



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

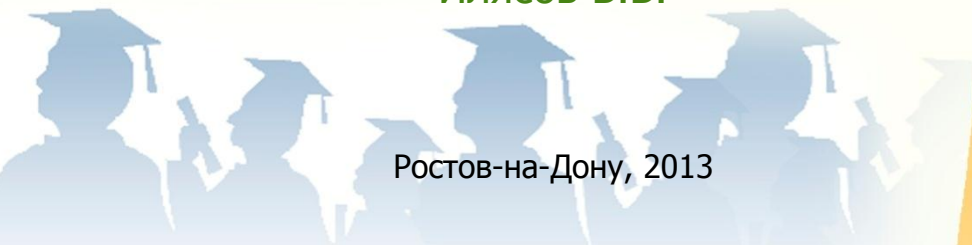
Кафедра «Инструментальное производство»

## **УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

# **«Физические основы генерации концентрированных потоков энергии в машиностроении»**

Автор  
Илясов В.В.

Ростов-на-Дону, 2013





## Аннотация

В данном учебнике изложены физические основы генерации концентрированных потоков энергии, включающие описание общей теории электромагнитного поля, термодинамики и физической кинетики плазмы, элементов квантовой электроники, электродинамических свойств оптических резонаторов, принципа действия твердотельных и газоразрядных  $\text{CO}_2$  – лазеров с различными схемами охлаждения рабочей смеси и даются оценки предельной мощности излучения.

Пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области физики процессов генерации потоков энергии. Оно может быть также рекомендовано студентам других специальностей, научным работникам и инженерам, желающим самостоятельно изучить физику генерации концентрированных потоков энергии или расширить и систематизировать свои знания в данной области.

## Автор

Илясов В. В., д.т.н., профессор





## Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Предисловие .....</b>   | <b>8</b>  |
| <b>Часть 1. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ .....</b>  | <b>10</b> |
| <b>Глава 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ...</b>  | <b>10</b> |
| 1.1. Нахождение векторного поля по его дифференциальным характеристикам .....                        | 10        |
| 1.2. Уравнение непрерывности.....  | 15        |
| 1.3. Электромагнитное поле движущихся зарядов (общий случай).....                                    | 16        |
| 1.4. Система уравнений Максвелла-Лоренца .....   | 20        |
| 1.5. Ток смещения .....  | 22        |
| 1.6. Потенциал электромагнитного поля .....  | 25        |
| 1.7. Законы сохранения энергии в электромагнитном поле ...   | 29        |
| 1.8. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле ...   | 31        |
| <b>Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ .....</b>                                       | <b>33</b> |
| 2.1. Поле системы зарядов (квазистационарное движение) ..  | 33        |
| 2.2. Магнитный момент .....  | 36        |
| 2.3. Электромагнитное поле системы произвольно движущихся зарядов. Решение уравнения Даламбера. .... | 37        |
| <b>Глава 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И РАССЕЙВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....</b>             | <b>43</b> |
| 3.1. Распространение электромагнитных волн вдали от излучателя .....                                 | 43        |
| 3.2. Поляризация плоской волны .....   | 47        |
| 3.3. Интерференция и образование волновых пакетов.....   | 48        |
| 3.4. Рассеивание электромагнитных волн свободным и связанным зарядами .....                          | 51        |
| 3.5. Поглощение излучения.....   | 54        |
| <b>Глава 4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ .....</b>                                       | <b>57</b> |
| 4.1. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях .....                   | 57        |



|  |            |
|--|------------|
| 4.2. Функции Лагранжа и Гамильтона для частиц в электромагнитных полях ..... | 62         |
| <b>Глава 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ .....</b>                       | <b>64</b>  |
| 5.1. Основные уравнения поля .....   | 64         |
| 5.2. Поляризация среды в электрическом поле .....                            | 66         |
| 5.3. Средняя плотность тока и средняя плотность заряда в среде.....          | 67         |
| 5.4. Система уравнений для электромагнитного поля в среде .....              | 68         |
| 5.5. Система граничных условий .....   | 71         |
| 5.6. Закон сохранения энергии .....  | 74         |
| <b>1.9. Примеры решения задач и варианты заданий .....</b>                   | <b>77</b>  |
| <b>Часть 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕНЕРАЦИИ ПЛАЗМЫ ....</b>                      | <b>88</b>  |
| <b>Глава 6. ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА .....</b>                     | <b>88</b>  |
| 6.1. Квазинейтральность и разделение заряда .....                            | 88         |
| 6.2. Плазма как сплошная среда .....   | 89         |
| 6.3. Идеальная проводимость и дрейфовое движение .....                       | 91         |
| 6.4. Проводимость плазмы .....   | 92         |
| 6.5. Кулоновские столкновения .....  | 94         |
| <b>Глава 7. ТЕРМОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ .....</b>                                   | <b>96</b>  |
| 7.1. Тепловая и кулоновская энергия плазмы.....                              | 96         |
| 7.2. Равновесие ионизации.....   | 98         |
| 7.3. Формула Саха .....  | 101        |
| 7.4. Статистический вес и внутренние степени свободы ....                    | 104        |
| <b>Глава 8. ТРАЕКТОРИЯ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ .....</b>                             | <b>107</b> |
| 8.1. Дрейфовое движение. Скорость дрейфа.....                                | 107        |
| 8.2. Электрический дрейф.....  | 109        |
| 8.3. Дрейф в неоднородном магнитном поле.....                                | 111        |
| 8.4. Поляризационный дрейф.....  | 114        |
| 8.5. Ток намагничивания .....  | 115        |
| <b>Глава 9. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ .</b>                        | <b>118</b> |
| 9.1. Основные понятия и определения .....                                    | 118        |
| 9.2. Магнитогидродинамические волны.....                                     | 122        |



|   |     |
|---|-----|
| 9.3. Магнитный звук. Гибридные частоты..... | 125 |
| 9.4. Структура волн в плотной плазме .....  | 127 |
| 9.5. Плазменные волноводы.....              | 130 |
| 9.6. Магнитозвуковой резонанс .....         | 131 |

## **Глава 10. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ..... 133**

|   |     |
|---|-----|
| 10.1. Уравнения гидродинамического приближения.....     | 133 |
| 10.2. Скорость звука.....                               | 135 |
| 10.3. Плазменные волны и ионный звук .....              | 135 |
| 10.4. Ускоренные и замедленные магнитозвуковые волны .. | 137 |
| 10.5. Дисперсия магнитного звука.....                   | 138 |

## **Глава 11. ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ..... 139**

|   |     |
|---|-----|
| 11.1. Уравнение Фоккера - Планка. ....          | 139 |
| 11.2. Феноменология процессов переноса.....     | 140 |
| 11.3. Кинетическая теория плазменных волн ..... | 143 |

## **Примеры решения задач ..... 147**

## **Часть 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕНЕРАЦИИ ЛАЗЕРОВ. 169**

### **Глава 12. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ ..... 169**

|   |     |
|---|-----|
| 12.1. Структура атомов. Энергетические уровни. Заселенность уровней.....                            | 169 |
| 12.2. Излучение и поглощение света атомами: спонтанное и индуцированное излучение, поглощение ..... | 175 |
| 12.3 Принцип действия лазеров .....   | 177 |
| 12.4. Классификация лазеров.....  | 182 |
| 12.5. Форма спектральной линии .....  | 185 |
| 12.6. Характеристики излучения лазеров .....  | 190 |
| Контрольные вопросы .....   | 196 |

