ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Радиоэлектроника»

Методические указания

к лабораторной работе

«Исследование вероятностных и числовых характеристик случайных процессов»

по дисциплине

«Общая теория связи»

Авторы

Назарова О. Ю.,

Звездина М. Ю.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов очной, заочной форм обучения направления 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Радиоэлектроника» Назарова О.Ю.,
д.ф.-м.н., профессор кафедры «Радиоэлектроника» Звездина М.Ю.

Оглавление

Цель работы 4

Порядок выполнения лабораторной работы 4

1. Вычисление моментов случайного процесса на основе одномерных плотностей распределений вероятностей 4

2. Вычисление моментов случайного процесса на основе двумерных плотностей распределений вероятностей........ 9

3. Стационарность и эргодичность случайных процессов 16

4 Описание порядка выполнения лабораторной работы . 18

4.1 Представление сигнала 18

4.2 План исследований 20

Содержание отчета 24

Контрольные вопросы 24

Список литературы 25

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследовать вероятностные и числовые характеристики случайных процессов

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Вычисление моментов случайного процесса на основе одномерных плотностей распределений вероятностей
2. Вычисление моментов случайного процесса на основе двумерных плотностей распределений вероятностей
3. Стационарность и эргодичность случайных процессов
4. Защита отчетов по лабораторной работе

Для проведения исследований периодических сигналов используется программный продукт *Electronic Workbench*, а одиночных импульсов – языковая среда *MathCad* 14

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1 Строго с теоретических позиций, случайный процесс $X(t)$ следует рассматривать как совокупность временных функций $x_k(t)$, имеющих определенную общую статистическую закономерность. При регистрации случайного процесса на определенном временном интервале осуществляется фиксирование единичной реализации $x_k(t)$ из бесчисленного числа возможных реализаций процесса $X(t)$. Эта единичная реализация называется ***выборочной функцией*** случайного процесса $X(t)$. Отдельная выборочная функция не характеризует процесс в целом, но при определенных условиях по ней могут быть выполнены оценки статистических характеристик процесса.

С практической точки зрения выборочная функция является результатом отдельного эксперимента, после которого данную реализацию $x_k(t)$ можно считать детерминированной функцией. Сам случайный процесс в целом должен анализироваться с позиции бесконечной совокупности таких реализаций, образующих ***статистический ансамбль***.

1.2 Полной статистической характеристикой процесса является *N*-мерная плотность вероятностей $p(x_n;t_n)$. Однако экспериментальное определение *N*-мерных плотностей вероятностей процессов, а также их использование в математическом анализе представляет значительные математические трудности. В связи с этим на практике обычно ограничиваются одно- и двумерной плотностью вероятностей процессов.

Фиксированная совокупность значений всех реализаций (ансамбль) $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_k(t_1), \ldots\}$ в произвольный момент времени t_1 будет представлять собой случайную величину $X(t_1)$ и являться ***одномерным сечением случайного процесса*** $X(t)$.

Одномерная функция распределения вероятностей $F(x,t_i)$ определяет вероятность того, что в момент времени t_i значение случайной величины $X(t_i)$ не превысит значения x:

$$F(x,t_i) = P(X(t_i) \le x\} . \tag{1.1}$$

Из анализа (1.1) следует, что в диапазоне значений вероятностей от 0 до 1 функция $F(x,t)$ является неубывающей с предельными значениями $F(-\infty,t)=0$ и $F(\infty,t)=1$. При известной функции $F(x,t)$ вероятность того, что значение $X(t_i)$ в выборках будет попадать в определенный интервал значений [*a*, *b*] определяется выражением:

$$P(a < X(t_i) \le b\} = F(b,t_i) - F(a,t_i) .$$

Одномерная плотность распределения вероятностей $p(x,t)$ случайного процесса $X(t)$ определяет вероятность того, что случайная величина $x(t)$ лежит в интервале $\{x \le x(t) \le x+\mathrm{d}x\}$. Она характеризует распределение вероятностей реализации случайной величины $X(t_i)$ в произвольный момент времени t_i и представляет собой производную от функции распределения вероятностей:

$$p(x,t_i) = \mathrm{d}/\mathrm{d}\,x(F(x,t_i)) . \tag{1.2}$$

Моменты времени t_i являются сечениями случайного процесса $X(t)$ по пространству возможных состояний и плотность вероятностей $p(x,t_i)$ представляет собой плотность вероятностей случайных величин $X(t_i)$ данных сечений. Произведение

