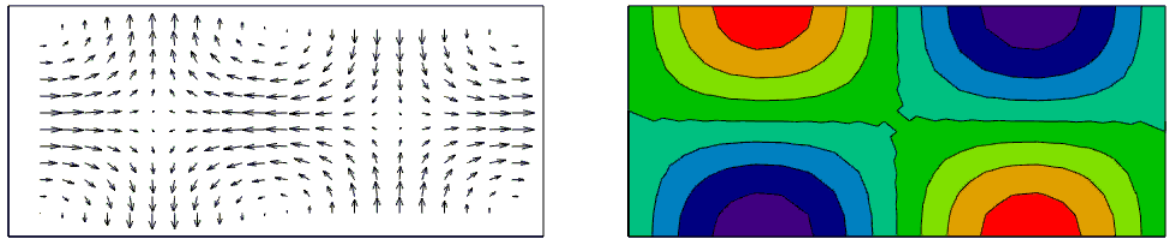


Рисунок 8. – Структура поля TE-волны



а б
Рисунок 9. – Структура поля ТМ-волны

Для круглого волновода радиусом a для обеспечения разделения электрического и магнитного полей уравнения Гельмгольца решаются в цилиндрической системе координат. Геометрия задачи показана на рисунке 10.

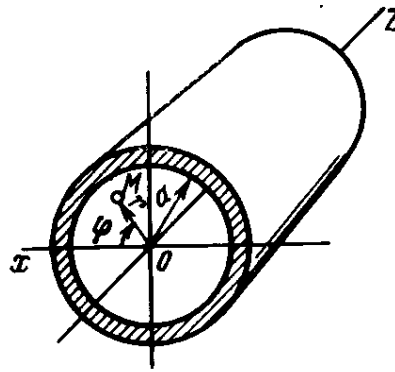


Рисунок 10. – Геометрия задачи для круглого полого волновода

В данной системе координат решения для компонент электромагнитного поля записываются с использованием соотношений:

- для поперечно-магнитных волн:

$$E_z = \sum_m \sum_n B_{mn} J_m \left(\frac{v_{mn}}{a} \rho \right) \cos(m\varphi) \exp(-\gamma_{mn} z), \quad (17)$$

$$(f_{кр})_{TM} = \frac{v_{mn}}{2\pi a \sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (18) \quad (\lambda_{кр})_{TM} = \frac{2\pi a}{v_{mn}} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad (19)$$

где $J_m(\cdot)$ - функция Бесселя m -го порядка;

v_{mn} - корни уравнения $J_m(v) = 0$. Значения корней данного уравнения приводятся в справочниках по математике.

- для поперечно-электрических волн:

$$H_z = \sum_m \sum_n A_{mn} J_m \left(\frac{v'_{mn}}{a} \rho \right) \cos(n\varphi) \exp(-\gamma_{mn} z), \quad (20)$$

$$(f_{кр})_{TE} = \frac{v'_{mn}}{2\pi a \sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (21) \quad (\lambda_{кр})_{TE} = \frac{2\pi a}{v'_{mn}} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (22)$$

Здесь v'_{mn} - корни уравнения $J'_m(v) = 0$.

Структуры полей волн низшего типа E_{01} и H_{01} показаны на рисунках 11 и 12.

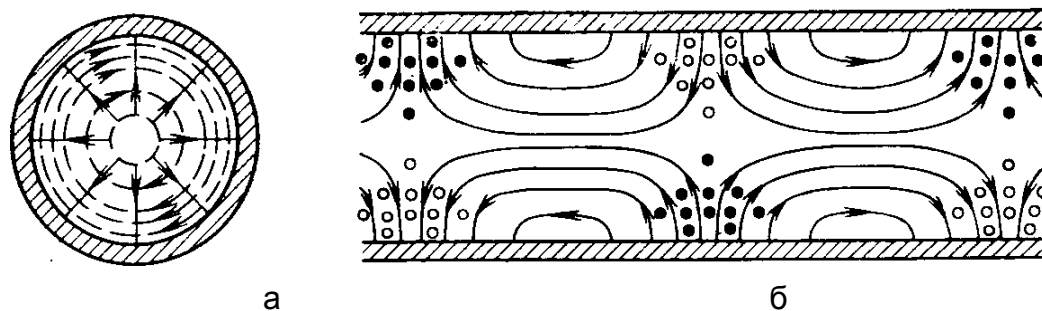


Рисунок 11. – Структура поля волны E_{01} в круглом волноводе

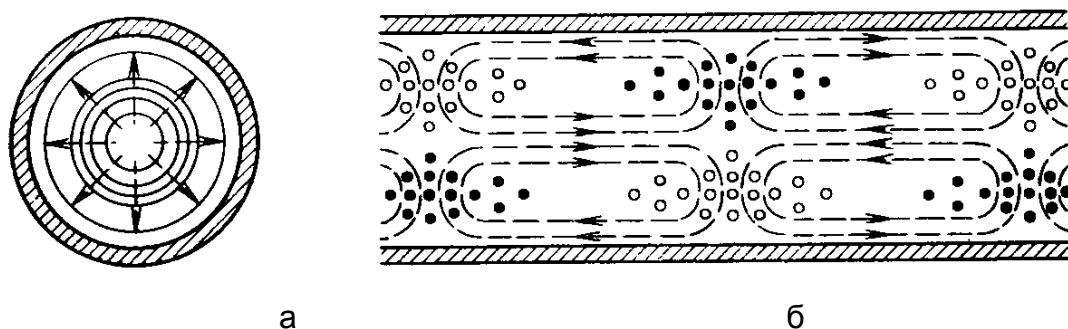


Рисунок 12. – Структура поля волны H_{01} в круглом волноводе

При этом на рисунках с индексами «а» приведена структура поля в поперечном сечении, а на рисунках с индексами «б» – в продольном. Анализ данных рисунков позволяет говорить о радиальной симметрии полей.

4.2 Волноводы с волнами типа Т

Коаксиальный волновод. Полосковые и микрополосковые линии. Линии поверхностной волны. Замедляющие структуры. Диэлектрические волноводы. Оптические волноводы и световоды.

4.2.1 Коаксиальный волновод

В п.4.1.1 было рассмотрено распространение E - и H -типов волн в полом прямоугольном волноводе. Кроме того, было отмечено, что в данном типе направляющих волн распространение волн типа T невозможно. Одним из видов направляющих систем, в которых возможно распространение как волн типа E - и H -, так и типа T , является коаксиальная линия, состоящая из двух изолированных друг от друга металлических проводников, как показано на рисунке 1. Структура данных полей показана на рисунке 2. При этом рисунок 2,а иллюстрирует структуру T -волны, рисунок 2,б – структуру H -волны, а рисунок 2,в – структуру E -волны.

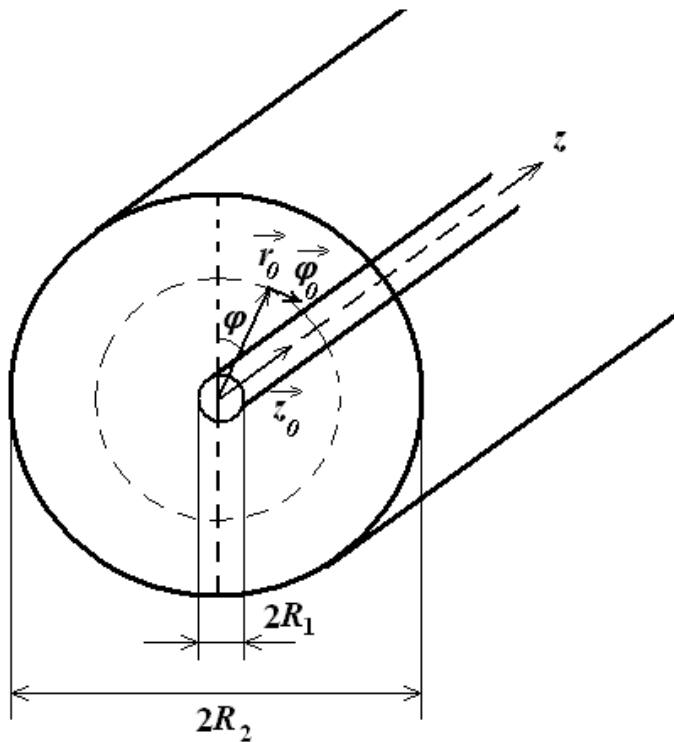


Рисунок 1 – Геометрия коаксиального волновода

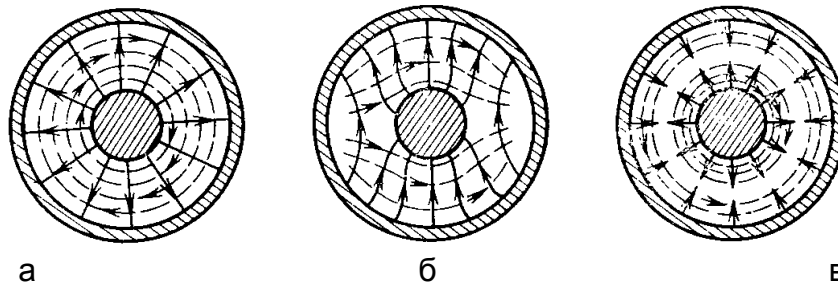


Рисунок 2. – Структура полей в коаксиальной направляющей структуре

Определим основной тип волны в данной линии. Для волн типа T волновые уравнения принимают вид:

$$\chi^2 \vec{E}_\perp = 0, \quad (1a) \quad \chi^2 \vec{H}_\perp = 0. \quad (16)$$

Нетривиальное решение данных уравнений возможно лишь при $\chi = 0$, т.е. $f_{кр} = 0$ и $\lambda_{кр} = \infty$. Следовательно, волна является низшим типом волны в коаксиальной линии и существует на любой частоте. Коэффициент фазы и фазовая скорость данного типа волн совпадают с аналогичными параметрами волны в свободном пространстве.

Для нахождения компонент поля волны TEM совместим ось Oz цилиндрической системы координат $Or\varphi z$ с осью внутреннего проводника коаксиальной линии, ориентируя оси системы. Учитывая решение системы уравнений (1), уравнения Гельмгольца сводятся к уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2 \vec{E}_\perp = 0, \quad \nabla^2 \vec{H}_\perp = 0. \quad (2)$$

Как известно, **поле**, удовлетворяющее уравнению Лапласа, является **потенциальным**. Решение системы (2), описывающее компоненты поля, имеет вид:

$$E_r = E_0 \frac{R_1}{r} \exp(-i\beta z), \quad H_\varphi = \frac{E_r}{W_0} = \frac{E_0}{W_0} \frac{R_1}{r} \exp(-i\beta z). \quad (3)$$

Кроме того, потенциальный характер электрических и магнитных полей позволяет говорить о полном токе и о напряжении в коаксиальной линии. Разность потенциалов между центральным и внешним проводниками равна

$$\dot{U} = \int_{R_1}^{R_2} \dot{E}_r dr = E_0 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \exp(-i\beta z). \quad (4)$$

Ток, текущий по поверхности центрального проводника и по внутренней поверхности внешнего проводника, равен

$$\dot{I} = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} R_1 H_\varphi(R_1, \varphi) d\varphi = \frac{2\pi R_1 E_0}{W_0} \exp(-i\beta z). \quad (5)$$

Отношение напряжения \dot{U} к току \dot{I} в режиме бегущей линии называется **волновым сопротивлением коаксиальной линии**

$$Z_B = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{W_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{R_2}{R_1} \text{ [Ом]}. \quad (6)$$

Для поперечно-магнитного и поперечно-электрического полей продольные составляющие определяются методом разделения переменных, как было выполнено для круглого волновода. Получаемое при этом решение аналогично решению, найденному для круглого волновода с граничными условиями

$$\text{для } E\text{-волн} \quad E_z = 0 \quad \text{на } L, \quad (7a)$$

$$\text{для } H\text{-волн} \quad \partial H_z / \partial n = 0 \quad \text{на } L. \quad (7b)$$

Анализ полученного решения показывает, что полем первого высшего типа является H_{11} , у которого

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} = \frac{2\pi}{v_{H_{11}}} \approx \pi(R_1 + R_2). \quad (8)$$

Поскольку у волны основного типа TEM $\lambda_{\text{кр}} = \infty$, то одноволновый режим в коаксиальном волноводе обеспечивается при выполнении условий

$$\lambda > R_1 + R_2. \quad (9)$$

4.2.2 Полосковые и микрополосковые линии

Еще одним типом линии передачи, базирующемся на распространении поперечных электромагнитных волн являются полосковые и микрополосковые

линии передач. Данные линии передачи в последнее время нашли широкое применение в технике СВЧ при разработке печатных и интегральных схем для работы в сантиметровом и дециметровом диапазонах. Их изготавливают на основе диэлектрических пластин, покрытых металлической фольгой толщиной 10...100мкм. Используются высокочастотные диэлектрики: фторопласт, полистирол, полиолефин, стеклоткань, пропитанная фторопластом или кремнийорганической смолой. Диэлектрические пластины, на которые наносят фольгу, называют **подложкой**.

Конструктивно полосковая линия может быть выполнена в виде несимметричной или симметричной линии. Несимметричная линия – открытый волновод, симметричная линия – экранированный волновод. Геометрия данных линий представлена на рисунке 3. Несложно заметить, что данные конструкции представляют собой модификацию симметричной двух проводной линии и коаксиального волновода.

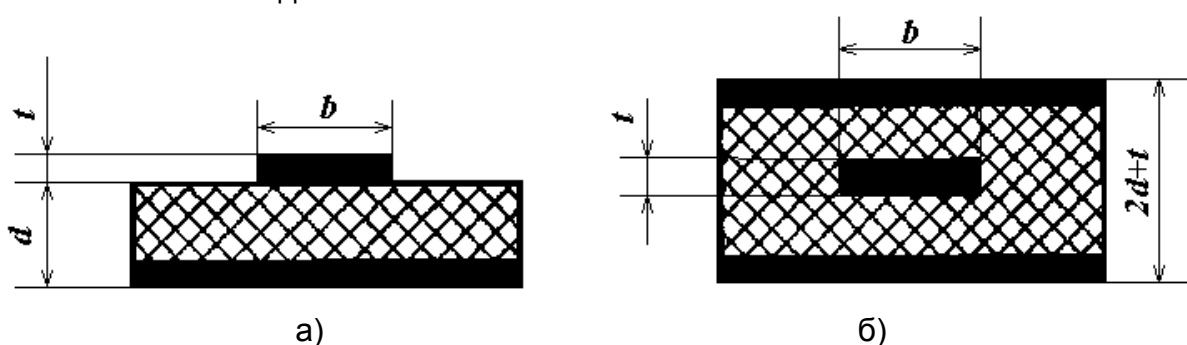


Рисунок 3 – Геометрия микрополосковых линий передачи

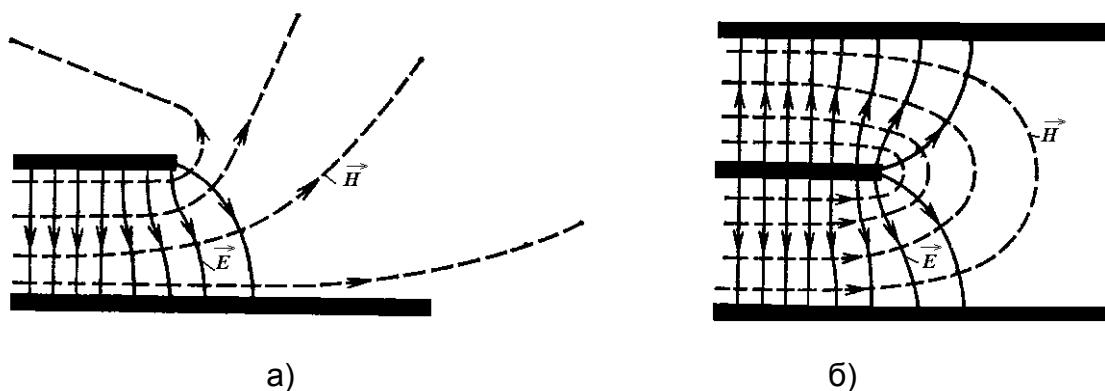


Рисунок 4 – Структура электромагнитного поля в микрополосковой линии

Строгая теория полосковых линий довольно сложна. Так называемая **квази-Т-волна** в этих линиях **может существовать**, если ширина токонесущего проводника и расстояние между ним и заземленной пластиной меньше половины длины волны в линии передач. При этом электрическое и магнитное поля сосредоточены в основном в пространстве между проводником и заземленной пластиной. Картины силовых линий электромагнитных волн показаны на рисунке 4. Электрическое поле в поперечной плоскости может быть описано уравнением Лапласа (2).

В полосковых линиях передачи с диэлектрическим основанием волны типа *TEM* не могут распространяться в чистом виде из-за неоднородности диэлектрика. Однако теории и опыт показывают, что поля и поток мощности сосредотачиваются главным образом в диэлектрике между токонесущим проводником и заземленной пластиной. Поэтому можно принять допущение об однородности диэлектрика, заполняющего всю линию передачи.

Для практических расчетов удобны следующие приближенные соотношения, которые хорошо согласуются с опытными данными.

Волновые сопротивления с учетом толщины токонесущего проводника t и без данного учета рассчитываются по формулам, приведенным в таблице 1.

Таблица 1 – Соотношения для расчета волновых сопротивлений полосковых линий

| Тип линии | С учетом толщины t токонесущего проводника | Без учета толщины |
|----------------|---|--|
| Несимметричная | $Z_B = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \begin{cases} \frac{100(1-t/d)}{1+b/d} & b/d < 2, \\ \frac{1}{1+b/d \left(\frac{1}{1-b/d} \right)} & b/d > 2. \end{cases}$ | $Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1+b/d}$ |
| Симметричная | $Z_B = 216 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \begin{cases} \frac{1-t/d}{1+b/d} & b/d < 2, \\ \frac{1}{1+b/d \left(\frac{1}{1-t/d} \right)} & b/d > 2. \end{cases}$ | $Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{216}{1+b/d}$ |

К недостаткам полосковых линий относятся сравнительно большое затухание и малые значения пропускной мощности. Эти линии применяют, главным образом, в тех устройствах, в которых не требуется передача значительной мощности и основное значение придается миниатюризации, надежности и точности изготовления.

4.2.3 Линии поверхностных волн. Замедляющие структуры

Рассмотрим физический механизм работы линий поверхностной волны, к которым относятся диэлектрические и оптические волноводы, металлическая плоскость, покрытая слоем диэлектрика.

Начнем с изучения соотношений, описывающих металлический экран, покрытый слоем диэлектрика. Как отмечалось ранее, падающая на границу раздела с другой средой волна при определенных условиях испытывает полное внутреннее отражение. При этом во второй среде образуется распространяющаяся вдоль границы раздела поверхностная волна, амплитуда

которой во второй среде экспоненциально убывает в направлении нормали к границе раздела. Следовательно, в диэлектрическом слое, покрывающем металлическую плоскость, могут образоваться поверхностные направляемые волны, распространяющиеся в определенном направлении. Такие волны возникают в результате скачкообразного распространения волны *ТЕМ*, последовательно отражающихся от поверхности металла и границы раздела между диэлектриком и воздухом.

Определим структуру электрических волн, распространяющихся параллельно оси Oz , совпадающей с металлическим листом. Толщина слоя диэлектрика равна d , относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрического слоя ε_{a1} (рисунок 5).

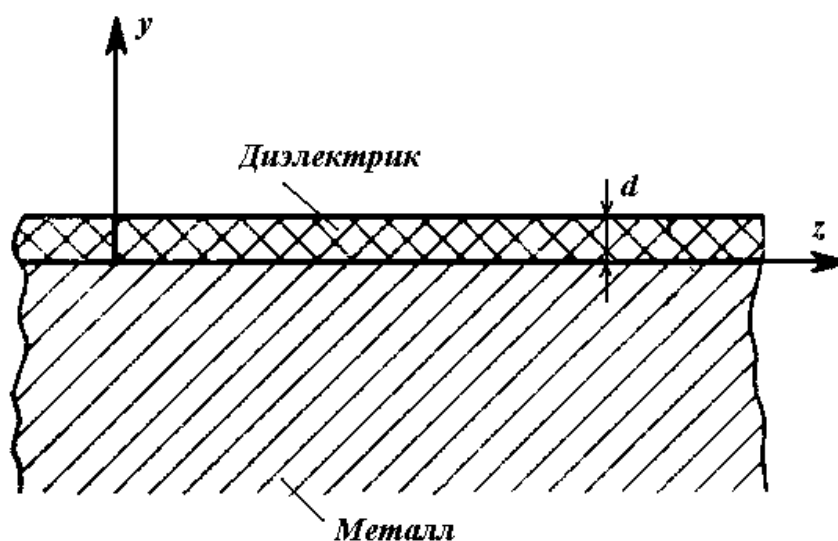


Рисунок 5. – Направляющая структура «металл-диэлектрик»

Ось Oy нормальна к границе раздела сред. Плоскость и покрывающий ее диэлектрик однородны вдоль оси Ox , следовательно, зависимость составляющих поля от данной координаты будет отсутствовать и можно решать двумерную задачу.

Волновое уравнение записывается для пространства, заполненного диэлектриком ($y < d$) и пространства над диэлектриком ($y > d$):

$$\frac{d^2 \dot{E}_z^{(1)}}{dy^2} + \chi_{\perp 1}^2 \dot{E}_z^{(1)} = 0, \quad \frac{d^2 \dot{E}_z^{(2)}}{dy^2} + \chi_{\perp 2}^2 \dot{E}_z^{(2)} = 0, \quad (10)$$

в котором

$$\chi_{\perp 1}^2 = \omega^2 \varepsilon_{a1} \mu_0 - \beta^2, \quad (11a) \quad \chi_{\perp 2}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2. \quad (11b)$$

Вид решения записывается с учетом следующих рассуждений. Во-первых, на поверхности металла касательная составляющая электрического поля равна нулю. Во-вторых, в диэлектрике вдоль оси Oy должна образовываться стоячая волна. В-третьих, в пространстве над диэлектриком амплитуда поля вдоль оси

$0y$ должна убывать по экспоненциальному закону. С учетом сказанного решение уравнений (10) записывается в виде:

$$\dot{E}_z^{(1)} = A \sin \chi_{\perp 1} y \exp(-i\beta z), \quad (12a)$$

$$\dot{E}_z^{(2)} = B \exp(-\alpha_{\perp 2} y) \exp(-i\beta z), \quad (12b)$$

где $\alpha_{\perp 2}$ - действительная положительная величина, связанная с поперечным и продольным волновыми числами в свободном пространстве равенством

$$\alpha_{\perp 2} = i\chi_{\perp 2} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2}.$$

Подставляя вид решения (12) в соотношения (10), получают тангенциальные компоненты электромагнитного поля в диэлектрике и в свободном пространстве. Учитывая граничные условия (равенство касательных составляющих поля на границе диэлектрик-воздух), получаем трансцендентное уравнение для нахождения поперечных волновых чисел

$$\operatorname{tg} \chi_{\perp 1} d = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_0} \frac{\alpha_{\perp 2}}{\chi_{\perp 1}}. \quad (13)$$

Уравнение решается графически или численно.

Полное внутреннее отражение на границе диэлектрик-воздух прекращается, когда парциальная волна *TEM* падает на границу под углом, меньшим критического. Аналогичное явление имеет место и в рассматриваемой направляющей системе, что ограничивает частоты, на которых может распространяться поверхностная волна:

$$k_0^2 - \beta^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2 < 0. \quad (14)$$

Частота, при которой $\alpha_{\perp 2} = 0$, называется критической.

Одним из параметров, характеризующих поверхностную волну, является поверхностное сопротивление (импеданс):

$$Z_S^E = \frac{\dot{E}_z^{(2)}}{\dot{H}_x^{(2)}} = i \frac{\alpha_{\perp 2}}{\omega \varepsilon_0}. \quad (15)$$

Несложно заметить, что импеданс реактивный, индуктивный по характеру сопротивления, пока выполняется неравенство (14). Это означает, что у распространяющейся волны сдвиг фаз между \dot{E}_z и \dot{H}_x равен 90° , и отсутствует средний за период поток энергии, направленный перпендикулярно оси $0z$. Структура поля показана на рисунке 6.

Существуют различные способы создания реактивного поверхностного сопротивления. Например, можно создать канавки в металлической поверхности, как показано на рисунке 7. Каждую канавку подобной гребенчатой структуры можно рассматривать как короткозамкнутый отрезок линии длиной d . Поэтому, когда глубина канавки не превышает четверти длины волны, ее входное сопротивление чисто реактивное и носит индуктивный характер. Если число

канавок на единицу длины достаточно велико ($s + \ell \ll \lambda$), то можно пренебречь влиянием тонких металлических перегородок и полагать, что в сечении $y = 0$ расположена плоскость, в любой точке которой поверхностное сопротивление реактивное и носит индуктивный характер. Следовательно, когда $d < \lambda/4$, вдоль гребенчатой структуры, как и вдоль металлической плоскости с диэлектриком, распространяется поверхностная электрическая волна. Структура волны весьма близка к структуре волны E , показанной на рисунке 2.

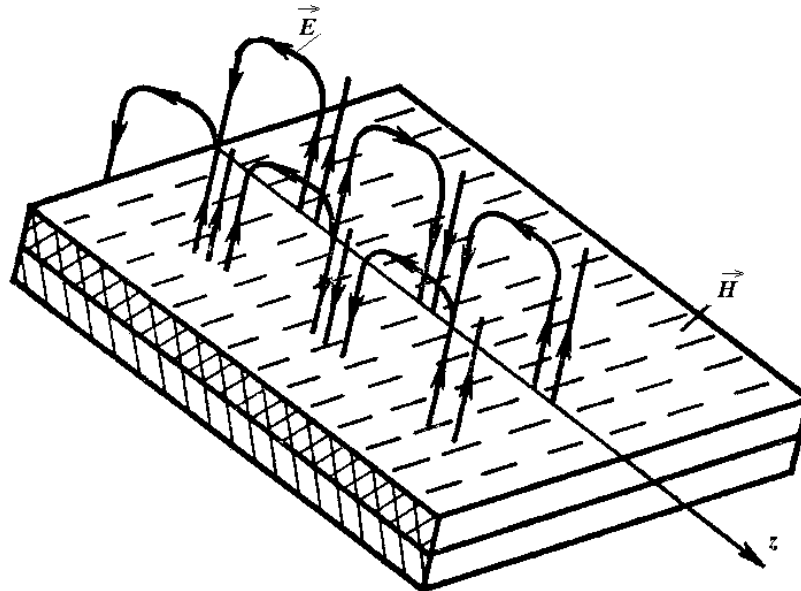


Рисунок 6 – Силовые линии поверхностных волн в структуре «металл-диэлектрик»

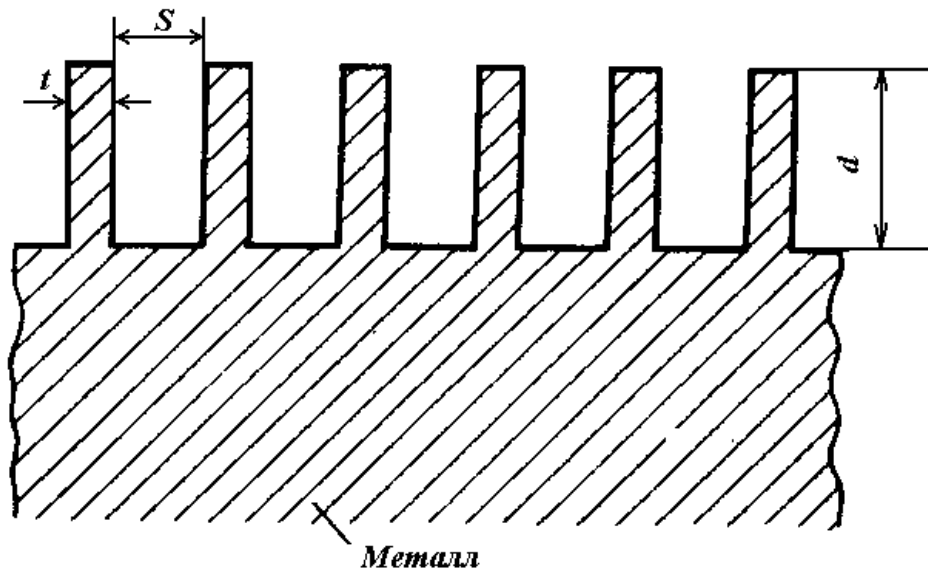


Рисунок 7 – Направляющая структура в виде двумерной гофры

Как следует из неравенства (14), коэффициент распространения β поверхностной волны не превышает коэффициента распространения в среде с

параметрами ε_0, μ_0 . Поэтому фазовая скорость поверхностной волны всегда ниже скорости света в среде, окружающей линию передачи. **Волны**, обладающие этим свойством, называются **замедленными**.

Для поля \vec{H} поверхностное сопротивление (поверхностный импеданс) равен

$$Z_S^H = -i \frac{\omega \mu_0}{\alpha_{\perp 2}}. \quad (16)$$

Следовательно, **для волн H величина поверхностного импеданса является чисто реактивной и носит емкостной характер**.

Низшим типом среди волн H является волна, у которой

$$\frac{\pi}{2} < \chi_{\perp 1} d < \pi. \quad (17)$$

Критическая длина волны выражается формулой:

$$\lambda_{кр} = 4d \sqrt{\varepsilon - 1}. \quad (18)$$

Поскольку в направляющих системах волны распространяются лишь на тех частотах, где $\lambda < \lambda_{кр}$, то должно выполняться неравенство

$$d < \frac{\lambda}{4d \sqrt{\varepsilon - 1}}. \quad (19)$$

Расчеты, проводимые на основе использования данных формул, достаточно сложны и требуют знания в теории комплексного переменного. Однако рассматриваемые структуры часто используются на практике для управления характеристиками направленности и согласования антенн. В связи с этим сформулированы соответствующие граничные условия импедансного типа, позволяющие ускорить процесс вычисления структуры электромагнитного поля. Так, для металлической поверхности, покрытой слоем диэлектрика (магнетодиэлектрика), значения изотропного поверхностного импеданса определяется формулами:

$$Z_S^E = -\frac{1}{Z_S^H} = \frac{ikd}{\varepsilon} (\varepsilon \mu - \cos^2 \theta). \quad (20)$$

Для гребенчатых структур тензор поверхностного импеданса является анизотропным и описывается формулой:

$$Z_a = \frac{it}{S} \operatorname{tg}(kd \sin \theta \sqrt{\varepsilon \mu}). \quad (21)$$

В случае продольной ребристой структуры отлична от нуля компонента $Z_S^E = Z_a$, в случае поперечной - $Z_S^H = -Z_a$). При наклонном падении волны существуют обе компонента тензора поверхностного импеданса.

На рисунке 8 приводятся структуры полей E- и H-поверхностных волн, возбуждаемых с структуре «металл-диэлектрик». На рисунке 9 показана дисперсионная диаграмма, поясняющая условия возбуждения поверхностных

волн в данной структуре. На рисунке 10 показана частотная зависимость величины поверхностного импеданса.

Анализ данных рисунков показывает, что смена знака резонанса приводит к изменению типа возбуждаемой поверхностной волны.

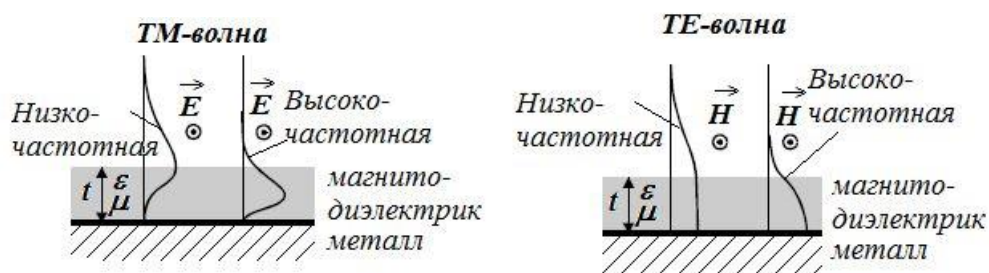


Рисунок 8. – Структура полей E - и H -поверхностных волн

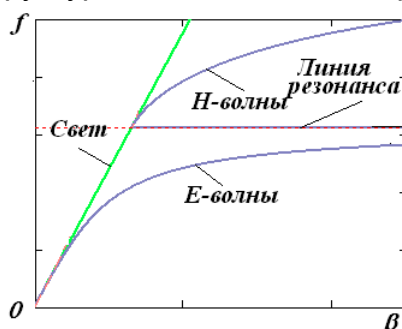


Рисунок 9. – Дисперсионная диаграмма для поверхностных волн структуры «металл-диэлектрик»

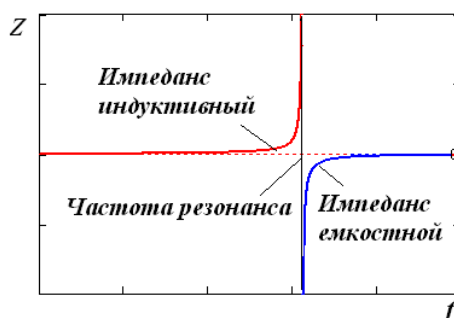


Рисунок 10. – Частотная зависимость величины поверхностного импеданса структуры «металл-диэлектрик»

4.2.4 Диэлектрические волноводы. Оптические волноводы и световоды

Подобная рассмотренной в предыдущем вопросе, но более сложная картина поля будет наблюдаться в круглом диэлектрическом волноводе. Из решения электродинамической задачи для данного волновода следует, что волны в диэлектрическом волноводе будут гибридными, определяемые всеми шестью компонентами электромагнитного поля. Среди бесчисленного множества типов

волн, могущих существовать в диэлектрическом волноводе, наибольший интерес представляет волна типа EH_{10} . Внутри диэлектрического стержня она имеет такую же структуру, что и волна HE_{11} для круглого волновода. В литературе ее называют волной HE_{11} . Структура поля данной волны показана на рисунке 11.

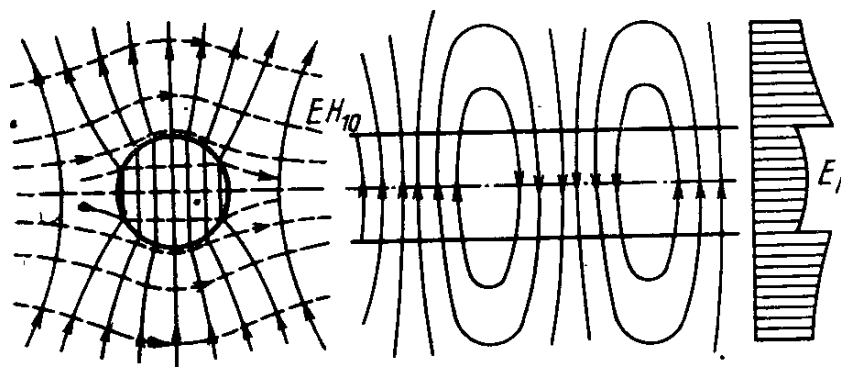


Рисунок 11. – Структура поля волны HE_{11}

Данный тип волны имеет бесконечно большую критическую частоту и может распространяться вдоль диэлектрического стержня на всех частотах и при любом диаметре стержня. Следует отметить, что **критическая частота волны в диэлектрическом волноводе имеет другой смысл, чем в полном волноводе. При длине волны меньше критической не происходит экспоненциального затухания энергии, а энергия, передаваемая по диэлектрическому стержню, начинает излучаться в свободное пространство.**

Величина фазовой скорости распространения волны в диэлектрическом волноводе лежит между величиной фазовой скорости волны TEM , распространяющейся в среде, окружающей волновод, и величиной фазовой скорости этой же волны в среде, имеющей постоянные материала, из которого изготовлен волновод.