### **Глава 13. ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЛАЗЕРОВ ..... 197**

|  |     |
|--|-----|
| 13.1 Основные уравнения электродинамики .....                  | 197 |
| 13.2 Электромагнитные волны на границе раздела двух сред ..... | 204 |
| 13.3 Плоские слои .....  | 208 |
| 13.4 Металлические и диэлектрические зеркала .....             | 212 |
| 13.5 Электромагнитные волны в волноводах.....                  | 216 |



|  |            |
|--|------------|
| 13.6 Световоды .....   | 226        |
| 13.7 Общие сведения об оптических резонаторах .....                      | 234        |
| 13.8 Резонаторы с плоскими зеркалами .....                               | 241        |
| 13.9 Резонаторы со сферическими зеркалами .....                          | 249        |
| 13.10 Селекция мод.....  | 263        |
| 13.11. Описание процессов и расчетов в лазерах.....                      | 268        |
| <b>Глава 14. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЛАЗЕРОВ .....</b>                             | <b>281</b> |
| 14.1. Стационарный режим генерации .....                                 | 281        |
| 14.2. Работа лазеров в режиме модуляции добротности .....                | 285        |
| 14.3. Модуляция добротности резонаторов .....                            | 290        |
| 14.4. Режим синхронизации мод.....                                       | 291        |
| 14.5. Синхронизация мод в лазерах .....                                  | 295        |
| Контрольные вопросы .....  | 299        |
| <b>Глава 15. ТВЕРДОТЕЛЬНЫЕ ЛАЗЕРЫ.....</b>                               | <b>300</b> |
| 15.1. Системы оптической накачки.....                                    | 300        |
| 15.2 Активные среды твердотельных лазеров .....                          | 304        |
| 15.3. Трехуровневые лазеры .....   | 305        |
| 15.4 Четырехуровневые лазеры .....                                       | 311        |
| Контрольные вопросы .....  | 315        |
| <b>Глава 16. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ЛАЗЕРЫ .....</b>                          | <b>316</b> |
| 16.1. Физические основы полупроводниковых .....                          | 316        |
| лазеров .....  | 316        |
| 16.2. Лазеры на основе гетероструктур.....                               | 320        |
| 16.3. Низкоразмерные полупроводниковые гетероструктуры .....             | 322        |
| .....  | 322        |
| 16.4. Лазерные светодиоды большой мощности излучения .                   | 323        |
| <b>Глава 17. ГАЗОРАЗРЯДНЫЕ СПОСОБЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ</b>                       |            |
| <b>ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЛАЗЕРОВ .....</b>                                     | <b>327</b> |
| 17.1. Основные процессы в газоразрядной плазме.....                      | 327        |
| 17.2. Энергия и концентрация электронов в газовом разряде .....          | 331        |
| .....  | 331        |
| 17.3. Электрический ток в газовом разряде .....                          | 334        |
| 17.4 Представление об устойчивости газового разряда .....                | 336        |
| 17.5. Описание разряда с помощью вольт-амперных характеристик (ВАХ)..... | 342        |



|   |            |
|---|------------|
| 17.6. ВАХ и способы получения несамостоятельных разрядов в технологических лазерах..... | 346        |
| Уравнение баланса заряженных частиц при этом имеет вид .....                            | 346        |
| 17.7. Самостоятельные разряды для возбуждения технологических лазеров .....             | 355        |
| 17.8. Возбуждение газовых лазеров с помощью переменных электромагнитных полей.....      | 364        |
| Контрольные вопросы .....   | 370        |
| <b>Глава 18. ГАЗОВЫЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЛАЗЕРЫ .....</b>                                   | <b>371</b> |
| 18.1 Классификация газовых лазеров .....  | 371        |
| 18.2. Принцип действия газоразрядных $\text{CO}_2$ - лазеров ...                        | 372        |
| 18.3. $\text{CO}_2$ – лазеры с диффузионным охлаждением рабочей смеси.....              | 383        |
| Контрольные вопросы .....   | 392        |
| <b>Глава 19. Оптические волноводы .....</b>   | <b>393</b> |
| 19.1. Плоские волноводы .....   | 393        |
| 19.2 Волоконные световоды .....   | 401        |
| <b>Глава 20. ДИСКОВЫЕ И ВОЛОКОННЫЕ ЛАЗЕРЫ .....</b>                                     | <b>404</b> |
| <b>С ДИОДНОЙ НАКАЧКОЙ .....</b>   | <b>404</b> |
| 20.1 Лазеры с диодной накачкой.....   | 404        |
| 20.2 Дискковый лазер .....  | 405        |
| 20.3 Волоконные лазеры .....  | 407        |



## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время развитие лазерной техники и технологии является одним из приоритетных направлений научно-технического процесса, важным фактором интенсификации машиностроительной, приборостроительной и других отраслей промышленности. Выдающиеся достижения русских научных школ академиков Н.Г. Басова и А.М. Прохорова, удостоенных совместно с американским ученым Ч. Таунсом Нобелевской премии, привели к созданию принципиально новых источников энергии – лазеров. Лазерное излучение характеризуется высокой концентрацией энергии, обеспечивающей значительную интенсификацию процессов обработки материалов. В последние годы созданы простые и надежные промышленные лазеры с большим ресурсом работы и управляемыми параметрами излучения. Рассматриваемые в настоящем учебнике источники концентрированных потоков энергии (КПЭ) имеют различную концентрацию энергии, определяемую плотностью мощности и диаметром луча. Эти параметры определяют области использования тех или иных источников КПЭ в процессах обработки материалов.

Настоящий учебник возник из курсов лекций «Концентрированные потоки энергии и физические основы их генерации» и «Специальные главы физики», читаемого автором студентам Донского государственного технического университета в течение последних 8-ми лет. Структурно учебник состоит из трех частей.

В первой части рассматриваются основы теории электромагнитного поля, используемые в учебных целях для более глубокого понимания электромагнитных процессов, происходящих в веществе. Даны примеры решения задач и перечень тем контрольной работы для проверки усвоения материала.

Во второй части рассматриваются физические основы генерации плазмы. Следует отметить, что развивающаяся отрасль физики процессов, протекающих в источниках КПЭ, связанная с изучением ионизованного газа – плазмы, привлекает к себе повышенное внимание. Отмеченный интерес обусловлен тем, что с плазмой связаны такие перспективные проблемы новой техники, как управляемые термоядерные реакции, прямое преобразование тепловой энергии в электрическую, получение сверхскоростных газовых струй и потоков, новые направления в сварке и поверхностной обработке металлов. Автор не претендует на полное и





математически строгое изложение физики плазмы, а ставит перед собой задачу: дать общую характеристику вещества в состоянии плазмы; ввести представления о траектории частиц в плазме; научить студентов разбираться в таких вопросах как термодинамика и физическая кинетика плазмы, колебания и волны в холодной и горячей плазме, что позволит студентам производить простейшие расчеты при выполнении курсовых и дипломных работ.