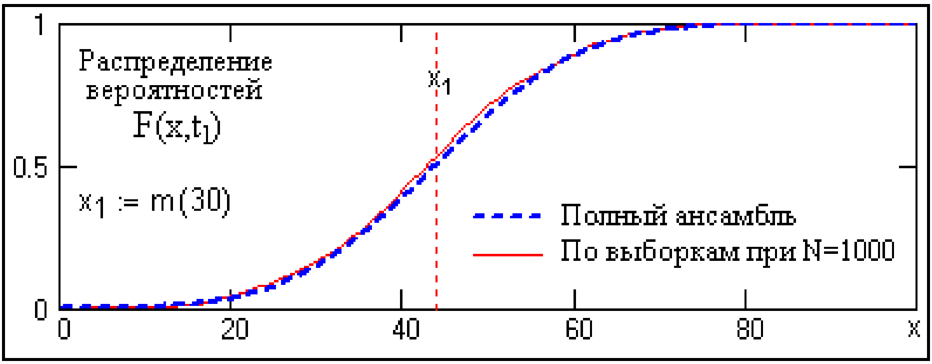
$p(x,t_i)\,\mathrm{d}\,x$ равно вероятности реализации случайной величины $X(t_i)$ в бесконечно малом интервале dx в окрестности значения x, откуда следует, что плотность вероятностей также является неотрицательной величиной. На рисунке 1.1 приведены примеры распределения вероятностей (рисунок 1.1,*а*) и плотности вероятностей (рисунок 1.1,*б*) сечения случайного процесса $X(t)$ в точке t_1.

При известной функции плотности вероятностей ***вероятность реализации значения*** $X(t_i)$ в произвольном интервале значений $[a,b]$ вычисляется по формуле :

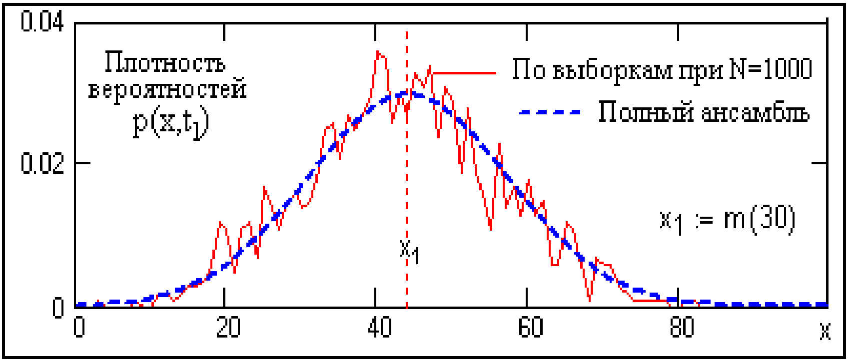
$$P(a < X(t_i) \le b\} = \int_a^b p(x,t_i)\,\mathrm{d}\,x\,. \qquad (1.3)$$

Плотность распределения вероятностей определяет функцию распределения вероятностей:

$$F(x,t_i) = \int_{-\infty}^{x} p(x,t_i)\,\mathrm{d}\,x\,. \qquad (1.4)$$



а



б

Рисунок 1.1 – Распределение вероятностей (а) и плотность вероятностей (б) сечения случайного процесса

1.3 Для описания случайного процесса наряду с плотностью вероятностей применяются и вычисленные на их основе ***функции моментов случайного процесса.*** Они представляют собой неслучайные функции, однако при определенном количестве порядков в зависимости от характера процесса полностью и однозначно определяют случайный процесс.

Функции моментов представляют собой математические ожидания соответствующих степеней (порядков) *n*:

-значений случайного процесса (начальные моменты):

$$M\{x^n(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x,t)\,\mathrm{d}\,x, \qquad (1.5)$$

- значений флюктуационных составляющих процесса (центральные моменты, моменты относительно центров распределения случайных величин):

$$M_0\{x^n(t)\} = M_0\{[x(t) - M\{x(t)\}]^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} [(x(t) - M\{x(t)\}]^n p(x,t)\,\mathrm{d}\,x$$

. (1.6)

Функции моментов являются основными статистическими характеристиками случайного процесса. Они представляют собой неслучайные функции, однако полностью и однозначно определяют случайный процесс, как и плотность распределения вероятностей, при определенном количестве порядков в зависимости от характера процесса. В практике анализа случайных процессов используются, в основном, начальные моменты первого порядка и центральные моменты второго порядка.

Первым начальным моментом случайного процесса является ***математическое ожидание*** $m_x(t)$, представляющее собой *статистическое усреднение* случайной величины $X(t_i)$ в каком либо фиксированном сечении t_i случайного процесса. Соответственно, полная функция математического ожидания является теоретической оценкой среднего взвешенного значения случайного процесса по временной оси:

$$m_x(t) \subseteq M\{X(t)\} \equiv \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x,t)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.7)$$

Второй начальный момент случайного процесса определяет его среднюю мощность:

$$w_x(t) \subseteq M\{X^2(t)\} \equiv \overline{x(t)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, p(x,t)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.8)$$

Разность $X(t) - m_x(t)$ описывает ***флуктуационную составляющую процесса*** и представляет особый интерес при анализе случайных процессов.