Напряженность поля волны HE_{11} при удалении от диэлектрического стержня спадает приблизительно по экспоненциальному закону. Часть энергии передается внутри диэлектрика, а остальная часть – за его пределами. Излучения энергии не происходит, поскольку поле, как и в случае с плоскостью, покрытой слоем диэлектрика, «прижимается» к диэлектрическому стержню. **Поле распределяется тем ближе к стержню, чем больше отношение диаметра стержня к длине волны в свободном пространстве и чем выше диэлектрическая проницаемость материала, из которого изготовлен стержень.** Для работы на волне типа HE_{11} диаметр d диэлектрического волновода должен быть достаточно малым, чтобы не допустить существования ближайшего высшего типа волны. Критическая длина волны ближайшего высшего типа составляет величину

$$\lambda_{кр} \approx 1,3d\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}. \quad (22)$$

В диапазоне сантиметровых волн электрические параметры диэлектрических линий передачи хуже, чем прямоугольного и круглого волноводов. Диэлектрические линии целесообразно применять, начиная с диапазона миллиметровых волн и кончая диапазоном световых волн ($\lambda = 0,75 \dots 0,4$ мкм).

В оптическом диапазоне используются **световоды**, образованные из двухслойного (плакированного) стеклянного волокна с коэффициентами преломления $n_1 > n_2$. Поверхностная волна в таком волноводе, возникающая за счет эффекта полного внутреннего отражения на поверхности внешнего слоя, не достигает практически наружной границы и концентрируется внутри световода. Важнейшими характеристиками световода, определяющими возможность его использования в различных областях науки и техники, являются оптические потери, обусловленные поглощением и рассеянием светового пучка и информационная полоса пропускания. Материалом для световодов служит кварцевое стекло, а различные показатели преломления сердцевины и оболочки достигаются легированием стекла, например, бором, германием, фосфором. Конструкция световода показана на рисунке 12.

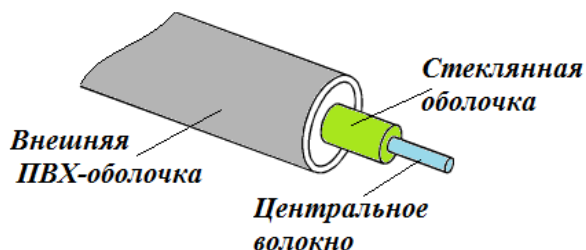


Рисунок 12. – Конструкция световода

Наряду с круглыми разработаны волоконные световоды более сложной конструкции, например, многослойные световоды и световоды с эллиптической сердцевиной. Одномодовые световоды последнего типа перспективны для применений, где требуется сохранение поляризации распространяющегося света. Основные достоинства и недостатки световодов приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Основные достоинства и недостатки световодов

| Достоинства световодов | Недостатки световодов |
|---|--|
| высокая защищенность от внешних воздействий и переходных полей | подверженность радиации, за счет которой появляются пятна затемнения и возрастает затухание |
| надежная техника безопасности (отсутствие искрения и короткого замыкания) | водородная коррозия стекла, приводящая к появлению микротрещин световода и ухудшению его свойств |

4.3 Электромагнитные колебания в полых резонаторах

Электромагнитные колебания в объемных резонаторах. Поля в полых прямоугольных и круглых резонаторах. Добротность объемных закрытых резонаторов.

4.3.1 Электромагнитные колебания в объемных резонаторах

В радиотехнике большую роль играют колебательные контуры, обеспечивающие, например, подстройку на требуемую частоту. Резонаторы широко используются в радиотехнических устройствах, являясь неотъемлемой частью многих усилителей, большинства генераторов, приемников, частотных фильтров и измерителей частоты. Основное назначение резонаторов состоит в том, чтобы долгое время поддерживать периодические колебания, вызванные внешним импульсом. Резонатор обладает частотной избирательностью по отношению к внешнему гармоническому воздействию: амплитуда его колебаний максимальна на резонансной частоте и уменьшается по мере удаления от нее.

В низкочастотной области колебательный контур выполняют из катушки индуктивности L и конденсатора емкостью C . Данный контур, как известно из курса дисциплин «Основы теории цепей» и «Теория электрических цепей» осуществляет преобразование энергии магнитного поля катушки в электрическую энергию конденсатора и наоборот. В диапазоне СВЧ, когда в качестве направляющих систем применяются волноводы, для построения колебательного контура применяется замкнутая металлической оболочкой полость, называемая **резонатором**.

Работа резонаторов основывается на использовании эффекта непрерывного преобразования электрического поля в магнитное и наоборот, описываемого уравнениями Максвелла. Для исключения потерь, связанных с излучением поля в пространство, объем, в котором сосредоточено электромагнитное поле, ограничивают металлическими стенками. В связи с этим резонаторы данной конструкции называют **объемными**. Наиболее простым способом реализации данной конструкции является выполнение резонаторов в виде короткозамкнутых отрезков металлических волноводов. По аналогии с направляющими системами резонаторы такого типа называются **закрытыми**. Пример конструкции закрытого волновода показан на рисунке 1.

В теории резонаторов различают режимы собственных (свободных) и вынужденных колебаний. **Собственные колебания** – это возможные поля в объемном резонаторе при отсутствии сторонних источников. Собственные колебания резонатора включают в себя бесконечное множество различных типов колебаний (типов полей), каждый из которых характеризуется своей картиной векторных линий и определенной собственной длиной волны. Однако в реальных резонаторах существуют некоторые потери энергии, а, следовательно, колебания

становятся затухающими. Незатухающие колебания в реальном резонаторе существуют в режиме **вынужденных колебаний**, при котором в резонатор через элемент связи вводят энергию стороннего источника (генератора). Для возбуждения резонатора необходимо, чтобы частота колебаний генератора была бы равна одной из резонансных частот объемного резонатора. Связь с направляющей системой осуществляется через элемент связи. Примеры включения резонаторов в высокочастотный тракт показаны на рисунке 2.

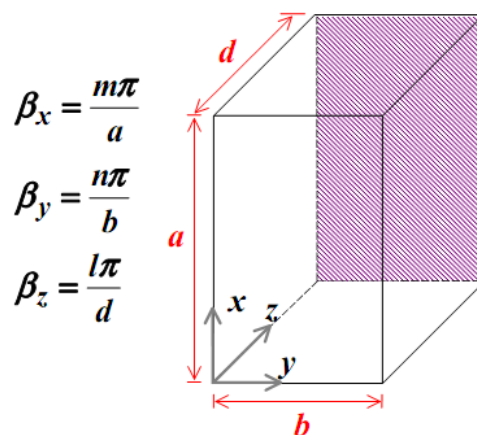


Рисунок 1 – Геометрия полого резонатора

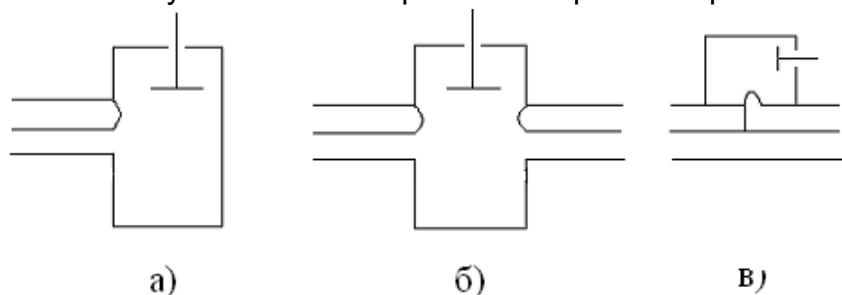


Рисунок 2 – Схемы включения резонаторов в высокочастотный тракт:
а – с одним элементом связи; б – с двумя элементами связи;
в – в виде ответвителя энергии

Задачу о типах колебаний в резонаторе будем решать в предположении отсутствия потерь в резонаторе и на основе теории волн в регулярных волноводах. При этом будем рассматривать объемные резонаторы как замкнутые поперечными стенками отрезки соответствующих волноводов.

Введение металлических стенок выполняется таким образом, чтобы вдоль направляющей системы образовалось целое число полуволн. В образовавшемся объемном резонаторе без потерь будут существовать собственные (свободные) электромагнитные колебания, на поддержание которых поступления энергии больше не требуется. При этом стоячую волну можно рассматривать как результат многократных упорядоченных отражений исходной бегущей волны регулярного волновода от обеих поперечных стенок.

При анализе поля в резонаторе рассмотрим бегущую волну произвольного V -го типа, падающую на эту стенку (индекс V заменяет символ H_{mn} , E_{mn} или T). В цилиндрическом резонаторе длиной d комплексные амплитуды поля колебаний для класса E -волн выражаются соотношениями:

$$E_x = E_{x0} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right), \quad (1a)$$

$$E_y = E_{y0} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right), \quad (1б)$$

$$E_z = E_{z0} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right), \quad (1в)$$

$$H_x = -i \frac{\beta_z E_y - \beta_y E_z}{\omega \mu} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right), \quad (2a)$$

$$H_y = -i \frac{\beta_x E_z - \beta_z E_x}{\omega \mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right), \quad (2б)$$

$$H_z = -i \frac{\beta_y E_x - \beta_x E_y}{\omega \mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right). \quad (2в)$$

Длины волны собственных колебаний s -го типа (индекс s заменяет символ H_{mnp} , E_{mnp} , T_p) в цилиндрическом резонаторе без потерь определяется соотношением:

$$\lambda_s = 2 / \sqrt{\left(\frac{\ell}{d}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_{крV}^2}}. \quad (3)$$

Тип колебаний в резонаторе, имеющий наибольшую длину волны собственных колебаний, называют **основным**. **Типы колебаний**, имеющие различные структуры, но одинаковые собственные длины волн, называют **вырожденными**. В качестве рабочих в резонаторах используют как основной тип, так и высшие типы колебаний: вследствие высокой частотной селективности резонатора вблизи собственной частоты рабочего типа колебаний поля других типов практически отсутствуют. **Вырождение** рабочего типа колебаний приводит к усложнению структуры поля в резонаторе, увеличению потерь в нем и искажению его частотных характеристик. Подавление вырожденного паразитного типа осуществляется обеспечением его сильного затухания в резонаторе.

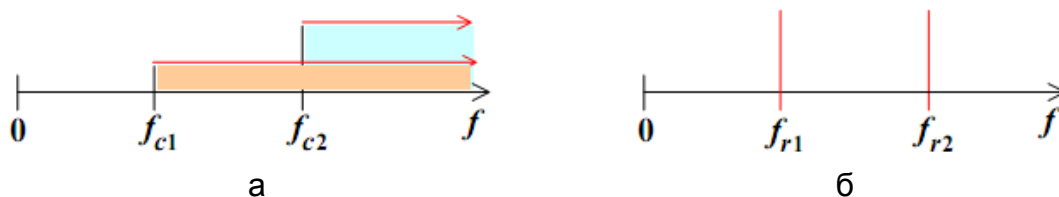


Рисунок 3 – Частоты возбуждения мод: а – в волноводе; б – в резонаторе

Следует отметить еще одно отличие резонатора от волновода. Если в волноводе частоты собственных колебаний определяют нижние границы частот (частоты отсечки f_c), начиная с которых возбуждаются волноводные моды, как показано на рисунке 3,а, то в резонаторе частоты собственных колебаний являются дискретными величинами (резонансными частотами f_r), только на которых и возможно возбуждение волн (см. рисунок 3,б).

4.3.2 Поля в полых прямоугольных и круглых резонаторах

Получим соотношение, описывающее собственную длину волны в прямоугольном резонаторе. Для него все три оси координат равноправны, следовательно, разделение на типы колебаний H_{mnp} , E_{mnp} оказывается условным (продольной может быть выбрана любая ось). Собственная длина волны в прямоугольном резонаторе с учетом формулы (3) и выражения, определяющего критическую длину в прямоугольном волноводе, определяется соотношением:

$$\lambda_{mnl} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}}. \quad (4)$$

Согласно данному выражению *наибольшее значение критической длины волны, соответствующее основному типу колебаний, получается в том случае, если индекс при наименьшем ребре резонатора равен нулю и оба остальных индекса равны единице. При этом наибольшая собственная длина волны сравнима с линейными размерами резонатора.* Типы колебаний с тремя отличными от нуля индексами, по крайней мере, двукратно вырождены. Это определяется тем, что поля типов H_{mn} , E_{mn} с одинаковыми индексами имеют одинаковые критические длины.

Наиболее частым используемым типом колебаний в прямоугольном резонаторе является колебание H_{101} , у которого вдоль оси Oz укладывается одна полуволна колебания H_{10} . Структура поля данной волны показана на рисунке 4.

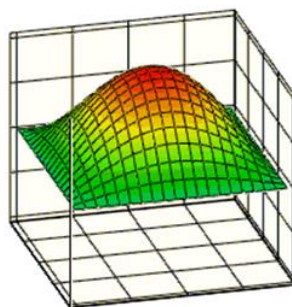


Рисунок 4. – Структура поля волны H_{10}

Для круглых цилиндрических резонаторов формула для собственных длин волн принимает вид:

$$\lambda_{mnl} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\delta_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}}, \quad (5)$$

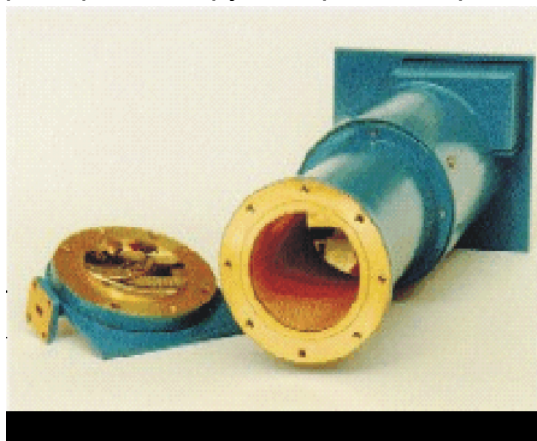
где $\delta_{mn} = v_{mn}$ для волны типа H (поперечно-электрической) и $\delta_{mn} = v'_{mn}$ для волны типа E (поперечно-магнитной). Формулу (5) иногда удобнее представить в виде:

$$\left(\frac{D}{\lambda_{mnl}}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4} \left(\frac{D}{d}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{mn}}{\pi}\right)^2, \quad (6)$$

в котором $D = 2a$ - диаметр резонатора. Номограммы, образованные семейством зависимостей $(D/\lambda_s)^2$ от $(D/\ell)^2$, позволяют легко решать задачи о соотношениях между размерами резонатора и длиной волны генератора.

Основными типами колебаний в круглом волноводе являются: H_{011} и E_{010} .

Примеры конструкций резонаторов показаны на рисунке 4.



а



б

Рисунок 4. – Примеры конструкций резонаторов

При этом на рисунке 4,а показана конструкция в виде короткозамкнутого отрезка волновода, а на рисунке 4,б – в виде отрезка диэлектрического стержня.

4.3.3 Добротность объемных закрытых резонаторов

Важнейшим параметром любого резонатора, так же как и любого низкочастотного контура, является его добротность. Значение добротности характеризует качества многих основных СВЧ устройств: стабильность генераторов, частотно-избирательные свойства фильтров, чувствительность приемных устройств и т. д.

Добротностью объемного резонатора для s -го типа, определяющей полосу пропускания системы и скорость затухания собственных колебаний, называют отношение

$$Q_s = 2\pi \frac{W}{W_{\Pi}} = \omega_s \frac{W}{P_{\text{п.ср}}}, \quad (7)$$

где W - запасенная при резонансе внутри полости электромагнитная энергия s -го типа колебаний;

W_{Π} - энергия полных потерь за время одного периода T_s ;

$P_{\text{п.ср}}$ - средняя за период мощность полных потерь ($W_{\Pi} = P_{\text{п.ср}} T_s$);

ω_s - частота собственных колебаний.

Связь между добротностью объемного резонатора и длительностью процесса свободных колебаний в нем определяется соотношением:

$$W = W_{\text{нач}} \exp\left(-\frac{\omega}{Q} t\right), \quad (5)$$

где $W_{\text{нач}}$ - начальный запас энергии в резонаторе при $t=0$.

Для нахождения добротности часто используют переход к эквивалентной схеме резонатора. Введение эквивалентных параметров при анализе процессов в резонаторах СВЧ определяется удобством использования колебательных систем с сосредоточенными параметрами при переходе к микроминиатюризации резонаторов, например, для изготовления их методами печатной технологии.

Переход осуществляется по следующему алгоритму.

1. Каждый объёмный резонатор для данного типа колебаний приближённо можно представить в виде эквивалентной схемы с индуктивностью L , ёмкостью C и сопротивлением потерь контура $r = 1/\sigma$ [Ом·м], как показано на рисунке 4, а.

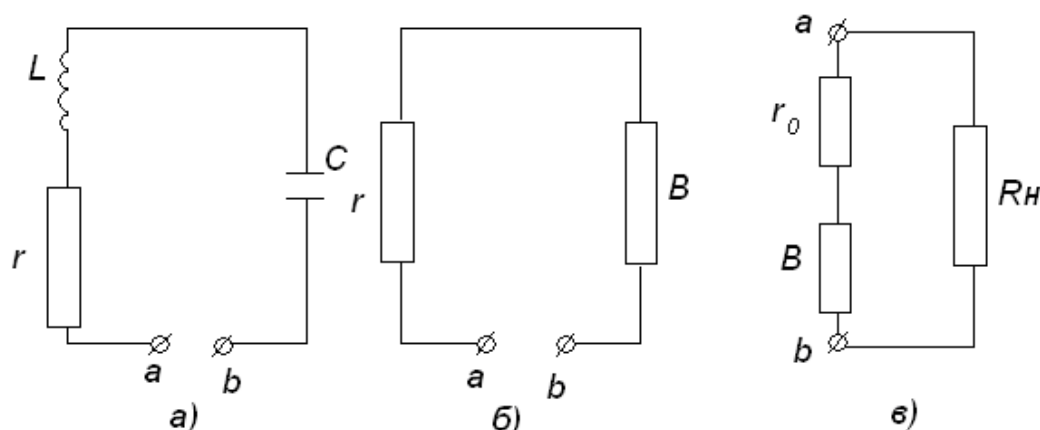


Рисунок 4 - Эквивалентные схемы резонаторов:

а – с индуктивностью L , ёмкостью C и сопротивлением потерь r ;
б – с последовательной реактивностью; в – с внешней нагрузкой

2. Далее осуществляется переход к последовательной реактивности $X = (\omega L - 1/\omega C)$ и реактивной проводимости контура $B = 1/X$ (рисунок 4,б).

Поскольку резонатор может быть дополнен внешней нагрузкой R_n , то сопротивление резонатора представляется в виде

$$r = r_0 + R_n, \quad (6)$$

где r_0 - собственное сопротивление резонатора (рисунок 4,в).

Нагруженная добротность Q_n состоит из собственной (ненагруженной) добротности Q_0 и внешней добротности $Q_{вн}$. Причем

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн}}. \quad (7)$$

Собственная (ненагруженная) добротность Q_0 учитывает энергию, рассеянную в самом резонаторе на резонансной частоте. Добротность, зависящую от мощности полных потерь, часто называют нагруженной добротностью резонатора.

Величина собственной добротности может быть найдена через параметры эквивалентной схемы резонатора:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{C_{\text{э}}}{L_{\text{э}}}} R_{\text{э}} \approx \omega_0 L / r_0. \quad (8)$$

Анализ данных соотношений показывает, что величина собственной добротности не зависит от применяемой эквивалентной схемы, поскольку не зависит от связи.

Собственную добротность можно также выразить через ω_0 и ширину полосы пропускания $\Delta\omega_0$:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}, \quad (9)$$

где $\Delta\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$, а ω_2, ω_1 - частоты половинной мощности.

Внешняя добротность, определяемая свойствами нагрузки, находится по формуле:

$$Q_{вн} \approx \omega_0 L / r_{вн}. \quad (10)$$

Таким образом, собственная добротность определяется потерями в самом резонаторе, а нагруженная добротность зависит еще и от потерь во внешних цепях, подключённых к резонатору через элементы связи. При слабой связи резонаторов с внешними цепями значение нагруженной добротности близко к собственной добротности резонатора.

Для учета влияния каждого источника потерь вводятся частичные добротности. Определение частичных добротностей проводят приближенными методами, основанными на допущении, что мощности потерь являются независимыми друг от друга величинами и могут быть вычислены раздельно.

При нахождении добротности, энергия, запасенная в резонаторе, связана с электрическим или магнитным полем и может быть найдена через максимальную энергию одного из этих полей. В случае однородной среды с параметрами $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}$, заполняющей внутреннюю полость V , согласно теореме Умова-Пойнтинга имеем:

$$W = W_{\text{э.макс}} = \frac{\varepsilon_{a1}}{2} \int_V E_m^2 dV = W_{\text{м.макс}} = \frac{\mu_{a1}}{2} \int_V H_m^2 dV. \quad (11)$$

При заполнении полости средой с потерями ($\sigma_1 \neq 0$) частичная добротность потерь в среде определяется соотношением:

$$Q_{\text{сд}} = \omega_s \frac{W}{P_{\text{д.ср}}} = \omega_s \frac{W}{\frac{\sigma_1}{2} \int_V E_m^2 dV} = \omega_s \frac{\varepsilon_{a1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\text{tg } \delta_1^{\text{э}}}, \quad (12)$$

в котором $\text{tg } \delta_1^{\text{э}}$ - тангенс угла диэлектрических потерь среды на частоте ω_s .

Частичная добротность резонатора, обусловленная мощностью потерь в металлических стенках резонатора, описывается выражением:

$$Q_{\text{с.м}} = \omega_s \frac{W}{P_{\text{м.ср}}} = \omega_s \frac{\mu_{a1} \int_V H_m^2 dV}{r_s \oint_S H_{\tau m}^2 dS}, \quad (13)$$

где $r_s = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega_s}{2\sigma_2}}$ - активное поверхностное сопротивление металлических стенок;

$H_{\tau m}$ - амплитуда касательной к стенке компоненты вектора \vec{H} .

Для колебаний типа H_{101} выражение, описывающее собственную добротность, принимает вид:

$$Q_{H_{101}} = \frac{\omega_{\text{мп}} \mu_a}{r_s} \frac{abd(a^2 + b^2)}{a^3(d + 2b) + d^3(a + 2b)}. \quad (14)$$

Как показывает расчет, собственная добротность прямоугольного резонатора достигает десятков тысяч в сантиметровом диапазоне волн.

Добротность важнейших типов колебаний в цилиндрических резонаторах рассчитываются по формулам:

$$Q_{E_{010}} = \frac{\omega_{\text{мп}} \mu_a}{2r_s} \frac{ad}{a+d}, \quad Q_{E_{011}} = \frac{\omega_{\text{мп}} \mu_a}{2r_s} \frac{ad}{2a+d}, \quad (15)$$

$$Q_{H_{011}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{2r_S \mu_0^2} \frac{\omega_{mnp}^2 \varepsilon_a \mu_a a^2 d}{\frac{d}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{d^2}}. \quad (16)$$

4.4 Длинные линии

Длинные линии: их классификация и параметры. Методика нахождения параметров линии с помощью измерительной линии. Круговая диаграмма полных сопротивлений.

4.4.1 Длинные линии и их параметры

При анализе направляющих систем отмечалось, что основным требованием, предъявляемым к направляющим системам, является минимизация энергетических затрат. Рассмотрим более подробно данный вопрос, опуская анализ структуры электромагнитного поля внутри линии, что позволяет использовать более простой математический аппарат, так называемые **эквивалентные длинные линии**.

Линия называется **длинной**, если длина регулярной линии передачи превышает четверть длины волны в линии λ_d . Напомним, что регулярной линией будет в случае неизменности ее параметров вдоль одной из координат. В направляющих линиях данное требование, в основном, выполняется.

Предположим, что отрезок регулярной линии передачи включен между источником электромагнитных колебаний (генератором) и оконечным устройством (излучающим раскрытом антенны), которое в дальнейшем будем называть **нагрузкой**. Пусть линия работает в одноволновом режиме, что предполагает экспоненциальное затухание амплитуд волн всех типов, кроме низшего, по мере удаления от места возбуждения. При таких условиях обрыв линии передачи и включение нагрузки в общем случае эквивалентны изменению граничных условий. Вызываемое при этом соответствующее изменение структуры электромагнитных полей в линии можно трактовать как появление дополнительной волны, распространяющейся от конца линии к ее началу (**отраженная волна**), как показано на рисунке 1. На достаточно большом (обычно порядка нескольких длин волн) расстоянии от нагрузки в одноволновом режиме структура поля отраженной волны в плоскости поперечного сечения линии практически не отличается от структур волны низшего типа.

Следовательно, если в месте включения нагрузки образуется такая структура поля, что в состав отраженной волны не входит волна низшего типа, то из закона сохранения энергии вытекает, что вся энергия падающей волны поглощается в нагрузке, так как сама линия передачи предполагается без потерь. Говорят, что в этом случае **линия идеально согласована с нагрузкой**, либо, что линия работает в **режиме бегущей волны**.

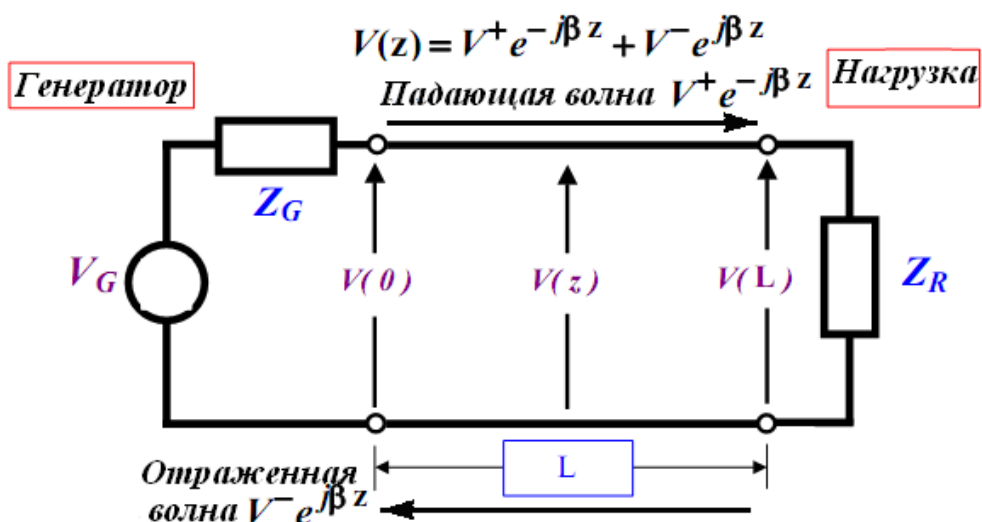


Рисунок 1 – Эквивалентная схема длинной линии

Поскольку процессы, протекающие в длинной линии, определяются амплитудно-фазовыми соотношениями между падающей и отраженной волнами, то при проектировании регулярных линий передачи может быть использован упрощенный математический аппарат, исключающий информация о структуре полей в линии с использованием **эквивалентных длинных линий (схем замещения)**. При этом электромагнитные процессы описываются не величинами напряженностей электрического и магнитного полей, а их эквивалентами – величинами напряжения и тока.

Физические свойства длинной линии определяются значениями четырех распределенных вдоль ее длины параметров: индуктивности L , емкости C , продольного активного сопротивления R и поперечной активной проводимости G . Данные величины составляют систему первичных параметров линии. Если эти параметры распределены вдоль линии равномерно (т.е. не зависят от z), то **линия** называется **однородной**. В противном случае - **неоднородной** линией.

Для однородных линий вводятся понятия погонных параметров, рассчитанных на единицу длины. Кроме того, поскольку в радиотехнике длинные линии применяются на сравнительно высоких частотах, то оказывается возможным пренебречь потерями энергии в активных сопротивлениях, т.е. исключить из рассмотрения погонное сопротивление и погонную проводимость. Линии, в которых такое пренебрежение допустимо, называются **линиями без потерь**. В соответствии с данным подходом любой бесконечно малый отрезок линии dz , из показанной на рисунке 2,а двухпроводной длинной линии с комплексным сопротивлением нагрузки $Z_n = R_n + iX_n$, может быть заменен на эквивалентную схему (рисунок 2,б). На данной схеме стрелками обозначены направления отсчета напряжения U и тока I в линии; dU и dI – приращения напряжения и тока в линии на элементе длины dz . С использованием эквивалентной схемы (рисунок 2,б) выражения для приращения напряжения и тока можно записать в виде:

$$dU = I(dR + i\omega dL), \quad dI = U(dG + i\omega dC). \quad (1)$$

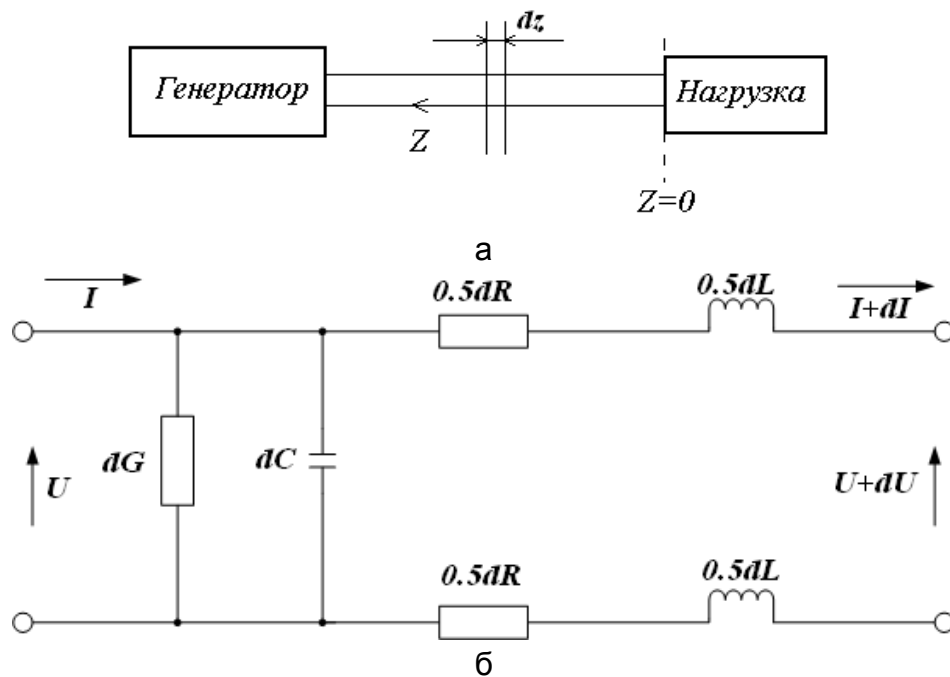


Рисунок 2 – Введение эквивалентной схемы

Подставляя в данные выражения значения параметров схемы $dR = Rdz$, $dG = Gdz$, $dC = Cdz$, $dL = Ldz$, $Z = R + i\omega L$, $Y = G + i\omega C$, несложно записать **телеграфные уравнения длинной линии**:

$$\frac{dU}{dz} = IZ, \quad \frac{dI}{dz} = UY. \quad (2)$$

После преобразований данных уравнений можно получить **однородные волновые уравнения длинной линии**:

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0, \quad \frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0. \quad (3)$$

В данных уравнения коэффициент

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \alpha + i\beta \quad (4)$$

называется **коэффициентом распространения в длинной линии**.

Решения уравнений (3) известны и могут быть записаны в виде:

$$U = A_U \exp(\gamma z) + B_U \exp(-\gamma z), \quad I = A_I \exp(\gamma z) + B_I \exp(-\gamma z). \quad (5)$$

Несложно заметить, что первое слагаемое в данных соотношениях описывает падающую волну напряжения или тока, распространяющуюся от генератора к нагрузке, а второе – отраженную волну, распространяющуюся от нагрузки к генератору. Коэффициенты A_U , A_I представляют собой комплексные амплитуды падающих волн напряжения и тока соответственно, а коэффициенты B_U , B_I – комплексные амплитуды отраженных волн напряжения и тока.

Степень согласования линии передачи с нагрузкой характеризуется **комплексным коэффициентом отражения по напряжению**, определяемому выражением:

$$\Gamma = \frac{B_U}{A_U}. \quad (6)$$

Модуль коэффициента отражения изменяется в пределах $0 \leq |\Gamma| \leq 1$. Коэффициент отражения может быть найден либо на нагрузке, либо в определенной точке линии. В последнем случае выражение для его определения принимает вид:

$$\Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(2i\gamma z), \quad (7)$$

где $\Gamma(0)$ - коэффициент отражения в нагрузке (т.е. сечении $z=0$).

Подставив выражение (7) в соотношения (5), получаем два соотношения, часто используемых при расчетах длинных линий:

$$Z_H / W = \tilde{Z}_H = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}, \quad (8a) \quad \Gamma = W \frac{1 - \tilde{Z}_H}{1 + \tilde{Z}_H}. \quad (8b)$$

Отметим два факта. Во-первых, при проведении расчетов параметров тракта волновое сопротивление линии W (характеристическое сопротивление линии), зависящее от электродинамических параметров линии, считается известной величиной. Во-вторых, все расчеты выполняются для нормированных к данному значению величин нагрузок \tilde{Z}_H .

Для оценки степени согласования линии с нагрузкой вводится понятие **коэффициента бегущей волны** КБВ:

$$КБВ = \frac{|A_U| - |B_U|}{|A_U| + |B_U|} = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|}. \quad (9)$$

Однако на практике современные приборы на индикаторных устройствах отображают обратную величину – меру рассогласования - коэффициент стоячей волны:

$$КСВ = \frac{|A_U| + |B_U|}{|A_U| - |B_U|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}. \quad (10)$$

Пределы изменения данных коэффициентов составляют: $0 \leq КБВ \leq 1$ и $1 \leq КСВ < \infty$.

В линии без потерь на основе модуля коэффициента отражения по напряжению несложно вычислить и коэффициент полезного действия η :

$$\eta = 1 - |\Gamma|^2. \quad (11)$$

Важной характеристикой длинной линии является входное сопротивление линии, которое определяется в каждом сечении линии как отношение напряжения к току в этом сечении:

$$Z_{\text{вх}}(z) = \frac{U(z)}{I(z)} \quad (12a)$$

Как и для коэффициента отражения, рассчитывается также входное сопротивление линии в начале цепи:

$$Z_{\text{вх}}(z) = W \frac{1 - \Gamma(0) \exp(-2\gamma z)}{1 + \Gamma(0) \exp(-2\gamma z)}, \quad (12b)$$

Для **согласованной линии** $\tilde{Z}_H = 1$ и входное сопротивление линии равно ее волновому сопротивлению $\tilde{Z}_{\text{вх}} = 1$. Поскольку напряжение и ток в линии изменяются от сечения к сечению, то входное сопротивление линии изменяется относительно продольной координаты. При этом говорят о трансформирующих свойствах линии, а саму линию рассматривают как трансформатор.

Различают **три режима работы линии без потерь**: режим бегущей волны, режим стоячей волны и режим смешанных волн.

Режим бегущей волны характеризуется наличием только падающей волны, распространяющейся от генератора к нагрузке. Отраженная волна отсутствует. Мощность, переносимая падающей волной, полностью выделяется в нагрузку. В этом режиме $|\Gamma| = 0$, КБВ=КСВ=1.

Режим стоячей волны характеризуется тем, что амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей, т.е. энергия падающей волны полностью отражается от нагрузки и возвращается в обратном направлении в генератор. В этом режиме $|\Gamma| = 1$, КБВ=0, КСВ=∞.

В режиме смешанных волн часть мощности падающей волны теряется в нагрузке, а оставшаяся часть в виде отраженной волны возвращается обратно в генератор.

4.4.2 Методика нахождения параметров линии с помощью измерительной линии

Для исследования электрического поля вдоль СВЧ-линии передач используется прибор, называемый измерительная линия. Измерительные линии применяются на частотах от сотен мегагерц до сотен гигагерц. Прибор представляет собой отрезок коаксиальной (рисунок 3) и волноводной линии (рисунок 4) с перемещающимся вдоль него индикатором, отмечающим узлы пучности электрического поля. Как известно, распределение напряжения в линии с использованием коэффициента отражения, описывается соотношением:

$$U(z) = \sqrt{1 + 2|\Gamma| \cos(\arg(\Gamma) - 2\beta z) + |\Gamma|^2}, \quad (13)$$

где $|\Gamma|$ - модуль коэффициента отражения;

$\arg(\Gamma)$ - фаза коэффициента отражения;

β - коэффициент фазы в линии;

z – положение сечения, в котором рассчитывается напряжение.