В начальной главе третьей части излагается элементы квантовой электроники, используемые далее для раскрытия содержания принципа действия и характеристик излучения лазеров. Далее рассматриваются физические процессы в одном из главных элементов любого лазера - оптических резонаторах. Для анализа электродинамических свойств резонаторов применяется основная группа уравнений электродинамики, описывающая нестационарные процессы в среде, обладающей электропроводностью, диэлектрической и магнитной проницаемостями. Обосновываются принципы выбора геометрических и конструктивных параметров пассивных элементов лазера.

В третьей части также приводится описание режимов работы и физических процессов в твердотельных и газовых технологических лазерах. Рассматриваются динамика работы лазеров, режимы синхронизации мод, системы оптической накачки и активные среды твердотельных лазеров, газоразрядные способы возбуждения технологических лазеров. Приводится характеристика газовых лазеров и их классификация. Описывается принцип действия газоразрядных  $\text{CO}_2$  – лазеров с различными схемами охлаждения рабочей смеси и даются оценки предельной мощности излучения.

Автор полагает, что предложенный учебник, ориентированный прежде всего на студентов изучающих курс «Концентрированные потоки энергии и физические основы их генерации», а также магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области физики процессов генерации потоков энергии, поможет глубже разобраться в физике процессов генерации потоков энергии. Оно может быть также рекомендовано студентам других специальностей, научным работникам и инженерам, желающим самостоятельно изучить физику генерации концентрированных потоков энергии или расширить и систематизировать свои знания в данной области.



## ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### ГЛАВА 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### 1.1. Нахождение векторного поля по его дифференциальным характеристикам

Для описания электромагнитного поля используются его векторные характеристики – напряженности электрического и магнитного полей, в представлениях векторного анализа.

Пусть во всем пространстве имеется векторное поле  $\vec{a}(\vec{r})$ . Предположим, что заданы интегральные характеристики поля – поток вектора  $\oint a dS$  и циркуляция вектора  $\oint a dl$  в каждой точке пространства. Покажем, что если заданы указанные характеристики поля, то может быть найдено и само векторное поле  $a(E)$ . Если

$$\oint a dS = \int f(r) dV, \quad (1.1)$$

где  $\int f(r)$  – известная функция координат, то на основании теоремы Гаусса-Остроградского

$$\oint a dS = \int \operatorname{div} a dV = \int f(r) dV, \quad (1.2)$$

откуда, вследствие произвольности области интегрирования по объему  $V$ , получаем

$$\operatorname{div} a = f(r). \quad (1.3)$$

Таким образом, задание потока вектора через замкнутую поверхность в каждой точке пространства эквивалентно заданию дивергенции этого вектора.

На основании теоремы Стокса

$$\oint a dl = \int \operatorname{rot} a dS = \int \varpi(r) dS, \quad (1.4)$$



где  $\varpi(r)$  - известная векторная функция координат. Отсюда

$$\operatorname{rot} a = \varpi(r). \quad (1.5)$$

Таким образом, задание циркуляции вектора эквивалентно заданию его ротора.

Покажем, как можно найти векторное поле  $a(r)$ , если известны дивергенция и ротор вектора  $\vec{a}$  во всем пространстве. Разложим поле вектора  $\vec{a}$  на два поля:  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$  так, чтобы имели место соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}_1 &= f(r), \\ \operatorname{rot} \vec{a}_1 &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{a}_2 &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{a}_2 &= \varpi(r) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Векторное поле  $\vec{a}_1$  является безвихревым, так как линии векторного поля  $\vec{a}_1$  начинаются и заканчиваются в источниках и стоках, интенсивность которых определяется функцией  $f(r)$ . Векторное поле  $\vec{a}_2$  не имеет источников и стоков и является соленоидальным полем.

Поскольку поле  $\vec{a}_1$  не имеет вихрей, вектор  $\vec{a}_1$  можно представить в виде градиента некоторой вспомогательной скалярной функции

$$\vec{a}_1 = \operatorname{grad} \varphi(r), \quad (1.7)$$

где  $\varphi(r)$ - функция, именуемая скалярным потенциалом. Подставляя последнее выражение в соотношение (1.6), находим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = f(r), \quad (1.8)$$



или

$$\Delta\varphi = f(r), \quad (1.9)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа. Уравнение

в частных производных второго порядка называется уравнением Пуассона. Решение уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(r)dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(x_0, y_0, z_0)dx_0dy_0dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (1.10)$$

где  $(x, y, z)$  - координаты точки, в которой ищется значение функции  $\varphi$ , а  $x_0, y_0, z_0$  - переменные интегрирования. Величина  $|\vec{r} - \vec{r}_0|$  представляет расстояние от точки  $r_0$  до точки наблюдения  $\vec{r}$ .

Далее, зная функцию  $\varphi(r)$ , найдем  $\vec{a}_1$

$$\vec{a}_1(r) = \text{grad } \varphi(\vec{r}) = -1/4\pi \text{ grad } \int \frac{f(\vec{r}_0)dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (1.11)$$

Определим вектор  $\vec{a}_2$ , поле которого имеет соленоидальный характер. Следовательно, вектор  $\vec{a}_2$  можно представить в виде ротора некоторого вспомогательного вектора  $\vec{A}(\vec{r})$ :

$$\vec{a}_2 = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}). \quad (1.12)$$

Векторная функция  $\vec{A}(\vec{r})$  получила название векторного потен-



циала. Из определения последнего уравнения следует, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = 0. \quad (1.13)$$

Для полного определения векторного потенциала  $\vec{A}$  нужно еще задать значение его дивергенции. Положим

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (1.14)$$

Подставив в выражение для ротора вектора  $\vec{a}_2$  его выражение (1.12), получим

$$\operatorname{rot} \vec{a}_2 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r}) \quad (1.15)$$

Учитывая, что дивергенции вектора  $\vec{A}$  равна нулю, получим

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\omega}(\vec{r}) \quad (1.16)$$

или в скалярном виде

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\omega_x(\vec{r}), \\ \Delta A_y &= -\omega_y(\vec{r}), \\ \Delta A_z &= -\omega_z(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.17)$$



Компоненты векторного потенциала удовлетворяют тем же уравнениям, что и скалярный потенциал  $\varphi$ . Их решение имеют вид

$$A_i = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_i(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0, \quad i = x, y, z. \quad (1.18)$$

Если функции  $\omega_i$  удовлетворяют тем же условиям на бесконечности, как и функция  $f(\vec{r}_0)$  в решении уравнения Пуассона, то интегралы в компонентах векторного потенциала сходятся.