Вторым центральным моментом процесса, определяющим мощность его флуктуационной составляющей, является ***функция дисперсии***, описываемая соотношением:

$$D_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = M\{X^2(t)\} - m_x^2(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2\, p(x,t)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.9)$$

Амплитудной мерой разброса случайного процесса по временной оси относительно математического ожидания процесса служит ***функция среднего квадратического отклонения***:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \qquad (1.10)$$

На рисунке 1.2 приведен пример флюктуационной составляющей процесса $X(t)$ в сопоставлении со средним квадратическим отклонением $\pm\sigma$ случайных величин от математического ожидания $m(t)$.

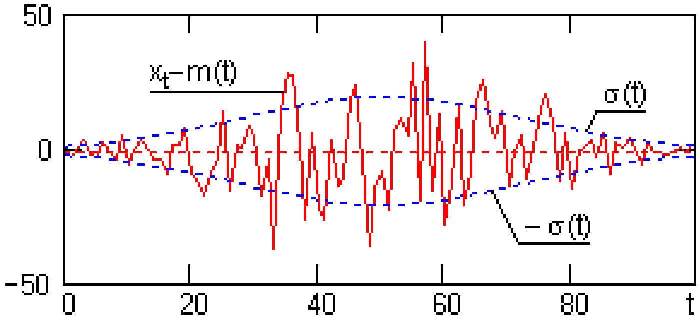


Рисунок 1.2 – Пример флюктуационной составляющей процесса $X(t)$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1 Одномерные законы плотности распределения вероятностей случайных процессов не несут каких-либо характеристик связи между значениями случайных величин для различных значений аргументов. В связи с этим необходимо использовать двумерные плотности распределения вероятностей.

По определению ***двумерная плотность распределения вероятностей*** $p(x_1,t_1;x_2,t_2)$ описывает вероятность совместной реализации значений случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ в произвольные моменты времени t_1 и t_2, что характеризует взаимосвязь случайного процесса в различные моменты времени и дает возможность определить характер изменения случайного процесса, т.е. динамику развития процесса во времени.

Распределение описывает двумерную случайную величину $\{X(t_i), X(t_j)\}$ в виде функции вероятности реализации случайной величины $X(t_i)$ в бесконечно малом интервале dx_i в окрестностях x_i в момент времени t_i при условии, что в момент времени t_j значение $X(t_j)$ будет реализовано в бесконечно малом интервале dx_j в окрестностях x_j [1-5]:

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2)=P\{x_1\le x(t_1)\le x_1+dx_1\cap x_2\le x(t_2)\le x_2+dx_2\}$$

. (2.1)

2.2 С помощью двумерной плотности распределения вероятностей можно определить корреляционные функции процесса.

Характеристикой динамики изменения случайной величины $X(t_i)$ является ***корреляционная функция***, которая описывает случайный процесс в целом:

$$R_X(x_i, x_j) = M\{X(t_i) \cdot X(t_2)\}. \qquad (2.2)$$

Корреляционная функция представляет собой статистически усредненное произведение значений случайного процесса $X(t)$ в моменты времени t_i и t_j по всем значениям временных осей t_i и t_j, а, следовательно, тоже является двумерной функцией. В терминах теории вероятностей корреляционная функция является ***вторым начальным моментом*** случайного процесса.

На рисунке 2.1 приведены примеры реализаций двух случайных процессов, которые характеризуются одной и той же функцией математического ожидания и дисперсии. Из анализа рисунка видно, что хотя пространство состояний обоих процессов практически одно и то же, динамика развития процессов в реализациях существенно различается:

-в пределе единичные реализации коррелированных процессов могут иметь один и тот же закон распределения случайных величин;