Пример распределения напряжения имеет вид, показанный на рисунке 5.

В измерительных линиях в качестве измеряемой выступает величина, характеризующая отношение высокочастотного напряжения в максимуме к напряжению в минимуме стоячей волны, т.е. КСВН. Данный параметр связан с максимальным и минимальным значениями напряжения в линии U_{\max} и U_{\min} соотношением:

$$\text{КСВ} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}. \quad (14)$$

Методика измерения параметров в линии следующая.

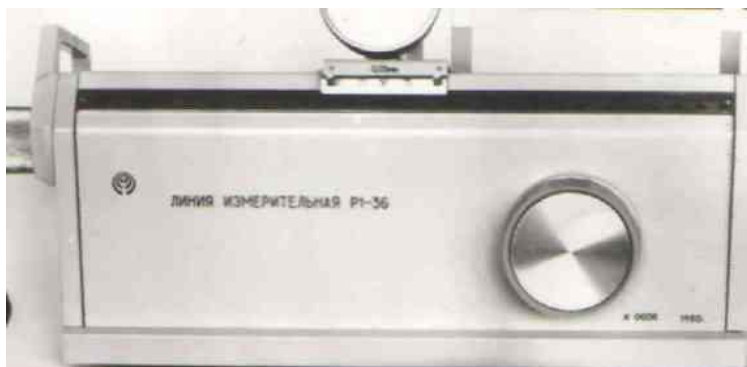


Рисунок 3 – Измерительная линия на основе отрезка коаксиального кабеля

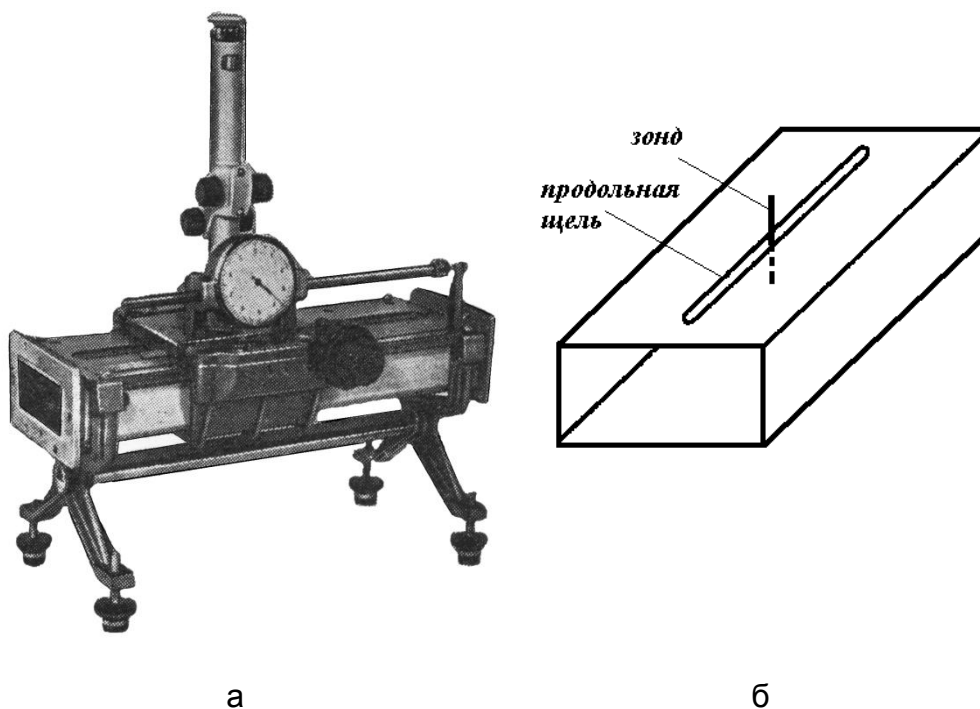


Рисунок 4 – Измерительная линия на основе волновода

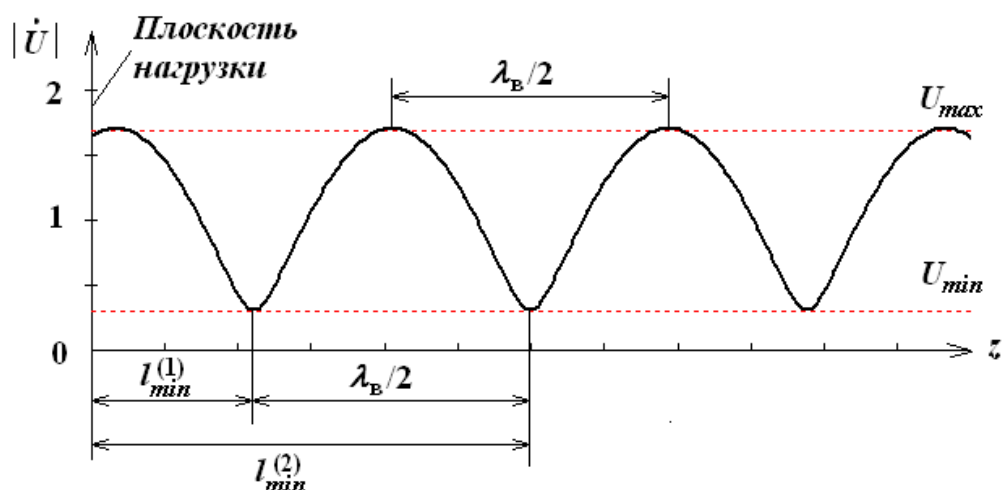


Рисунок 5 – График распределения напряжения в измерительной линии

1. По измеренному распределению напряжения в линии определить минимальное U_{min} и максимальное U_{max} значения напряжения.
2. По формуле (14) вычислить значение КСВН.
3. По известному значению КСВ вычисляется модуль комплексного коэффициента отражения:

$$|\Gamma| = \frac{КСВ - 1}{КСВ + 1}. \quad (15)$$

По измеренным данным вычисляется длины волны в линии. Для этого на графике вычисляются ординаты соседних узлов (минимумов или максимумов). Длина волны в линии определяется по формуле

$$\lambda_B = 2(\ell_{min}^{(2)} - \ell_{min}^{(1)}) \text{ или } \lambda_B = 2(\ell_{max}^{(2)} - \ell_{max}^{(1)}). \quad (16)$$

5. Определение фазы φ коэффициента отражения. С этой целью сначала измеряется положение первого от нагрузки минимума узла стоячей волны ℓ_{min} , соответствующее значению $\ell_{min}^{(1)}$ на рисунке 5.

6. Нахождение коэффициента фазы:

$$\varphi = 2\beta\ell_{min} - \pi, \quad (17) \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_B}. \quad (18)$$

7. Рассчитывается комплексный коэффициент отражения по формуле:

$$\Gamma = |\Gamma| \exp(i\varphi). \quad (19)$$

В случае подключения к концу линии реактивной нагрузки сдвиг фаз между падающей и отраженной волнами определяется типом нагрузки. Примеры распределения нормированного к напряжению падающей волны напряжения в линии в зависимости от величины коэффициента отражения для различных режимов работы линии приведены на рисунке 6. При этом случай $|\Gamma|=1$ соответствует полному отражению от нагрузки (режим стоячей волны,

рисунки 6,а,б), а $|\Gamma| = 0$ - отсутствию отраженной волны в линии (режим бегущей волны, рисунок 6,в). Модуль коэффициента отражения изменяется в пределах $0 \leq |\Gamma| \leq 1$ (режим смешанных волн, рисунок 6,г). Следует отметить, что режим стоячих волн возникает при трех типах нагрузок: бесконечно большой нагрузке – линия разомкнута на конце (режим холостого хода) – рисунок 6,а; нулевой нагрузке – линия замкнута на конце (режим короткого замыкания) – рисунок 6,б; реактивной нагрузке.

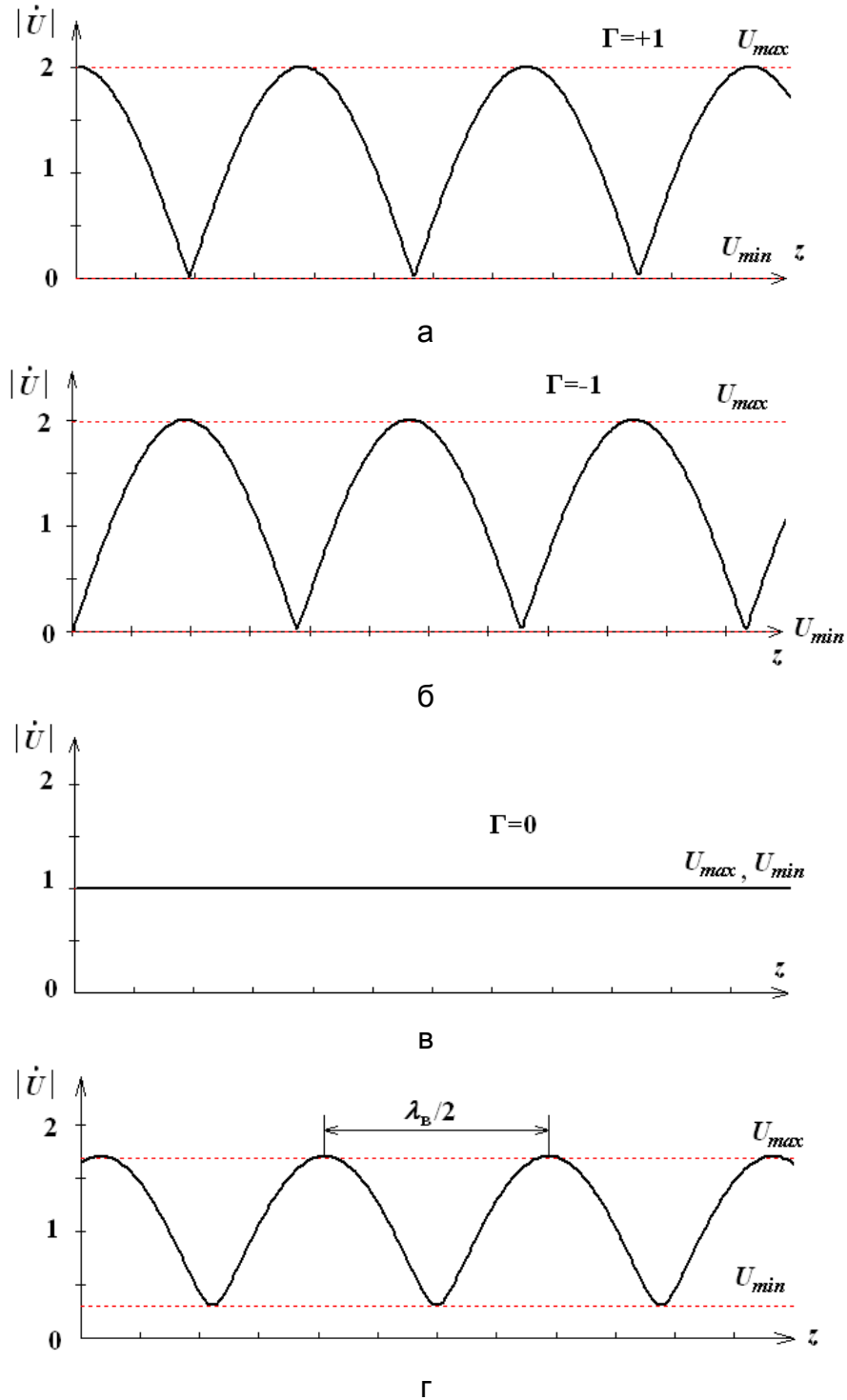


Рисунок 6 – Виды получаемых распределений напряжения в линии

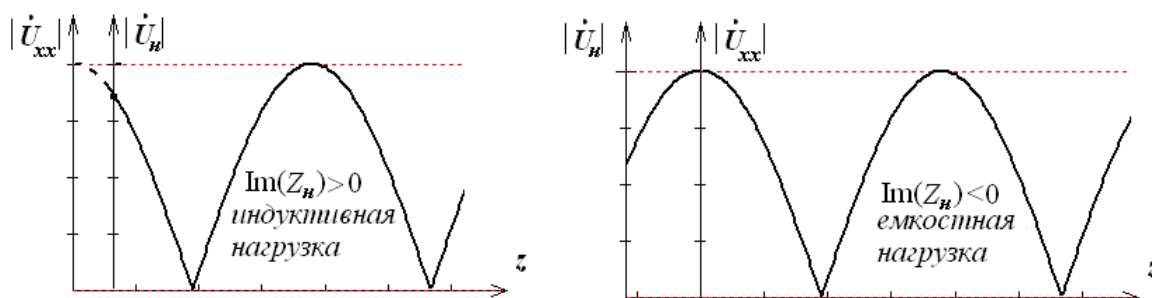


Рисунок 7 – Виды распределений для индуктивной и емкостной нагрузок

4.4.3 Круговая диаграмма полных сопротивлений

Круговые диаграммы, называемые также номограммами Вольперта (в США – диаграммы Смита), в технике линий передачи высокой частоты имеют важное практическое значение. Они существенно упрощают вычислительную работу и позволяют достаточно наглядно представить почти все вопросы при решении задач теории длинных линий. Круговые диаграммы устанавливают связь между активной и реактивной составляющими входного сопротивления линии, электрической длиной, сопротивлением нагрузки и коэффициентом отражения. Наибольшее практическое значение имеет круговая диаграмма, построенная в плоскости комплексного коэффициента отражения, где в качестве осей координат используется действительная и мнимая составляющие коэффициента отражения.

Линии постоянного активного сопротивления представляют собой семейство окружностей, центры которых лежат на одной прямой (вертикальной оси) и имеют общую касательную точку, соответствующую бесконечно большому сопротивлению.

Линии постоянного реактивного сопротивления представляют собой семейство дуг окружностей. Правая часть дуг соответствует индуктивным сопротивлениям ($+jx$), а левая – емкостным ($-jx$).

Линии неизменного коэффициента бегущей волны представляют собой концентрические окружности, центры которых лежат на середине вертикальной оси диаграммы. Эта ось является геометрическим местом точек, где реактивные сопротивления равны нулю.

Значения электрической длины линии нанесены по окружности, окаймляющей диаграмму. Эти значения нормированы по отношению к длине волны и отсчитываются от верхней точки вертикальной оси.

Линии описанных выше четырех типов образуют круговую диаграмму сопротивлений, изображенную на рисунке 8. Рассмотрим пример применения круговой диаграммы полных сопротивлений для решения задачи нахождения параметров длинной линии.

По заданному комплексному сопротивлению нагрузки $Z = 25 + i100$ Ом и характеристическому сопротивлению линии $W = 50$ Ом определить коэффициент отражения в линии.

Решение задачи будем проводить следующим образом.

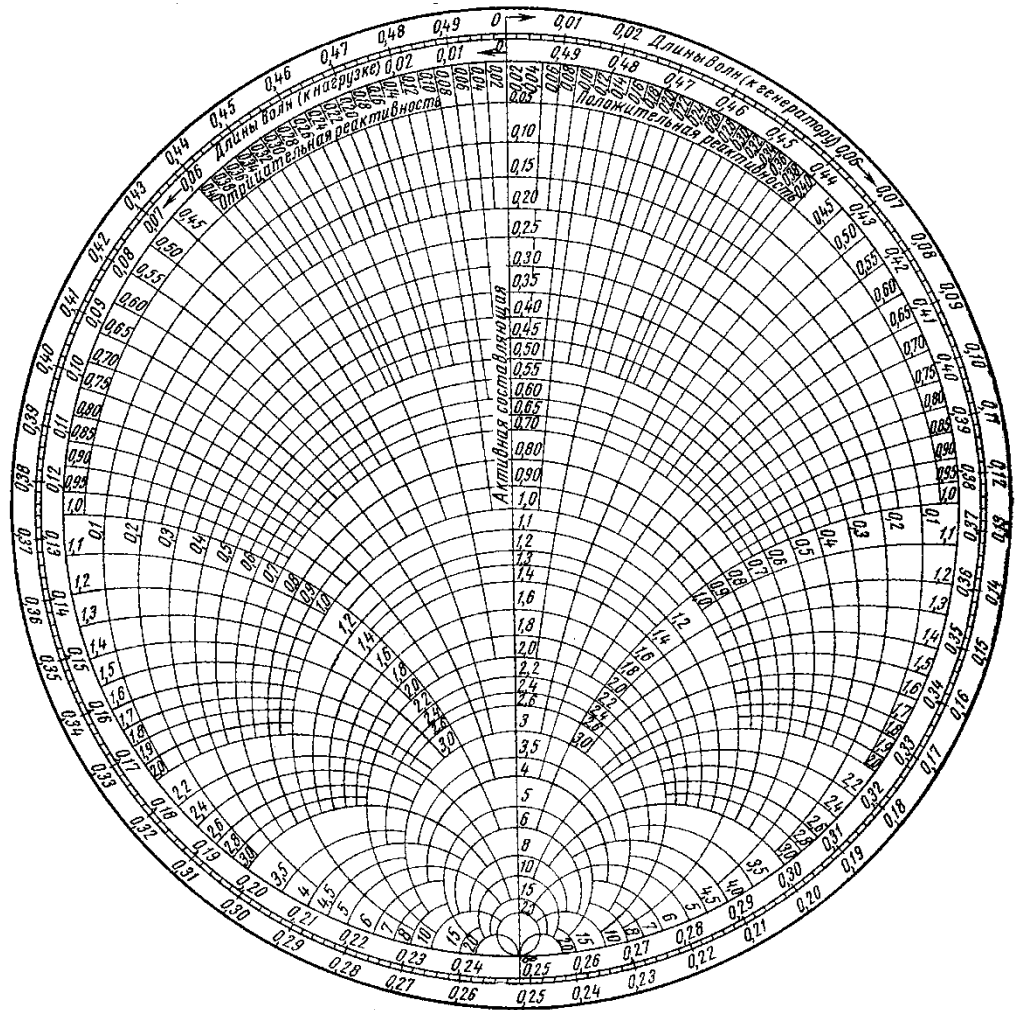


Рисунок 8 – Вид сетки для построения номограммы

1. Определим нормированное сопротивление нагрузки, как показано на рисунке 9:

$$z = \frac{Z}{W} = (25 + i100) / 50 = 0.5 + i2.0. \quad (20)$$

2. На диаграмме Вольперта ищем окружность, имеющую радиус $r = 0.5$
3. Далее выполняется поиск дуги, соответствующей значению реактанса $x = +2.0$.

Точка пересечения найденной окружности и дуги соответствует концу радиус-вектора, описывающего величину комплексного значения коэффициента отражения Γ : радиус, проведенной из естественного центра окружности описывает модуль $|\Gamma|$ комплексного коэффициента отражения, а фаза коэффициента отражения может быть найдена по ободу диаграммы Вольперта.

1. Нормировка
 $z(d) = (25 + j 100)/50$
 $= 0.5 + j 2.0$

3. Поиск дуги реактанса
 $x = 2.0$

2. Поиск окружности сопротивления
 $r = 0.5$

4. Векторное представление КО
 $\Gamma(d) = 0.52 + j0.64$
 $|\Gamma(d)| = 0.8246$
 $\angle \Gamma(d) = 0.8885 \text{ rad}$
 $= 50.906^\circ$

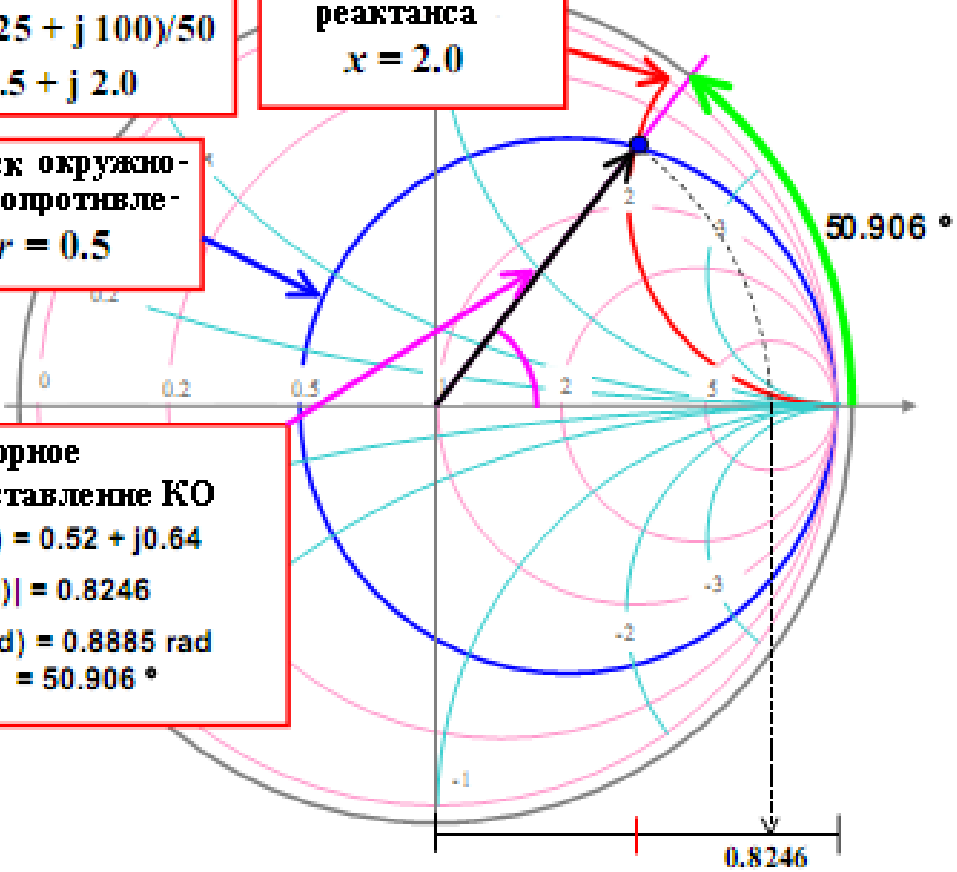


Рисунок 9 – Построение диаграммы Вольперта

Модуль 5. Дифракция электромагнитных волн

5.1 Электродинамические задачи дифракции

Строгая постановка дифракционных задач. Метод разделения переменных. Дифракция электромагнитных волн на бесконечном идеально проводящем круглом цилиндре.

5.1.1 Строгая постановка дифракционных задач. Метод разделения переменных

При своем распространении электромагнитные волны сталкиваются с телами, расположенными как вблизи, так и вдали от источников электромагнитного поля. При этом наблюдается огибание и отражение электромагнитной волной от поверхности тела, что приводит к изменению структуры излученного источником поля. Явление изменения структуры поля первичной волны при падении ее на тело называется **дифракцией**.

Волна называется **первичной**, если она возбуждается сторонними токами, возникающими в результате действия источников, имеющих неэлектромагнитную природу, или является приходящей из бесконечности. Рассеянное телом электромагнитное поле будем называть **вторичной волной**. Данное разделение основывается на причинно-следственной связи и является условным. Сумма первичного и вторичного полей называется **полным полем**, что проиллюстрировано на рисунке 1.

Полное поле = первичная волна + вторичная волна

Рисунок 1. – Составляющие полного поля

Исследования явлений дифракции на реальных телах, имеющих различные конфигурации, размеры и другие параметры, можно проводить аналитическими и численными методами, а также экспериментально. При этом точные аналитические методы решения дифракционных задач, полученные в замкнутой форме, предполагают решение дифференциальных уравнений в частных производных в той системе координат, в которой координатные поверхности совпадали или были близки к граничным поверхностям. Данные поверхности получили название канонических. Примеры канонических поверхностей приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Примеры канонических поверхностей

| Система координат | Декартова | Цилиндрическая | Сферическая |
|--------------------------|-----------|------------------------|-------------|
| Каноническая поверхность | Плоскость | Круговой цилиндр, клин | Шар, сфера |

Для канонических поверхностей можно получить а) отдельные решения для компонент электрического и магнитного полей; б) решения в аналитическом виде

(замкнутой форме), обеспечивающие требуемую точность не в дискретном, а в непрерывном пространстве.

Для ряда поверхностей более сложной формы можно для анализа использовать метод конформных отображений. Однако в случае сложных граничных поверхностей отображающую комплексную функцию найти не удастся. Анализ дифракционных полей таких сложных тел проводят с помощью численных методов.

Строгая постановка дифракционных задач включает три ключевых слова: «Пусть», «Ограничения», «Требуется». Например, **пусть** имеется тело, геометрия поверхности S которого описывается какой-то функцией \mathfrak{R} . На данное тело падает электромагнитная волна $(\vec{E}^{\text{пад}}, \vec{H}^{\text{пад}})$, возбуждаемая источником заданного вида. В качестве **ограничений** на получаемое решение используются граничные условия на поверхности тела. **Требуется** найти полное поле в произвольной точке. Геометрия задачи показана на рисунке 2.

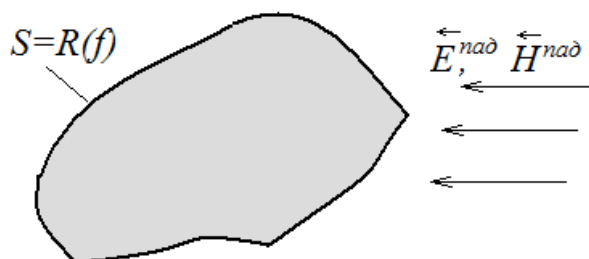


Рисунок 2. – Геометрия задачи дифракции

Еще одним важным моментом при решении задачи дифракции является выбор системы координат для представления поля. Выбор системы координат определяется удобством записи рассеянного (дифракционного) поля. Именно в данной системе координат и формулируется падающее поле.

Одним из аналитических методов, позволяющих получить решение в замкнутой форме, является **метод разделения переменных (метод собственных функций, МСФ)**. Рассмотрим основные моменты его применения. Данный метод может быть использован, когда координатные поверхности совпадают с граничными поверхностями тела. Решение дифференциального уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

представляется в виде произведения

$$\psi(x, y) = M(x)N(y) \quad (2)$$

или произведения сумм неизвестных функций $M(x), N(y)$, каждая из которых зависит только от одной координаты. Подставив выражение (2) в уравнение (1) и почленно разделив на произведение $M(x)N(y)$, получаем:

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = - \frac{1}{N(x)} \frac{d^2 N(x)}{dx^2} = K^2. \quad (3)$$

Появление постоянной разделения K^2 обусловлено тем, что левая и правая части уравнения зависят от разных переменных. Уравнение (3) может быть разделено на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \pm K^2 M(x), \quad \frac{d^2 N(x)}{dx^2} = \mp K^2 N(x). \quad (4)$$

Решение уравнений (4) при верхнем сочетании знаков при постоянной разделения имеет вид:

$$M(x) = A \cos Kx + B \sin Kx, \quad (5a)$$

$$N(y) = C \operatorname{ch} Ky + D \operatorname{sh} Ky. \quad (5b)$$

При обратном сочетании знаков при постоянной разделения гиперболические и тригонометрические функции меняются местами.

Сначала находится та независимая функция, по переменной которой заданы нулевые граничные условия, например, $M(x)$. Данная функция будет удовлетворять заданным однородным граничным условиям и не будет равна нулю (что не представляет интереса) только при определенных значениях чисел K_n . Числа K_n в общем случае вычисляют, приравнявая к нулю главный определитель системы уравнений, полученной путем подстановки решения $M_n(Kx)$ в выражение для граничных условий (при $x = a$ и $x = b$). Определитель составляют из коэффициентов при A_n и B_n , которые рассматривают как искомые величины. Затем какое-либо значение из найденных чисел K_n подставляют в эту систему уравнений и находят одну из постоянных, например, A , выраженную через B . Однако числа K_n в ряде случаев могут быть рассчитаны без составления системы уравнений, непосредственно по граничным условиям, с учетом свойств искомого поля. При известных значениях K_n частное решение имеет вид:

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \cos K_n x + B_n \sin K_n x)(C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y)\}. \quad (6)$$

Постоянные C_n, D_n определяют из неоднородных граничных условий по переменной y .

5.1.2 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящем бесконечном круглом цилиндре

Рассмотрим получение точного решения для одной из канонических поверхностей – бесконечного круглого (кругового) цилиндра - с использованием метода разделения переменных.

Постановка задачи звучит следующим образом.

Пусть на бесконечный круговой цилиндр радиуса a падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении, перпендикулярном образующей цилиндра.

Ограничение: на поверхности выполняются граничные условия для идеально проводящего тела.

Требуется определить вторичное электромагнитное поле, возникающее в пространстве.

Для кругового цилиндра известна система координат, одна из координатных поверхностей совпадает с поверхностью цилиндра. Ею является в цилиндрической системе координат, ось Oz которой параллельна образующей цилиндра. В связи с этим решение задачи дифракции будем искать в данной системе координат.

Поскольку в условии задачи дифракции ничего не говорится о поляризации падающей волны, то целесообразно рассматривать два случая поляризации падающей волны относительно оси Oz :

- вектор \vec{E} параллелен оси Oz ;

- вектор \vec{H} параллелен оси Oz .

Общий случай произвольной поляризации падающей волны может быть получен суперпозицией данных решений. Поскольку методика решения обеих задач одинакова, ограничимся анализом только первого варианта. Геометрия задачи приведена на рисунке 3.

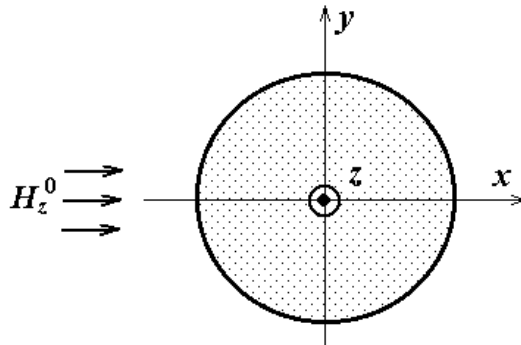


Рисунок 3 – Геометрия задачи дифракции

В соответствии с исходными данными проекции векторов поля падающей волны будут иметь вид:

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp(-ikr \cos \varphi), \quad H_z = 0. \quad (7)$$

Поперечные компоненты поля, как было показано при рассмотрении регулярных линий передачи электромагнитной энергии, могут быть получены на основе уравнений Максвелла через продольные составляющие поля.

Строгое решение дифракционной задачи сводится к решению уравнений Максвелла при заданных граничных условиях для составляющих электромагнитного поля на поверхности цилиндра и на бесконечности. В качестве граничных условий выступает требование непрерывности касательных к

поверхности цилиндра составляющих векторов результирующего электромагнитного поля на поверхности цилиндра. На бесконечности вторичное поле должно удовлетворять принципу излучения (условиям Зоммерфельда).

Рассеянное поле удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \partial \left(\frac{r E_z^{pac}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z^{pac}}{\partial \varphi^2} + k^2 E_z^{pac} = 0. \quad (8)$$

Граничное условие для полного поля на поверхности определяется выражением

$$E_z^{пад} + E_z^{pac} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (9)$$

При использовании метода разделения переменных в виде произведения двух функций, зависящих только от r и только от φ

$$E_{zm}^{pac} = R_m(r) \Phi_m(\varphi), \quad (10)$$

уравнение (8) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial^2 R_m(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_m(r)}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m(r) = 0, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_m(\varphi)}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi_m(\varphi) = 0, \quad (11b)$$

где m – постоянная разделения.

Как известно, решение дифференциального уравнения (11b) имеет вид

$$\Phi_m(\varphi) = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi. \quad (12)$$

Решение (12) включает два слагаемых, различающихся четностью входящих в них функций. Для выбора однозначного решения используют информацию о четности (нечетности) функций, описывающих падающее поле. В связи с этим представим падающее поле в виде известного из теории бесселевых функций разложения

$$E_z^{пад} = E_0 \exp(ika \cos \varphi) = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m J_m(ka) \cos m\varphi, \quad (13)$$

в котором $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$ - числа Неймана; $J_m(\cdot)$ - функция Бесселя m -го

порядка.

С учетом того, что зависимость E_z в падающем поле в формуле (13) представляет собой четную функцию (функцию косинуса), то в соотношении (12) необходимо оставить только первое слагаемое и положить $C_2 = 0$. Число m должно быть целым, чтобы функция из (12) и ее производная были непрерывны во всей области $[0, 2\pi]$.

После того как определена целочисленность m , получаем, что (11а) есть уравнение для цилиндрической функции порядка m от аргумента kr . Общее решение данного уравнения, называемогося **уравнением Бесселя**, имеет вид:

$$R_m(kr) = A'_m J_m(kr) + B'_m Y_m(kr), \quad (14a)$$

$$R_m(kr) = A_m H_m^{(1)}(kr) + B_m H_m^{(2)}(kr). \quad (14б)$$

В данных соотношениях $H_m^{(1)}(\cdot), H_m^{(2)}(\cdot)$ - функции Ганкеля соответственно 1-го и 2-го рода m -го порядка, рассмотренные ранее при изучении цилиндрических волн и функции Грина; $Y_m(\cdot)$ – функция Неймана m -го порядка.

Для выбора решения используем условие излучения. В соответствии с данным условием искомое поле должно иметь характер волны, распространяющейся в бесконечность по радиальным направлениям. Из рассмотрения асимптотических выражений для функций Ганкеля:

$$H_m^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right], \quad (15a)$$

$$H_m^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right], \quad (15б)$$

справедливых при больших значениях аргументов $|z| \gg 1; |z| \gg m$, следует, что слагаемое $B_m H_m^{(2)}(kr)$ из (14б) при $kr \rightarrow \infty$ соответствует волне, распространяющейся от источника (в данном случае цилиндра) на бесконечность, т.е. удовлетворяет условию излучения.

Таким образом, решение однородного уравнения Гельмгольца ищем в виде

$$E_z = E_z^{\text{пад}} + \sum_m B_m H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi. \quad (16)$$

Коэффициенты B_m можно найти из последнего неиспользованного условия задачи – граничного условия (9), которое приводит к простому функциональному уравнению:

$$E_z^{\text{пад}} \Big|_{r=a} + \sum_m B_m H_m^{(2)}(ka) \cos m\varphi = 0, \quad (17)$$

которое должно выполняться для всех φ . Функции $\cos m\varphi$ образуют полную ортогональную систему. Домножим каждое из слагаемых в левой части (17) на $\cos n\varphi$ и проинтегрируем в пределах $[0, 2\pi]$. Ортогональность функций означает, что

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}.$$

С учетом последнего равенства из (17) получаем соотношение

$$B_m = -E_0 (-i)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}. \quad (18)$$

С учетом вида коэффициента дифракции B_m продольная компонента E_z полного поля (16) может быть записана в виде:

$$E_z = -E_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J_m(ka) \cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(kr). \quad (19)$$

Чтобы найти закон распределения тока, возбуждаемого на поверхности цилиндра полем плоской волны, необходимо вычислить φ – компоненту вектора напряженности магнитного поля. Используя связь между продольными и поперечными компонентами поля, запишем сразу окончательное выражение:

$$H_\varphi = \frac{i}{kW_0} E_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J_m(ka) \cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr}, \quad (20)$$

где $W_0 = 120\pi$ Ом – волновое сопротивление свободного пространства.

Так как вектор плотности тока на поверхности цилиндра равен

$$\vec{i}_z j_z = \left(\vec{H}^{\text{пад}} + \vec{H}^{\text{рас}} \right) \times \vec{n} = i_z \left(H_\varphi^{\text{пад}} + H_\varphi^{\text{рас}} \right), \quad (21)$$

то, подставляя в данное соотношение формулу (20), можно записать:

$$j_z = \frac{E_z^{\text{пад}} \cos \varphi}{W_0} + \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J_m(ka) \cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr}. \quad (22)$$

Учитывая представление падающего поля в ряд по функциям Бесселя, преобразуем данное соотношение к виду:

$$j_z = \frac{E_0}{W_0} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \cos m\varphi \left(J'_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr} \right). \quad (23)$$

Вынесем знаменатель за скобку, а к скобке применим определение вронскиана, учитывая, что ток ищется на поверхности цилиндра, т.е. $r = a$:

$$J'_m(ka)H_m^{(2)}(ka) - J_m(ka) \frac{dH_m^{(2)}(ka)}{da} = \frac{2}{i\pi ka}. \quad (24)$$

В результате получаем следующее выражение для продольной компоненты вектора плотности поверхностного электрического тока, возбуждаемого на поверхности идеально проводящего кругового цилиндра поперечно-электрической электромагнитной волной, проходящей перпендикулярно образующей цилиндра:

$$j_z = -\frac{2E_0}{W_0\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{\cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)}. \quad (25)$$

Суммирование в формуле (25) проводится до значений m , близких к величине $2ka$.