Зная векторный потенциал  $\vec{A}$ , можно найти вектор  $\vec{a}_2$  простым дифференцированием:

$$\vec{a}_2(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(r) = \text{rot} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(r_0)}{|r - r_0|} dV_0 \quad (1.19)$$

Таким образом, векторное поле  $\vec{a}(\vec{r})$  полностью определяется по заданным во всем пространстве значениям его дивергенции  $f(\vec{r}_0)$  и ротора  $\vec{\omega}(\vec{r}_0)$ :

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int \frac{f(r_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0 + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int \frac{\vec{\omega}(\vec{r}_0)}{|r - r_0|} dV_0. \quad (1.20)$$

Поскольку дивергенция и ротор вектора  $\vec{a}$  однозначно связаны с потоком и циркуляцией этого вектора, можно утверждать, что векторное поле  $\vec{a}(\vec{r})$  полностью определено потоком и циркуляцией этого вектора.



## 1.2. Уравнение непрерывности

Движение электрических зарядов в пространстве приводит к переносу заряда, именуемому электрическим током. Электрический ток характеризуется вектором плотности тока  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , определяемым равенством:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.21)$$

Вектор плотности тока представляет величину заряда, пересекающего за 1 сек через воображаемую единичную площадку, находящуюся в момент времени  $t$  в точке  $\vec{r}$ .

Значения функций  $\rho$  и  $\vec{v}$  не могут быть произвольными и должны удовлетворять закону сохранения заряда.

Рассмотрим замкнутую поверхность, внутри которой помещен заряд  $e = \int \rho dV$ . Найдем производную  $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$ .

Здесь интегрирование ведется по объему, заключенному внутри поверхности  $S$  в единицу времени. Поскольку электрические заряды не исчезают и не возникают вновь, убыль заряда в объеме  $V$  равна потоку заряда, выходящему за 1 сек через поверхность  $S$ . Следовательно, имеем равенство

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \vec{v} d\vec{S}. \quad (1.22)$$

Переходя к интегрированию по объему, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \text{div}(\rho \vec{v}) dV. \quad (1.23)$$



Или

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV. \quad (1.24)$$

Ввиду произвольности объема интегрирования последнее равенство дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.25)$$

Или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.26)$$

Эти уравнения, представляющие математическое выражение закона сохранения заряда, носят название уравнений непрерывности.

При стационарных процессах, когда распространение плотности заряда не изменяется во времени, уравнение непрерывности имеет вид

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.27)$$

Эти равенства показывают, что при стационарных процессах векторное поле плотности тока имеет соленоидальный характер.

Далее будем пользоваться понятием полного тока  $I$  через поверхность  $S$  вида

$$I = \int \vec{j} d\vec{S} = \int j_n dS. \quad (1.28)$$

### 1.3. Электромагнитное поле движущихся зарядов (общий случай)





Опытами Фарадея установлено, что изменение во времени потока вектора  $\vec{H}$  через произвольную поверхность  $S$  сопровождается появлением электродвижущей силы в контуре (стягивающем эту поверхность)

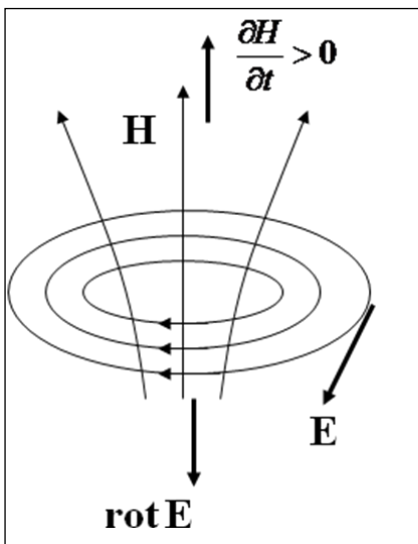


Рис.1.1

На рис.1.1 схематично изобразим связь между  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  и электродвижущей силой. Данная формула представляет собой обобщенный закон индукции Фарадея

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.30)$$

$$\Phi_n = \int \vec{H} d\vec{s}.$$

Максвелл высказал гипотезу о том, что наряду с законом Фарадея имеет место соотношение

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} d\vec{S}. \quad (1.29)$$

между изменением электрического  $\vec{E}$  поля во времени магнитным полем. Именно, при изменении электрического поля во времени  $\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S}$ , в контуре, охватывающем поверхность  $S$ ,

возникает магнитодвижущая сила  $\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S}$ .

От интегральных характеристик полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перейдем



## Машиностроение

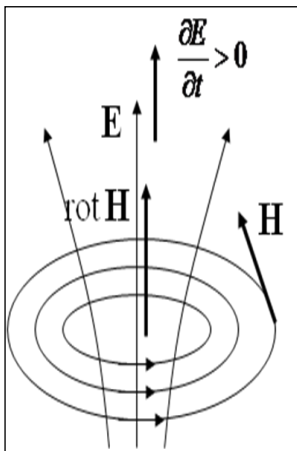
к дифференциальным характеристикам. Применим теорему Стокса к уравнению (1.30). Получим

$$\int \text{rot} \bar{E} d\bar{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{H} d\bar{S} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} d\bar{S} \quad (1.32)$$

Ввиду произвольности поверхности интегрирования вытекает равенство (1-е уравнение Максвелла)

$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

т.е. электрическое поле имеет вихревой характер. Значение вихря вектора  $\bar{E}$  в данной точке определяет производная  $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$ .



На рис.1.2 схематично изобразим связь между  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  и магнитодвижущей

силой. Если кривая контура  $L$ , по которой вычисляется циркуляция магнитного поля, охватывает контур с электрическим током, то полная магнитодвижущая сила определяется как

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{4\pi}{c} \int j d\bar{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S} \quad (1.31)$$

Рис. 1.2.

Преобразуя уравнение (1.31)аналогично получим



$$\int \text{rot} \bar{H} d\bar{S} = \frac{4\pi}{c} \int j d\bar{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S} \quad (1.33)$$

Это равенство должно выполняться для любых площадей. Это возможно в случае, если подынтегральные выражения левых и правых частей равны. Данное равенство составляет 3-е уравнение Максвелла

$$\text{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что вихри магнитного поля в каждой точке пространства определяются плотностью тока зарядов  $j$  и изменением электрического поля во времени.

Для однозначного определения полей должны быть заданы дивергенции электрических и магнитных полей. Используем 3-е уравнения Максвелла, применим операцию дивергенцию к левой и правой частям. Получим

$$\text{div rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div} j + \frac{1}{c} \text{div} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

или

$$\text{div rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div} j + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{E} \quad (1.34)$$

С помощью уравнения непрерывности данное уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \bar{E} - 4\pi\rho) = 0$$

Отсюда получим 2-е уравнение Максвелла:

$$\text{div} \bar{E} = 4\pi\rho. \quad (1.35)$$

Дивергенция электрического поля как в стационарных так и в нестационарных полях определяется данной формулой.

Аналогично применяя операцию  $\text{div}$  к первому уравне-



нию Максвелла, получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} . \quad (1.36)$$

Отсюда получим 4-е уравнение Максвелла:

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0$$

Таким образом, магнитное поле в стационарных и нестационарных полях имеет чисто вихревой характер. Магнитных зарядов, на которых начинается и заканчивается линии магнитного поля не существует.