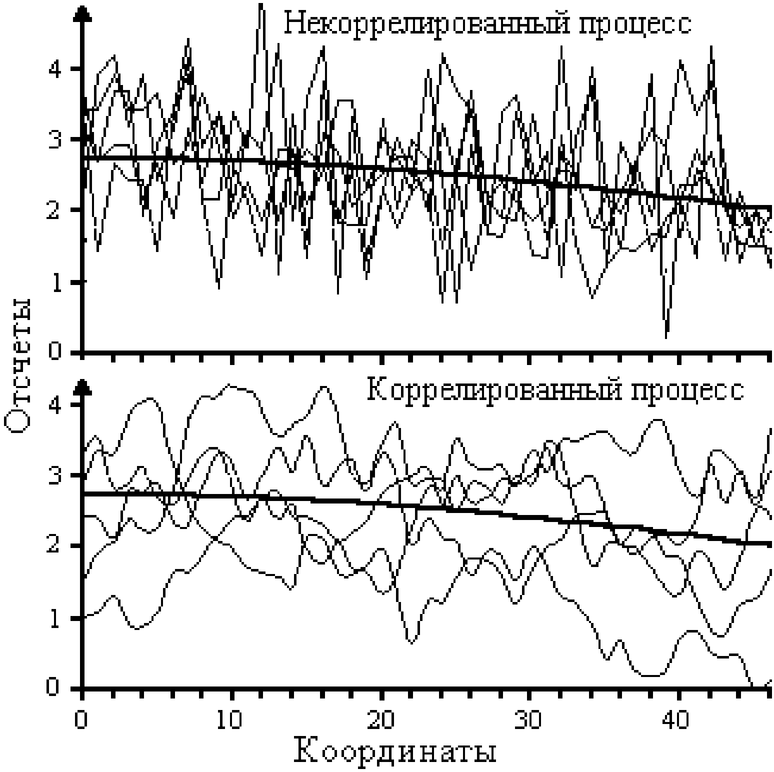


Рисунок 2.1 – Примеры реализаций двух случайных процессов с одинаковыми значениями функцией математического ожидания и дисперсии

-в коррелированном процессе имеется определенная связь между последовательными значениями случайных величин, что отражается в более плавной динамике развития единичной реализации по координате *t*. Оценка степени статистической зависимости мгновенных значений какого-либо процесса $X(t)$ в произвольные моменты времени t_1 и t_2и производится функцией корреляции. По всему пространству значений случайного процесса $X(t)$ корреляционная функция определяется выражением:

$$R_X(t_i, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_i) x(t_j) p(x_i, t_j; x_j, t_i) \, \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_j . \tag{2.3}$$

При анализе случайных процессов второй момент времени t_j удобно задавать величиной сдвига τ относительно первого момента, который при этом может быть задан в виде координатной переменной:

$$R_X(t,t+\tau) = M\{X(t)X(t+\tau)\}. \quad (2.4)$$

Функция, задаваемая этим выражением, обычно называется ***автокорреляционной функцией (АКФ или АФК) случайного процесса***.

2.3 Частным случаем корреляционной функции является функция ***автоковариации*** (ФАК), которая широко используется при анализе сигналов. Она представляет собой статистически усредненное произведение значений центрированной случайной функции $X(t) - m_x(t)$ в моменты времени t_i и t_j и характеризует флюктуационную составляющую процесса:

$$K_X(t_i,t_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x(t_i) - m_x(t))(x(t_j) - m_x(t_j)p(x_i,t_j;x_j,t_i)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$$

. (2.5)

В терминах теории вероятностей ковариационная функция является вторым центральным моментом случайного процесса. Для центрированных случайных процессов ФАК тождественна функции автокорреляции. При произвольных значениях $m_x(t)$ ковариационные и корреляционные функции связаны соотношением:

$$K_X(t,t+\tau) = R_X(t,t+\tau) - m_x^2(t). \quad (2.6)$$

Нормированная функция автоковариации (***функция корреляционных коэффициентов***) определяется выражением:

$$\rho_X(t,t+\tau) = \frac{K_X(t,t+\tau)}{\sigma(t)\sigma(t+\tau)}. \quad (2.7)$$

Функция корреляционных коэффициентов может принимать значения от +1 (полная статистическая корреляция случайных процессов на интервалах t и $t+\tau$) до -1 (полная статистическая противоположность процессов на этих интервалах). В математической статистике, а также довольно часто и в технической литературе, эту функцию называют ***функцией корреляции***. При τ = 0, значение ρ_X равно 1, а ФАК вырождается в дисперсию случайного процесса:

$$K_X(t) = D_X(t).$$

Из данного соотношения следует, что для случайных процессов и функций основными характеристиками являются функции математического ожидания и корреляции (ковариации). Особой необходимости в отдельной функции дисперсии не имеется.

2.3 Рассмотрим ***свойства функции автоковариации и автокорреляции:***

1) Максимум функций наблюдается при τ = 0, поскольку при τ = 0, вычисляется степень связи отсчетов с собой же, которая не может быть меньше связи разных отсчетов. Значение максимума функции корреляции равно средней мощности сигнала.

2) Функции автокорреляции и автоковариации являются четными:

$R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.