Повторяя аналогичные рассуждения для второй поляризации и учитывая, что граничные условия в данном случае будут иметь вид:

$$\left. \frac{\partial (H_z^{\text{пад}} + H_z^{\text{рас}})}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (26)$$

запишем сразу уравнение для нахождения коэффициентов дифракции:

$$\left. \frac{\partial H_z^{\text{пад}}}{\partial r} \right|_{r=a} + \sum_m A_m \frac{\partial H_m^{(2)}(ka)}{\partial a} \cos m\varphi = 0. \quad (27)$$

Решая данное уравнение, получаем следующее выражение для коэффициента дифракции:

$$A_m = (-i)^m \frac{\frac{\partial J_m(ka)}{\partial a}}{\frac{\partial H_m^{(2)}(ka)}{\partial a}} = (-i)^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)}. \quad (28)$$

Соотношение для возбуждаемого поверхностного тока при этом принимает вид:

$$j_\varphi = -\frac{2H_0}{i\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{\cos m\varphi}{H_m^{(2)'}(ka)}. \quad (29)$$

Следует отметить, что представление решения данной краевой задачи методом разделения в виде ряда было впервые получено в 1882г. Рэлеем, а сами ряды получили названия рядов Рэля.

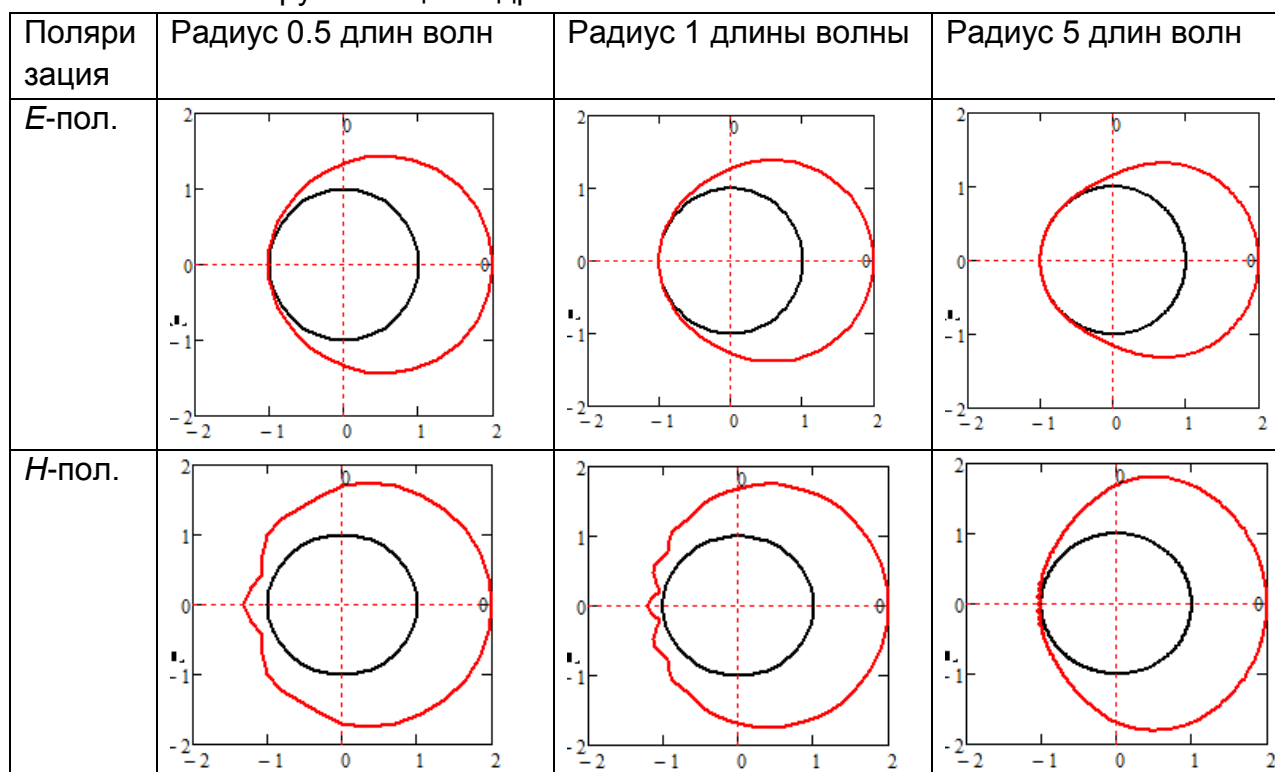
В настоящее время **рядом Рэля** называется бесконечная линейная комбинация элементарных волн, имеющих только одно из возможных направлений распространения в выбранной системе координат. Под **элементарными волнами** понимаются частные решения однородных стационарных волновых уравнений в свободном пространстве в заданной криволинейной ортогональной системе координат. Обычно ими являются цилиндрические, сферические или плоские волны.

В таблице 2 приведены примеры распределения амплитуды поверхностного тока, возбуждаемого волнами E - и H -поляризации, на круговых цилиндрах различного радиуса.

Анализ данной таблицы показывает, что в случае падения волны H -поляризации возбуждаемый на поверхности электрический ток имеет поперечную (j_φ) составляющую. Вследствие этого на теневой поверхности цилиндра наблюдаются сильные осцилляции амплитуды, обусловленные явлением интерференции двух волн тока, затекающих сверху и снизу их из освещенной области цилиндра. В случае падения волны E -поляризации поверхностный ток имеет продольную (j_z) составляющую. Вследствие этого амплитуды волн, затекающих в область существенно ниже, что отражается в практическом

отсутствии осцилляций в области тени. Данный эффект особенно наглядно проявляется на цилиндрах малого радиуса.

Таблица 2 – Распределение амплитуды поверхностного тока на круговом цилиндре



5.2 Дифракция электромагнитных волн на клине и шаре

Дифракция электромагнитных волн на бесконечном идеально проводящем клине и полуплоскости. Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящей шаре.

5.2.1 Дифракция электромагнитных волн на бесконечном идеально проводящем клине и полуплоскости

Задача о нахождении дифракционного поля на клине, как и рассмотренная на предыдущей лекции задача дифракции на круговом цилиндре, относится к канонической. Получаемое решение имеет важное практическое применение, поскольку позволяет моделировать волновые процессы при наличии острых кромок и ребер, включая и края тонких экранов.

Для решения указанной задачи введем цилиндрическую систему координат $O r \varphi z$ (рисунок 1) так, чтобы ось Oz была совмещена с ребром клина, а угол φ будем отсчитывать от освещенной грани.

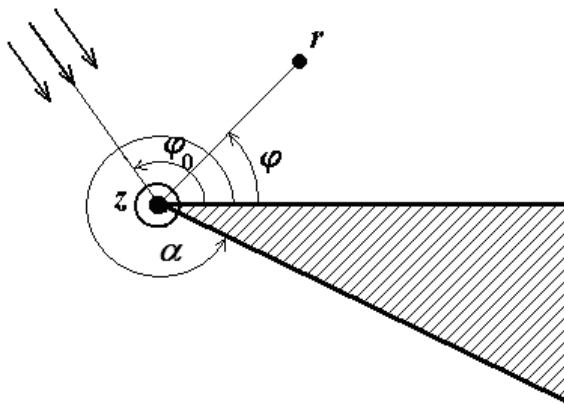


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Плоская однородная электромагнитная E -поляризованная волна падает с направления φ_0 . В данном случае задача не обладает аксиальной симметрией, поэтому падающее поле на основе теории плоских волн может быть записано в виде

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (1)$$

Решение задачи будем осуществлять методом разделения переменных, вследствие этого рассеянное поле, как и в случае решения задачи дифракции на круговом цилиндре, представим в виде ряда Рэлея, построенного относительно функций $R_m(r)$ и $\Phi_m(\varphi)$ с неизвестными коэффициентами. Граничные условия для идеально проводящего клина могут быть записаны следующим образом:

$$E_z = 0 \Big|_{\varphi = 0, \alpha}. \quad (2)$$

При таких граничных условиях решения уравнений для функции $\Phi_m(\varphi)$ и $R_m(r)$ имеют вид

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \sin \frac{\pi m}{\alpha} \varphi, \quad (3) \quad R_m(r) = H_{\pi m/\alpha}^{(2)}(kr). \quad (4)$$

Таким образом, решение однородного уравнения Гельмгольца ищем в следующей форме:

$$E_z = E_z^{\text{пад}} + \sum_m C_m \sin \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi \right). \quad (5)$$

Методика определения коэффициентов C_m та же, что и для кругового цилиндра. В связи с этим запишем сразу окончательное выражение для полного поля

$$E_z = E_0 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(-i \frac{\pi^2 m}{2\alpha} \right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \sin \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi \right). \quad (6)$$

В случае падения плоской однородной H -поляризованной волны алгоритм решения не меняется, а граничные условия приобретают вид:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, a} = 0 \quad (7)$$

Решение дифференциального уравнения, записанного относительно функции $\Phi_m(\varphi)$, имеет вид

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi\right), \quad (8)$$

а представление решения задачи дифракции определяется зависимостью

$$H_z = \frac{1}{2} \frac{E_0}{W} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \exp\left(-i \frac{\pi^2 m}{2\alpha}\right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi_0\right). \quad (9)$$

Для дальнейшего анализа перепишем равенства (6) и (8) следующим образом:

$$H_z = \frac{E_0}{W} \{u(r, \varphi - \varphi_0) \mp u(r, \varphi + \varphi_0)\}, \quad (10)$$

где
$$u(r, \psi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_m \exp\left(i \frac{\pi^2 m}{2\alpha}\right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha} \psi\right), \quad \psi = \varphi \pm \varphi_0.$$

Верхний знак в формуле (10) соответствует случаю дифракции плоской Е-поляризованной волны, нижний – Н-поляризованной.

Функцию $u(r, \psi)$ можно представить в виде

$$u(r, \psi) = S(r, \psi) + \begin{cases} \exp(ikr \cos \psi) & \text{при } -\pi < \psi < \pi, \\ 0 & \text{при } -\pi < \psi < 2\alpha - \pi, \\ \exp(ikr \cos(2\alpha - \psi)) & \text{при } 2\alpha - \pi < \psi < 2\alpha. \end{cases} \quad (11)$$

Первое слагаемое – негеометрооптическая составляющая, второе слагаемое – геометрооптическая составляющая. Поясним смысл второго слагаемого. Если бы волна отражалась от грани, как от бесконечной плоскости, то пространство разделилось бы лучами $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\varphi = \pi + \varphi_0$ на области (рисунок 2):

- освещенную прямыми и отраженными лучами (I),
- освещенную только прямыми лучами (II),
- тень (III).

Таким образом, приходим к описанию поля с помощью геометрооптической и негеометрооптической составляющих. Направление $\pi - \varphi_0$ соответствует направлению распространения отраженной по закону Снеллиуса волны. Наличие ребра приводит к появлению негеометрооптической составляющей в полном поле.

Вдали от границ свет-тень $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\varphi = \pi + \varphi_0$ негеометрическая часть поля представляет собой знакомые цилиндрические волны. Зависимость, описывающая такую волну, в данном случае имеет вид:

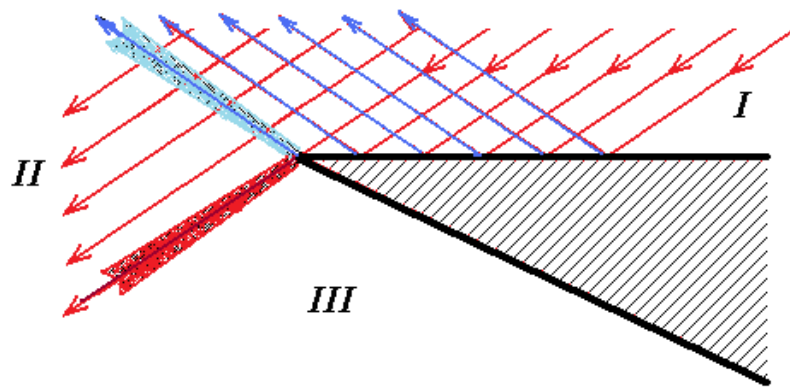


Рисунок 2 – Структура поля в представлении геометрической теории дифракции

$$S(r, \psi) = \frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right) \frac{\pi}{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \psi\right)} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (12)$$

Однако в отличие от ненаправленной цилиндрической волны негеометрооптическая часть поля характеризуется определенной диаграммой направленности. Ее диаграмма направленности определяется первым сомножителем. Существуют и физические различия в процессе излучения. Так, нить электрического (магнитного) тока является сторонним источником, а ребро клина переизлучает, представляя собой *рассеивающий центр*. Структура поля показана на рисунке 3.

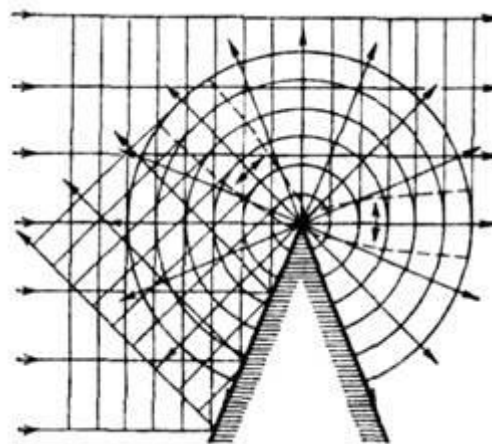


Рисунок 3. – Цилиндрические волны от острия

Частным случаем задачи дифракции электромагнитной волны на клине является случай бесконечной плоскости, в которую превращается клин при угле раскрытия $\alpha=\pi$. Как следует из рисунка 2, при этом остается только область,

освещаемая прямой и отраженной волнами (область I), а области II и III исчезают. Формула (12) при этом принимает вид:

$$S(r, \psi) = -\frac{\sin \pi}{1 + \cos \varphi} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \frac{\exp(-ikr)}{r}. \quad (13)$$

Поскольку знаменатель первого сомножителя в (13) не может обратиться в нуль, так как $0 < \varphi_0 < \pi$ и $0 < \varphi < \pi$ и, следовательно, $\varphi \pm \varphi_0 \neq \pi$, то деления нуль на нуль в первом сомножителе не возникает, следовательно, при $\alpha = \pi$ получаем $S(r, \psi) \equiv 0$. С учетом этого из формулы (11) получаем, что поведение продольной компоненты поля определяется зависимостью

$$E_z = E_0 \left\{ \exp[ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] - \exp[ikr \cos(\varphi + \varphi_0)] \right\} \equiv \quad (14)$$

$$\equiv E_0 \exp(iky \cos \varphi) \sin(kx \sin \varphi)$$

для E-поляризованной волны и

$$H_z = \frac{E_0}{W} \left\{ \exp[ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] + \exp[ikr \cos(\varphi + \varphi_0)] \right\} \equiv \quad (15)$$

$$\equiv \frac{E_0}{W} \exp(iky \cos \varphi) \cos(kx \sin \varphi)$$

для H-поляризованной волны. Несложно заметить, что данные формулы совпадают с результатами, полученными для случаев падения волн вертикальной и горизонтальной поляризации на идеально проводящую плоскость.

Другим предельным случаем является исследование дифракции плоской волны на полуплоскости. Решение задачи при этом получается из (11), если положить $\alpha = 2\pi$. При таком значении угла раскрыва функция $S(r, \psi)$ из (12) принимает вид

$$S(r, \psi) = \frac{\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \exp(-ikr)}{\sqrt{2\pi kr} 2 \cos \frac{\psi}{2}}. \quad (16)$$

Полное поле по-прежнему описывается выражением (11), в котором $S(r, \psi)$ формулой (16).

Проанализируем структуру поля вдали от ребра при дифракции на идеально проводящем клине.

Проще всего вид поля в области III, в которой геометрооптическая часть равна нулю. Полное поле совпадает с негеометрооптическим – это цилиндрические волны, как бы расходящиеся от ребра; однако реального источника на ребре, как уже отмечалось выше, нет. В области II эти цилиндрические волны накладываются на падающую плоскую волну, возникают интерференционные полосы – неглубокие осцилляции, уменьшающиеся при удалении от границы между областями. Сложнее поле в области I: здесь, кроме падающей волны, существует и отраженная плоская волна. Возникают стоячие волны, интерферирующие с цилиндрической волной.

Вблизи границы свет-тьень (области полутени) распределение поля имеет значительно более сложный характер. Здесь поле быстро изменяется в поперечном направлении. На границе свет-тьень оно равно половине поля падающей волны. Таким образом, дифракционные явления на ребре клина, если под этим понимать отклонение поля от геометрического, более всего проявляются в зоне полутени.

На границе между областями I и II поле несколько сложнее. В обеих областях присутствует поле падающей волны, но отраженная по законам геометрической оптики волна есть только в области I, а в области II ее нет. Поэтому луч $\varphi = \pi - \varphi_0$ есть граница свет-тьень для отраженной волны. На этой границе выделяется полутеневая зона, в которой происходит интерференция между полутеневым полем и плоской падающей волной.

Проведенные исследования позволяют описать поле, возникающее при дифракции плоской E- или H-поляризованной волны на клине, следующим образом:

Если в формуле (11) пренебречь функцией $S(r, \psi)$ и использовать только разрывные функции $\exp(ikr\cos\varphi)$, то получается геометрическое решение данной задачи – падающая волна частично затеняется клином (при $\varphi_0 < \alpha - \pi$) и, кроме того, возникает полубесконечная волна, отраженная от верхней грани $\varphi=0$ (рисунок 2), при $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ обе грани освещены падающей волной, области тени нет, но имеются две отраженные полубесконечные плоские волны, как показано на рисунке 4.

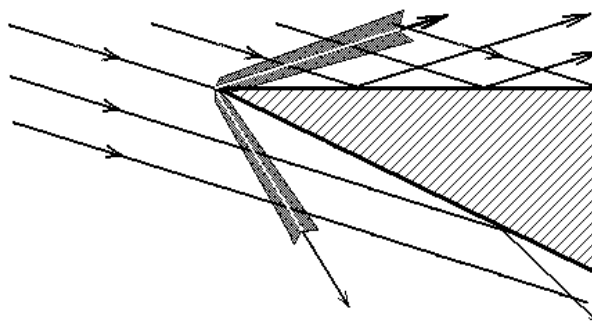


Рисунок 4 – Разбиение пространства по областям

Функция $S(r, \psi)$ обеспечивает непрерывность полного поля, т.е. определяет поправки к геометрической оптике, обусловленные дифракцией.

Вдали от направлений «свет-тьень», определяемых первым законом Снеллиуса, функция $S(r, \psi)$ имеет характер цилиндрической волны, расходящейся от ребра клина.

5.2.2 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящем шаре

Перейдем к решению задачи дифракции плоской волны на идеально проводящем шаре радиуса a , с центром которой совмещено начало сферической системы координат, как показано на рисунке 5.

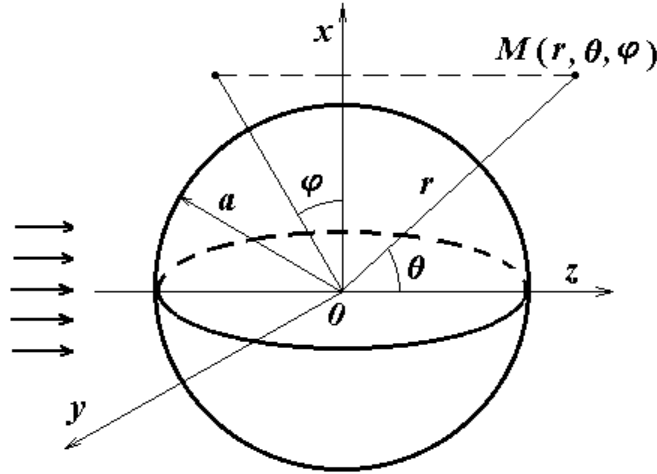


Рисунок 4 – Геометрия задачи

Пусть на сферу падает плоская электромагнитная волна, составляющие векторов напряженности \vec{E} и \vec{H} во фронте которой определяются зависимостью

$$\vec{E}^{\text{пад}} = \vec{x}_0 E_0 \exp(-ikz), \quad \vec{H}^{\text{пад}} = -\vec{y}_0 \frac{E_0}{W} \exp(-ikz). \quad (17)$$

Полное поле при дифракции представим, как и для кругового цилиндра, в виде суммы падающего $\vec{E}^{\text{пад}}$, $\vec{H}^{\text{пад}}$ и рассеянного $\vec{E}^{\text{рас}}$, $\vec{H}^{\text{рас}}$ полей. Для записи полей используются вспомогательные функции **потенциалы Дебая** - U и V . Функции U и V соответствуют двум поляризациям следующим образом: поле с $U \neq 0, V = 0$ не содержит H_r компоненты, т.е. является поперечно-магнитной (электрической) волной; поле с $U = 0, V \neq 0$ не содержит E_r составляющую, т.е. является поперечно-электрической (магнитной) волной. Единицы измерения функций U и V соответственно [В] и [А], т.е. по своему физическому смыслу являются напряжением и силой тока.

Потенциалы Дебая рассеянного поля удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta U^{\text{рас}} + k^2 U^{\text{рас}} = 0, \quad \Delta V^{\text{рас}} + k^2 V^{\text{рас}} = 0. \quad (18)$$

Граничные условия с учетом выражений для потенциалов Дебая принимают вид

$$\left. \frac{\partial(rU)}{\partial r} = \frac{\partial(rU^{\text{пад}})}{\partial r} + \frac{\partial(rU^{\text{рас}})}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad \left. V = V^{\text{пад}} + V^{\text{рас}} \right|_{r=a} = 0. \quad (19)$$

Анализ соотношений (18), (19) показывает, что ни уравнения Гельмгольца, ни граничные условия не связывают между собой поляризации, т.е. волны электрического и магнитного типов при дифракции на сфере могут существовать независимо.

Решение уравнений методом разделения переменных имеет вид:

$$U^{pac} = \sum_n \sum_m A_{nm} R_n(r) \Theta_{nm}(\theta) \Phi_m(\varphi), \quad V^{pac} = \sum_n \sum_m B_{nm} R_n(r) \Theta_{nm}(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (20)$$

где

$$\Phi_m(\varphi) = \exp(im\varphi), \quad \Theta_{nm}(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \quad R_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr), \quad (21)$$

где P_n^m - называются присоединенными функциями Лежандра степени n порядка m . Функции P_n^m при $|m| > n$ тождественно равны нулю. В совокупности с тригонометрическими функциями функции Лежандра называются следующим образом: если $|m| < n$, то называются шаровыми тессеральными, т.е. клеточными функциями, при $|m| = n$ - шаровыми телесными функциями.

Связь между полученным решением для потенциалов Дебая и компонентами электромагнитного поля определяется соотношениями:

$$\cos\varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \left(r \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = E_r, \quad (22a)$$

$$\cos\varphi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{ik}{\sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right\} = E_\theta, \quad (22б)$$

$$-\sin\varphi \left\{ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - ik \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right\} = E_\varphi, \quad (22в)$$

$$-\sin\varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \left(r \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = H_r, \quad (22г)$$

$$\sin\varphi \left\{ \frac{ik}{\sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) \right\} = H_\theta, \quad (22д)$$

$$\cos\varphi \left\{ ik \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right\} = H_\varphi. \quad (22е)$$

Проанализируем структуру рассеянного поля. Элементарные волны, из которых складывается поле дифракции, представляют собой сферические волны, как бы излучаемые из центра сферы. Здесь можно провести полную аналогию с цилиндрическими волнами, как бы излучаемыми из центра цилиндра в задаче о

дифракции электромагнитной волны на круговом цилиндре. Амплитуда поля каждой волны зависит от углов θ и φ . Если мысленно на сфере бесконечно большого радиуса с центром в точке O затемнить места с максимальной плотностью излучения, то сфера покроется пятнами (проявится клеточная структура), как показано на рисунке 6. Именно это и дало название шаровым тессеральным функциям.

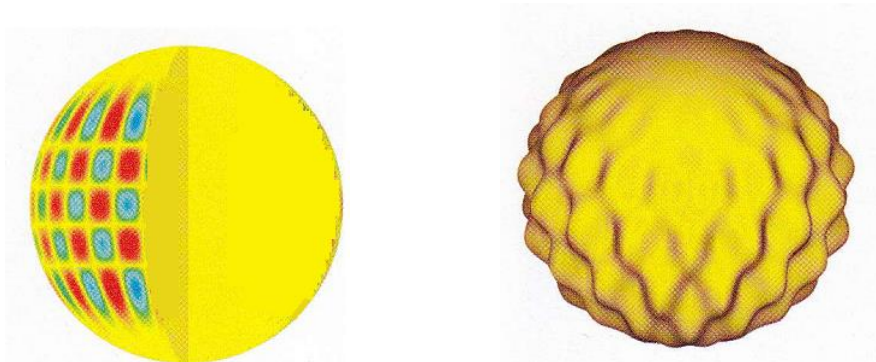


Рисунок 6. – Распределение амплитуд поверхностных токов на шаре

Соотношение между потенциалами U и V в падающей и дифрагированной волнах отличается. Это приводит к тому, что в терминах полей \vec{E} и \vec{H} происходит **деполяризация**, т.е. в дифрагированном поле появляются составляющие, которых не было в падающей волне. Однако в терминах потенциалов Дебая деполяризации не происходит, т.е., если в падающей волне $U \neq 0$, $V = 0$, то и в рассеянном поле $V = 0$, и наоборот.

Поле дифракции на идеально проводящей сфере содержит все шесть компонент и имеет в дальней зоне характер квазиплоской поперечной волны.

Сравнение с данными, приведенными для кругового цилиндра, показывает, что между диаграммами рассеянного поля на цилиндре и сфере существует значительное различие.

Во-первых, рассеиваемая на цилиндре волна поляризована так же, как и падающая. Это объясняется тем, что геометрические параметры цилиндра вдоль образующей не изменяются, возбуждаемые при этом электрические токи являются либо продольными при дифракции E -поляризованной волны, либо поперечными при дифракции H -поляризованной волны. В случае дифракции плоской волны на сфере распределение токов является векторным, поскольку одновременно существуют как меридиональные, так и азимутальные составляющие последних. Это и определяет тот факт, что поле дифракции плоской волны на сфере является векторным.

Во-вторых, различный закон изменения геометрических параметров поверхности в перпендикулярном плоскости сечения направлении приводит к отличию и собственно диаграммы направленности рассеянных на цилиндре и сфере полей. Однако по мере увеличения радиуса цилиндра и сферы различие между E_θ и E_φ -компонентой диаграммы направленности полей, рассеянных

сферой, а также их отличие от диаграммы направленности рассеяния плоской волны на цилиндре уменьшается.

5.3 Метод интегральных уравнений и метод геометрической теории дифракции

Классификация методов решения задач дифракции электромагнитных волн. Интегральные уравнения внешних задач электродинамики. Метод геометрической оптики. Геометрическая теория дифракции. Приближение Гюйгенса-Кирхгофа.

5.3.1 Классификация методов решения задач дифракции электромагнитных волн

Долгое время в электродинамике почти безраздельно господствовали аналитические методы, в которых решение задачи записывается в виде формулы. Такое решение, особенно если формула проста, дает возможность проанализировать его, даже не производя расчетов. Однако при всей своей привлекательности аналитические методы имеют один очень существенный недостаток: сравнительно узкий круг задач, решаемый данными методами. Поэтому часто приходится либо очень сильно идеализировать задачу, либо вообще отказаться от теоретического исследования и переходить к эксперименту.

В последнее время в связи с быстрым прогрессом в вычислительной технике во всех областях науки и, в частности, в электродинамике все более и более широко применяются численные методы решения задач. В этих методах основой является не формула, а алгоритм, т.е. последовательность операций, в результате которых из ряда чисел, характеризующих исходные данные задачи, получается решение также в виде ряда чисел. При решении линейных задач, каковыми является подавляющее большинство задач электродинамики, численное решение, как правило, заключается в сведении ее к системе линейных алгебраических уравнений с последующим решением последней. Класс численных методов, сводящих граничную задачу математической физики к решению системы линейных алгебраических уравнений, носит название **прямых методов**.

При выборе метода решения краевых задач особое внимание обращается на соотношение длины волны λ и характерного размера L тела. Различают три характерные области:

- а) квазистатическую (рэлеевскую) область, когда $L/\lambda \ll 1$;
- б) резонансную область, когда $L/\lambda \approx 1$, а параметры среды могут быстро меняться на расстоянии, равном длине волны;
- в) квазиоптическую область, когда $L/\lambda \gg 1$, а параметры среды меняются мало на расстоянии, равно длине волны.

В квазистатической области решение уравнений Максвелла представляется в виде разложения векторов поля в ряд по степеням kL , т.е. по малому параметру задачи. Таким путем электродинамическая задача сводится к последовательному решению ряда электростатических и магнитостатических задач. Переход к статическим задачам дает упрощение за счет двух факторов: во-первых, скалярные задачи скалярные, а, во-вторых, получаемые при этом уравнения электростатики - уравнения Лапласа и Пуассона – проще уравнений Гельмгольца.

Недостатком является тот факт, что в практических задачах далеко не всегда удается аналитически решить уравнение Лапласа и приходится прибегать к численному решению.

Резонансная область наиболее сложна для исследования, поскольку здесь требуются строгие методы решения уравнений Максвелла. Для получения таких решений чаще всего используются два близких аналитических метода: метод разделения переменных (метод собственных функций) и метод интегральных преобразований. При использовании данных методов подбирается система координат, такая, чтобы граничные поверхности или поверхности равных параметров среды совпадали с координатными поверхностями. В выбранной системе координат отыскиваются решения однородного уравнения Гельмгольца. Эти решения при определенных условиях образуют полные ортогональные системы функций, по которым решение неоднородного уравнения может быть разложено либо в ряд (метод собственных функций), либо в интеграл (метод интегральных преобразований). Получаемое в аналитической форме полное решение задачи справедливо во всех трех характерных областях.

Недостатком методов является то, что они применимы только при очень простой форме граничных поверхностей или поверхностей равных параметров среды.

Граничные задачи можно также свести к интегральным уравнениям. Интегральные уравнения можно составить для тел практически любой формы. Накладываются лишь слабые ограничения, требующие в определенном смысле гладкости поверхности.

Интегральные уравнения позволяют рассмотреть вопросы существования решений граничных задач. Вместе с тем, используя хорошо разработанные методы численного решения интегральных уравнений, строятся алгоритмы решения некоторых классов граничных задач (преимущественно внешних). Более подробно метод интегральных уравнений рассмотрим немного позднее.

Квазиоптика – наиболее многообещающий и развивающийся в настоящее время раздел электродинамики. Квазиоптические методы можно разделить на две группы: асимптотическое исследование точных решений, полученных методом собственных функций или интегральных преобразований, и построение эвристических методов с привлечением различных физических идей. Среди эвристических методов выделяют лучевые и волновые.

К лучевым методам, прежде всего, относятся геометрическая оптика и ее уточнения:

- геометрическая теория дифракции;
- комплексная геометрическая оптика, позволяющая вычислять поля в области рефракционной тени;
- метод параболического уравнения.

Волновые методы включают в себя

- метод физической оптики (приближение Кирхгофа) с уточнениями, из которых отметим метод краевых волн, позволяющий найти поправки к полю излучения, связанные с наличием изломов на рассеивающих поверхностях;
- методы, связанные с построением приближенных (квазиоптических) собственных функций.

При использовании волновых методов возникает необходимость асимптотического решения дифференциальных уравнений.

Квазиоптические методы позволяют решать значительно более широкий круг задач, чем точные. Тенденция здесь такова, что квазиоптика все ближе и ближе подходит к резонансной области.

Численные методы в квазиоптической области применяются в меньшей степени, хотя к ним и приходится прибегать для решения уравнений геометрической оптики и параболических уравнений.

5.3.2 Интегральные уравнения внешних задач электродинамики

Интегральные уравнения, как уже отмечалось, могут служить аппаратом для исследования общих свойств решений электродинамических задач и, в частности, проблемы существования решений. Кроме того, на основе интегральных уравнений разработаны приближенные и численные методы решения некоторых электродинамических задач.

Суть метода интегральных уравнений заключается в следующем:

1. Исследование поля в неоднородной среде сводят к расчету его в однородной среде.
2. Влияние на поле неоднородностей (диэлектрических, проводящих и магнитных тел) учитывают введением в поле вторичных источников – зарядов поляризации, токов намагниченности наведенных вихревых токов и др., распределенных на границах (в объеме) неоднородностей.
3. Первоначально определяют интегральные уравнения, которые должны соответствовать распределению вторичных источников, а затем по уравнениям поля с учетом заданных и вторичных источников решают задачу анализа поля.
4. Интегральное уравнение решают на ЭВМ.

Более подробно составление интегрального уравнения рассмотрим на примере дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле сложной формы. Уравнение будем составлять исходя из следующих соображений. Предположим, что известно распределение плотности тока $\vec{j}^{\rightarrow \text{э(м).ст.}}$,

возбуждаемого сторонним источником на поверхности тела. В этом случае можно вычислить векторный электродинамический потенциал

$$\vec{A}^{\text{э(м)}}(p) = \int_V \vec{j}^{\text{э(м).ст.}}(q) G(p, q) dv_q. \quad (1)$$

На основании данного потенциала с учетом соотношений, связывающих векторные электродинамические с векторами электрического и магнитного полей, можно найти поля этих токов. Добавляя к полученному полю первичное поле и применяя граничные условия на поверхности тел, получаем интегральное уравнение относительно плотности тока на поверхности тела.

В зависимости от примененного граничного условия получаются интегральные уравнения различного написания и с различными свойствами.

Естественными граничными условиями для идеального проводника является равенство нулю поля внутри него. Найдем, например, поле \vec{H} с помощью соотношения (1) и представления второго уравнения Максвелла через электродинамические потенциалы в виде

$$\vec{H} = -i\omega\epsilon_a \vec{A}^{\text{м}} + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \vec{A}^{\text{м}} + \text{rot } \vec{A}^{\text{э}}. \quad (2)$$

В результате получим:

$$\vec{H}(p) = \vec{H}^{\text{перв}}(p) + \int_{\Sigma} \text{rot} \left(\vec{j}^{\text{э}} G \right) d\sigma = \vec{H}^{\text{перв}}(p) - \int_{\Sigma} [\vec{j}^{\text{э}}(q), \text{grad } G] d\sigma. \quad (3)$$

Приравняем его внутри тел (исключая границу). Тогда получим интегральное уравнение:

$$\int_{\Sigma} [\vec{j}^{\text{э}}(q), \text{grad } G] d\tau_q = \vec{H}^{\text{перв}}(p), \quad (4)$$

в котором точка интегрирования q пробегает поверхность Σ , а точка наблюдения p – область V – внутри тела (рисунок 1).

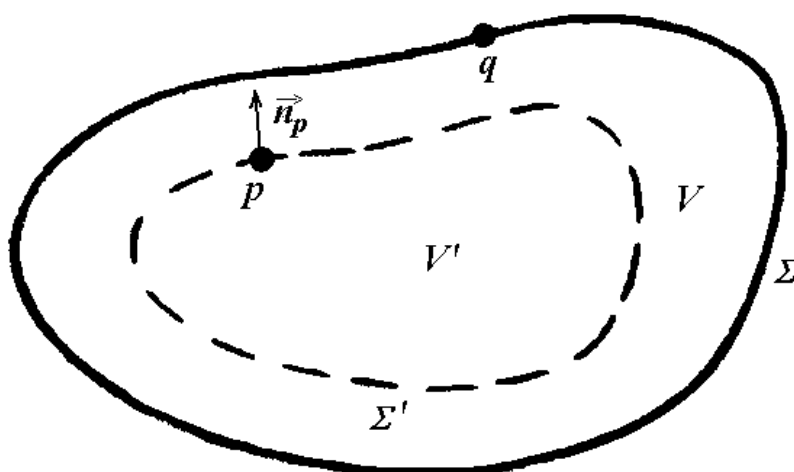


Рисунок 1 – Геометрия контура тела

Такое интегральное уравнение неудобно как для аналитических исследований, так и для создания численных методов, поскольку точки интегрирования и наблюдения имеют существенно различные области изменения. Это сильно затрудняет анализ и не позволяет применить прекрасно разработанную общую теорию интегральных уравнений. Однако совершенно необязательно приравнивать поле нулю во всей области V . Достаточно приравнять поле в некоторой части V' объема V . Известно, что решение однородного волнового уравнения, как и всякого эллиптического дифференциального уравнения, функция аналитическая, т.е. вблизи любой точки области может быть разложена в ряд Тейлора с ненулевым радиусом сходимости.