## 1.4. Система уравнений Максвелла-Лоренца

Полученная нами ранее система уравнений установлена Максвеллом в 1873 году для общего случая электромагнитных полей в материальных средах. Лоренц в 1895 году сформулировал систему уравнений для системы зарядов, движущихся в вакууме. Выпишем уравнения Максвелла:

Дифференциальная форма:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{E} = 4\pi \rho \end{cases}$$

Интегральная форма:

$$\begin{cases} \oint \bar{E} d\bar{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{H} d\bar{S} \\ \oint \bar{H} d\bar{S} = 0 \\ \oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S} \\ \oint \bar{E} d\bar{S} = 4\pi \cdot e \end{cases}$$



Первое уравнение (первая строка 1.37) устанавливает, что изменение во времени магнитного поля порождает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение (вторая строка 1.37) показывает, что магнитное поле имеет соленоидальный характер и линии магнитного поля либо замкнуты, либо уходят в бесконечность.

Из третьего уравнения (третья строка 1.37) следует, что вихревое магнитное поле создается при движении зарядов и при изменении во времени электрического поля. По аналогии с электрическим полем величину  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  называют током смещения,

а сумму обоих членов называют полным током.

Четвертое уравнение (четвертая строка 1.37) показывает, что источниками электрического поля служат электрические заряды.

Отметим, что при заданном распределении плотностей зарядов и токов уравнения Максвелла полностью определяют электрическое  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и магнитное  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  поля.

Лоренц учел распределение зарядов и характер их движения в пространстве. Плотность заряда и плотность тока (скорость движения зарядов) связаны между собой законом сохранения заряда (1.26). На движущиеся заряды в электромагнитном поле действует сила Лоренца. Уравнения движения заряда можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int p_0 dV = \int \rho \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}] \right) dV \quad (1.38)$$

$$\frac{d\vec{p}_0}{dt} = \rho \left( \vec{E} + [\vec{v} \vec{H}] \right) \quad (1.39)$$

где  $p_0$  - импульс заряженной частицы в единице объема. Система уравнений (1.38, 1.39) записана для непрерывно распределенных зарядов в случае, когда сила Лоренца заменена плотностью силы ( т.е. силой, отнесенной к единице объема)

Отметим, что уравнения поля были первоначально сформулированы для электромагнитных процессов в веществе. Лоренц установил их применимость к системе, состоящей из поля и заря-



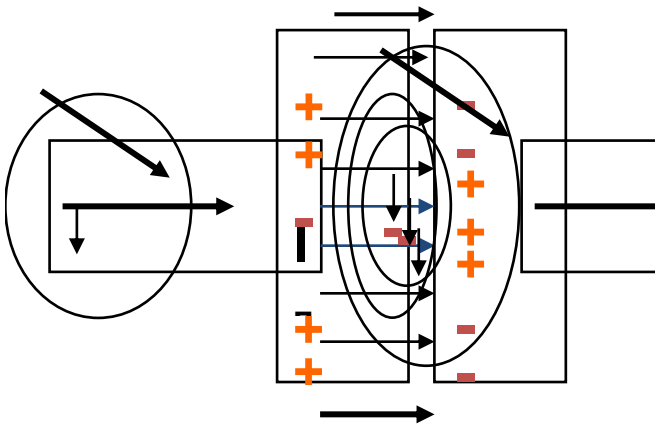
дов, и дополнил уравнением движения последних. Поэтому полную систему уравнений (1.37- 1.39) называют уравнениями Максвелла-Лоренца. Последние включают в себе полное описание поведения системы, состоящей из поля и зарядов. Область применимости уравнений Максвелла-Лоренца чрезвычайно высока.

### 1.5. Ток смещения

Ток  $I_{пр}$  связан с характеристиками электрического поля конденсатора, как показано на рис.1.3, поэтому Максвелл предположил, что разрыв цепи замыкается током смещения  $I_{см}$ , который равен току проводимости  $I_{пр}$

## Заряд конденсатора

$$\vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt} > 0$$



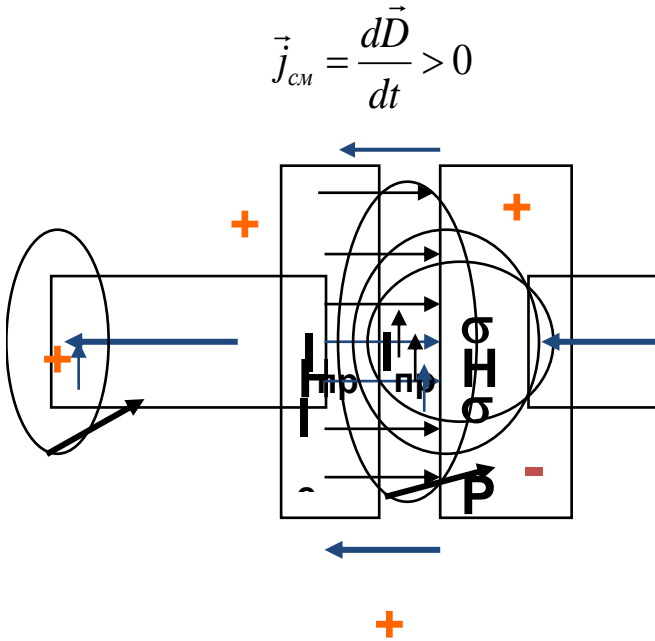


Рис.1.3.

В отличие от электрического тока полный ток смещения  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  не связан с движением каких-либо зарядов.

Введем ток смещения на основе формальных рассуждений.

Найдем обобщение закона

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.38)$$

такое чтобы оно не противоречило закону сохранения заряда



## Машиностроение

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} (\bar{j} + \bar{c}) \quad (1.39)$$

где  $\bar{c}$  – неизвестный вектор.

Применим операцию дивергенция к обеим частям и получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} (\operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \bar{c}).$$

Левая часть уравнения равна нулю, тогда получим

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} (\bar{j} + \bar{c}) = 0.$$

Отсюда получим уравнение вида

$$\operatorname{div} (\bar{j} + \bar{c}) = 0 \quad (1.40)$$

Неизвестный вектор  $\bar{c}$  дополняет плотность тока  $\bar{j}$  так, чтобы суммарная величина  $(\bar{j} + \bar{c})$  обладала бы свойствами соленоидального вектора, имеющего замкнутые силовые линии.

Определим явный вид вектора  $\bar{c}$ . Для этого преобразуем уравнение (1.40), с использованием уравнения непрерывности (1.26), к следующему виду

$$\operatorname{div} \bar{c} = -\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Далее выразим из 2-го уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \bar{E} = 4\pi \rho$$

объемную плотность заряда

$$\rho = \frac{\operatorname{div} \bar{E}}{4\pi},$$

которую подставим в предыдущее уравнение. Получим





$$\operatorname{div} \bar{c} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{E} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} .$$

Отсюда следует, что сам вектор  $\bar{c}$  равен

$$\bar{c} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} .$$

Гениальная идея Максвелла заключалась в том, что между электрическим и магнитным полями существует глубокая симметрия и взаимосвязь. Эта симметрия была подчеркнута нами при рассмотрении свойств уравнений Максвелла.

Таким образом, получаем

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} . \quad (1.41)$$

Отметим, что ротор вектора  $\bar{H}$  определяется быстротой изменения вектора  $\bar{E}$ , тогда как, согласно закону индукции Фарадея (1.32), ротор вектора  $\bar{E}$  определяется быстротой изменения вектора  $\bar{H}$ .