3) При $\tau \Rightarrow \infty$ значения ФАК для сигналов, конечных по энергии, стремятся к нулю, что прямо следует из физического смысла ФАК. Это позволяет ограничивать длину ФАК определенным максимальным значением $\cdot_{max}$- радиусом корреляции, за пределами которого отсчеты можно считать независимыми. Интегральной характеристикой времени корреляции случайных величин обычно считают ***эффективный интервал корреляции***, определяемый по формуле[1-5]:

$$\tau_k = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_X(\tau)| \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{R_X(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| \, \mathrm{d}\tau. \qquad (2.8)$$

Отсчеты (сечения) случайных функций, отстоящие друг от друга на расстояние большее τ_k, при инженерных расчетах считают некоррелированными. Для упрощения расчетов используют понятие интервала корреляции случайного процесса, представляющего собой интервал времени, на котором корреляционная функция уменьшается в M раз. Обычно $M = 10$ или $M = e$. На рисунке 2.2 показан пример графика функции автокорреляции и положения интервала корреляции. Анализ данного рисунка показывает, что знание корреляционной функции позволяет судить о скорости изменения случайного процесса.

4) Если к случайной функции $X(t)$ прибавить неслучайную функцию $f(t)$, то ковариационная функция для $Y(t)=X(t)+f(t)$ не изменяется:

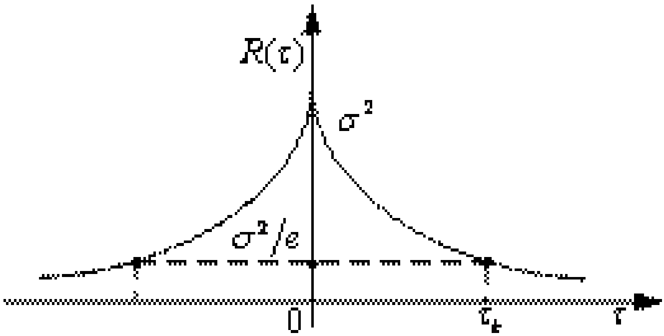


Рисунок 2.2 – Пример графика автокорреляционной функции и положения интервала корреляции

$$K_Y(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2).$$

5) Если случайную функцию $X(t)$ умножить на неслучайную функцию $f(t)$, то ее корреляционная функция $R_X(t_1,t_2)$ умножится на $f(t_1)\cdot f(t_2)$.

6) При умножении функции случайного процесса на постоянное значение C значения ФАК увеличиваются в C^2 раз.

2.4 ***Взаимные моменты случайных процессов*** второго порядка дают возможность оценить совместные свойства двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ путем анализа произвольной пары выборочных функций $x_k(t)$ и $y_k(t)$.

Мера связи между двумя случайными процессами $X(t)$ и

$Y(t)$ также устанавливается корреляционными функциями, а именно -***функциями взаимной корреляции и взаимной ковариации***. В общем случае, для произвольных фиксированных моментов времени $t_1 = t$ и $t_2 = t + \tau$:

$$R_{XY}(t, t+\tau) = M\{X(t)Y(t+\tau)\}, \tag{2.9а}$$

$$K_{XY}(t, t+\tau) = M\{[X(t) - m_x(t)][Y(t+\tau) - m_Y(t+\tau)]\}. \tag{2.9б}$$

Взаимные функции являются произвольными функциями, не обладают свойствами четности или нечетности, и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau), \tag{2.10а}$$

$$|R_{YX}(\tau)|^2 \le R_X(\tau) R_Y(\tau). \tag{2.10б}$$

Если один из процессов центрированный, то имеет место равенство

$$R_{XY}(t) = B_{XY}(t). \tag{2.10в}$$

Нормированная взаимная ковариационная функция (***коэффициент корреляции двух процессов***) характеризует степень линейной зависимости между случайными процессами при данном сдвиге · одного процесса по отношению ко второму и определяется выражением:

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{K_{XY}(\tau)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{2.11}$$

2.5 ***Статистическая независимость случайных процессов*** определяет отсутствие связи между значениями двух случайных величин X и Y. Это означает, что плотность вероятности одной случайной величины не зависит от того, какие значения принимает вторая случайная величина. Двумерная плотность вероятностей при этом должна представлять собой произведения одномерных плотностей вероятностей этих двух величин:

$$p(x, y) = p(x)\, p(y). \tag{2.12}$$

Это условие является обязательным условием статистической независимости случайных величин. В противном случае между случайными величинами может существовать определенная статистическая связь, как линейная, так и нелинейная. Мерой линейной статистической связи является ***коэффициент корреляции***:

$$r_{XY} = \frac{M\{XY\} - M\{X\}M\{Y\}}{\sqrt{D\{X\}D\{Y\}}}. \qquad (2.13)$$

Значения r_{xy} могут изменяться в пределах от -1 до +1. В частном случае, если случайные величины связаны линейным соотношением $x=ay+b$, коэффициент корреляции равен ±1 в зависимости от знака константы a. Случайные величины некоррелированы при r_{xy}=0, при этом из выражения для r_{xy} следует:

$$M\{XY\} = M\{X\}M\{Y\}.$$

Из статистической независимости величин следует их некоррелированность.