Поле \vec{H} в области V удовлетворяет однородному уравнению и, следовательно, если его приравнять нулю в части объема V' , то оно будет равно нулю всюду в области аналитичности, т.е. во всем объеме V вплоть до границы.

Можно еще сузить область изменения точки p и потребовать равенства нулю тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности Σ' , окружающей объем V' . С помощью теоремы Пойнтинга можно показать, что из равенства нулю тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности Σ' следует равенство нулю поля в объеме V' , если он не резонансный. Из равенства нулю поля внутри области V' вновь следует равенство нулю внутри объема V .

Тангенциальная составляющая вектора \vec{H} образуется путем умножения его на вектор внешней нормали \vec{n}_p к поверхности Σ' . Тогда имеем уравнение:

$$\int_{\Sigma} [\vec{n}_p, [\vec{j}^3(q), \text{grad } G]] d\sigma = [\vec{n}_p, \vec{H}^{\text{перв}}(p)], \quad p \in \Sigma', q \in \Sigma, \quad (5)$$

у которого точки p и q пробегают области одинаковой размерности. Поверхность Σ' и поверхность тела Σ могут быть совмещены. При этом совмещении следует учесть, что магнитное поле на электрическом токе, который течет по поверхности тела, имеет разрыв первого рода. Этот разрыв учитывается введением дополнительного слагаемого и интегральное уравнение приобретает вид:

$$\vec{j}^3(p) + 2 \int_{\Sigma} [\vec{n}_p, [\vec{j}^3(q), \text{grad } G]] d\sigma = 2[\vec{n}_p, \vec{H}^{\text{перв}}(p)], \quad p \in \Sigma, q \in \Sigma. \quad (6)$$

Таким образом, ограничение области изменения точки p упростило интегральное уравнение, однако за счет этого у уравнения появились особые точки, не соответствующие физическому смыслу задачи. На частотах, для которых область V' для уравнения (5) или область V для уравнения (6) резонансны, интегральные уравнения имеют не единственные решения.

Интегральное уравнение (6) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, хорошо изученным в классической теории интегральных уравнений. Интегральные уравнения типа (5) относятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода.

5.3.2 Метод геометрической оптики

Как было сказано выше, в квазиоптической области, когда характерные размеры тела намного больше длины волны, используются эвристические методы, базирующиеся на привлечении различных идей. Среди данных методов, являющихся асимптотическими, выделяют лучевые и волновые. Метод геометрической оптики и метод геометрической теории дифракции, являющийся ее уточнением, относятся в лучевым.

Рассмотрим более подробно **особенности применения метода геометрической оптики**. Данный метод может быть применен, если

- 1) параметры среды ε_a, μ_a мало меняются на расстоянии порядка длины волны;
- 2) радиусы кривизны поверхностей раздела велики относительно длины волны;
- 3) поле рассматривается на достаточно большом расстоянии от источника.

При указанных условиях поле представляет собой локально плоские волны, поэтому решение уравнений Максвелла, записанных в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = ik\varepsilon\vec{E}, \quad \vec{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\vec{E}}{W_0}, \quad (7a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -ik\mu\vec{H}, \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \quad (7b)$$

ищется в виде плоской волны с медленно меняющейся амплитудой:

$$\vec{E} = \vec{U}(x, y, z) \exp[-ikL(x, y, z)], \quad (8a)$$

$$\vec{H} = \vec{V}(x, y, z) \exp[-ikL(x, y, z)]. \quad (8b)$$

В соотношениях (8) функция $L(x, y, z)$, называемая **эйконалом**, определяет фазу волны.

Рассматривается квазиоптический случай, следовательно, ω и k величины большие. В связи с этим амплитуды векторных функций \vec{U} и \vec{V} представляются в виде разложения по обратным степеням волнового числа:

$$\vec{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{U}_n}{(ik)^n}, \quad \vec{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{V}_n}{(ik)^n}. \quad (9)$$

Данное представление позволяет записать рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{cases} [\operatorname{grad} L, \vec{V}_0] + \varepsilon\vec{U}_0 = 0, \\ [\operatorname{grad} L, \vec{U}_0] - \mu\vec{V}_0 = 0, \\ [\operatorname{grad} L, \vec{V}_n] + \varepsilon\vec{U}_n = \operatorname{rot} \vec{V}_{n-1}, \\ [\operatorname{grad} L, \vec{U}_n] - \mu\vec{V}_n = \operatorname{rot} \vec{U}_{n-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Во многих случаях практически важных случаях достаточно ограничиться нулевым приближением. Домножая уравнения (10) скалярно на $\text{grad } L$, затем на \vec{U}_0 и \vec{V}_0 , получаем равенства, подтверждающие плоский характер волны

$$\left(\vec{U}_0, \text{grad } L\right) = \left(\vec{V}_0, \text{grad } L\right) = \left(\vec{U}_0, \vec{V}_0\right) = 0. \quad (11)$$

Система уравнений (10) однородна. Условие существования нетривиального (ненулевого) ее решения определяет эйконал $L(x, y, z)$ и имеет вид:

$$(\text{grad } L)^2 = n^2, \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (12)$$

Граничным условием для этого уравнения служит задание фазы поля на некоторой поверхности. Это может быть граница неоднородной среды или поверхность, окружающая источник.

Возможен и другой способ решения. Эйконал L в соответствии с его определением как оптическую длину пути вдоль луча определяется соотношением

$$L = \int_0^s n \, ds = \int_0^\tau n^2 \, d\tau, \quad (13)$$

где ds - дифференциал длины дуги луча,

$d\tau$ - дифференциал ранее выбранного параметра τ .

Под **лучами** понимается семейство линий, ортогональных к экифазным поверхностям $L = \text{const}$.

Интеграл (13) может служить основой для определения траекторий лучей, если воспользоваться принципом Ферма. Пусть траектория луча неизвестна, тогда интеграл с закрепленными начальной и конечной точками и заданной функцией $n(x, y, z)$ зависит от формы кривой, по которой производится интегрирование, т.е. является функционалом. **Принцип Ферма** утверждает, что лучу будет соответствовать кривая, на которой эйконал экстремален. Отыскание подобных экстремумов – основная задача раздела математики, носящего название **вариационного исчисления**.

Следующим этапом является определение изменения амплитуды и поляризации поля вдоль луча. Для этого уравнения системы (10) преобразуются к двум уравнениям – скалярному

$$\frac{d}{d\tau} (\ln W) + \frac{1}{2} \text{div } s = 0 \quad (14a)$$

и векторному

$$\frac{d\vec{Q}}{d\tau} + \left(\vec{Q}, \frac{\text{grad } n}{n} \right) \text{grad } L = 0, \quad (14b)$$

в которых функция W пропорциональна вектору Пойнтинга, а вектор \vec{Q} находится из равенства

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{Q}, \vec{Q}) = 0 \quad (15)$$

Амплитуда \vec{Q} не меняется вдоль луча. Это означает, что уравнение (14б) описывает только поляризационные свойства поля.

Область применения геометрической оптики имеет ограничения. Так, в частности, с ее помощью нельзя найти поле в области тени, а также учесть дифракционные эффекты. Действительно, обмена энергией между лучевыми трубками нет, поэтому за каким-либо препятствием образуется резко очерченная тень, причем границей свет-тень служит луч, коснувшийся препятствия.

В последнее время появились модификации метода геометрической оптики, каждая из которых снимает одно из указанных ограничений.

5.3.4 Метод геометрической теории дифракции

Метод геометрической теории дифракции (метод дифракционных лучей), предложенный Келлером, дает возможность приближенно вычислить поле в области тени, образуемой каким-либо препятствием. Метод основан на обобщенном принципе Ферма, который допускает наряду с обычными также и дифракционные лучи. Под **дифракционными лучами** понимаются лучи, проведенные по экстремальному пути (принцип Ферма) от источника в точку наблюдения и имеющие при этом общий кусок гладкой кривой с поверхностью препятствия или общую точку с отражающим ребром.

Основная идея этой теории заключается в том, что решение задачи ищется всюду, за исключением узких переходных зон, в форме суммы полей (компонент), удовлетворяющих в первом приближении законам геометрической оптики (ГО), но имеющих различное происхождение: часть из них — обычные геометрооптические поля, образование которых посредством отражения и преломления описывается законами ГО; другая часть — дифракционные волны, механизм возбуждения которых находится вне этих законов. Всего имеется четыре дополнительных закона: два первых определяют направления дифракционных лучей, а два других — их амплитуды.

Постулаты ГТД, определяющие направления дифракционных лучей:

1. Дифракционные лучи порождаются только теми лучами падающего поля, которые образуют границы свет—тень («крайние лучи» с точки зрения геометрической оптики).

2. При рассеянии на крае экрана дифракционные лучи образуют конус, осью которого является касательная к ребру, а угол при вершине равен удвоенному углу между падающим лучом и касательной к ребру (рисунок 2).

В случае отражения от искривленной поверхности дифракционный луч состоит из трех частей: двух отрезков, касательных к поверхности, проведенных из точек источника и наблюдения, и отрезка геодезической кривой на поверхности

тела. Таким образом, дифракционные лучи проникают в область геометрической тени и образуют там некоторое поле.

Постулаты ГТД, определяющие амплитуды дифракционных лучей:

1. Амплитуда дифракционного луча пропорциональна амплитуде порождающего его первичного луча в точке падения.

2. Коэффициент дифракции определяется локальными особенностями геометрии тела в окрестности падающего луча (в случае остриев и ребер) или геометрии тела в окрестности поверхностного луча между точкой падения и точкой отрыва дифракционного луча (в случае гладкого тела).

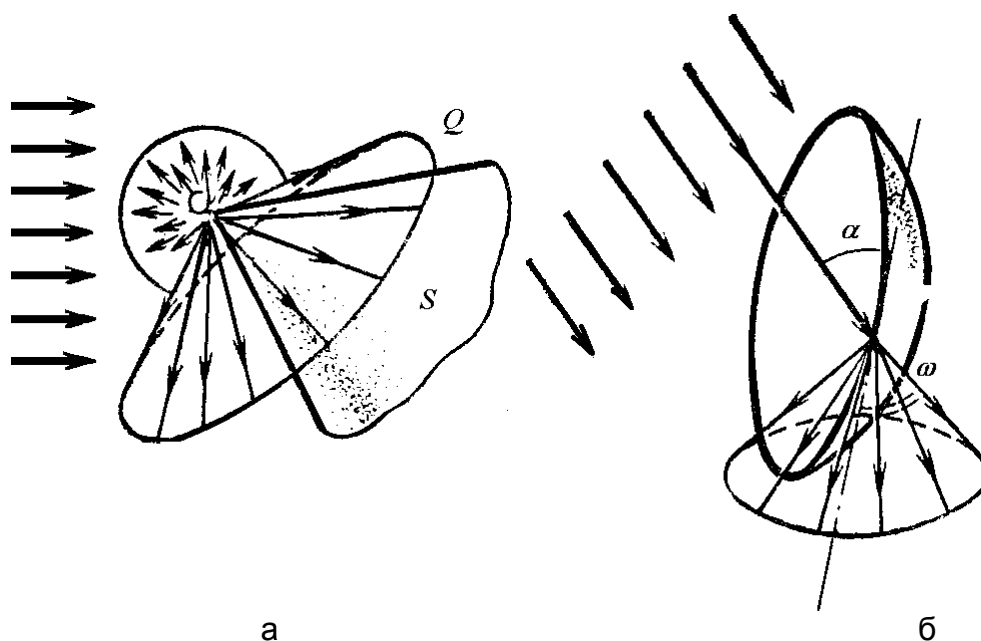


Рисунок 2 – Представление лучей в геометрической теории дифракции

Поле в переходных зонах выражается через специальные функции, также взятые из анализа модельных задач.

Решения, полученные в ГТД, имеют вид явных, хотя и громоздких формул. Расчет полей по этим формулам занимает на ЭВМ существенно меньше времени, чем расчет другими методами. Это позволяет использовать ГТД для решения обратных задач, т. е. задач синтеза, особенно необходимых в практике инженерных расчетов.

5.3.5 Приближение Гюйгенса-Кирхгофа

Волновые методы, также как и лучевые, относятся к эвристическим методам и в какой-то мере являются их альтернативой. Среди всего многообразия волновых методов, прежде всего, следует называть **приближение Кирхгофа, или метод физической оптики**. Данное приближение может быть использовано как в скалярном, так и в векторном виде. Скалярное представление

применяется в том случаях, где поляризация поля несущественна, а в векторном виде – при учете поляризационных эффектов. В последнем случае приближение Кирхгофа основывается на теореме эквивалентности, которая, как известно, позволяет вычислить поле в любой точке некоторой области, если известны сторонние токи в этой области и тангенциальные составляющие полей \vec{E} и \vec{H} на границе области.

Метод физической оптики, основанный на принципе Гюйгенса-Френеля, количественной формулировкой которого является интеграл Кирхгофа:

$$\psi(p) = \oint_{S'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} G - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_q, \quad (16)$$

получил название **приближения Гюйгенса-Кирхгофа**.

Метод заключается в том, что функции ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ из (16) выбираются обычно из следующего условия: на освещенной поверхности они равны соответствующим значениям поля падающей волны, а на теневой – равны нулю. В тех случаях, когда необходимо учитывать поляризационные эффекты, пользуются принципом эквивалентных поверхностных токов. Вместо точных значений для векторов тока подставляют их приближенные значения: на освещенной части поверхности

$$\vec{J}^{\text{э}} = [\vec{H}^{\text{пад}}, \vec{n}], \quad \vec{J}^{\text{м}} = [\vec{n}, \vec{E}^{\text{пад}}], \quad (17a)$$

а на теневой

$$\vec{J}^{\text{э}} = 0, \quad \vec{J}^{\text{м}} = 0. \quad (17b)$$

Способ задания приближенных значений поверхностных токов указывает на родство методов геометрической и физической оптики. Если предпосылкой метода геометрической оптики является предположение о независимости отражения соседних лучей, то в основу метода физической оптики положена гипотеза о независимости токов, возбуждаемых в разных точках поверхности. *Метод физической оптики дает уточнение решения задачи, так как, хотя токи на теневой поверхности и считаются по-прежнему равными нулю, поле в области тени отлично от нуля, поскольку учитываются волновые свойства поля.*

Противоречие метода - поле в области тени никак не зависит от характеристик неосвещенной части поверхности: ее формы, кривизны, протяженности и др. - является следствием предположения об отсутствии токов на теневой части поверхности. **Следствие:** возможные существенные погрешности. Удовлетворительные результаты достигаются только в тех случаях, когда токи на теневой части поверхности действительно малы.

Для уточнения значения токов вблизи изломов поверхности применяется **метод краевых волн (метод Уфимцева)**. В соответствии с данным методом полный ток вблизи поверхности делится на равномерную (в приближении физической оптики) и неравномерную составляющую. Приближенно полагается, что неравномерная часть тока такая же, как и для простейшего излома – клина и,

следовательно, может быть найдена из строгого решения задачи дифракции на клине. Распределение тока вблизи границы свет-тьнь (области полутени) может быть уточнено с помощью метода, развитого Фокком.

5.4 Компьютерные методы решения задач электродинамики

Постановка задачи и представление полей. Метод моментов и его разновидности. Проекционная модель задачи. Сеточные методы. Метод конечных элементов.

5.4.1 Постановка задачи и представление полей

Базирующаяся на уравнениях Максвелла теория электромагнитных явлений представляет собой естественную основу математического моделирования в технике, использующей эти явления.

Математическое моделирование, т.е. изучение явления, производится с использованием **математической модели**, под которой понимается приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Центральным подходом в методах вычислительной электродинамики является способ представления решения задачи, т.е. электромагнитного поля. В общем случае решение представляется в виде совокупности решений

$$\vec{E}^N = \sum_{n=1}^N c_n \vec{E}_n, \quad \vec{H}^N = \sum_{n=1}^N c_n \vec{H}_n, \quad (1)$$

где c_n - неизвестные коэффициенты.

Различие методов состоит в требованиях, накладываемых на систему функций $\{\vec{E}_n, \vec{H}_n\}$:

- функции $\{\vec{E}_n\}$ и $\{\vec{H}_n\}$ связаны уравнениями Максвелла;
- функции $\{\vec{E}_n\}$ и $\{\vec{H}_n\}$ не связаны уравнениями Максвелла, но удовлетворяют требуемым граничным условиям и обладают некоторыми свойствами (например, полноты, а функции из данных систем являются коэффициентами Фурье).

Первому подходу соответствуют рассмотренные ранее аналитические методы решения, второму – численные методы.

Традиционно численные методы разбиваются на два класса:

- проекционные;
- дискретизационные.

Проекционные методы «проецируют» (распространяют) решение, лежащее в некотором бесконечномерном функциональном пространстве, на

конечномерное подпространство, определяемое системой базисных (пробных) функций.

Дискретизационные методы ищут решение либо на некотором множестве точек, выделенных в области, либо на некотором множестве подобластей.

К проекционным методам относятся: метод моментов и его разновидности – метод Бубнова-Галеркина, метод наименьших квадратов, метод Рэлея-Ритца и др.

К дискретизационным методам традиционно относят разностные методы: метод конечных разностей, метод сеток, метод конечных элементов и др.

Следует подчеркнуть, что некоторые методы имеют черты как проекционных, так и дискретизационных методов, например, метод коллокаций, метод частичных областей.

5.4.2 Метод моментов и его разновидности. Проекционная модель задачи

С математической точки зрения метод моментов является методом решения операторной задачи:

$$L(f) = g, \quad (2)$$

где g - известная функция;

$L(f)$ - оператор, заданный в некотором пространстве функций.

В математике, как известно, **оператором** называют действие, ставящее в соответствие функции функцию. Наиболее простым примером оператора может служить дифференцирование, которое исходной функции ставит в соответствие другую функцию – производную. В электродинамике чаще используются интегральные операторы.

Для компактного изложения схемы метода моментов используем основное свойство скалярного произведения $\langle f, g \rangle$ двух функций:

$$\langle f, g \rangle = \int_S fg \, dS. \quad (3)$$

Без потери общности соотношение (3) можно преобразовать к виду

$$\langle f, g \rangle = \int_S wfg \, dS, \quad (4)$$

где w - некоторая **весовая функция**.

Далее представим неизвестную функцию f в виде разложения следующего вида:

$$f = \sum_n a_n \varphi_n, \quad (5)$$

где φ_n - известные **функции**, получившие название **базисных**; a_n - неизвестные коэффициенты.

Полагая, что функция f определена в некоторой области S , поставим выражение (5) в соотношение (2). В результате получим

$$\sum_n a_n L(\varphi_n) = g. \quad (6)$$

Введем еще одну систему функций ψ_n , которые называются **тестовыми** или **пробными функциями**. Умножая (6) последовательно на пробные функции с разными номерами и вычисляя соответствующие скалярные произведения

$$\sum_n a_n \langle \psi_m L(\varphi_n) \rangle = \langle \psi_m g \rangle, \quad (7)$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_n . В матричной форме СЛАУ имеет вид:

$$\bar{Z}\bar{A} = \bar{G}, \quad (8)$$

где

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1 L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_1 L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_1 L(\varphi_N) \rangle & \dots \\ \langle \psi_2 L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_2 L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_2 L(\varphi_N) \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \psi_N L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_N L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_N L(\varphi_N) \rangle & \dots \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1 g \rangle \\ \langle \psi_2 g \rangle \\ \dots \\ \langle \psi_N g \rangle \\ \dots \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \\ \dots \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Искомая функция при таком представлении может быть записана в виде:

$$f = \langle \bar{\varphi} \bar{Z}^{-1} \bar{G} \rangle, \quad (11)$$

где $\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_N \\ \dots \end{bmatrix}$.

Приведенные выше соотношения описывают схему метода моментов. Несложно заметить, что при использовании данного метода возникают два основных вопроса:

- определение выбора весовых и пробных функций;
- определение верхнего предела суммирования N .

При решении первого вопроса используются два подхода:

- **индивидуальный**, при котором базисные функции максимально похожи на точное решение;
- **универсальный**, при котором базисные функции могут использоваться для различных задач.

Достоинство первого подхода: получение наиболее точного решения.
Недостаток – поиск для каждой конкретной структуры своих базисных функций. Поиск является неформализуемым процессом, который сложно превратить в компьютерную программу.

Достоинство второго подхода: универсальность.

Недостаток: получаемая аппроксимирующая функция может являться разрывной. В электродинамике данное обстоятельство в ряде случаев является неприемлемым, поскольку разрывные функции могут порождать сингулярные поля, не отвечающие физической реальности.

В обоих случаях на выбор базисной функции большое влияние оказывает априорная информация о свойствах решения. В качестве априорной информации о виде решения используются **граничные условия** на отрезке существования функции [a,b]:

$$\begin{aligned} l_0 u &\equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0(a) = \alpha, \\ l_1 u &\equiv \alpha_1 u(a) + \beta_1(a) = \beta, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \alpha, \beta$ - заданные числа, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, (i=0,1).

Краевые условия в общем случае задают линейную связь между значениями искомого решения и его производной на концах отрезка [a,b] в отдельности. Рассматривают три варианта краевых условий:

- **условие первого рода:** $\alpha_i = 1, \beta_i = 0$, т.е. на соответствующем конце отрезка задано значение искомого решения;

- **условие второго рода:** $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$, т.е. на концах отрезка заданы значения производной решения;

- **условие третьего рода** (общий случай): $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0$. **Краевые условия** считаются **однородными**, если $\alpha \equiv \beta \equiv 0$.

С учетом краевых условий приближенное решение u^N задачи записывается в виде

$$u^N(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x), \quad (13)$$

где функция φ_0 должна удовлетворять граничным условиям, т.е. $l_0 \varphi_0 = \alpha$; $l_1 \varphi_0 = \beta$; а остальные функции должны удовлетворять однородным граничным условиям, т.е. $l_0 \varphi_k = 0$; $l_1 \varphi_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Для выбора верхней границы суммирования N на практике применяется понятие **невязки** $\varepsilon(x)$, определяемой соотношением

$$\varepsilon(x) = Lu^N - f(x). \quad (14)$$

После выбора базисных функций данное соотношение принимает вид:

$$\varepsilon = (L\varphi_k - f). \quad (15)$$

Различие разновидностей метода моментов заключается в выборе пробных функций и условий, накладываемых на величину невязки при получении системы линейных алгебраических уравнений:

- метод Бубнова-Галеркина (или просто метод Галеркина), вид пробных функций совпадает с видом базисных функций; в качестве дополнительного условия выдвигают требование ортогональности невязки базисным функциям

$$\int_a^b \varepsilon(x; a_1, a_2, \dots, a_N) \varphi_k(x) dx = 0; \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

- метод наименьших квадратов, когда в качестве дополнительного условия используют требование минимальной величины квадрата невязки

$$\int_a^b \varepsilon^2(x; a_1, a_2, \dots, a_N) dx = 0; \quad (17)$$

- метод коллокаций, в котором в качестве пробных функций используются дельта-функции, что приводит к тому, что в ряде фиксированных точек из интервала $[a, b]$ невязка приравнивается нулю (выполнение граничных условий в ряде дискретных точек на некоторой поверхности):

$$\varepsilon(x_k, a_1, a_2, \dots, a_N) = 0. \quad (18)$$

В результате наложения дополнительных условий соотношение (14) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, называемых **проекционной моделью** физической системы.

5.4.3 Сеточные методы. Метод конечных элементов

При использовании дискретизационных методов, к которым относятся, например, метод конечных разностей, метод сеток, метод конечных элементов и др., решение ищется либо на некотором множестве точек (сетке), выделенных в области существования решения, либо на некотором множестве подобластей. В связи с этим в ряде случаев дискретизационные методы называют **сеточными**. Сетка может быть равномерной и неравномерной. При равномерной сетке положение точек (узлов сетки) определяется по правилу:

$$x_k = ih, \quad y_k = jh. \quad (19)$$

На рисунке 1,а показана равномерная координатная сетка в плоскости xOy с шагом h . Приближенный метод решения граничной задачи можно построить так, чтобы решение рассматривалось только в узлах сетки, т.е. в точках с координатами x_m, y_n . Для этого все производные в формулировке задачи заменяются их конечно-разностными аналогами. Исходная задача уравнений посредством так называемой разностной схемы сводится к системе линейных алгебраических уравнений. К настоящему времени теория разностных схем основательно разработана. Следует отметить, что разностные схемы применяются, в основном, при использовании дифференциального оператора в краевой задаче. В этом случае удается построить простой, хотя и требующий

больших вычислительных затрат, алгоритм. Для электродинамических задач разностные схемы применялись относительно редко, что связано с рядом специфических трудностей. В ряде случаев разностные схемы получают на основе уравнений Максвелла в интегральной форме.

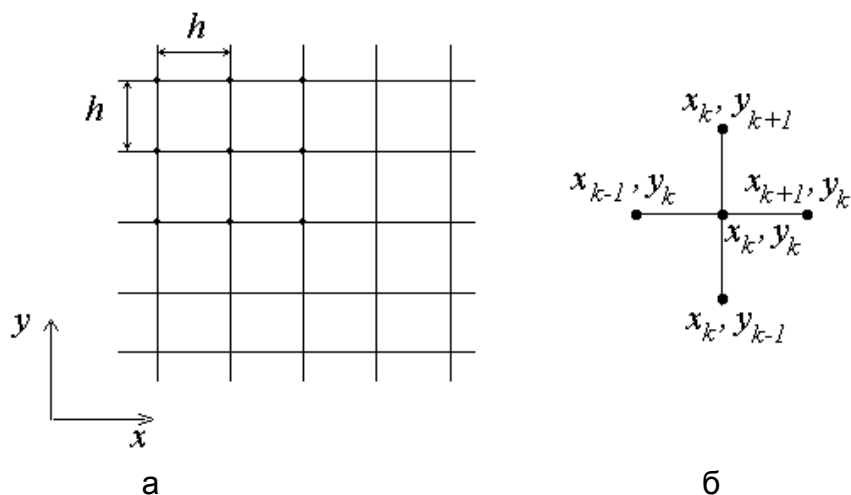


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Рассмотрим разностную схему для дифференциального оператора L . Пусть нужно построить разностный аналог частной производной по x функции $u(x,y)$ в точке x_k, y_k (см. рисунок 1,б). Значения $u(x_m, y_n)$ будем кратко обозначать $u_{m,n}$. Возможны, например, правый аналог ℓ_{np} и левый ℓ_l :

$$\ell_{np} = \frac{u_{k+1,k} - u_{k,k}}{h} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_k, y_k}, \quad \ell_l = \frac{u_{k,k} - u_{k-1,k}}{h} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_k, y_k}. \quad (20)$$

Если теперь требуется построить вторую частную производную, то пишут:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_k, y_k} \approx \frac{1}{h} (\ell_{np} - \ell_l) = \frac{u_{k-1,k} - 2u_{k,k} + u_{k+1,k}}{h^2}. \quad (21)$$

Аналогично строится производная $\partial^2 u / \partial y^2$. Разностный аналог двумерного лапласиана $\nabla_{x,y}^2$ можно записать в виде:

$$\nabla_{x,y}^2 \Big|_{x_k, y_k} \approx \frac{u_{k-1,k} + u_{k,k-1} - 4u_{k,k} + u_{k+1,k} + u_{k,k+1}}{h^2}. \quad (22)$$

Поясним на примере вышесказанное. Пусть решается граничная задача вида

$$\nabla_{x,y}^2 u = f \quad \text{в } S, \quad u = 0 \quad \text{на } L, \quad (23)$$

тогда для некоторого узла сетки с номером (k,k) согласно (22) имеем:

$$-u_{k-1,k} - u_{k,k-1} + 4u_{k,k} - u_{k+1,k} - u_{k,k+1} = -h^2 f_{k,k}. \quad (24)$$

Данная схема позволяет записать систему линейных алгебраических уравнений, матрица которой будет очень разреженной: для всех внутренних точек – независимо от числа узлов – количество отличных от нуля элементов матрицы в строке равно пяти. Матрица при этом будет называться пяти-диагональной. Напомним, что матрица $A=[a_{ij}]$ называется $(2m+1)$ диагональной, если $a_{ij}=0$ при $|i-j|>m$. Следует отметить, что поскольку аппроксимации подвергается дифференциальный оператор задачи, число узлов оказывается большим. Порядки систем линейных уравнений весьма высоки по сравнению, например, с проекционными методами. Однако использование разреженности матриц помогает в ряде случаев преодолевать эту трудность.

Для оценки приближенного решения используется **погрешность аппроксимации $R(h)$ дифференциального оператора Lu** оператором вида (21) или (22):

$$R_k(h) = Lu \Big|_{x_k, y_k} - L(u_{k,k}) - f_{k,k}. \quad (25)$$

Если для $R_k(h)$ выполняется условие

$$|R_k(h)| \leq Mh^2, \quad k=1,2,\dots,N-1 \quad (26)$$

где $M=const$, не зависящая от h , то говорят, что разностный оператор $L(u_{k,k})$ аппроксимирует на решении дифференциальный оператор Lu с погрешностью второго порядка относительно h .

В процессе дискретизации представление решения можно строить не только на некотором множестве точек, но и в некоторых малых областях, называемых **конечными элементами**. Обычно под **методом конечных элементов**, который называется также проекционно-сеточным, понимается процесс Бубнова-Галеркина для некоторой краевой задачи, в котором базис формируется из функций, определенных не во всей области задачи, а на специально построенной системе носителей в ней. На рисунках 2,а,б показаны функции φ_k на своих носителях: причем рисунок 2,а соответствует функциям в виде констант (импульсные функции), а рисунок 2,б – функциям-крышкам (треугольные функции).

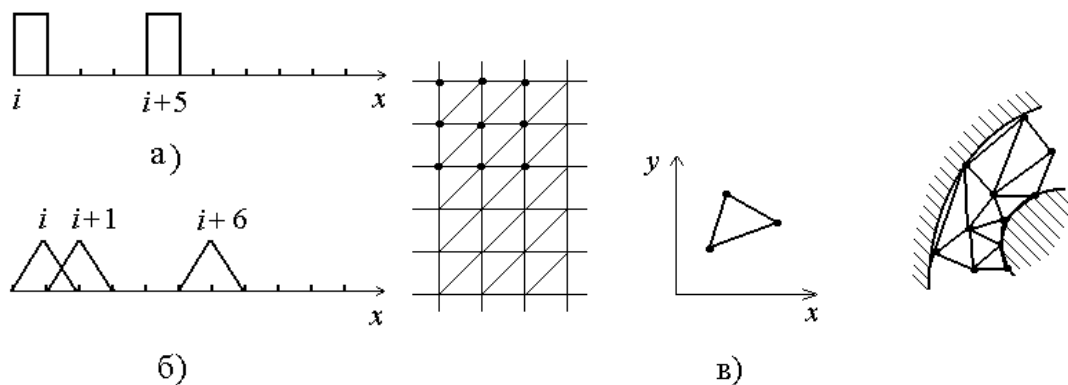


Рисунок 2 – Представления в методе конечных элементов

Функции в виде констант используются, если оператор L интегральный. Если же выполняется операция дифференцирования, то необходимо, чтобы базисные функции φ_k были непрерывными. В связи с этим конечно-элементное представление u_k в проекционной модели строится из функций-крышек, носители которых пересекаются.

Существуют разные способы построения конечных элементов на поверхности и в объеме. Наиболее часто используется треугольная сетка, удобная, в частности, в случае криволинейной границы (см. рисунок 2, в). Размеры и форма треугольников могут изменяться произвольно, а их взаимные соединения не обязательно должны следовать какой-либо регулярной структуре. Базисные функции в этом случае строятся в виде

$$\varphi_k = a_k + b_k x + c_k y, \quad (27)$$

где a_k, b_k, c_k однозначно связаны со значениями φ_k в узлах (вершинах) треугольника. Совокупность всех узловых значений образует неизвестный вектор решения.

Вид решения с использованием метода конечных элементов:

$$\frac{1}{h}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) + \frac{h}{6}(u_{k-1} + 4u_k + u_{k+1}) = \frac{h}{6}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}).$$

Таким образом, задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.

5.5 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ В СИСТЕМАХ РАДИОСВЯЗИ

Классификация методов решения. Интегральные уравнения для задачи дифракции плоской волны на круговом металлическом цилиндре. Проверка полученных интегральных уравнений с известными аналитическими решениями. Применение метода коллокаций для численного решения интегрального уравнения. Оценка погрешности вычислений.

5.5.1 КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

Для задач дифракции, решаемых при проектировании антенн систем сотовой связи, соотношение характерных размеров объекта к длине волны $L/\lambda \approx 1$, т.е. рассматривается резонансная область. Для данной области, как следует из п.5.3.1, применяются строгие методы решения, одним из которых является метод интегральных уравнений. В большинстве случаев исследуемые объекты не относятся к каноническим поверхностям. Вследствие этого для таких задач применяются численные методы. Классификация данных подходов приведена на рисунке 3. Из анализа следует, что все подходы к численному решению задач электродинамики условно можно разделить на два больших класса:

- использующиеся для монохроматического поля;

- используемые для произвольной зависимости искомых полей от времени.

Поскольку в области радиотехники для связи используются монохроматические электромагнитные поля, то рассмотрим более подробно данную ветку. В свою очередь методы для монохроматических полей разбиваются на две группы:



Рисунок 3. – Классификация методов решения задач дифракции

- методы частичных областей, получившие наибольшее распространение для решения внутренних задач электродинамики;

- методы определения полей во всей области.

Для проведения сравнительного анализа решений, получаемых аналитическими и численными методами, сузим область исследований до случая, когда объект представляет собой круговой металлический цилиндр. Аналитическое решение для данного объекта было приведено в п.5.1. Для данной

задачи, как следует из анализа схемы с рисунка 3, методы базируются на определении полей сразу во всей (полной) пространственной области. Причем один из возможных из возможных подходов состоит в определении самих электромагнитных полей в этой области (правая ветка), а другой подход (левая ветка) заключается в сведении задачи к нахождению распределения некоторой совокупности источников, поле каждого из которых удовлетворяет уравнению Гельмгольца (функция Грина). Распределение таких источников ищется из условия удовлетворения граничным условиям. Источники могут быть расположены на некоторой поверхности или контуре. При этом понижается количество неизвестных, что дает значительные выгоды при численном решении. Указанное преимущество позволяет выбрать для моделирования структуры поля именно данный подход численного решения дифракционной задачи. При выборе в качестве исследуемого параметра величины плотности поверхностного тока применяется метод интегральных уравнений. Достоинства данного метода были подробно рассмотрены в п.5.3.2.

5.5.2 Интегральные уравнения для задачи дифракции плоской волны на круговом металлическом цилиндре

Применительно к круговому металлическому цилиндру интегральные уравнения дифракционной задачи для случая падения плоской электромагнитной волны линейной поляризации были приведены в работе Хёнла, Мауэ, Маркувица (1964г.). В данной работе рассматривается случай бесконечного вдоль образующей однородному цилиндру, когда трехмерная задача дифракции может быть сведена к решению дифракционной задачи в поперечном сечении. Решение вдоль образующей, т.е. в продольной плоскости, получается путем умножения на экспоненциальный множитель $\exp(-ikz)$. Краевые эффекты от торцов цилиндра не учитываются. Геометрия задачи при таком подходе показана на рисунке 4.