## 1.6. Потенциал электромагнитного поля

Для нахождения стационарного векторного поля по заданным в каждой точке пространства значениям дивергенции и ротора необходимо ввести  $\bar{A}$  – векторный и  $\varphi$  – скалярный потенциалы.

Вектор магнитного поля всегда является соленоидальным и его дивергенция равна нулю. Поэтому положим, что

$$\bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A} , \quad (1.42)$$



где вектор - потенциал  $\bar{A}(\bar{r}, t)$  является функцией координат и времени.

Из уравнений Максвелла следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \bar{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \end{array} \right. . \quad (1.43)$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$\operatorname{rot} \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Откуда следует, что величина  $\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$  является потенциальным вектором и может быть представлена в виде

$$\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi , \quad (1.44)$$

где  $\varphi$  — функция координат и времени называется скалярным потенциалом  $\varphi(\bar{r}, t)$ .

Вектор электрического поля имеет вихревой характер и выражается через совокупность скалярного и векторного потенциалов

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} . \quad (1.45)$$

Для определения потенциалов  $\bar{A}$  и  $\varphi$  используем 3-е уравнение Максвелла (1.41), в которое вместо вектора  $\bar{H}$  (1.42) и вектора  $\bar{E}$  (1.45) подставим найденные выражения. Получим



## Машиностроение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j}$$

или

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \Delta \bar{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j}.$$

Преобразуем данное уравнение с использованием правил векторного анализа к виду

$$\Delta \bar{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (1.46)$$

Из 2-го уравнения Максвелла(1.35), с использованием уравнения (1.45), получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{A}.$$

С использованием правил векторного анализа преобразуем это уравнение к виду

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{A}. \quad (1.47)$$

Введем дивергенцию вектора  $\bar{A}$  уравнением

$$\operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.48)$$

Это есть уравнение Лоренца. С использованием уравнения Лоренца уравнения (1.46) и (1.47) могут быть преобразованы к следующему виду



$$\begin{cases} \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c} \bar{j} \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - 4\pi \varphi \end{cases} . \quad (1.49)$$

Полученные уравнения эквивалентны исходным уравнениям Максвелла. Если заданы распределения зарядов  $\rho(\bar{r}, t)$  и токов  $\bar{j}(\bar{r}, t)$ , удовлетворяющие уравнению непрерывности, то интегрирование уравнений последней системы позволяет найти векторный и скалярный потенциалы.

Уравнение типа

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \psi(\bar{r}, t), \quad (1.50a)$$

где  $\psi(\bar{r}, t)$  - функция координат времени, называется уравнением Даламбера, которое может быть записано в компактном виде

$$\Delta \varphi = \psi(\bar{r}, t). \quad (1.50b)$$

В частных случаях:

1) при  $\psi(\bar{r}, t) = 0$ , уравнение Даламбера преобразуется в волновое уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad (1.51a)$$

2) при  $\psi(r)$  и  $\varphi(r)$  не зависящих от времени, уравнение (1.50a) преобразуется в уравнение Пуассона:

$$\Delta \varphi = \psi(r). \quad (1.51b)$$

С математической точки зрения полученные уравнения 2-го



порядка преобразуются в уравнение Пуассона, Даламбера и волновое уравнения, - которые оказываются проще, чем исходные уравнения Максвелла в частных производных 1-го порядка. Именно по этой причине исследования свойств электромагнитных полей целесообразно использовать потенциалы  $\bar{A}$  и  $\varphi$  и поэтому метод потенциалов представляет основной расчетный аппарат теории поля.

### 1.7. Законы сохранения энергии в электромагнитном поле

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из поля и зарядов (равномерно распределенных в пространстве). Найдем работу  $W$ , совершаемую силами поля над зарядами, отнесем ее к единице времени

$$\frac{dW}{dt} = \int \bar{F} \cdot \bar{v} dV = \int \bar{j} \cdot \bar{E} \cdot dV \quad (1.52)$$

С использованием 3-го уравнения Максвелла (1.41) это уравнение примет вид (если выразить  $\bar{j}$  через векторы поля)

$$\frac{dW}{dt} = \int \bar{j} \bar{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int \bar{E} \text{rot} \bar{H} dV - \frac{1}{4\pi} \int \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} dV \quad (1.53)$$

В силу симметрии между электрическим и магнитным полями добавим в правую часть слагаемое

$$- \frac{c}{4\pi} \int \bar{H} \left( \text{rot} \bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) dV \quad (1.54)$$

которое в силу 1-го уравнения Максвелла равно нулю.

Это дает возможность представить уравнение (1.53) в следующем виде



$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E}) dV - \int \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV \quad (1.55)$$

Первый интеграл в правой части данного уравнения может быть преобразован к поверхностному:

$$\int (\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E}) dV = - \int \text{div} [\vec{E} \vec{H}] dV = - \oint [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S}.$$

Тогда выражение (1.55) имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = - \frac{c}{4\pi} \oint [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV \quad (1.56)$$

При возрастании объема интегрирования  $V$  до бесконечности, если векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  стремятся к 0 при  $r \rightarrow \infty$  быстрее, чем по закону  $\frac{1}{r}$ , то поверхностный интеграл превращается в нуль. Тогда уравнение (1.56) превращается в равенство:

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dt} \int u_0 dV \quad (1.57)$$

где величину  $u_0 = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$  называют плотностью энергии электромагнитного поля.

Так как в левой части стоит работа, произведенная за 1 секунду, то правая часть представляет убыль энергии поля в единицу времени.

Для конечного объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , уравнение (1.56) выражает закон сохранения энергии. Оно показывает, что убыль энергии поля в единицу времени в некотором объеме  $V$  равна работе сил поля над зарядами, (заключенными в том же объеме) и потоку энергии, вытекающему через замкнутую поверхность  $S$ . Отметим, что



поток энергии электромагнитного поля принято характеризовать вектором Умова - Пойтинга:

$$\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\bar{E}\bar{H}]. \quad (1.58)$$

Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\bar{j} \cdot \bar{E} - \text{div} \bar{\sigma} \quad (1.59)$$

В левой части уравнения стоит изменение энергии поля единицы объема, а в правой части - работа, произведенная над зарядами (находящимися в этом объеме), а также дивергенция потока, сохраняющейся величины (плотности энергии).

### 1.8. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле

Наряду с плотностью энергии электромагнитное поле обладает и плотностью импульса.

Рассмотрим изменение импульса частиц, находящихся в объеме  $V$ . Вычисления производятся аналогично выводу закона сохранения энергии на основе уравнения Лоренца (1.39). В итоге получим

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int [\bar{E}\bar{H}] dV \quad (1.60)$$

где  $\bar{P}$  - полный импульс заряженных частиц.

При переходе к бесконечному объему получим следующее выражение



$$\bar{P} + \frac{1}{4\pi c} \int [\overline{EH}] dV = const \quad (1.61)$$

Данная формула показывает, что суммарный импульс замкнутой системы (состоящей из поля и частиц) сохраняется. Величина

$$\bar{g} = \frac{1}{4\pi c} [\overline{EH}]$$

представляет плотность импульса электромагнитного поля (единицы объема).