3. СТАЦИОНАРНОСТЬ И ЭРГОДИЧНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1 Случайные процессы различают по степени однородности их протекания во времени (по аргументу). Кроме моментов первого и второго порядка случайные процессы имеют моменты и более высоких порядков. По мере повышения порядка моментов вероятностная структура случайных процессов и их выборочных реализаций описывается все более детально. Однако практическая оценка этих моментов по выборкам ограничена, в основном, только стационарными случайными процессами.

Процесс называют ***стационарным*** (более точно – слабо стационарным), если плотность вероятностей процесса не зависит от начала отсчета времени и если на интервале его существования выполняются условия постоянства математического ожидания и дисперсии, а корреляционная функция является функцией только разности аргументов ⋅⋅= t_2-t_1, т.е.:

$$m_x(t_1) = m_x(t_2) = m_x = \text{const},$$

$$D_x(t_1) = D_x(t_2) = D_x = \text{const},$$

$$R_x(t_1, t_1+\tau) = R_x(t_2, t_2+\tau) = R_x(\tau) = R_x(-\tau),$$

$$r_x(\tau) = R_x(\tau)/D_x,$$

$$r_x(0) = 1, \quad |r_x(\tau)| \le 1, \; r_x(-\tau) = r_x(\tau). \qquad (3.1)$$

Чем медленнее по мере увеличения значений ⋅ убывают функции R_x(⋅) и r_x(⋅), тем больше интервал корреляции случайного процесса, и тем медленнее изменяются во времени его реализации.

Процесс считается строго стационарным, если от времени не зависят и моменты более высоких порядков (в частности, асимметрия и эксцесс).

Стационарные случайные процессы наиболее часто встречаются при решении физических и технических задач. Теория стационарных случайных функций разработана наиболее полно. Случайные процессы, удовлетворяющие условиям стационарности на ограниченных, интересующих нас интервалах, также обычно рассматривают в классе стационарных и называют ***квазистационарными***.

В общем случае значения функций математического ожидания, дисперсии и корреляции могут быть зависимыми от момента времени t, т.е. изменяться во времени. Такие процессы составляют класс ***нестационарных процессов***.

3.2 Строго корректно характеристики случайных процессов оцениваются путем усреднения по ансамблю реализаций в определенные моменты времени (по сечениям процессов). Однако большинство стационарных случайных процессов обладает ***эргодическим свойством***, сущность которого заключается в том, что по одной достаточно длинной реализации процесса можно судить обо всех его статистических свойствах так же, как по любому количеству реализаций. Другими словами, закон распределения случайных величин в таком процессе может быть одним и тем же как по сечению для ансамбля реализаций, так и по координате развития. Такие процессы получили название эргодических. Для эргодических процессов имеет место:

$$m_x(t) = M\{x(t)\} = \lim_{T \to \infty} \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad (3.2а)$$

$$D_x(t) = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\} = \lim_{T \to \infty} \int_0^T [x(t) - m_x(t)]^2\,\mathrm{d}t\,,$$

(3.2б)

$$R_x(\tau) = M\{x(t)x(t+\tau)\} = \lim_{T \to \infty} \int_0^T x(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t\,. \qquad (3.2в)$$

Эргодичность является очень важным свойством случайных стационарных, и только стационарных процессов.

Свойства эргодичности могут проявляться только по отношению к двум первым моментам случайного процесса, что вполне достаточно для использования соответствующих методик исследования процессов. При этом математическое ожидание эргодического случайного процесса равно постоянной составляющей любой его реализации, а дисперсия является мощностью его флюктуационной составляющей.

Практическая проверка эргодичности процесса обычно производится проверкой выполнения условия Слуцкого:

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T K(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.3}$$

Если ковариационная функция процесса стремится к нулю при возрастании значения аргумента $(\cdot)$, то процесс относится к числу эргодических, по крайней мере, относительно моментов первого и второго порядков.

4 ОПИСАНИЕ ПОРЯДКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

4.1 Представление сигнала

4.1.1 Проведем исследование вероятностных характеристик на примере телеграфного сигнала и его модификации. Как известно, модель данного типа сигнала относится к одной из наиболее распространенных моделей наряду с моделями белого шума, гауссового случайного процесса или гауссового шума.

Телеграфный сигнал представляет собой случайный процесс $x_k(t)$ в виде последовательности прямоугольных положительных и отрицательных импульсов со случайными длительностями и детерминированными значениями амплитуд *c* и *–c*, причем перемены знака внутри любого интервала $(t, t+\tau)$ происходят с интенсивностью α в случайные моменты времени, и не зависят от процессов в смежных интервалах времени. Пример временной развертки телеграфного сигнала показан на рисунке 4.1.