В силу граничных условий, имеющих вид

- для случая падения E -поляризованной волны:

$$E_z^{\text{пад}} + E_z^{\text{pac}} = 0 \Big|_{r=a} \quad (1a)$$

- для случая падения H -поляризованной волны:

$$\frac{\partial(H_z^{\text{пад}} + H_z^{\text{pac}})}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (16)$$

и условий излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + ik_0 u \right) = 0, \quad (2)$$

где $u = E_\theta, E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$, в области внутри поверхности S поле отсутствует, даже если она вся не заполнена идеально проводящим материалом.

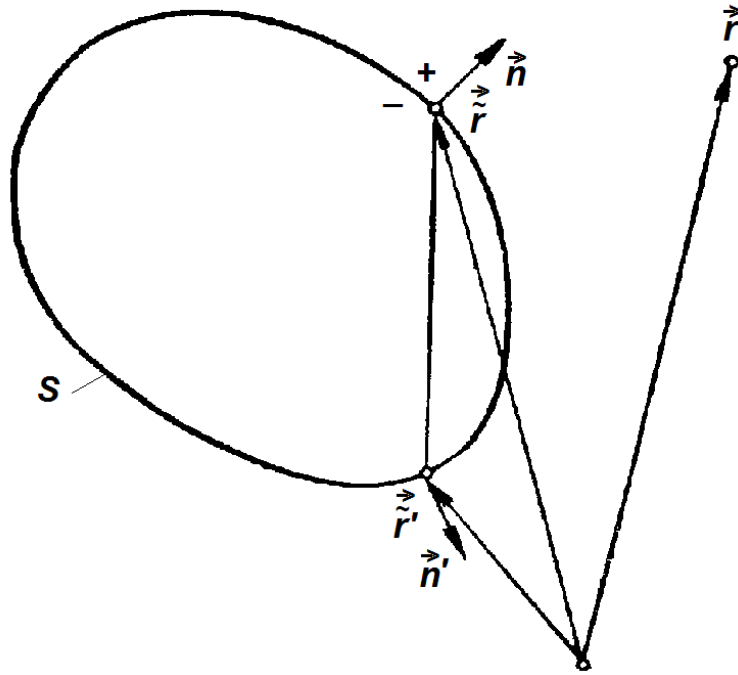


Рисунок 4. – Геометрия задачи дифракции плоской волны на круговом цилиндре

Таким образом, в случае E -поляризации искомая функция v при переходе через поверхность S является непрерывной, а производная по нормали $\partial v / \partial n$ испытывает разрыв. Обозначим данный разрыв через ψ . Следовательно, $\psi = (\partial v / \partial n)_+$, а $(\partial v / \partial n)_-$. Для случая второй поляризации обозначим разрыв искомой функции через $\varphi = v_+$.

С использованием принципа Гюйгенса можно записать:

- для E -поляризации:

$$v(r) = v_0(r) - \oint_S \psi(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}', \quad (3a)$$

- для H -поляризации:

$$v(r) = v_0(r) + \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}'. \quad (3b)$$

С точки зрения электродинамики величины ψ и φ имеют смысл поверхностных электрических токов.

Применяя условия $(\partial v / \partial n)_- = 0$ и $(\partial v / \partial n)_+ = \psi$ к уравнению (9a), можно записать уравнение Фредгольма 2-го рода для случая E -поляризации источника в виде:

$$\frac{1}{2} \psi(\vec{r}') + \oint_S \psi(\vec{r}'') \frac{\partial}{\partial n''} G(\vec{r}' - \vec{r}'') d\vec{r}'' = \frac{\partial v_0(\vec{r}')}{\partial n}. \quad (4a)$$

В случае H -поляризации волны используются условия $v_- = 0$ и $v_+ = v$. В результате интегральное уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{2} \varphi(\vec{r}) - \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}' - \vec{r}) d\vec{r}' = v_0(\vec{r}). \quad (46)$$

Для представления полей для контура, описываемого уравнением окружности, уравнения (4) могут быть представлены в виде:

- для E -поляризованной волны:

$$v_{\parallel}(r, \theta) = \exp(-ikr \cos \theta) - \frac{ia}{4} \int_0^{2\pi} \psi_{\parallel}(\theta') H_0^{(1)}(kR) d\theta', \quad (5a)$$

- для H -поляризованной волны:

$$v_{\perp}(r, \theta) = \exp(-ikr \cos \theta) + \frac{ia}{4} \int_0^{2\pi} \psi_{\perp}(\theta') \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}(kR) d\theta', \quad (5b)$$

где $H_0^{(1)}(\cdot)$ - функция Ганкеля нулевого порядка 1-го рода;

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \theta')}. \quad (6)$$

Получаемая при этом частном случае контура тела геометрия приведена на рисунке 5.

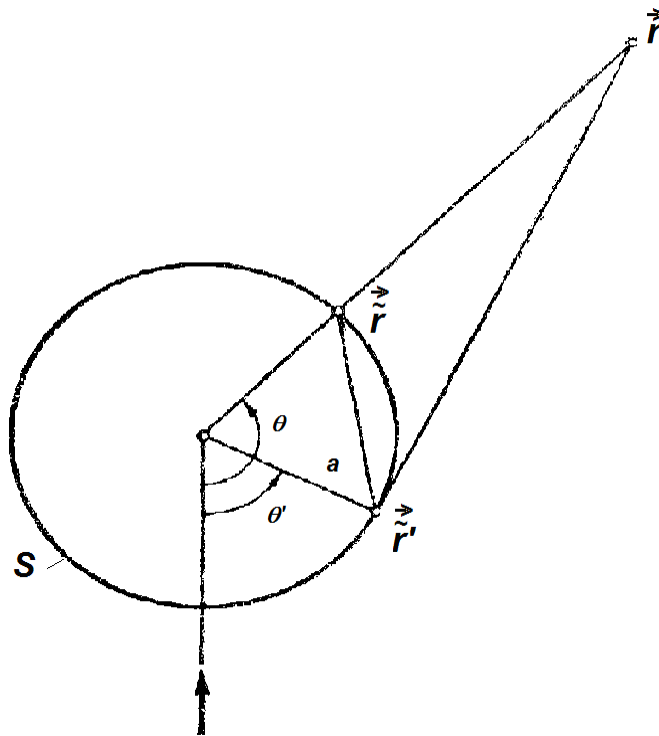


Рисунок 5. – Геометрия задачи для кругового цилиндра

Преобразуем уравнения (5), учитывая, что

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = 2a \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}(kR) &= k \frac{\partial}{\partial ka} H_0^{(1)}\left(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \right) = \\ &= -k \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| H_1^{(1)}\left(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \right),\end{aligned}\quad (76)$$

где $H_1^{(1)}(\cdot)$ - функция Ганкеля первого порядка 1-го рода.

В результате уравнения (5) принимают вид:

- для E -поляризованной волны:

$$\psi_{\parallel}(\theta) - \frac{ika}{2} \int_0^{2\pi} \psi_{\parallel}(\theta') H_1^{(1)}\left(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \right) d\theta' = -2ik \cos\theta \exp(-ikac \cos\theta), \quad (8a)$$

- для H -поляризованной волны:

$$\psi_{\perp}(\theta) + \frac{ika}{2} \int_0^{2\pi} \psi_{\perp}(\theta') H_1^{(1)}\left(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \right) d\theta' = 2 \exp(-ikac \cos\theta). \quad (8b)$$

5.5.3 Проверка полученных интегральных уравнений с известными аналитическими решениями

Для проверки полученного решения с полученным методом собственных функций и приведенным в п.5.1, разложим ядро уравнений (8) в ряд Фурье. Применим теорему сложения к функции Ганкеля:

$$\begin{aligned}H_0^{(1)}(kR) &= H_0^{(1)}\left(k\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}\right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) \begin{cases} J_n(kr) H_n^{(1)}(kr') & r < r', \\ J_n(kr') H_n^{(1)}(kr) & r > r', \end{cases}\end{aligned}\quad (9)$$

где $J_n(\cdot)$ - функция Бесселя n -го порядка.

Далее учтем соотношения (7), и в результате получим:

$$H_0^{(1)}\left(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) J_n(ka) H_n^{(1)}(ka), \quad (10a)$$

$$\begin{aligned}-\frac{ia}{4} \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}\left(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right| \right) &= -\frac{ia}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) \frac{\partial}{\partial a} \left(J_n(ka) H_n^{(1)}(ka) \right) = \\ &= -\frac{ika}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) \left(J_n'(ka) H_n^{(1)}(ka) + J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka) \right).\end{aligned}\quad (10b)$$

В данном соотношении штрихом обозначены производные цилиндрических функций по аргументу.

Представим искомую функцию и правую часть интегральных уравнений также в виде разложения в ряд Фурье:

$$\psi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in(\theta - \frac{\pi}{2})), \quad (11a)$$

$$\exp(-ikr \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in(\theta - \frac{\pi}{2})). \quad (11b)$$

В результате подстановки полученных представлений функций в интегральные уравнения (11) получаем для каждой спектральной компоненты n следующие соотношения:

$$a_n \left\{ 1 \pm \frac{i\pi ka}{2} (J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) + J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka)) \right\} = \begin{cases} 2kJ'_n(ka), \\ 2J_n(ka). \end{cases} \quad (12)$$

В данных соотношениях верхний знак соответствует случаю E -поляризации падающей волны, нижний – H -поляризации. Далее заменяя в скобках единицу на определитель Вронскиана, описываемый соотношением:

$$\frac{i\pi ka}{2} (J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka)) = 1, \quad (13)$$

получаем

- для случая E -поляризованной волны

$$a_n \frac{i\pi ka}{2} \left\{ J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka) + J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) + J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka) \right\} = 2kJ'_n(ka), \quad (14a)$$

- для случая H -поляризованной волны

$$a_n \frac{i\pi ka}{2} \left\{ J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka) - J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka) \right\} = 2J_n(ka). \quad (14a)$$

Из соотношений (14) следует, что неизвестные коэффициенты a_n определяются выражениями:

- для случая E -поляризованной волны

$$a_n = -\frac{2i}{\pi a} \frac{1}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (15a)$$

- для случая H -поляризованной волны

$$a_n = -\frac{2i}{\pi ka} \frac{1}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (15b)$$

Подставляя соотношения (15) в формулы (14), получаем

- для случая E -поляризованной волны

$$\psi(\theta) = -\frac{2i}{\pi a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in(\theta - \frac{\pi}{2}))}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (16a)$$

- для случая H -поляризованной волны

$$\psi(\theta) = -\frac{2i}{\pi ka} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in(\theta - \frac{\pi}{2}))}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (166)$$

Уравнения (16) записаны относительно скалярных компонент поверхностного электрического тока, возбуждаемого на круговом металлическом цилиндре.

Для сведения соотношений (16) к виду, приведенному в п.5.1, используем известную свертку:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \frac{\pi}{2})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\theta) \exp(-in\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(n\theta) (-i)^n, \quad (17a)$$

а также обозначения, применяемые в данных работах:

$$\psi(\theta) \rightarrow \varphi, \quad (176)$$

где $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$ - числа Неймана.

В результате соотношения (16) принимают вид, приведенный в п.5.1 при использовании метода собственных функций:

- для случая E -поляризованной волны

$$j_z(\varphi) = -\frac{2i}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-i)^n \cos(n\varphi)}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (18a)$$

- для случая H -поляризованной волны

$$j_\varphi(\varphi) = -\frac{2i}{\pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-i)^n \cos(n\varphi)}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (186)$$

Анализ полученных соотношений, а также их сравнение с результатами, полученными при использовании метода собственных функций, показывает, что они совпадают до знака при мнимой единице и используемых функций Ганкеля. Это определяется тем, что в работе Хёнгла и др., взятой для сравнения результатов, используется временная зависимость $\exp(-i\omega t)$, а в п.5.1 - $\exp(i\omega t)$. Учет этого факта и переход к временной зависимости $\exp(i\omega t)$ позволяет получить одинаковые зависимости для описания распределения плотности поверхностного электрического тока.

Таким образом, соотношения (8), описывающие интегральные уравнения для задачи о нахождении распределения поверхностного тока на круговом идеально проводящем цилиндре, справедливы.

5.5.4 Применение метода коллокаций для численного решения интегрального уравнения

Рассмотрим применение метода коллокации, описанного в п.5.4.2, для численного решения полученного интегрального уравнения. Как было показано, метод коллокации является аналитическим приближенным методом решения

краевой задачи, при котором решение разыскивается в виде линейной комбинации из линейно независимых функций вида, которая удовлетворяет граничным условиям. Оценка качества метода, выполненная в работе Галишниковой Т.Н., Ильинского А.С. путем вычисления среднеквадратичного отклонения на отрезке решения, полученного методом коллокации, от точного решения, показала:

- качество приближенного решения повышается при увеличении количества точек коллокации;

- для быстро осциллирующих решений погрешность решения зависит не только от количества точек коллокации, но и от способа их выбора. Меньшая погрешность получается, если точки коллокации попадают на места, соответствующие пучностям колебательного процесса;

- однородность или неоднородность граничных условий практически не влияет на качество решений;

- в точках коллокации приближенные и точные решения различаются, хотя дифференциальное уравнение удовлетворяется в них точно.

Наиболее простыми случаями выбора базисных функции в методе коллокации является применение кусочно-постоянных функций (полиномов нулевого порядка):

$$\varphi_j(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in \Delta_j, \\ 0, & \tau \notin \Delta_j. \end{cases} \quad (19)$$

При гладкой геометрии контура поверхности тела обычно применяется равномерная сетка коллокации с размещением точек в серединах отрезков разбиения. Оптимальный размер отрезков разбиения Δ_j составляет величину порядка 0.05...0.1 длины волны.

При использовании метода коллокации к решению интегральных уравнений (8) последние сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$Z\bar{A} = \bar{G}, \quad (20)$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} \langle \psi_1 L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_1 L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_1 L(\varphi_N) \rangle & \dots \\ \langle \psi_2 L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_2 L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_2 L(\varphi_N) \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \psi_N L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_N L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_N L(\varphi_N) \rangle & \dots \end{bmatrix}, \quad (21a)$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1 g \rangle \\ \langle \psi_2 g \rangle \\ \dots \\ \langle \psi_N g \rangle \\ \dots \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \\ \dots \end{bmatrix}. \quad (21b)$$

Искомая функция при таком представлении может быть записана в виде:

$$f = \langle \bar{\varphi} Z^{-1} \bar{G} \rangle, \quad (22)$$

где $\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_N \\ \dots \end{bmatrix}$.

5.5.5 Оценка погрешности вычислений

Рассмотрим некоторые общие вопросы, связанные с их решением, в частности, погрешность вычисления, обусловленная численным решением. Для оценки этой погрешности используют две широко распространенные величины:

- вектор ошибки;
- вектор невязки.

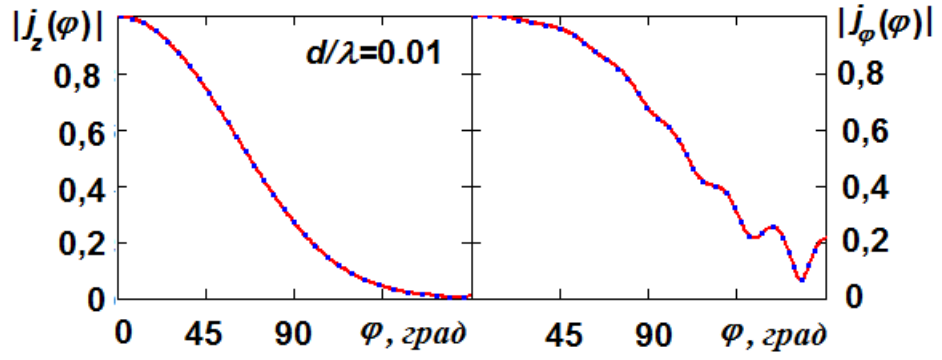
Под вектором ошибки \vec{e} в соответствии с работой Пименова Ю.В. понимается разность точного и вычисленного векторов решений, а под вектором невязки $\vec{\varepsilon}$ - вектор несоответствия между правыми и левыми частями уравнения при подстановке в это уравнение найденного решения. При этом выполняется равенство:

$$Z \vec{e} = \vec{\varepsilon}. \quad (23)$$

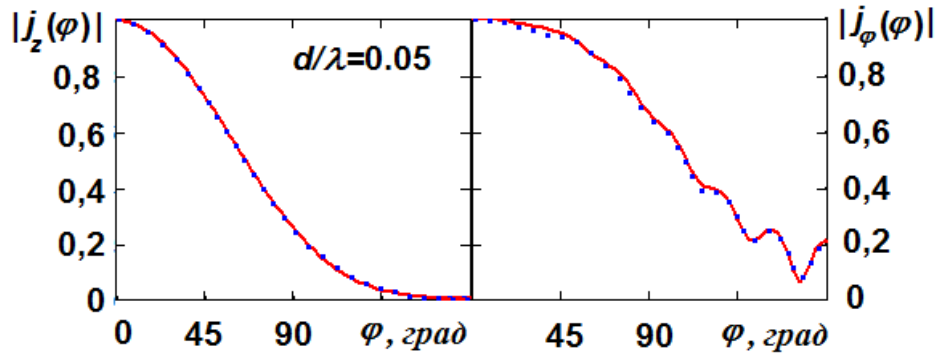
Используемые на практике методы численного решения системы линейных алгебраических уравнений дают обычно малую невязку, но это не обязательно означает, что вектор ошибки тоже будет мал. Например, предположим, что матрица Z почти вырождена, т.е. может стать вырожденной при малых возмущениях коэффициентов. В таком случае такие малые возмущения коэффициентов могут привести к как угодно большим изменениям решения. Это является не следствием неудовлетворительных вычислительных свойств того или иного метода решения системы линейных алгебраических уравнений, а свойством исходной задачи. Часто заранее неясно, насколько решение задачи устойчиво к небольшим изменениям исходных данных, и необходимо оценить это. Такую оценку позволяет дать понятие обусловленности матрицы. В теории вычислительных методов показывается, что каждой матрице можно поставить в соответствие число обусловленности:

$$\gamma = \text{cond}(Z), \quad (24)$$

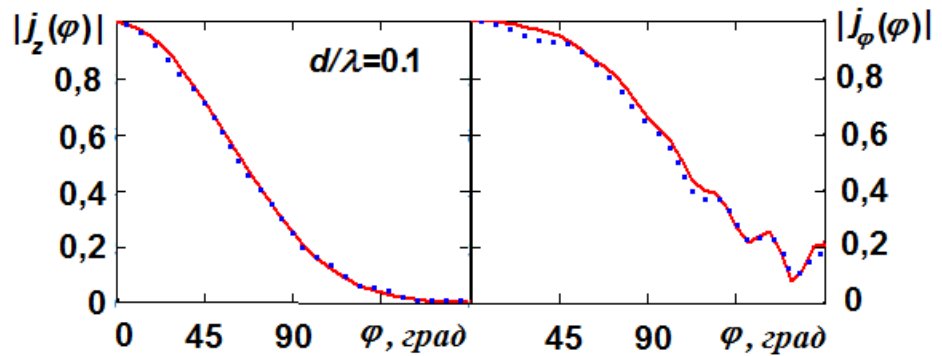
которое характеризует максимально возможное увеличение ошибки решения по сравнению с ошибкой задания правой части. Кроме того, число обусловленности таким же образом связывает решение с изменениями в коэффициентах системы линейных алгебраических уравнений и с погрешностью вычислительного процесса. Точное вычисление числа обусловленности требует большого количества действий, чем само решение системы.



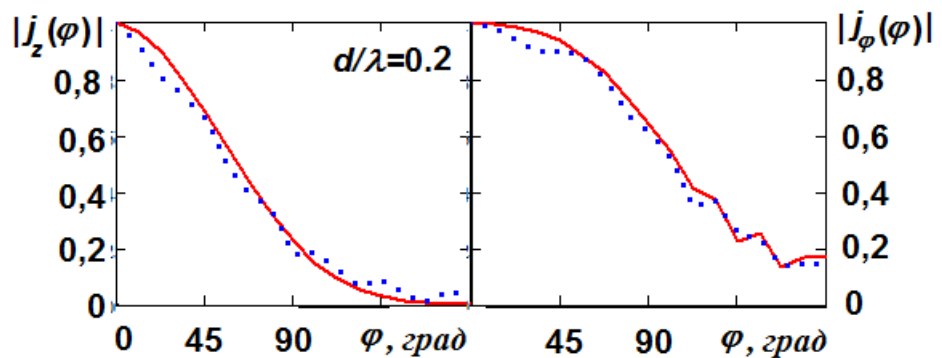
a



б



в



г

Рисунок 6. – Влияние величины дискрета Δ_j на точность получаемого результата

Однако на практике достаточно знать приближенное значение этого числа, поэтому используют упрощенные процедуры его оценки. Минимальное значение числа обусловленности единица. В случае вырождения матрицы число обусловленности может достигать 100 и выше.

Для примера на рисунках 6 приведем зависимости влияния величины дискрета Δ_j на распределение амплитуды плотности поверхностного тока на круговом цилиндре радиуса $a = 2\lambda$. Величины дискретов показаны на левых полях рисунков, соответствующих случаю падения Е-поляризованной волны. Правые поля при этом иллюстрируют зависимости для Н-поляризованной волны. Сплошной линией показано решение, полученное с использованием строгого метода собственных функций, точками – приближенного решения.

Анализ полученных в ходе исследований результатов показывает, что величина дискрета разбиения контура тела (размещение точек коллокации) оказывает существенное влияние на точность получаемого решения. Как указывалось ранее, оптимальной величиной дискрета является величина Δ_j , меньшая 0,1 длины волны. При выборе размера следует учитывать, что с уменьшением величины Δ_j существенно увеличивается порядок образующейся системы линейных алгебраических уравнений, а, следовательно, растут вычислительные затраты. Кроме того, следует помнить, что решение, получаемое численными методами, обеспечивает выполнение граничных условий только в точках коллокации. Это подтверждается графиками, иллюстрирующими распределение тока при больших значениях Δ_j , на которых наблюдаются существенные отклонения решения от решения, найденного с использованием аналитических методов и подтвержденного экспериментальными данными.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Горячая линия – Телеком, 2004.
2. Пименов Ю.В. Линейная макроскопическая электродинамика. Вводный курс для радиофизиков и инженеров. Долгопрудный: Изд. дом "Интеллект", 2008.
3. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. СПб.: Лань, 2009. [Электронный ресурс]. – Режим доступа. URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=403.
4. Боков Л.А., Замотринский В.А., Мандель А.Е. Электродинамика и распространение радиоволн. Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. [Электронный ресурс]. – Режим доступа. URL: <http://www.iprbookshop.ru/13874.html>.
5. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики. М.: Физматлит, 2012. [Электронный ресурс]. – Режим доступа. URL: <http://www.iprbookshop.ru/33386.html>.
6. Сомов А.М., Старостин В.В., Бенеславский С.Д. Электродинамика. М.: Горячая линия – Телеком, 2011. [Электронный ресурс]. – Режим доступа. URL: <http://www.iprbookshop.ru/12068.html>.
7. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. 544 с.
8. Барыбин А.А. Электродинамика волноведущих структур. Теория возбуждения и связи волн. М.: Физматлит, 2007. [Электронный ресурс]. – Режим доступа. URL: <http://www.iprbookshop.ru/17533.html>.
9. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

А1 Основные теоретические сведения векторного анализа

Для описания физических полей принято использовать их математические модели – скалярные и векторные поля. В Произвольной системе координат (x_1, x_2, x_3) скалярное поле φ приобретает вид некоторой функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, принимающей численные значения – действительные или комплексные. Векторное поле \vec{A} задается тремя проекциями на единичные векторы или орты выбранной системы координат:

$$\vec{A} = \vec{l}_{x_1} A_{x_1}(x_1, x_2, x_3) + \vec{l}_{x_2} A_{x_2}(x_1, x_2, x_3) + \vec{l}_{x_3} A_{x_3}(x_1, x_2, x_3). \quad (A1)$$

Для графического изображения векторных полей принято строить картину их силовых линий. Там, где интенсивность поля больше, силовые линии проводят чаще, и наоборот.

Для характеристики величины и направления скорости изменения скалярного поля в пространстве вводят градиент этого поля:

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{l}_{x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{l}_{x_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{l}_{x_3}, \quad (A2)$$

где h_1, h_2, h_3 - коэффициенты Лямэ по координатам (x_1, x_2, x_3) , имеющими следующие значения:

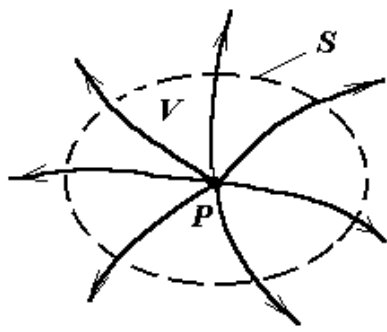
- в декартовой системе координат (x, y, z) : $h_x = h_y = h_z = 1$;
- в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) : $h_\rho = 1$; $h_\varphi = \rho$; $h_z = 1$;
- в сферической системе координат (r, θ, φ) : $h_r = 1$; $h_\theta = r$; $h_\varphi = r \sin \theta$.

Скалярное поле с нулевым значением градиента соответствует постоянному распределению поля.

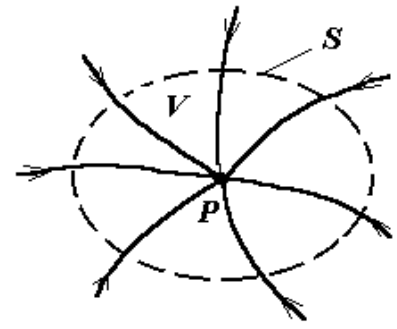
Помимо приведенного в формуле (А.2) обозначения градиента используется оператор Гамильтона ∇ (символ набла), который в декартовой системе координат оператор Гамильтона есть символический вектор:

$$\nabla \equiv \vec{l}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{l}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{l}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (A3)$$

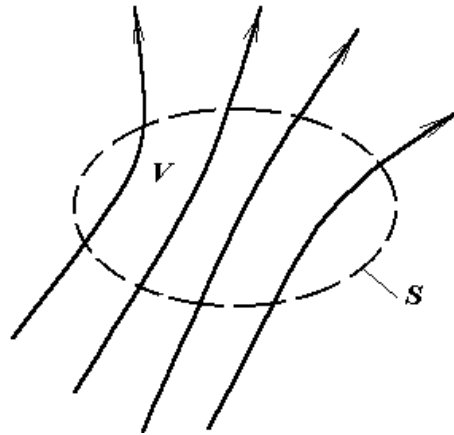
Описание дифференциальных свойств векторного поля несколько сложнее. Векторное поле \vec{A} принято характеризовать скалярным полем – дивергенцией $\text{div } \vec{A}$ и векторным полем – ротором $\text{rot } \vec{A}$. Значение дивергенции, отличное от нуля, показывает, что у поля есть либо источник (рисунок А1,а), либо сток (рисунок А1,б). Нулевое значение дивергенции соответствует случаю, когда поле не имеет источников и стоков, т.е. является соленоидальным (рисунок А1,в).



а) $\partial\rho/\partial t < 0$, $\operatorname{div}\vec{j} > 0$
(заряд уменьшается; исток)



б) $\partial\rho/\partial t > 0$, $\operatorname{div}\vec{j} < 0$
(заряд возрастает, сток)



в) $\partial\rho/\partial t = 0$, $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ (заряд не изменяется)

Рисунок А1 – Физическая трактовка оператора дивергенции

Значение дивергенции равно плотности источников рассматриваемого поля в заданной точке пространства и вычисляется путем дифференцирования его проекций:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right\}. \quad (\text{A4})$$

Трактовка ротора векторного поля сложнее. Данный оператор позволяет определить норму вращения векторного поля в точке. Можно считать, что оно в известном смысле характеризует степень отличия исследуемого поля от однородного. Вычисляется ротор с использованием соотношения:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x_1} / h_2 h_3 & \vec{e}_{x_2} / h_1 h_3 & \vec{e}_{x_3} / h_1 h_2 \\ \partial / \partial x_1 & \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_3 \\ h_1 A_{x_1} & h_2 A_{x_2} & h_3 A_{x_3} \end{vmatrix}. \quad (\text{A5})$$

При выполнении условия $\text{rot } \vec{A} = 0$ поле \vec{A} является **потенциальным векторным полем**. Если такое поле характеризует силу, действующую на материальную точку, то работа внешних сил при обходе замкнутого контура будет равна нулю.

Формулы (A2), (A4), (A5) с помощью оператора Гамильтона ∇ имеют вид:

$$\text{grad } U = \nabla U; \quad \text{div } \vec{A} = \nabla \vec{A}; \quad \text{rot } \vec{A} = [\nabla \vec{A}]. \quad (\text{A6})$$

Из дифференциальных векторных операций второго порядка широкое применение в электродинамике находит Лапласиан (дифференциальный оператор второго порядка ∇^2), закон действия которого на векторное поле \vec{A} в произвольной системе координат описывается соотношением:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}, \\ \nabla^2 \vec{A} &= \nabla \cdot \nabla \vec{A} - [\nabla, [\nabla, \vec{A}]]. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Дифференциальная операция второго порядка, действующая на скалярное поле, задается оператором Лапласа:

$$\nabla^2 = \Delta = \text{div grad}. \quad (\text{A8})$$

В декартовой системе координат оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (\text{A9})$$

A2 Наиболее часто используемые векторные соотношения

A2.1 Скалярное произведение двух векторов \vec{A} \vec{B}

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A}, \vec{B}) = |A||B| \cos \varphi, \quad (\text{A10})$$

где $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$ - модули векторов; φ - наименьший угол между векторами.

В декартовой системе координат:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{A11})$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (\text{A12})$$

Свойства скалярного произведения:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}, \quad (\text{A13})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \quad (\text{A14})$$

$$k \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}). \quad (\text{A15})$$

A2.2. Векторное произведение двух векторов \vec{A} и \vec{B}

$$\vec{A} \times \vec{B} = [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{C}, \quad (\text{A16})$$

где $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\varphi$, а сам вектор \vec{C} дополняет векторы \vec{A} и \vec{B} до правой тройки.

Свойства векторного произведения:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}, \quad (\text{A17})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad (\text{A18})$$

$$k \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B}), \quad (\text{A19})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (\text{A20})$$

А3 Некоторые функции, используемые при описании полей

А3.1 **Дельта-функция Дирака** связана с обобщением представления об импульсе. Обозначается как $\delta(x-x')$. По определению данная функция везде равна нулю за исключением одной точки, в которой она равна бесконечности. Однако для всякой регулярной функции $f(x)$ будет справедливо равенство [2]:

$$\int_L f(x)\delta(x-x')dx = \begin{cases} 0, & x' \notin L, \\ f(x'), & x' \in L. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Данное равенство является определением дельта-функции посредством функционала. В частности, при $f(x)=1$ имеем

$$\int_L \delta(x-x')dx = \begin{cases} 0, & x' \notin L, \\ 1, & x' \in L. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

В качестве обобщения для трехмерных областей в качестве определения используется запись

$$\int_L f(x)\delta(\vec{r}-\vec{r}')dx = \begin{cases} 0, & M(\vec{r}') \notin V, \\ f(\vec{r}'), & M(\vec{r}') \in V. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

где \vec{r}, \vec{r}' – радиус-векторы точки в области V .

А3.2. Для ряда канонических задач электродинамики (например, краевых), записанных в цилиндрической системе координат, решение может быть представлено с использованием бесконечных рядов цилиндрических (круговых) функций Бесселя. Под **цилиндрическими функциями** $Z_\nu(x)$ понимаются [12]:

- функции Бесселя первого рода (или просто функции Бесселя) ν -го порядка, обозначаемые как $J_\nu(x)$ (x – аргумент функции);

- функции Бесселя второго рода (или функции Неймана) ν -го порядка, обозначаемые как $Y_\nu(x)$;

- функции Бесселя третьего рода ν -го порядка (или функции Ганкеля), в свою очередь распадающиеся на функции Ганкеля первого рода

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \quad (\text{A24})$$

и функции Ганкеля второго рода

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x). \quad (\text{A25})$$

Порядок ν может быть целым ($\nu=n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$), полуцелым ($\nu=n\pm 1/2$) или дробным. Аргумент функции Бесселя x может быть величиной как действительной, так и мнимой. В последнем случае функции Бесселя называются модифицированными.

Функции Бесселя первого и второго рода порядка ν представляют собой частные решения следующего дифференциального уравнения, называемого уравнением цилиндрических функций или уравнением Бесселя ν -го порядка

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0. \quad (\text{A26})$$

Если $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ – два независимых решения дифференциального уравнения, то общий интеграл решения уравнения запишется в виде

$$y = Z_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z), \quad (\text{A27})$$

где A и B обозначают две произвольные постоянные.

Функции Бесселя первого рода определяются с помощью рядов

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(\nu + r + 1)}, \quad (\text{A28})$$

если ν имеет дробный порядок, и

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(n + r + 1)!}, \quad (\text{A29})$$

если $\nu=n$ имеет целый порядок. В данных выражениях используется известное представление гамма-функции $\Gamma(x) = (x-1)!$.

Функции Неймана дробных порядков вычисляются с использованием зависимости

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (\text{A30})$$

При вычислении функций Неймана целого порядка обычно применяют специальные алгоритмы, построенные на использовании свойств цилиндрических функций.

К основным свойствам цилиндрических функций $Z_n(x)$ целого порядка относятся:

$$Z_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Z_n(x) - Z_{n-1}(x), \quad Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x), \quad (\text{A31})$$

$$Z'_n(x) = -\frac{n}{x}Z_n(x) + Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x}Z_n(x) - Z_{n+1}(x). \quad (\text{A32})$$

Цилиндрические функции не являются периодическими, но они «осциллируют» относительно нуля. Существенно, что $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ при $n \neq 0$ и $Y_n(0) = -\infty$.

Следует отметить и асимптотические приближения цилиндрических функций при неограниченно возрастающем и неограниченно убывающем аргументе. Так, при неограниченно возрастающем аргументе цилиндрические функции переходят в тригонометрические или экспоненциальные функции:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left\{x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\} + O(x^{-1/2}), \quad (\text{A33})$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left\{x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\} + O(x^{-1/2}), \quad (\text{A34})$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{-i\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} + O(x^{-1/2}). \quad (\text{A35})$$

При малых значениях аргумента

$$J_n(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}, \quad Y_n(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{x}{2}\right)^n}, \quad Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} \quad (\gamma = 1,781\dots). \quad (\text{A36})$$

При решении задач о нахождении поля в круглых волноводах радиуса a для вычисления поперечных волновых чисел $\chi = \frac{v_{mn}}{a}$ или $\chi = \frac{v'_{mn}}{a}$ используются корни уравнений $J_m(v) = 0$ и $J'_m(v) = 0$. Значения первых корней данных уравнения приведены в таблицах А1 и А2.

Таблица А1 - Значения первых корней уравнения $J_m(v) = 0$

| № корня | $m=0$ | $m=1$ | $m=2$ |
|---------|-------|--------|--------|
| 1 | 2,404 | 3,832 | 5,135 |
| 2 | 5,420 | 7,016 | 8,417 |
| 3 | 8,654 | 10,173 | 11,620 |

Таблица А2 - Значения первых корней уравнения $J'_m(v) = 0$

| № корня | $m=0$ | $m=1$ | $m=2$ |
|---------|-------|-------|-------|
| 1 | 2,832 | 1,840 | 3,054 |
| 2 | 7,016 | 5,335 | 6,705 |

| | | | |
|---|--------|-------|-------|
| 3 | 10,174 | 8,536 | 9,965 |
|---|--------|-------|-------|

А3.1 При решении задач дифракции на отверстиях используются интегралы Френеля, описываемые соотношениями:

$$F(x) = \int_0^x \exp(-i \frac{\pi}{2} t^2) dt = C(x) - iS(x), \quad (A37)$$

где

$$C(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi}{2} t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt, \quad (A38)$$

называемые соответственно **косинус- и синус-интегралами Френеля**.