При взаимодействии поля и частиц наряду с законом сохранения суммарной энергии (1.56) имеет место закон сохранения суммарного импульса. Передача импульса частицам сопровождается уменьшением импульса поля. Потеря импульса частицы (например, при излучении) приводит к увеличению импульса поля.

Подтверждение существования импульса поля впервые было обнаружено в 1901 году П.Н.Лебедевым, наблюдавшим экспериментально световое давление.





## ГЛАВА 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Самым простым примером электромагнитного поля является поле неподвижных зарядов. Следующим по степени сложности является случай поля зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение. Медленным мы будем называть движение со скоростями  $|\vec{v}|$ , малыми по сравнению с величиной «с», которая является единственной характерной величиной размерности скорости, содержащейся в уравнениях Максвелла. Величина

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

- это скорость распространения в пространстве всех электромагнитных взаимодействий.

### 2.1. Поле системы зарядов (квазистационарное движение)

Будем рассматривать медленное (квазистационарное) движение системы зарядов со скоростями  $\vec{v}$  малыми по сравнению со скоростью света с.

При медленном движении зарядов с учетом того, что изменение плотности заряда во времени будет малым, и можно предположить, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

Из уравнения непрерывности (1.26) следует, что

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (2.2)$$

Следовательно, вектор плотности имеет соленоидальный характер, т.е. траектории движения зарядов можно представить в виде некоторых замкнутых трубок или нитей.

Подчеркнём, что условие квазистационарности имеет вид



$$T \gg \frac{L}{c} \quad (2.3,а)$$

где  $T$  – характерный период движения;  $L$  – средние размеры системы зарядов.

Или эквивалентное ему равенство

$$c \gg \frac{L}{T} \approx v \quad (2.3,б)$$

где величину  $v \approx \frac{L}{T}$  можно интерпретировать как характерную скорость движения зарядов в системе.

Электромагнитные поля, для которых справедливо неравенство (2.3) и в которых можно пренебречь током смещения в силу его малости, носят название квазистационарных полей.

Для квазистационарных полей уравнения Максвелла имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}; \\ \operatorname{div} \bar{H} = 0; \\ \operatorname{rot} \bar{E} = 0; \\ \operatorname{div} \bar{E} = 4\pi \rho / \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Таким образом, система уравнения Максвелла распалась на уравнения для независимых полей: магнитного поля токов и электрического поля зарядов.

Введем векторный потенциал  $\bar{A}$  и соотношение Лоренца, Поскольку зависимость плотности заряда  $\rho$  и токов  $\bar{j}$  от времени можно пренебречь, то векторный потенциал  $\bar{A}$  и соотношение Лоренца принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{A} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j} \\ \operatorname{div} \bar{A} = 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Решение уравнения для векторного потенциала  $\bar{A}$  (2.5)



имеет вид

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{j}'(\bar{r}') dV'}{R} \quad (2.6)$$

где  $\bar{j}'(\bar{r}')$  — плотность тока в точке  $\bar{r}'$ ;  $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$  — расстояние от этой точки до точки наблюдения, в которой ищется значение векторного потенциала.

Зная векторный потенциал можно найти напряженность магнитного поля:

$$\bar{H} = \frac{1}{c} \text{rot} \int \frac{\bar{j} dV'}{R} = \frac{1}{c} \int \text{rot} \left( \frac{j dV'}{R} \right) \quad (2.7)$$

При дифференцировании по координатам « $r$ » плотность тока  $\bar{j}'(\bar{r}')$  должна считаться постоянной. Тогда с использованием формул векторного анализа получим

$$\text{rot} \frac{\bar{j}}{R} = \left[ \text{grad} \frac{1}{R}, \bar{j} \right] = \frac{[\bar{j} \bar{R}]}{R^3}$$

Наконец, с учетом последней формулы напряженность магнитного поля может быть определена, как

$$\bar{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\bar{j} \bar{R}]}{R^3} dV' \quad (2.8)$$

Эта формула носит название закона Био - Савара (в системе единиц Гаусса) и дает принципиальное решение поставленной задачи. Однако вычисление интеграла в формуле (2.8) достаточно сложно и может быть проведено до конца только для некоторых простейших систем.



## 2.2. Магнитный момент

Прежде всего отметим, что значение магнитного момента не зависит от выбора начала координат. Магнитный момент, подобно дипольному моменту нейтральной системы зарядов, представляет величину, зависящую только от физических свойств системы. Для случая, когда заряды движутся по одной трубке, магнитный момент может быть записан следующим образом

$$\bar{M} = \frac{1}{2c} \int dI [\bar{r}' d\bar{l}] = \frac{I}{c} \frac{1}{2} \int [\bar{r}' d\bar{l}] \quad (2.9)$$

Величина  $\frac{1}{2} [\bar{r}' d\bar{l}]$  представляет собой вектор площади. Интеграл  $S = \int \frac{[\bar{r}' d\bar{l}]}{2}$  представляет площадь боковой поверхности конуса, опирающегося на контур с током.

В частном случае плоского замкнутого контура за  $\bar{S}$  можно выбрать вектор нормали к площади контура, умноженный на величину площади. Тогда можно записать:

$$\bar{M} = \frac{I\bar{S}}{c}$$

Эта формула допускает наглядную интерпретацию, а именно, всякий замкнутый ток обладает магнитным моментом, пропорциональным величине тока.

Перепишем уравнение для магнитного момента (2.9), выразив плотность тока через скорость движения зарядов. Получим

$$\bar{M} = \frac{1}{2c} \int [\bar{r}', \rho \cdot \bar{v}] dV' = \frac{1}{2c} \sum [\bar{r}', e \cdot \bar{v}_i] \quad (2.10)$$

где суммирование ведется по всем зарядам системы.

Обобщим это уравнение на случай одинаковых или разных частиц, но обладающих одинаковым значением удельного заряда

$\frac{e}{m}$ . Преобразуем уравнение (2.10) к виду



$$\bar{M} = \frac{1}{2c} \sum \frac{e_i}{m_i} [\bar{r}'_i, m_i \bar{v}_i] = \frac{e}{2mc} \sum [\bar{r}'_i, \bar{P}_i] = \frac{e}{2mc} \bar{L}, \quad (2.11)$$

где  $\bar{L}$  – механический момент системы. Данная формула показывает, что для системы частиц с постоянным значением  $\frac{e}{m}$  между магнитным и механическим моментом систем существует прямая пропорциональность.

### 2.3. Электромагнитное поле системы произвольно движущихся зарядов. Решение уравнения Даламбера.

Рассмотрим систему зарядов, совершающих произвольное движение в некотором объеме  $V'$ . Распределение и движение зарядов в этом будем характеризовать плотностью заряда  $\rho(\bar{r}, t)$  и плотностью тока  $\vec{j}(\bar{r}, t)$  при  $-\infty < t < +\infty$ .