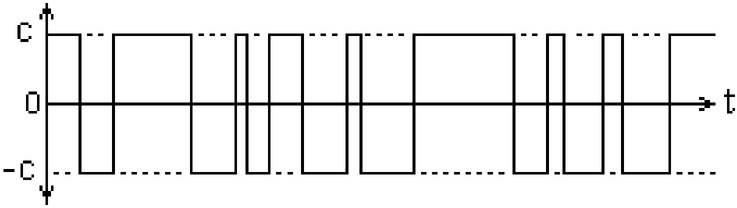


Рисунок 4.1 – Временная диаграмма телеграфного сигнала

Если считать случайной величиной телеграфного сигнала значение n - количество перемен знака внутри интервала ··то распределение вероятностей значений *n* будет описываться законом Пуассона:

$$P(n) = \left(\alpha|\tau|\right)^2 \frac{\exp(-\alpha|\tau|)}{n!}. \qquad (4.1)$$

При вычислении корреляционной функции телеграфного сигнала каждое отдельное произведение $x_k(t)x_k(t+\cdot)$ равно либо c^2, либо $-c^2$ в зависимости от совпадения или несовпадения знаков $x_k(t)$ и $x_k(t+\cdot)$, причем вероятность c^2 равна сумме вероятностей $P(0)+P(2)+P(4)+\ldots$, а вероятность $-c^2$ определяется соответственно суммой вероятностей $P(1)+P(3)+P(5)+\ldots$. Следовательно,

$$R_x(\tau) = c^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(n) = c^2 \exp(-\alpha|\tau|) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha|\tau|)^n}{n!} = c^2 \exp(-2\alpha|\tau|)$$

. (4.2)

Параметр α полностью определяет ковариационные и спектральные свойства телеграфного сигнала. При $\alpha \to 0$ характеристики сигнала приближаются к характеристикам постоянной составляющей, а при $\alpha \to \infty$ - к характеристикам белого шума. Иллюстрация сказанного выше приведена на рисунке 4.2.

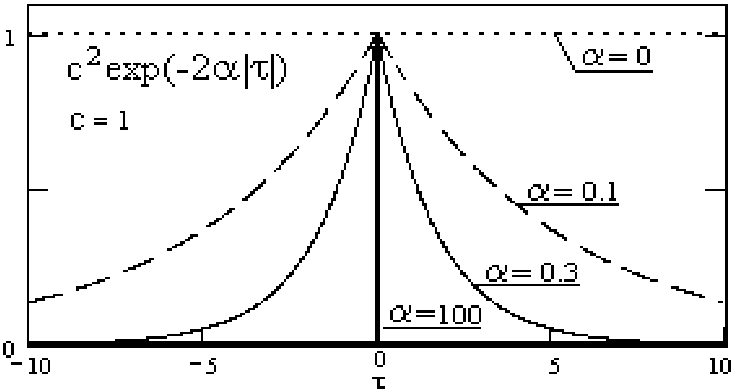


Рисунок 4.2 – Зависимость функции корреляции от интенсивности α

4.1.2 Для проведения исследований запишем соотношение (4.2) в виде

$$R_x(\tau) = P_A \exp(-\beta|\tau|), \tag{4.3}$$

а его модификацию в виде

$$R_x(\tau) = P_A(1+\beta|\tau|)\exp(-\beta|\tau|), \tag{4.4}$$

где $\beta = \alpha \cdot 10^3$;

P_A - мощность передаваемого сигнала.

При преобразованиях полагалось, что $0 \le c \le 1$.

4.2 План исследований

4.2.1 Исходные данные выбрать из таблицы 4.1 в соответствии с последней цифрой номера по журналу.

Т а б л и ц а 4.1 – Исходные данные для расчетов

№ п/п	P_A, В^2	α, с$^{-1}$	№ п/п	P_A, В^2	α, с$^{-1}$
$B_A(\tau)=R_x(\tau)=P_A\exp(-\beta\lvert\tau\rvert)$			$B_A(\tau)=R_x(\tau)=P_A(1+\beta\lvert\tau\rvert)\exp(-\beta\lvert\tau\rvert)$		
1	1,0	13	6	1,2	29
2	1,5	14	7	1,7	30
3	2,0	15	8	2,2	31
4	2,5	16	9	2,7	32
5	3,0	17	10	3,2	33

В таблице 4.1 использованы следующие обозначения:

$P_A = \sigma_A^2$ - мощность (дисперсия) сообщения;

$\beta = \alpha \cdot 10^3$ - интенсивность смены знака в амплитуде сигнала;

4.2.2 Для исходного непрерывного сообщения, представляющего собой стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, функция корреляции описывается в зависимости от варианта задания.