Кроме того, в литературе встречаются и другие определения интегралов Френеля, называемые функциями Френеля:

$$\begin{bmatrix} C_1(x) \\ S_1(x) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \begin{Bmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{Bmatrix} dt, \quad \begin{bmatrix} C_2(x) \\ S_2(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \begin{Bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{Bmatrix} \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (A39)$$

Графики функций (А.38) имеют вид, представленный на рисунке А1.

Для анализа интенсивности поля используется также **клотоида** или **спираль Корню**, параметрическое уравнение которой имеет вид:

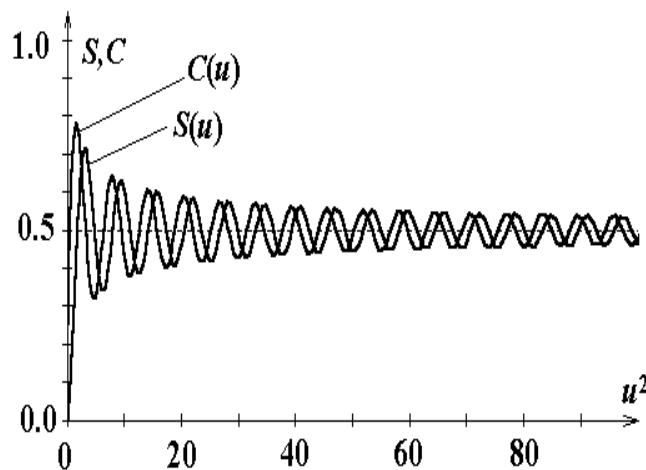


Рисунок А1 – Графики функций косинус- и синус-интегралов Френеля

$$x = C(u), \quad y = -S(u), \quad (A40)$$

а график представлен на рисунке А2. На данном графике фокусы соответствуют значениям $u \rightarrow \infty$.

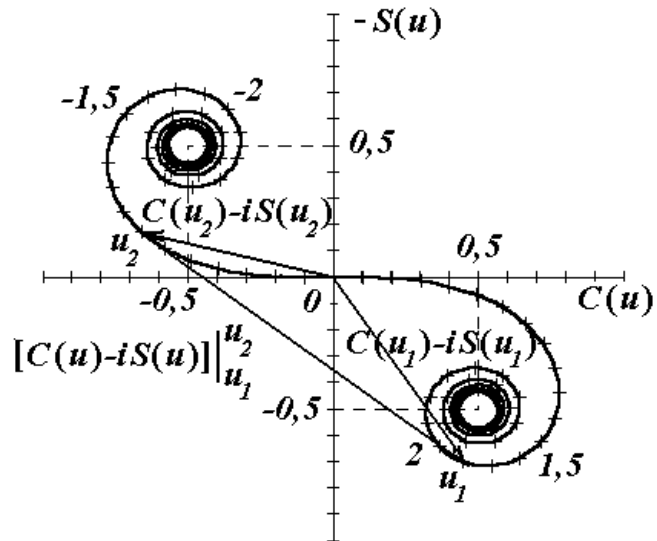


Рисунок А2 – Спираль Корню

Рассмотрим применение спирали Корню для анализа интенсивности поля при дифракции на отверстии (см. материалы п.6.2). Интеграл Френеля в этом случае представляется в виде произведения двух независимых функций координат

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \Phi(x) \Phi(y), \quad (\text{A41})$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= |C(u_2) - iS(u_2) - C(u_1) + iS(u_1)|, \\ \Phi(y) &= |C(v_2) - iS(v_2) - C(v_1) + iS(v_1)|, \end{aligned} \quad (\text{A42})$$

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left(x \pm \frac{a}{2} \right), \quad v_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left(y \pm \frac{b}{2} \right), \quad (\text{A43})$$

где a, b – размеры отверстия;

z – расстояние до точки наблюдения.

Так, при рассмотрении функции $F(x, y)$ в одной из плоскостей, например, $y=0$ (E -плоскость) для вычисления $\Phi(x)$ с использованием спирали Корню выбираются точки u_1 и u_2 . Длина отрезка, соединяющего точки u_1 и u_2 , дает значение $\Phi(x)$. По определению (A.41) $F(x, 0) = \frac{1}{2} \Phi(x) \Phi(0) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{2}}$. Следовательно, при $x=0$ точка наблюдения занимает центральное положение, а отрезок, соединяющий фокусы, для которых $u_1(0) \approx \frac{1}{2}$, $u_2(0) \approx -\frac{1}{2}$, изображает функцию $F(0, 0)$ (см. рисунок А.3,а).

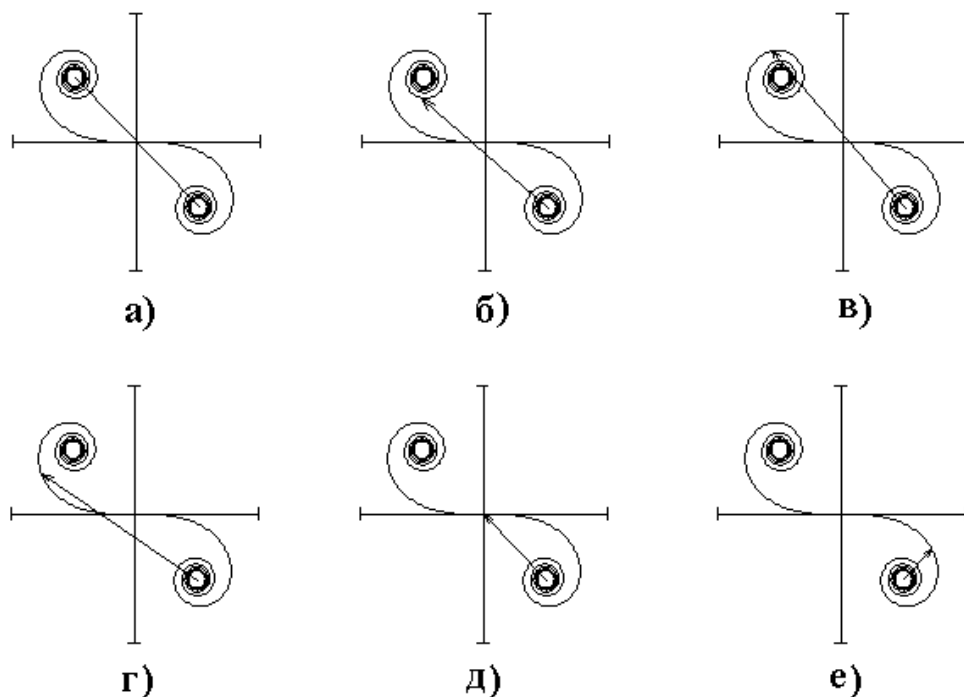


Рисунок А3 – График интеграла Френеля в виде спирали Корню

Перемещая точку наблюдения в плоскости наблюдения $z=const$ из среднего положения $x=0$ в сторону возрастания x , заметим, что $u_1(x)$ увеличивается. Анализируя вид данной функции с использованием графика, показанного на рисунке А.1, можно считать $u_1(x)$ лежащей в фокусе спирали Корню. Величина $u_2(x)$ с ростом x от 0 до $d/2$ уменьшается до нуля. Напомним, что параметр $d = \frac{\xi}{\lambda z}$ ($\xi=a,b$), называется *дифракционным параметром*. Таким образом, один

конец отрезка на спирали Корню остается неподвижным, а другой скользит по кривой, как показано на рисунках А.3,б-г, обходя ее витки. Длина отрезка (величина $\Phi(x)$) сначала колеблется с ростом амплитуды, а затем монотонно убывает. Когда точка наблюдения находится точно напротив края отверстия ($x=a/2$), длина изображающего отрезка оказывается вдвое меньше его значения при $x=0$ (рисунок А.3,д) и

$$F\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} F(0, 0). \quad (\text{A.44})$$

Отсюда можно сделать о том, что амплитуды электрического и магнитного полей дифракции на границе тени оказываются вдвое меньше, чем в центре освещенной области. При дальнейшем увеличении x значение $u_2(x)$ становится положительным и возрастает, приближаясь к $u_1(x)$. Длина отрезка при $x > a/2$ монотонно падает (рисунок А.3,е), что соответствует монотонному убыванию поля дифракции в области геометрической тени.

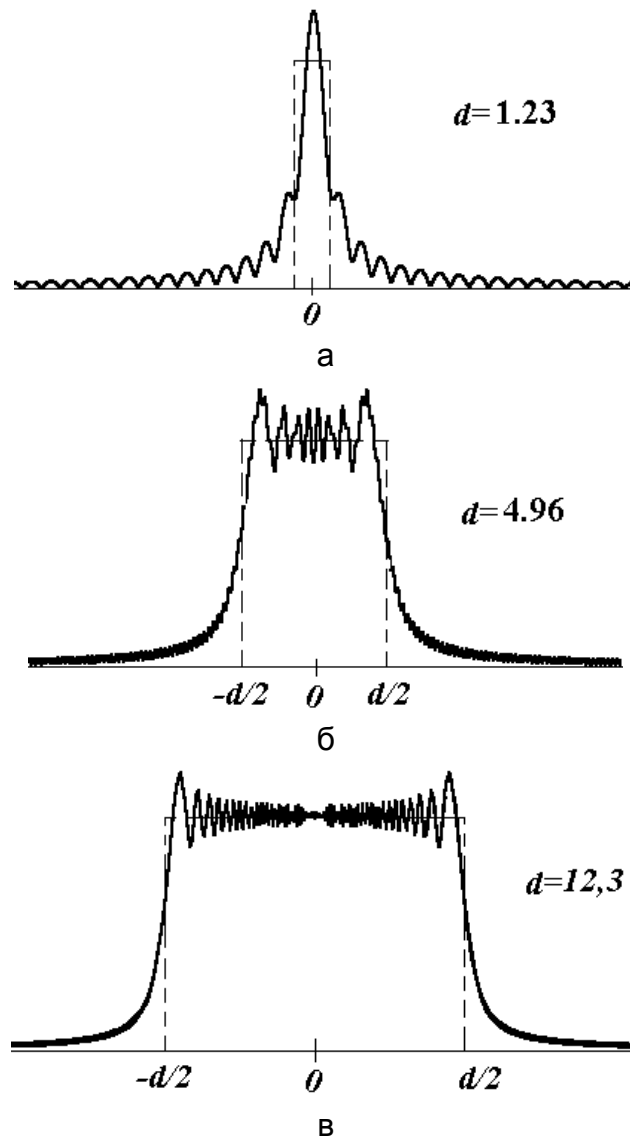


Рисунок А4 – Зависимость функции ослабления от дифракционного параметра d

Рассмотрим ряд кривых $F(x,0)$ (рисунок А.4), полученных при $a=const$, $b=const$ и изменении z , т.е. изменении дифракционного параметра d . Несложно заметить, что, во-первых, колебания интенсивности происходят относительно постоянного значения, определяемого геометрической оптикой (штрихованная линия). Вблизи границы геометрической тени лежит пик наибольшей интенсивности. Во-вторых, чем больше величина d , тем уже краевая зона, в которой проявляется дифракционный эффект. В-третьих, с увеличением z постепенно разрушается распределение поля, соответствующее дифракции Френеля, и начинает проявляться характер, свойственный дифракции Фраунгофера.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на круговом бесконечном металлическом цилиндре

Б1 Постановка задачи

Рассмотрим более подробно использование метода собственных функций (метода разделения переменных) для решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на круговом металлическом цилиндре. Результаты решения были приведены в п.5.1.

Постановка краевой задачи звучит следующим образом.

Пусть на бесконечный круговой цилиндр радиуса a , помещенного в свободное пространство, падает с направления, характеризуемого углами $\theta_0 = 90^\circ, \varphi_0$, плоская электромагнитная волна $\{\vec{E}^{\text{пад}}, \vec{H}^{\text{пад}}\}$.

Ограничения: На поверхности кругового металлического цилиндра выполняются граничные условия для идеально проводящей поверхности.

Требуется найти поверхностный электрический ток $\vec{j}^{\text{э}}$, возбуждаемый на круговом цилиндре данной электромагнитной волной.

Для формулировки решения учтем, что поверхностный электрический ток $\vec{j}^{\text{э}}$, возбуждаемый на круговом цилиндре, связан с магнитным полем падающей волны с помощью граничных условий

$$\vec{j}^{\text{э}} = [\vec{H}, \vec{n}], \quad (\text{Б1})$$

где \vec{n} - вектор внешней нормали к поверхности цилиндра;

$$\vec{H} = \vec{H}^{\text{пад}} + \vec{H}^{\text{рас}}, \quad (\text{Б2})$$

$\vec{H}^{\text{рас}}$ - рассеянное (вторичное) поле.

Таким образом, электродинамическая задача сводится к определению рассеянного электромагнитного поля в дальней зоне в точке пространства, характеризуемой углами $\theta = 90^\circ, \varphi$. Геометрия задачи показана на рисунке Б1.

При решении поставленной задачи целесообразно рассматривать два случая поляризации падающей волны относительно оси Oz :

- вектор \vec{E} параллелен оси Oz (рисунок Б1,а);
- вектор \vec{H} параллелен оси Oz (рисунок Б1,б).

Общий случай произвольной поляризации падающей волны может быть получен суперпозицией данных типов полей.

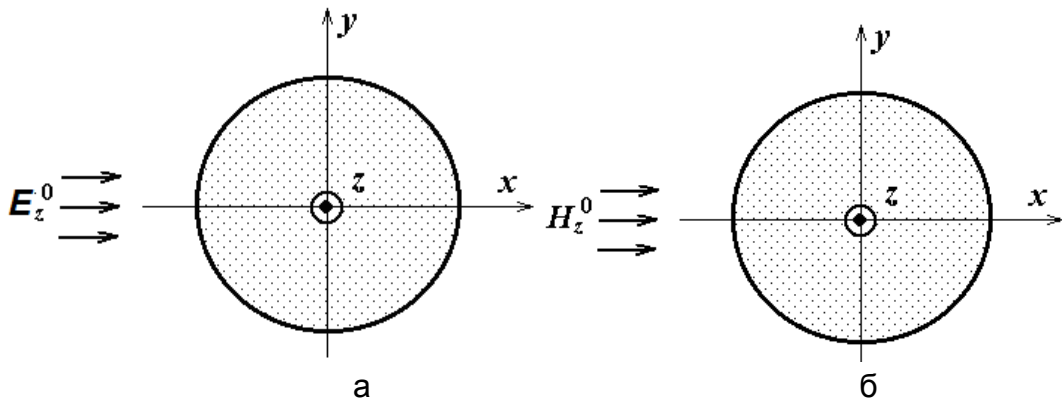


Рисунок Б1 – Геометрия задачи

Для получения решения введем систему цилиндрическую координат $0\rho\varphi z$ таким образом, чтобы ось Oz совпадала с направляющей бесконечного кругового цилиндра. Поскольку цилиндр является осесимметричным телом, то можно полагать, что плоская волна приходит с направления $\varphi_0 = 0^\circ$. Кроме того, поскольку $\theta_0 = 90^\circ$, то задача может быть сведена к плоскому случаю. С учетом вышесказанного проекции векторов поля падающей волны будут иметь вид:

- для случая падения E -поляризованной волны:

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp(-ikr \cos \varphi), \quad H_z = 0, \quad (\text{Б3а})$$

- для случая падения H -поляризованной волны:

$$H_z^{\text{пад}} = \frac{E_0}{W_0} \exp(-ikr \cos \varphi), \quad E_z = 0, \quad (\text{Б3б})$$

где E_0 - амплитуда напряженности электрического поля в падающей волне;

$W_0 = 120\pi \approx 377$ Ом – волновое сопротивление свободного пространства;

$k = 2\pi / \lambda$ - волновое число свободного пространства;

λ - рабочая длина волны в свободном пространстве;

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Строгое решение дифракционной задачи сводится к решению уравнений Максвелла при заданных граничных условиях для составляющих электромагнитного поля на поверхности цилиндра и на бесконечности. В качестве граничных условий выступает требование непрерывности касательных к поверхности цилиндра составляющих векторов результирующего электромагнитного поля на поверхности цилиндра. На бесконечности ($r \rightarrow \infty$) вторичное (рассеянное) поле должно удовлетворять принципу излучения (условиям Зоммерфельда):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + ik_0 u \right) = 0, \quad (\text{Б4})$$

где $u = E_\theta, E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$.

Рассеянное поле удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

- для случая падения E -поляризованной волны:

$$\frac{1}{r} \partial \left(\frac{r E_z^{pac}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z^{pac}}{\partial \varphi^2} + k^2 E_z^{pac} = 0. \quad (B5a)$$

- для случая падения H -поляризованной волны:

$$\frac{1}{r} \partial \left(\frac{r H_z^{pac}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z^{pac}}{\partial \varphi^2} + k^2 H_z^{pac} = 0. \quad (B5b)$$

Граничные условия для полного поля на поверхности определяются выражениями:

- для случая падения E -поляризованной волны:

$$E_z^{пад} + E_z^{pac} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (B6a)$$

- для случая падения H -поляризованной волны:

$$\frac{\partial (H_z^{пад} + H_z^{pac})}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (B6b)$$

Таким образом, в общем случае решение задачи определения вторичного электромагнитного поля, возникающего в дальней зоне, формулируется в виде дифференциального уравнения второго порядка. Решение задачи будет осуществлять двумя способами:

- с использованием метода собственных функций (частный случай метода Фурье);

- с использованием метода интегральных уравнений и дальнейшей редукцией методом коллокации.

Такой подход обеспечит возможность сравнения точности и временных затрат при использовании аналитических методов и численных методов.

Б2 Общее описание решения краевой задачи на основе метода Фурье

Как известно, например, из работы Пименова Ю.В., для решения краевых задач электродинамики разработаны и применяются различные методы, условно разделяемые на три группы:

- строгие;
- приближенные;
- численные.

К основным достоинствам решения, полученного с использованием строгих методов, является его аналитическая форма, справедливая при любом соотношении между размерами рассматриваемого объекта и длиной волны. Полученное при этом решение удовлетворяет всем требованиям теоремы

единственности. Следует также отметить, что решая одну и ту же задачу другим строгим методом можно получить ее решение в другой форме. При этом это всего лишь другая форма записи того же решения, другое представление той же функции.

При построении строгого решения электродинамической задачи ее предварительно сводят либо к решению дифференциального уравнения в частных производных, либо к решению интегрального уравнения. Известно относительно небольшое число строгих методов решения краевых задач электродинамики. К ним, в частности, относятся:

- метод Фурье;
- метод Гринберга;
- метод интегральных преобразований;
- метод Винера-Хопфа-Фока;
- метод разветвленных решений;
- метод, основанный на построении функции Грина.

Существуют и другие строгие методы.

Поскольку метод собственных функций относится к методу Фурье, то остановимся на более подробном его рассмотрении.

Метод Фурье основан на возможности применения к задачам математической физики принципа суперпозиции. В соответствии с этим принципом любая линейная комбинация решений однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных также является решением этого уравнения.

Пусть, например, функции $u = u_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ являются решениями линейного уравнения в частных производных

$$L(u) = 0. \quad (B7)$$

Тогда и сумма

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (B8)$$

также будет решением этого уравнения, если, конечно, ряд (B8) сходится таким образом, что возможно перестановка операторов L и Σ .

Аналогично, если частные решения $u = u_\nu$ уравнения (B7) непрерывно зависят от некоторого параметра ν , изменяющегося в интервале (χ, τ) , то при выполнении соответствующих очевидных условий интеграл

$$I = \int_{\chi}^{\tau} u_\nu d\nu \quad (B9)$$

также будет являться решением уравнения (B7).

Ограничимся изложением схемы метода Фурье для задач, которые могут быть сведены к решению дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u \right\} + M_y u = 0, \quad 0 < x < b, \quad c < y < d, \quad (\text{Б10})$$

где M_y - дифференциальный оператор вида

$$M_y = A \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B \frac{\partial}{\partial y} + C, \quad (\text{Б11})$$

A, B, C - заданные постоянные;

$p(x)$ и $q(x)$ - непрерывные положительные функции, первая из которых имеет непрерывную производную, а вторая – заданная непрерывная функция.

Уравнение (Б10) не представляет собой наиболее общего уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, которое допускает разделение переменных, однако оно включает, как частные случаи, наиболее часто встречающиеся уравнения электродинамики.

Для решения уравнения (Б10) предположим вначале, как предложено в работе Пименова Ю.В., что интервал (a, b) конечен, и поведение рассматриваемых функций на концах интервала таково, что каждое из отношений $\frac{p'(x)}{p(x)}$, $\frac{q(x)}{p(x)}$ и $\frac{r(x)}{p(x)}$ стремится к конечному пределу, когда $x \rightarrow a$ и $y \rightarrow b$.

Метод Фурье применяется для решения однородных задач математической физики. В связи с этим искомая функция u должна удовлетворять уравнению (Б10) и однородным краевым условиям на концах промежутка изменения одной из переменных. Будем считать, что однородные краевые условия выполняются на концах промежутка (a, b) :

$$\left. \begin{aligned} \left(\alpha_a \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_a u \right) \Big|_{x=a} = 0 \\ \left(\alpha_b \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_b u \right) \Big|_{x=b} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{Б12})$$

где $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b$ - постоянные, часть из которых может равняться нулю.

В частности, если $\alpha_a = \alpha_b = 0$ и $\beta_a = \beta_b = 1$, то из (Б12) следуют однородные условия первого вида

$$u \Big|_{x=a} = u \Big|_{x=b} = 0, \quad (\text{Б13а})$$

а при $\alpha_a = \alpha_b = 1$ и $\beta_a = \beta_b = 0$ - однородные условия второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0. \quad (\text{Б13б})$$

Кроме краевых условий (Б12) функция u должна также удовлетворять неоднородным условиям, относящимся к переменной y . Вид этих условий связан с постоянной A , определяющей принадлежность уравнения (Б10) к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу.

При $A > 0$ (эллиптический тип) с достаточной для приложений общностью можно считать, что условия (Б12) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\gamma_c \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_c u \right) \Big|_{y=c} &= g_c(x) \\ \left(\gamma_d \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_d u \right) \Big|_{y=d} &= g_d(x) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{Б14})$$

где $\gamma_c, \gamma_d, \delta_c, \delta_d$ - постоянные, часть из которых может равняться нулю;

$g_c(x), g_d(x)$ - функции, заданные в интервале (a, b) .

Случаи $A < 0$ (гиперболический тип) и $A = 0$ (параболический тип) соответствуют задачам математической физики, в которых переменная y играет роль времени с интервалом изменения (c, ∞) . Условия, относящиеся к значению $y = c$, имеют форму начальных условий:

$$u \Big|_{y=c} = f(x) \quad (\text{Б15a})$$

или

$$u \Big|_{y=c} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=c} = g(x), \quad (\text{Б15b})$$

где $f(x), g(x)$ - заданные функции.

Частное решение уравнения (Б10) ищут в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (\text{Б16})$$

Подставляя (Б16) в (Б10) и деля результат на произведение $X(x)Y(y)$, получаем

$$\frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u \right\} = - \frac{M_y u}{Y(y)}. \quad (\text{Б17})$$

Переменные x и y являются независимыми, следовательно, обе части уравнения (Б17) являются независимыми функциями. Их равенство возможно только в том случае, когда они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через v^2 , приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$(p(x)X'(x))' + (v^2 r(x) - q(x))X(x) = 0, \quad (\text{Б18a})$$

$$M_y Y(y) - v^2 Y(y) = 0. \quad (\text{Б18b})$$

Из однородных краевых условий (Б12) для функции $u(x, y)$ следуют аналогичные условия для функции $X(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a X'(a) + \beta_a X(a) &= 0 \\ \alpha_b X'(a) + \beta_b X(a) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{Б19})$$

Задачу определения решения уравнения (Б18а), удовлетворяющих однородным краевым условиям (Б19), называют краевой задачей Штурма-Луивилля. При произвольном ν^2 эта задача не имеет решения за исключением тривиального $X(x) \equiv 0$. Значения ν^2 , при котором существует нетривиальное решение задачи Штурма-Луивилля, называют собственным значением, или собственным числом, а соответствующее решение – собственной функцией. Совокупность собственных значений образует спектр данной задачи.

При сделанных выше предположениях о функциях $r(x)$, $p(x)$ и $q(x)$ в интервале (a, b) можно показать, что спектр задачи будет дискретным, состоящим из счетного множества действительных собственных значений $\nu = \nu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), каждому из которых соответствует собственная функция $X(x) = X_n(x)$, определенная с точностью до произвольного постоянного множителя.

Собственные функции $X_n(x)$ ортогональны на промежутке (a, b) с весом $r(x)$:

$$\int_a^b r(x) X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (\text{Б20})$$

Любую кусочно-гладкую в интервале (a, b) функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по собственным функциям $X_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \quad a < x < b, \quad (\text{Б21})$$

где

$$f_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) X_n(x) dx}{\int_a^b r(x) X_n^2(x) dx}. \quad (\text{Б22})$$

Собственные числа и собственные функции легко определяются, если при произвольном ν известна система линейно независимых решений уравнения (Б18а). Подставляя общее решение этого уравнения в краевые условия (20), приходят к однородной линейной системе для постоянных, а приравнявая нулю определитель системы, получают трансцендентное уравнение для определения допустимых значений ν .

Второй множитель $Y_n(y)$ находится после определения собственных функций и собственных чисел задачи из уравнения (Б18б), в котором необходимо положить $\nu = \nu_n$.

При $A \neq 0$ общее решение этого уравнения может быть записано в форме:

$$Y_n(y) = c_n^{(1)} Y_n^{(1)}(y) + c_n^{(2)} Y_n^{(2)}(y), \quad (\text{B23})$$

где $c_n^{(1)}$ и $c_n^{(2)}$ - произвольные постоянные;

$Y_n^{(1)}(y)$ и $Y_n^{(2)}(y)$ - линейно независимые решения уравнения (Б18б).

При $A = 0$ оператор M_y является дифференциальным оператором первого порядка, и решение уравнения (Б18б) записывается в форме:

$$Y(y) = c_n Y_n(y), \quad (\text{B24})$$

где c_n - произвольная постоянная;

$Y_n(y)$ - функция, удовлетворяющая уравнению (Б18б) при $A = 0$.

Таким образом, частные решения уравнения (Б10) определяются выражением:

$$u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) = (c_n^{(1)} Y_n^{(1)}(y) + c_n^{(2)} Y_n^{(2)}(y)) X_n(x). \quad (\text{B25})$$

Решение при этом ищется в виде, показанном в учебнике Петрова Б.М.:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y). \quad (\text{B26})$$

Постоянные $c_n^{(1)}$ и $c_n^{(2)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) вычисляются после подстановки (27) в краевые условия (Б12) и разложения функций $g_c(x)$ и $g_d(x)$ в ряды вида (22) по собственным функциям $X_n(x)$.

Описанная методика практически без изменений может быть распространена на случай, когда искомая функция должна удовлетворять условиям (Б15). Единственное отличие состоит в том, что в данном случае одному собственному значению могут соответствовать две линейно независимые собственные функции.

Более сложными для применения метода Фурье являются случаи, когда интервал (a, b) бесконечен, или какое-либо из отношений $\frac{p'(x)}{p(x)}$, $\frac{q(x)}{p(x)}$ и $\frac{r(x)}{p(x)}$

стремится к бесконечности при приближении к одному или к обоим концам интервала изменения переменной x (случай одного или двух сингулярных концов). В этих случаях краевое условие, относящееся к сингулярному концу, или к концу $x = b = \infty$, как правило, нельзя задать в форме (Б15). Обычно его можно заменить требованием ограниченности решения при приближении к сингулярному концу. При решении внешних задач электродинамики в предположении, что рассматриваемая часть пространства заполнена средой без потерь, условие на конце $x = b = \infty$ обычно формулируют в виде условия излучения Зоммерфельда (Б4). Существенное отличие рассмотренных ранее случаев состоит в том, что спектр собственных значений может быть как дискретным, так и непрерывным, в зависимости от структуры уравнения и характера налагаемых граничных условий. При непрерывном спектре меняется сам характер решения, которое в этом случае строится путем интегрирования частных производных по параметру ν , а для определения неизвестных множителей, входящих под знак интеграла,

используется аппарат интегральных разложений, заменяющих теорию рядов по собственным функциям.

Таким образом, для решения краевых задач электродинамики методом Фурье необходимо выполнение определенных требований. Для внешних и внутренних задач эти требования имеют некоторые отличия.

Для внутренних задач необходимо, чтобы рассматриваемая область была ограничена координатными поверхностями системы координат, допускающей разделение переменных в уравнении Гельмгольца (одной или двумя координатными поверхностями в случае двумерной области и одной, двумя или тремя в случае трехмерной области).

Для внешних задач граница рассматриваемой области, как правило, должна полностью совпадать с какой-либо координатной поверхностью системы координат, допускающей разделение переменных в уравнении Гельмгольца. Исключения составляют внешние области, которые могут быть получены путем предельных переходов из некоторых внутренних областей. Это требование существенно сужает класс внешних задач по сравнению с классом внутренних задач, для которых может быть получено строгое решение методом Фурье. Метод Фурье разработан для решения однородных задач математической физики, которые сводятся к интегрированию однородного дифференциального уравнения при однородных краевых условиях одной переменной.

Б3 Решение задачи нахождения распределения поверхностного тока в случае падения E -поляризованной плоской волны

При падении на металлический круговой цилиндр плоской электромагнитной волны E -поляризации в падающем поле имеется только одна продольная составляющая поля, определяемая соотношением (Б3а). Под воздействием первичного поля на цилиндре наводятся продольные поверхностные электрические токи, которые создают вторичное E -поляризованное электромагнитное поле $\{\vec{E}^{\text{рас}}, \vec{H}^{\text{рас}}\}$. При этом продольная компонента вторичного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца (Б5а). На поверхности цилиндра в силу граничных условий (Б6а) продольная составляющая полного электрического поля обращается в нуль. На бесконечности должно выполняться условие излучения (Б4), которое в данном случае эквивалентно требованию, чтобы при $r \rightarrow \infty$ во вторичном поле были только расходящиеся от цилиндра электромагнитные волны, и не было волн, идущих от бесконечности к рассматриваемому цилиндру.

Кроме того, из физических соображений очевидно, что искомая функция $E_z(r, \varphi)$ должна быть периодической с периодом 2π и четной относительно направления $\varphi = \varphi_0$, т.е. должны выполняться соотношения:

$$E_z(r, \varphi + 2\pi) = E_z(r, \varphi), \quad (\text{Б27а}) \quad E_z(r, \varphi - \varphi_0) = E_z(r, \varphi_0 - \varphi). \quad (\text{Б27б})$$

В соответствии со схемой решения задачи методом Фурье разделяем переменные в уравнении (Б5а). Полагая

$$E_z^{pac}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (\text{Б28})$$

Получаем из (Б5а) два уравнения в обыкновенных производных:

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (\text{Б29а})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + v^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (\text{Б29б})$$

где v – постоянная разделения.

Задача Штурма-Луивилля в данном случае состоит в нахождении нетривиального решения уравнения (Б29б), удовлетворяющего условиям (Б27). Записывая решение уравнения (Б29б), замечаем, что условие периодичности (Б27а) может быть выполнено только при $v = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е. задача имеет дискретный спектр. Значения $n = -1, -2, \dots$ не дают линейно независимых функций и могут не учитываться. Требуя, чтобы полученное решение уравнения (Б29б) удовлетворяло условию четности (Б27б), находим собственные функции задачи:

$$\Phi = \Phi(\varphi) = A_n \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{Б30})$$

где A_n - произвольные постоянные.

Поскольку переменная $a < r < \infty$, то решение уравнения (Б29а) удобно представить в виде:

$$R(r) = B_n H_n^{(1)}(kr) + C_n H_n^{(2)}(kr), \quad (\text{Б31})$$

где B_n и C_n - произвольные постоянные;

$H_n^{(1)}(\cdot)$ и $H_n^{(2)}(\cdot)$ - соответственно функции Ганкеля n -го порядка первого и второго рода.

Для выбора решения используем условие излучения (Б4). В соответствии с данным условием искомое поле должно иметь характер волны, распространяющейся в бесконечность по радиальным направлениям. Из рассмотрения асимптотических выражений для функций Ганкеля:

$$H_n^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[i \left(z - \frac{2n+1}{4} \pi \right) \right], \quad (\text{Б32а})$$

$$H_n^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[-i \left(z - \frac{2n+1}{4} \pi \right) \right], \quad (\text{Б32б})$$

справедливых при больших значениях аргументов $|z| \gg 1$; $|z| \gg n$, следует, что слагаемое $C_n H_n^{(2)}(kr)$ из (Б32б) при $kr \rightarrow \infty$ соответствует волне, распространяющейся от источника (в данном случае цилиндра) на бесконечность, т.е. удовлетворяет условию излучения. Следовательно,

$$R(r) = C_n H_n^{(2)}(kr), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Б33})$$

Перемножая выражения (Б30) и (Б31), находим частные решения уравнения (Б5):

$$E_z = E_z^{(n)} = D_n H_m^{(2)}(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (\text{Б34})$$

где $D_n = A_n C_n$ - произвольная постоянная.

Выражение (Б34) удовлетворяет дифференциальному уравнению (Б5а), условию излучения (Б4), а также условиям (Б27). Осталось удовлетворить его граничным условиям (Б6а). Для этого в соответствии со схемой решения задачи методом Фурье представим искомую функцию в виде суперпозиции всех частных решений:

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} E_z^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n D_n H_n^{(2)}(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (\text{Б35})$$

где $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$ - числа Неймана.

Падающее поле (Б5а) с использованием известного разложения может быть представлено в виде:

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp(ika \cos \varphi) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(ka) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (\text{Б36})$$

где $J_n(\cdot)$ - функция Бесселя n -го порядка.

С учетом соотношения (Б36) коэффициенты D_n могут быть представлены в виде:

$$D_n = -E_0 (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}. \quad (\text{Б37})$$

С учетом вида коэффициента разложения D_m продольная компонента E_z вторичного поля из (Б5а) может быть записана в виде:

$$E_z = -E_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{J_n(ka) \cos(n(\varphi - \varphi_0))}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr). \quad (\text{Б38})$$

Решение задачи в форме (Б38) справедливо при любых соотношениях между радиусом цилиндра a и длиной волны λ . Однако при $a \gg \lambda$ ряд в (39) сходится крайне медленно. Поэтому для получения численных результатов в случае $a \gg \lambda$ на основе решения (Б38) его необходимо предварительно преобразовать к виду, удобному для расчетов.