4.2.3 Для заданной функции корреляции с использованием преобразования Винера-Хинчина найти выражение в замкнутой форме для спектра плотности мощности $G_A(\omega)$, где $\omega = 2\pi f$.

4.2.4 Вычислить:

- интервал корреляции τ_k ;

- энергетическую ширину спектра.

При нахождении интервала корреляции τ_k для заданных значений функций корреляции $B_A(\tau)$ рекомендуется использовать известные значения первообразных :

$$\int \exp(ax)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\exp(ax),$$

$$\int x\exp(ax)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\exp(ax)}{a^2}(ax-1).$$

При нахождении энергетического спектра $\Delta\omega_0$ при взятии интегралов вида необходимо использовать значения первообразной:

$$\int \exp(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\exp(ax)}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

.

При расчетах энергетического спектра $\Delta\omega_0$ для второго варианта функции корреляции необходимо произвести предварительные преобразования:

$$\int x\exp(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}\,x = \int x\exp(ax)\frac{\exp[jbx]+\exp[-jbx]}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int x \exp[(a + jb)x]dx + \int x \exp[(a - jb)x]dx ,$$

а затем использовать первообразные, приведенные в абзаце, относящемся к интервалу корреляции.

Для нахождения величины $G_{\max}$ необходимо, во-первых, вычислить производную полученной функции плотности спектра G_A по аргументу ω и, во-вторых, приравняв полученное выражение нулю, найти значение ω, при котором оно выполняется. После этого подставить полученное значение ω в выражение для G_A. В отчете по лабораторной работе необходимо привести основные этапы вычислений интервала корреляции и величины энергетического спектра. Для контроля вычислений в таблице 4.1 приведены значения, полученные на предварительных этапах вычислений.

Таблица 4.2 – Промежуточные результаты, получаемые на этапе 4.2.4

Параметр	Вид корреляционной функции	
	$B_A(\tau) = P_A \exp(-\beta\lvert\tau\rvert)$	$B_A(\tau) = P_A(1+\beta\lvert\tau\rvert)\exp(-\beta\lvert\tau\rvert)$
Спектр плотности мощности или энергетический спектр $G_A(\omega)$, $\text{В}^2 c$	$\dfrac{2P_A\beta}{\omega^2+\beta^2}$	$\dfrac{4P_A\beta^3}{(\omega^2+\beta^2)^2}$
Интервал корреляции τ_k, с	$1/\beta$	$2/\beta$

Начальная энергетическая ширина спектра сообщения $\Delta\omega_0$, рад Гц	$\frac{\pi\beta}{2}$	$\frac{\pi\beta}{4}$

4.2.5 Построить графики функции корреляции и нормированного спектра мощности сигнала, указав на них вертикальными штриховыми линиями интервал корреляции и энергетическую ширину спектра.

При построении графиков функций необходимо выбирать следующие параметры координатных осей:

- для функции корреляции исходного сигнала интервал изменения аргумента x выбирать в пределах $-1.5\tau_{\text{к}} \le x \le 1.5\tau_{\text{к}}$;

- для спектра мощности исходного сигнала интервал изменения частоты выбрать $0 \le \omega \le 1.25\Delta\omega_0$.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- цель работы;
- основные соотношения для вычислений;
- вывод выражений, описывающих интервал корреляции, спектр мощности сигнала, энергетическую ширину спектра, связь между интервалом корреляции и энергетической шириной спектра;
- графики функции корреляции и нормированного энергетического спектра с указанными на них значениями интервала корреляции и энергетической ширины спектра;
- выводы по работе относительно значений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается функция автокорреляции от функции автоковариации?
2. Чему соответствует значение функции корреляции в точке $\tau = 0$?
3. Что определяет интервал корреляции?

4. Что определяет энергетическая ширина спектра и где используется данное понятие?
5. Какими характеристиками описывается взаимосвязь двух сигналов?
6. Какой процесс называется стационарным?
7. В чем отличие между случайным сигналом и случайным процессом?
8. Что такое эргодичность процесса и где данное понятие используется?
9. Чем отличается двусторонняя спектральная плотность сигнала от односторонней?
10. С какой целью введены понятия односторонней и двусторонней плотностей распределения вероятностей?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулиничев Ю.П. Теория электрической связи. СПб: Изд-во «Лань, 2010. 240 с.
2. Биккенин Р.Р., Чесноков М.Н. Теория электрической связи. М.: Изд дом «Академия», 2010. 336 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерных приложения. М.: Академия, 2003.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.