Для нахождения закона распределения тока, возбуждаемого на поверхности цилиндра полем плоской волны, используем соотношение (Б2), описывающие граничные условия на поверхности цилиндра. Для нахождения компонент вектора напряженности магнитного поля используем связь между продольными и

поперечными компонентами гармонического поля через первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} - i\omega \varepsilon \vec{E}. \quad (\text{Б39})$$

Поскольку в свободном пространстве, окружающем цилиндр, $\sigma = 0$, а $\omega \varepsilon = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu}} = \frac{k}{W_0}$, то соотношение (Б39) можно преобразовать к виду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{ik}{W_0} \vec{E}. \quad (\text{Б40})$$

Выше было показано, что в полном поле присутствует только продольная компонента вектора напряженности электрического поля, т.е. $\vec{E} = \{0; 0; E_z\}$. Следовательно, раскладывая представление ротора, получаем выражения для поперечных составляющих магнитного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\varphi} & \vec{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \vec{\varphi} \frac{\partial E_z}{\rho\partial\rho}. \quad (\text{Б41})$$

Таким образом, вектор напряженности магнитного поля имеет две отличные от нуля компоненты поля: ρ – и φ – компоненту. С учетом этого, можно записать выражение (Б2) через скалярные компоненты поля:

$$\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\varphi} & \vec{z} \\ H_\rho & H_\varphi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{z} H_\varphi. \quad (\text{Б42})$$

Анализ соотношения (Б42) показывает, что возбуждаемый плоской E -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего цилиндра электрический ток имеет только одну, отличную от нуля компоненту – продольную, т.е. $\vec{j} = \{0, 0, j_z\}$, связанную с φ – компонентой магнитного поля. Следовательно, для нахождения поверхностного тока необходимо найти φ – компоненты магнитного поля. С этой целью воспользуемся соотношением (Б41). В результате получаем:

$$H_\varphi = i \frac{k}{W_0} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (\text{Б43})$$

или после подстановки (Б38) получаем:

$$H_{\varphi}^{\text{рас}} = \frac{iE_0}{W_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{J_n(ka) \cos(n(\varphi - \varphi_0))}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{\partial H_n^{(2)}(kr)}{\partial kr}. \quad (\text{Б44})$$

Выражение для падающего поля будет определяться формулой:

$$H_{\varphi}^{\text{пад}} = i \frac{E_0}{W_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{\partial J_n(kr)}{\partial kr} \cos(n(\varphi - \varphi_0)). \quad (\text{Б45})$$

В соотношениях (Б44) и (Б45) учтено, что дифференцирование будет осуществляться по переменной kr , а не r , вследствие чего волновое число k было внесено под знак производной. Далее записывая с учетом выражений (Б44) и (Б45) соотношение для полного поля, получаем следующую формулу для нахождения вектора плотности поверхностного тока:

$$\vec{j} = \vec{z} \frac{E_0}{W_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \cos(n(\varphi - \varphi_0)) \left(J'_n(ka) - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_m^{(2)'}(ka) \right). \quad (\text{Б46})$$

Преобразуем полученное соотношение, учитывая определение вронскиана:

$$J'_n(ka) H_n^{(2)}(ka) - J_n(ka) H_n^{(2)'}(ka) = \frac{2}{i\pi ka}. \quad (\text{Б47})$$

В результате получаем:

$$j_z = -\frac{2E_0}{W_0 \pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{\cos(n(\varphi - \varphi_0))}{H_n^{(2)}(ka)}. \quad (\text{Б48})$$

Учитывая осесимметричность цилиндра, можно положить, что $\varphi_0 = 0$, вследствие этого выражение (49) можно преобразовать к виду:

$$j_z = -\frac{2E_0}{W_0 \pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{\cos(n\varphi)}{H_n^{(2)}(ka)}. \quad (\text{Б49})$$

Учитывая, что при $a \gg \lambda$ ряд в (Б49) сходится крайне медленно, поскольку данным свойством обладает исходное выражение для продольной составляющей электрического поля, то суммирование в формуле (Б49) при численном использовании проводится до значений n , близких к величине $2ka$.

Таким образом, в данном подразделе получены соотношения, позволяющие определить вектор напряженности электрического тока, возбуждаемого плоской E -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего кругового цилиндра.

Б4 Решение задачи нахождения распределения поверхностного тока в случае падения H -поляризованной плоской волны

Рассмотрим второй случай поляризации падающей на круговой металлический цилиндр плоской электромагнитной волны. В этом случае в падающем поле имеется только одна продольная составляющая магнитного поля, определяемая соотношением (Б3б). Под воздействием первичного поля на

цилиндре наводятся продольные поверхностные электрические токи, которые создают вторичное H -поляризованное электромагнитное поле $\{\vec{E}^{\text{рас}}, \vec{H}^{\text{рас}}\}$. При этом продольная компонента вторичного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца (Б5б). На поверхности цилиндра в силу граничных условий (Б6б) в нуль обращается производная продольной составляющей полного магнитного поля. На бесконечности также должно выполняться условие излучения (Б4), имеющее тот же смысл, что и для случая E -поляризованной волны. Соотношения (Б27) могут быть применены и для продольной компоненты магнитного поля, т.е.

$$H_z(r, \varphi + 2\pi) = H_z(r, \varphi), \quad (\text{Б50а}) \quad H_z(r, \varphi - \varphi_0) = H_z(r, \varphi_0 - \varphi). \quad (\text{Б50б})$$

Применим тот же подход, что и при нахождении компонент поля для случая падения волны E поляризации. Учитывая отличия в записи граничных условий, неизвестные коэффициенты $D_n = A_n C_n$ будут иметь вид:

$$D_n = -H_0 (-i)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (\text{Б51})$$

В итоге можно записать выражение для продольной компоненты магнитного поля H_z вторичного поля из (Б5б):

$$H_z = H_z^{(n)} = 2H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} H_m^{(2)}(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)). \quad (\text{Б52})$$

Решение задачи в форме (Б52) также справедливо при любых соотношении между радиусом цилиндра a и длиной волны λ . Однако при $a \gg \lambda$ ряд в (53) сходится крайне медленно.

С использованием соотношения (Б1), описывающего граничные условия на поверхности цилиндра, запишем его через скалярные компоненты магнитного поля. По условию $\vec{H} = \{0, 0, H_z\}$, следовательно, можно записать:

$$\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\varphi} & \vec{z} \\ 0 & \rho & H_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\vec{\varphi}}{\rho} H_z. \quad (\text{Б53})$$

Анализ соотношения (Б53) показывает, что возбуждаемый плоской H -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего цилиндра электрический ток имеет только одну, отличную от нуля компоненту – φ – компоненту, т.е. $\vec{j} = \{0, j_\varphi, 0\}$, связанную с z – компонентой магнитного поля. Подставляя в соотношение (Б53) выражения (Б52) и выражение, определяющее продольную компоненту падающего магнитного поля в виде

$$H_z^{\text{пад}} = H_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (\text{Б54})$$

можно записать:

$$\vec{j} = \vec{\varphi} H_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \cos(n(\varphi - \varphi_0)) \left(J'_n(ka) - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_m^{(2)'}(ka) \right). \quad (\text{Б55})$$

Преобразуя, как ранее для случая E -поляризованной волны полученное соотношение с учетом определения вронскиана, а также осесимметричность кругового цилиндра, получаем:

$$j_\varphi = i \frac{2H_0}{\pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{\cos(n\varphi)}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (\text{Б56})$$

Соотношение (Б56), как и соотношение (Б49) также крайне медленно сходится при $a \gg \lambda$. Вследствие этого суммирование в формуле (Б56) при численном использовании проводится до значений n , близких к величине $2ka$.

Таким образом, в данном подразделе получены соотношения, позволяющие определить вектор напряженности электрического тока, возбуждаемого плоской H -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего кругового цилиндра.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица В1 - Основные уравнения и теоремы электродинамики временная зависимость $\exp(i\omega t)$

| Наименование 1 | Формула для вычисления 2 |
|---|--|
| Мнимая единица | $i = \sqrt{-1}$ |
| Электрическая ϵ_0 и магнитная μ_0 постоянные | $\epsilon_0 = 10^{-9} / (36 \cdot \pi)$ Ф/м, $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн /м |
| Уравнения Максвелла в дифференциальной форме | <p>- относительно мгновенных значений:</p> $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$ $\text{div } \vec{D} = \rho; \quad \text{div } \vec{B} = 0;$ <p>- относительно комплексных амплитуд:</p> $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + i\omega \vec{D}, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B},$ $\text{div } \vec{D} = \rho, \quad \text{div } \vec{H} = 0.$ |
| Материальные уравнения | $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}$ $\dot{D} = \epsilon_a \dot{E}; \quad \dot{B} = \mu_a \dot{H}.$ |
| Закон Ома в дифференциальной форме | $\vec{j} = \sigma \vec{E};$ <p>- относительно комплексных амплитуд:</p> $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ |
| Плотность тока смещения | <p>- электрического: $\vec{j}_c = d\vec{D} / dt;$</p> <p>- магнитного: $\vec{j}_c^M = d\vec{B} / dt .$</p> |
| Объемная плотность электрического заряда ρ | $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$ (Δq - заряд, содержащийся в объеме ΔV) |
| Векторное поле объемной плотности тока проводимости \vec{j} | $\vec{j} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta S}$ <p>(ΔS - площадка, ориентированная перпендикулярно движению зарядов; \vec{i}_0 - орт нормали, указывающий направление движения; ΔI - ток, проходящий через ΔS)</p> |

Продолжение таблицы В1

| 1 | 2 |
|--|---|
| Уравнение непрерывности тока | $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t};$ - в дифференциальной форме: $\int_V \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0$ - в интегральной форме: |
| Векторные однородные волновые уравнения | $\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ |
| Однородные уравнения Гельмгольца | $\nabla^2 \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0, \quad \nabla^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0$ |
| Волновое число | $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \quad (\omega - \text{циклическая частота});$ $k = 2\pi/\lambda \quad (\lambda - \text{длина волны})$ |
| Поверхностный заряд | $\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$ |
| Плотность поверхностного тока | $\vec{\eta} = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta \ell}$ |
| Граничные условия относительно нормальных компонент | $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{v}_0 = \xi; \quad (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{v}_0 = 0$ |
| Граничные условия относительно тангенциальных компонент | $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}_0 = 0 \quad \text{или} \quad [\vec{v}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0,$ $(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \vec{\tau}_0 = \vec{\eta} \quad \text{или} \quad [\vec{v}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{\eta}.$ |
| Граничные условия на поверхности идеально проводящей среды | - при наличии поверхностных зарядов и токов $[\vec{v}_0, \vec{E}_1] = \xi; \quad [\vec{v}_0, \vec{H}_1] = \vec{\eta}$ - в отсутствии поверхностных зарядов и токов $[\vec{v}_0, \vec{E}_1] = 0; \quad [\vec{v}_0, \vec{H}_1] = \vec{j}^{\text{э.вт.}},$ где $\vec{j}^{\text{э.вт.}}(\vec{r}) = \vec{\eta}(\vec{\tau}, \vec{\zeta}) \delta(v - v')$ - объемная плотность вторичного (индуцированного) поверхностного электрического тока |

Продолжение таблицы В1

| 1 | 2 |
|---|---|
| Лемма Лоренца | <p>- в дифференциальной форме</p> $\operatorname{div}[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - \operatorname{div}[\vec{E}_2, \vec{H}_1] = \vec{j}_1^{\text{э.см.}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{м.см.}} \vec{H}_2 - \vec{j}_2^{\text{э.см.}} \vec{E}_1 + \vec{j}_2^{\text{м.см.}} \vec{H}_1;$ <p>- в интегральной форме</p> $\oint_S \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} d\vec{s} = \int_{V_1} \{ \vec{j}_1^{\text{э.см.}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{м.см.}} \vec{H}_2 \} dv - \int_{V_2} \{ \vec{j}_2^{\text{э.см.}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{м.см.}} \vec{H}_1 \} dv$ |
| Принцип взаимности | $\int_{V_1} \{ \vec{j}_1^{\text{э.см.}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{м.см.}} \vec{H}_2 \} dv = \int_{V_2} \{ \vec{j}_2^{\text{э.см.}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{м.см.}} \vec{H}_1 \} dv$ |
| Теорема эквивалентных поверхностных токов | $\vec{a} \vec{E}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_\epsilon - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_\epsilon \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_\epsilon + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_\epsilon \right\} ds;$ $\vec{b} \vec{H}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_\epsilon - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_\epsilon \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_\epsilon + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_\epsilon \right\} ds$ <p>Здесь \vec{a}, \vec{b} - орты, соответствующие ориентации электрического и магнитного диполей</p> |
| Эквивалентные поверхностные токи | $\vec{J}^{\text{э}} = [\vec{n}, \vec{H}]; \quad \vec{J}^{\text{м}} = -[\vec{n}, \vec{E}]$ |
| Теорема Умова-Пойнтинга | <p>- в дифференциальной форме:</p> $-\vec{E} \vec{j}^{\text{ст}} = \sigma \vec{E}^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \epsilon \frac{\vec{E}^2}{2} + \mu_0 \mu \frac{\vec{H}^2}{2} \right) + \operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}];$ <p>- в интегральной форме:</p> $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} + \int_V \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv + \int_V \sigma \vec{E}^2 dv = - \int_V \vec{j}^{\text{э.см.}} \vec{E} dv$ |
| Мощность излучения | $\wp = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}$ |
| Вектор Пойнтинга | <p>- для мгновенных значений: $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}];$</p> <p>- для комплексных амплитуд: $\dot{\Pi} = \frac{1}{2} [\dot{E}, \dot{H}^*].$</p> |

Продолжение таблицы В1

| 1 | 2 |
|---|---|
| Энергия электрического и магнитного полей | - электрического поля $W^M = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu \vec{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dv$; - магнитного поля $W^Э = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon \vec{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \vec{E} dv$. |
| Теорема комплексной мощности | $-\frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{j}^{*ст} dv = \frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E} ^2 dv +$ $+ i2\omega \int_V \left(\frac{\mu_0 \mu \vec{H} ^2}{4} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} ^2}{4} \right) dv + \frac{1}{2} \oint_S [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S}$ |

Таблица В2 - Излучение электромагнитных волн в свободное пространство

| Наименование | Формула для вычисления |
|---|---|
| 1 | 2 |
| Скорость света в вакууме | $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ |
| Решение волнового уравнения | $u(x, t) = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right),$ где f_1 - расходящаяся волна; f_2 - сходящаяся волна |
| Волновое уравнение относительно мгновенных значений для случая $\vec{j}^{ст} = 0$; $\rho^{ст} = 0$ | - относительно векторного электрического потенциала: $\nabla^2 \vec{A}^э - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^э}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}^э}{\partial t} - \mu_0 \mu \vec{j}^{эст};$ - относительно скалярного электрического потенциала: $\nabla^2 u^э - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 u^э}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial u^э}{\partial t} - \frac{\rho^{эст}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ |
| Условие калибровки (калибровка Лоренца) | $\text{div} \vec{A}^э + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial u^э}{\partial t} + \sigma u^э = 0$ |

Продолжение таблицы В2

| 1 | 2 |
|---|---|
| <p>Волновое уравнение относительно мгновенных значений для случая $\vec{j}^{\text{э.ст}} = 0$, $\rho^{\text{э.ст}} = 0$</p> | <p>- относительно векторного магнитного потенциала:</p> $\nabla^2 \vec{A}^M - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}^M}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{A}^M}{\partial t} = -\vec{j}^M ;$ <p>- относительно скалярного потенциала:</p> $\nabla^2 u^M - \frac{\partial^2 u^M}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u^M}{\partial t} = \frac{\rho^M}{\mu_0 \mu}$ |
| <p>Неоднородные уравнения Гельмгольца</p> | <p>- относительно векторного электрического потенциала:</p> $\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\vec{j}^{\text{э.ст}} ;$ <p>- относительно скалярного электрического потенциала:</p> $\nabla^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\frac{\rho^{\text{э.ст}}}{\varepsilon_0 \varepsilon} ;$ <p>- относительно векторного магнитного потенциала:</p> $\nabla^2 \vec{A}_m^M(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^M(\vec{r}) = -\vec{j}_m^{\text{М.ст}} ;$ <p>- относительно скалярного магнитного потенциала:</p> $\nabla^2 u_m^M(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^M(\vec{r}) = -\frac{\rho_m^{\text{М.ст}}}{\mu_0 \mu} .$ |
| <p>Коэффициент распространения,</p> | <p>$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = k_\alpha - ik_\beta$,</p> <p>$k_\alpha$ - коэффициент затухания; k_β - коэффициент фазы. В предположении поглощающей среды с малыми потерями $\gamma = i\tilde{k}$.</p> |
| <p>Связь между векторными электродинамическими потенциалами и компонентами электромагнитного поля</p> | $\vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{A}^{\text{э}} + \frac{1}{i\omega\tilde{\varepsilon}_a} \text{grad div } \vec{A}^{\text{э}} - \text{rot } \vec{A}^M ;$ $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}^{\text{э}} - i\omega\tilde{\varepsilon}_a \vec{A}^M + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \vec{A}^M .$ |
| <p>Интегралы Кирхгофа для запаздывающих потенциалов</p> | $\vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_V \vec{j}_m^{\text{э.ст}}(\vec{r}') \frac{\exp(-i\tilde{k}r)}{r} dv ;$ $\vec{A}_m^M(\vec{r}) = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_V \vec{j}_m^{\text{М.ст}}(\vec{r}') \frac{\exp(-i\tilde{k}r)}{r} dv$ |

Продолжение таблицы В2

| 1 | 2 |
|---|--|
| Функция Грина свободного пространства | $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\exp(-ikr)}{r},$ <p>где $r = \vec{r} - \vec{r}'$; \vec{r} - радиус-вектор точки наблюдения; \vec{r}' - радиус-вектор точки источника.</p> |
| Компоненты поля в дальней зоне элементарного электрического излучателя | $E_\theta = \frac{I_0 \ell k^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \frac{\exp(-ikr)}{r}; \quad H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi} \sin\theta \frac{\exp(-ikr)}{r}$ |
| Компоненты поля в дальней зоне элементарного магнитного излучателя | $H_\theta = \frac{I^M_0 \ell k^2}{4\pi\omega\mu_a} \sin\theta \frac{\exp(-ikr)}{r},$ $E_\varphi = -\frac{I^M_0 \ell}{4\pi} \sin\theta \frac{\exp(-ikr)}{r}$ |
| Волновое сопротивление свободного пространства | $\frac{E_\theta}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_\theta} = W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}$ |
| Характеристика направленности | $F(\theta, \varphi) = \frac{ U(\theta, \varphi) }{ U(\theta, \varphi) _{\max}} \quad (U = E, H)$ |
| Характеристика направленности элементарного электрического и магнитного излучателей | $F(\theta, \varphi) = \sin\theta $ |
| Векторная диаграмма направленности | $\vec{F}(\theta, \varphi) = \vec{\theta} F_\theta(\theta, \varphi) + \vec{\varphi} F_\varphi(\theta, \varphi)$ |
| Диаграмма направленности по мощности | $F(\theta, \varphi) = F_\theta^2(\theta, \varphi) + F_\varphi^2(\theta, \varphi)$ |
| Диаграмма направленности элемента Гюйгенса | $F_\theta = (1 + \cos\theta) \sin\varphi; \quad F_\varphi = (1 + \cos\theta) \cos\varphi;$ $F(\theta, \varphi) = F_\theta^2(\theta, \varphi) + F_\varphi^2(\theta, \varphi) = (1 + \cos\theta)^2$ |
| Интерференционный множитель | $\left(\frac{\sin\xi}{\xi} \right) \quad (\xi = u, v)$ |

Продолжение таблицы В2

| 1 | 2 |
|---|--|
| <p>Характеристика направленности прямоугольного отверстия размером $a \times b$ в металлическом экране</p> | <p>- общая формула:</p> $F(\theta, \varphi) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \left \frac{\sin u}{u} \right \left \frac{\sin v}{v} \right ,$ <p>- в главных сечениях (Е-плоскость при $\varphi=0$ и Н-плоскость при $\varphi=\pi/2$):</p> $F^E(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \left \frac{\sin \xi^E}{\xi^E} \right , \quad F^H(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \left \frac{\sin \xi^H}{\xi^H} \right $ <p>где</p> $u = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \varphi, \quad v = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi^E = \frac{ka}{2} \sin \theta,$ $\xi^H = \frac{kb}{2} \sin \theta.$ |
| <p>Угловая ширина луча диаграммы направленности по уровню 0</p> | $2\Delta\theta_0^E \approx \frac{2\lambda}{a}, \quad 2\Delta\theta_0^H \approx \frac{2\lambda}{b}$ |

Таблица В3 - Плоские электромагнитные волны в неограниченных средах

| Наименование | Формула для вычисления |
|--|---|
| 1 | 2 |
| <p>Комплексная диэлектрическая проницаемость</p> | $\tilde{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha - i \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 (\varepsilon - i 60 \lambda_0 \sigma),$ $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - i \varepsilon''_a = \varepsilon'_a (1 - i \operatorname{tg} \delta^s).$ |
| <p>Тангенс угла потерь</p> | <p>- диэлектрических: $\operatorname{tg} \delta^s = \frac{\varepsilon''_a}{\varepsilon'_a}$; - магнитных: $\operatorname{tg} \delta^m = \frac{\mu''_a}{\mu'_a}$.</p> |
| <p>Фазовая скорость</p> | $\vec{v}_\phi = \vec{i}_z \frac{\omega}{k_\beta} = \vec{i}_z \lambda \cdot f = \vec{i}_z \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \vec{v}_0$ |
| <p>Длина волны</p> | $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{ \vec{v}_0 }{f}$ |
| <p>Характеристическое сопротивление среды</p> | $W = Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \quad [\text{Ом}].$ |

Продолжение таблицы В3

| 1 | 2 |
|---|---|
| Волновое число в среде с потерями | $\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\alpha \mu_\alpha} = k_0 \cdot \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = k_0 \cdot \sqrt{\varepsilon - i60\lambda_0\sigma} = k_\beta - ik_\alpha$ |
| Характеристическое сопротивление среды с потерями | $W \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \exp(i\frac{\delta^3}{2}) = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \exp(i\frac{\delta^3}{2})$ |
| Вектор Пойнтинга в среде с потерями | $\vec{\Pi} = \vec{i}_z \frac{E_x^2}{2 W } \exp(-2k_\alpha z) \exp\left(i\frac{\delta^3}{2}\right)$ |
| Коэффициент эллиптичности | $k_e = b/a$, где a, b - большая и малая полуоси эллипса |
| Частота гироманнитного резонанса | $\omega_m = \gamma H_+$, где $\gamma = -2.21 \cdot 10^5$ Гц/(А•м) – гироманнитное отношение; H_+ - напряженность поля подмагничивания |
| Частота отклика среды на прилагаемое внешнее магнитное поле | $\omega_0 = \gamma \chi^M H_+ = \gamma (\mu - 1) H_+$ |
| Тензор магнитной проницаемости феррита | $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & -ia & 0 \\ ia & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix},$ <p>где</p> $\mu_x = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2} \right); \quad a = \mu_0 \frac{\omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2}$ |
| Постоянная Фарадея для феррита | $\theta' = \frac{k_1 - k_2}{2}$, где $k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon_a (\mu_x \pm a)}$. |
| Магнитная проницаемость среды для волн с левым и правым направлением вращения | <p>- с левым направлением: $\mu_1 = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_m + \omega} \right);$</p> <p>- с правым направлением: $\mu_2 = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_m - \omega} \right)$</p> |
| Относительная магнитная проницаемость необыкновенной волны | $\mu_{необ} = \frac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x}$ |

Продолжение таблицы В3

| 1 | 2 |
|---|--|
| Сдвиг фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами | $\psi = (k_{об} - k_{необ})x$ |
| Плазменная частота (собственная частота ионизированного газа, частота Ленгмюра) | $\omega_0 = \sqrt{\frac{N_3 e^2}{m_0 \epsilon_0}} \approx \sqrt{3,190 N_3}$ <p>где $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона; N_3 – концентрация электронов в единице объема</p> |
| Тензор диэлектрической проницаемости | $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & -ib & 0 \\ ib & \epsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \epsilon_x = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_M^2} \right);$ $b = \epsilon_0 \frac{\omega_M \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_M^2)\omega}; \quad \epsilon_z = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ |
| Параметры плазмы | <p>- общие соотношения:</p> $\epsilon = 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_3}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \sigma^3 = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_3 \nu}{\omega^2 + \nu^2};$ <p>- при высоких частотах $\omega^2 \gg \nu^2$:</p> $\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \sigma^3 = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_3 \nu}{\omega^2};$ <p>- при низких частотах $\omega^2 \ll \nu^2$:</p> $\epsilon = 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_3}{\nu^2}; \quad \sigma^3 = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_3}{\nu}.$ |
| Скорости при $\omega^2 \gg \nu^2$ | <p>- фазовая: $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = c / \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$</p> <p>- групповая: $v_{гр} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = c \sqrt{\epsilon};$</p> <p>- связь между фазовой и групповой скоростями: $v_\phi v_{гр} = c^2$</p> |

Продолжение таблицы В3

| 1 | 2 |
|---|--|
| Постоянная Фарадея для плазмы | $\theta' = \frac{\omega}{2c} (n_1 - n_2)$ |
| Законы Снеллиуса (связь углов падения $\varphi_{пад}$, отражения $\varphi_{отрд}$ и преломления θ) | <p>- первый закон: $\varphi_{над} = \varphi_{отрд} = \varphi$;</p> <p>- второй закон: $\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{v_{\phi 1}}{v_{\phi 2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}}{\sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$</p> |
| Коэффициенты Френеля (R - коэффициент отражения; T - коэффициент преломления (прохождения)) | <p>- для вертикально поляризованных волн:</p> $\dot{R}_{\parallel} = \frac{W_1 \cos \varphi - W_2 \cos \theta}{W_1 \cos \varphi + W_2 \cos \theta}, \quad \dot{T}_{\parallel} = \frac{2W_2 \cos \varphi}{W_1 \cos \varphi + W_2 \cos \theta};$ <p>- для горизонтально поляризованных волн:</p> $\dot{R}_{\perp} = \frac{W_2 \cos \varphi - W_1 \cos \theta}{W_2 \cos \varphi + W_1 \cos \theta}, \quad \dot{T}_{\perp} = \frac{2W_2 \cos \varphi}{W_2 \cos \varphi + W_1 \cos \theta},$ <p>W_1, W_2 - волновые сопротивления в 1 и 2 средах соответственно.</p> <p>- если вторая среда является идеально проводящей</p> $\dot{R}_{\parallel} = 1, \quad \dot{R}_{\perp} = -1, \quad \dot{T}_{\parallel} = \dot{T}_{\perp} = 0.$ |
| Угол Брюстера (отсутствие отражения) | $\varphi_{Б\parallel} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}} \right); \quad \varphi_{Б\perp} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}} \right)$ |
| Критический угол (угол полного отражения) | $\varphi_{кр} = \arcsin(n_2 / n_1), \quad n_2 < n_1$ |
| Коэффициент отражения при углах, больших критического | $\begin{Bmatrix} R_{\parallel} \\ R_{\perp} \end{Bmatrix} = \pm \exp \left\{ 2i \arctg \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \\ \mu_1 / \mu_2 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}}{\cos \varphi} \right] \right\}$ |

Продолжение таблицы В3

| 1 | 2 |
|---|---|
| Разложение волнового числа на поперечное и продольное | $k_x = \frac{\omega}{v_{\Phi_x}} = k_0 \cos \theta, \quad k_z = \frac{\omega}{v_{\Phi_z}} = k_0 \sin \theta$ |
| Волновые сопротивления для неоднородных волн | $Z_c^{TE} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{W_1}{\sin \theta}, \quad Z_c^{TH} = \frac{E_x}{H_y} = W_1 \sin \theta$ |
| Граничные условия (ГУ) Леонтовича (импедансные ГУ) | $[\vec{n}, \vec{E}] = Z[\vec{n}, [\vec{H}, \vec{n}]],$ где Z - поверхностный импеданс; \vec{n} - вектор внешней нормали к границе раздела сред |

Таблица В4 - Регулярные линии передачи электромагнитной энергии

| Наименование | Формула для вычисления |
|---|--|
| 1 | 2 |
| Уравнение коэффициентов | $\chi^2 = k^2 - \beta^2,$ где k - волновое число; β, χ - соответственно продольное и поперечное волновые числа. |
| Связь между поперечными и продольными компонентами электромагнитного поля | $\vec{E}_\perp = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_\perp \dot{E}_z - \frac{i\omega\tilde{\mu}_a}{\chi^2} [\text{grad}_\perp \dot{H}_z, \vec{i}_z],$ $\vec{H}_\perp = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_\perp \dot{H}_z + \frac{i\omega\tilde{\epsilon}_a}{\chi^2} [\text{grad}_\perp \dot{E}_z, \vec{i}_z]$ |
| Комплексный коэффициент отражения по напряжению | $\Gamma = B_U / A_U,$ где A_U, B_U - комплексные амплитуды падающей и отраженной волн напряжения соответственно. $\Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(2i\gamma z),$ где $\Gamma(0)$ - коэффициент отражения в нагрузке (т.е. сечении $z=0$). - модуль $ \Gamma = \frac{\text{КСВ} - 1}{\text{КСВ} + 1};$ - фаза $\varphi = 2k_\beta \ell_{\min} - \pi,$ где ℓ_{\min} - положение первого узла минимума. |
| Коэффициент бегущей волны | $KBB = \frac{ A_U - B_U }{ A_U + B_U } = \frac{1 - \Gamma }{1 + \Gamma }$ |

Продолжение таблицы В4

| 1 | 2 |
|---|---|
| Коэффициент стоячей волны | $KCB = \frac{ A_U + B_U }{ A_U - B_U } = \frac{1 + \Gamma }{1 - \Gamma } = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}$ |
| Коэффициент полезного действия | $\eta = 1 - \Gamma ^2$ |
| Входное сопротивление линии | $Z_{\text{вх}}(z) = W \frac{1 - \Gamma(0) \exp(-2\gamma z)}{1 + \Gamma(0) \exp(-2\gamma z)}$ |
| Критическая частота | $f_{\text{кр}} = \frac{\chi}{2\pi \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a}}$ |
| Критическая длина волны | $\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi}$ |
| Коэффициент фазы в волноводе | $k_\beta = \beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$ |
| Длина волны в волноводе (дисперсионная характеристика волновода) | $\lambda_{\text{в}} = \lambda_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$ |
| Фазовая скорость | $v_\phi = c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$ |
| Поперечное волновое число m -й моды прямоугольного волновода с размерами $a \times b$ | $\chi_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ |
| Характеристическое сопротивление для TM -волны | $Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$ |
| Характеристическое сопротивление для TE -волны | $Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}$ |
| Средняя мощность волны H_{10} через поперечное сечение волновода | $P = E_0^2 \frac{ab}{4W_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}$ |

Продолжение таблицы В4

| 1 | 2 |
|--|---|
| Критическая частота и критическая длина волны в круглом волноводе для волны ТМ | $(f_{кр})_{ТМ} = \frac{v_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (\lambda_{кр})_{ТМ} = \frac{2\pi a}{v_{mn}} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$ |
| Критическая частота и критическая длина волны в круглом волноводе для волны ТЕ | $(f_{кр})_{ТЕ} = \frac{v'_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (\lambda_{кр})_{ТЕ} = \frac{2\pi a}{v'_{mn}} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}},$ <p>здесь v_{mn} - корни уравнения $J_m(v) = 0$; v'_{mn} - корни уравнения $J'_m(v) = 0$.</p> |
| Длина волны собственных колебаний s-го типа в прямоугольном резонаторе (индекс s заменяет символ H_{mnp}, E_{mnp}, T_p) | $\lambda_s = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2\ell}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_{кр}^2 v}}}$ |
| Нагруженная добротность резонатора | $Q_s = 2\pi \frac{w}{W_{\Pi}} = \omega_s \frac{w}{P_{п.ср.}}$ <p>где w - запасенная при резонансе внутри полости электромагнитная энергия s-го типа колебаний; W_{Π} - энергия полных потерь за время одного периода T_s; $P_{п.ср.}$ - средняя за период мощность полных потерь ($W_{\Pi} = P_{п.ср} T_s$); ω_s - собственная частота колебаний</p> |
| Связь нагруженной добротности резонатора с собственной и внешней добротностью | $\frac{1}{Q_s} = \frac{1}{Q_{sc}} + \frac{1}{Q_{свн}}$ |
| Энергия, запасенная в резонаторе | $w = w_{\epsilon, макс} = \frac{\epsilon_{a1}}{2} \int_V E_m^2 dV = w_{\mu, макс} = \frac{\mu_{a1}}{2} \int_V H_m^2 dV$ |
| Частичная добротность потерь в среде | $Q_{сд} = \omega_s \frac{w}{P_{д.ср}} = \omega_s \frac{w}{\frac{\sigma_1}{2} \int_V E_m^2 dV} = \omega_s \frac{\epsilon_{a1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\text{tg } \delta_1^{\circ}}$ |

Продолжение таблицы В4

| 1 | 2 |
|--|---|
| <p>Частичная добротность потерь в стенках резонатора</p> | $Q_{s.m} = \omega_s \frac{w}{P_{m.c.p}} = \omega_s \frac{\mu_{a1}}{r_s} \frac{\int_V H_m^2 dV}{\oint_S H_{\tau m}^2 dS},$ $r_s = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega_s}{2\sigma_2}}$ <p>где r_s - активное поверхностное сопротивление металлических стенок; $H_{\tau m}$ - амплитуда касательной к стенке компоненты вектора \vec{H}.</p> |
| <p>Критическая длина волны в прямоугольном резонаторе</p> | $\lambda_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2\ell}\right)^2}}$ |
| <p>Собственная добротность для колебаний типа H_{101}</p> | $Q_{H_{101}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{r_s} \frac{abl(a^2 + b^2)}{a^3(\ell + 2b) + \ell^3(a + 2b)}$ |
| <p>Собственная длина волн для круглых резонаторов</p> | $\lambda_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\delta_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{\ell}\right)^2}},$ <p>где $\delta_{mn} = v_{mn}$ для волны типа Н (поперечно-электрической) и $\delta_{mn} = v'_{mn}$ для волны типа Е (поперечно-магнитной).</p> |

Таблица В5 - Дифракция электромагнитных волн

| Наименование | Формула для вычисления |
|--|---|
| 1 | 2 |
| <p>Асимптотическое представление функций Ганкеля 2-го рода m-го порядка при больших значениях аргумента</p> | $H_m^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right],$ $H_m^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right]$ |

Продолжение таблицы В5

| 1 | 2 |
|--|--|
| <p>Продольная составляющая рассеянного на круговом цилиндре радиуса a поля в случае дифракции E-поляризованной волны</p> | $E_z = -E_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J_m(ka) \cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(kr)$ |
| <p>Вектор плотности поверхностного тока, возбуждаемого в случае падения волны E-поляризации</p> | $j_z = -\frac{2E_0}{W_0 \pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{\cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)}$ |
| <p>Вектор плотности поверхностного тока, возбуждаемого в случае падения волны H-поляризации</p> | $j_\varphi = -\frac{2H_0}{i\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{\cos m\varphi}{H_m^{(2)'}(ka)}$ |
| <p>Представление решения задачи дифракции на клине в случае падения волны E-поляризации</p> | $E_z = E_0 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-i \frac{\pi^2 m}{2\alpha}\right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi_0\right) \sin\left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi\right)$ |
| <p>Представление решения задачи дифракции на клине в случае падения волны H-поляризации</p> | $H_z = \frac{1}{2} \frac{E_0}{W} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \exp\left(-i \frac{\pi^2 m}{2\alpha}\right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \times \\ \times \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi_0\right)$ |
| <p>Представление поля для геометрикооптического анализа структуры поля</p> | $H_z = \frac{E_0}{W} \{u(r, \varphi - \varphi_0) \mp u(r, \varphi + \varphi_0)\},$ <p>где $u(r, \psi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_m \exp\left(i \frac{\pi^2 m}{2\alpha}\right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha} \psi\right),$</p> <p>$\psi = \varphi \pm \varphi_0$, верхний знак соответствует дифракции плоской E-поляризованной волны, нижний – H-поляризованной.</p> |

Продолжение таблицы В5

| 1 | 2 |
|--|--|
| | $u(r, \psi) = S(r, \psi) + \begin{cases} \exp(ikr \cos \psi) & \text{при } -\pi < \psi < \pi, \\ 0 & \text{при } -\pi < \psi < 2\alpha - \pi, \\ \exp(ikr \cos(2\alpha - \psi)) & \text{при } 2\alpha - \pi < \psi < 2\alpha. \end{cases}$ |
| <p>Вдали от границ свет-тень $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\varphi = \pi + \varphi_0$</p> | $S(r, \psi) = \frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right) \frac{\pi}{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \psi\right)} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{2\pi kr}}$ |
| <p>В случае бесконечной плоскости ($\alpha = \pi$)</p> | $S(r, \psi) = -\frac{\sin \pi}{1 + \cos \varphi} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \frac{\exp(-ikr)}{r}$ |
| <p>В случае полуплоскости ($\alpha = 2\pi$.)</p> | $S(r, \psi) = \frac{\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \exp(-ikr)}{\sqrt{2\pi kr} 2 \cos \frac{\psi}{2}}$ |
| <p>Решение задачи дифракции для шара</p> | $\Phi_m(\varphi) = \exp(im\varphi), \quad \Theta_{nm}(\theta) = P_n^m(\cos\theta),$ $R_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr),$ <p>где P_n^m - называются присоединенными функциями Лежандра степени n порядка m. Функции P_n^m при $m > n$ тождественно равны нулю</p> |