Уравнение для электромагнитных потенциалов имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi(\bar{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\bar{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\bar{r}, t); \\ \Delta \bar{A}(\bar{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}(\bar{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\bar{r}, t); \\ \operatorname{div} \bar{A}(\bar{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Для решения системы уравнений поля (2.12) воспользуемся простым методом, основанным на использовании принципа



суперпозиции. Разобьем всю систему на совокупность малых зарядов  $\delta e_i = \rho(\bar{r}, t) \delta V_i'$ , где  $\delta V_i'$  - как угодно малый объем в области  $V'$ . Будем искать в некоторой точке наблюдения N потенциал поля создаваемого зарядом  $\delta e_i$ . Полное поле на основании принципа суперпозиции, представляет сумму полей, создаваемых всеми зарядами  $\delta e_i'$ , входящими в систему. Во всех точках пространства вне объема  $\delta V_i'$  плотность заряда, согласно нашему представлению, равна нулю. Поэтому вне объема  $\delta V_i'$  уравнения для потенциалов электромагнитного поля приобретает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \\ \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0; \\ \operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

введем сферические координаты с началом координат, помещенным в объеме  $\delta V_i'$ , и используем выражение оператора Лапласа в сферических координатах, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (2.14)$$



## Машиностроение

Таким образом, скалярный потенциал и все компоненты векторного потенциала  $\bar{A}$  определяются уравнением одного типа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (2.15)$$

которое носит название волнового уравнения.

Интегрирование волнового уравнения проще всего произвести методом Даламбера, который заключается в сведении уравнения в частных производных типа (2.15) к уравнению со смешанной второй производной. Перепишем уравнение (2.15) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (r \cdot f) = 0$$

Введем новую неизвестную функцию  $\psi = r \cdot f$ , что всегда возможно, поскольку  $r \neq 0$ , вне объема  $\delta V_i$ . Тогда получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

Перейдем в уравнении (2.16) к новым переменным:

$$\xi = t - \frac{r}{c}; \quad r = t + \frac{r}{c}.$$

В новых переменных уравнение (2.16) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.17)$$

Это уравнение, содержащее лишь смешанную производную



## Машиностроение

водную, интегрируется непосредственно. Очевидно, что оно удовлетворяется любыми функциями  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_2(\eta)$  одной переменной  $\xi$  или  $\eta$ . Общее решение уравнения (2.17) ищем в виде

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta) \quad (2.18)$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\psi(r, t) = \psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Найденное решение имеет простой смысл. Значение функции  $\psi_1$  в точке  $(r + c)$  и в момент времени  $(t + 1)$  совпадают со значением функции в точке  $r$  в момент времени  $t$ . Это обозначает, что первое слагаемое описывает волновой процесс, распространённый в сторону возрастания значений  $r$ , а второе слагаемое есть волна, распространяющаяся от больших  $r$  к началу координат. Для функции  $f$  имеем

$$f = \frac{\psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{\psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (2.19)$$

Формула (2.19), дающая общее решение уравнения (2.15), представляет наложение двух волн, а именно совокупность расходящейся и сходящейся сферических волн.

Скалярный потенциал  $\varphi$  и компонента векторного потенциала  $\bar{A}$  могут быть представлены аналогично, в виде формулы (2.19). Анализ частных решений позволяет выяснить смысл полученных решений (2.19). Для конкретности напишем уравнение для скалярного потенциала расходящейся сферической волны





## Машиностроение

$$\varphi(r, t) = \frac{\varphi \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (2.20)$$

При произвольном виде функции  $\varphi_1$  формула (2.20) дает частное решение уравнения (2.13,а) в области пространства вне объема  $\delta V_i$ . Потребуем, чтобы (2.20) непрерывно переходило в решение уравнения (2.13.а) вблизи объема  $\delta V_i$ , т.е. вблизи места расположения заряда  $\delta e_i(t)$ . Записав (2.20) в виде

$$d\varphi_i(r, t) = \frac{\rho \left( t - \frac{r}{c} \right) \delta V_i}{r} \quad (2.21)$$

мы приходим к потенциалу поля, создаваемому зарядом  $\delta e_i(t)$ . Формула (2.21) показывает, что потенциал в точке наблюдения, находящейся на расстоянии  $r$  от начала координат в момент времени  $t$ , определяется значением заряда в предыдущий момент времени  $\tau = t - \frac{r}{c}$ . Потенциал (2.21) поэтому называется

запаздывающим потенциалом, а величина  $\frac{r}{c}$  - временем за-

паздывания. Время запаздывания представляет промежуток времени, в течение которого электромагнитное поле, распространяющееся со скоростью света, проходит путь  $\vec{r}$ .

Вводя начало координат в некоторой точке  $O$ , расположенной в объеме  $V'$ , и интегрируя выражение (2.21) по всем зарядам системы, приходим к следующему выражению для потенциала поля, создаваемого в точке наблюдения  $N$ :



$$\varphi(\bar{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV'}{R} = \int \frac{\rho(\bar{r}', \tau) dV'}{R}, \quad (2.22)$$

$$\text{где } \tau = t - \frac{R}{c}, \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'.$$

Не останавливаясь здесь на подробном анализе частных решений (их можно найти в цитируемой литературе [2]) подытожим их важным выводом: система зарядов, начавших в момент времени  $t = 0$  двигаться нестационарным образом, создает в окружающем пространстве электромагнитное поле, потенциалы которого имеют характер запаздывающих потенциалов. Потенциалы поля имеют характер сферических волн, исходящих от системы и распространяющихся в вакууме со скоростью света.

Мы будем говорить, что система нестационарно двигающихся зарядов излучает электромагнитные волны, и кратко называть её излучателем.

Решение уравнений электромагнитного поля в виде запаздывающих потенциалов имеет большое принципиальное значение. Оно отвечает определенной системе представлений о характере причинной связи, которая отличается от представлений классической механики. Подробности можно найти в работе [2].



## ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И РАССЕИВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 3.1. Распространение электромагнитных волн вдали от излучателя

Общие формулы для потенциалов, полученные выше сложны. Не удастся получить точных выражений для конкретных задач с помощью общих формул, например (2.22).

Однако, если точка наблюдения находится достаточно далеко от системы движущихся зарядов, то возможно упрощения, которые подробно изложены в [2].

В теории излучения электромагнитного поля показывается, что потенциалы электромагнитного поля вдали от излучения могут быть представлены в виде [2]:

$$\begin{cases} \varphi(\bar{r}, t) = \frac{\bar{n} \dot{\bar{d}}(\tau_0)}{c r}; \\ \bar{A}(\bar{r}, t) = \frac{\dot{\bar{d}}(\tau_0)}{c r}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\bar{n} = \frac{\bar{r}}{r}$ ,  $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$ ,  $\bar{d} = \int \rho \cdot \bar{r}' \cdot dV'$  - дипольный

момент системы,  $\dot{\bar{d}}(\tau_0)$  - производная дипольного момента по времени, взятая в момент времени  $\tau_0$ . Следовательно, потенциалы поля вдали от системы определяются значением производной по времени от её дипольного момента. Такое приближение при вычислении потенциалов называется дипольным приближением. Условием его применимости является выполнение неравенства  $v \ll c$ .

Зная распределение потенциалов, можно найти значения напряженности магнитного и электрического полей. Имеем



$$\bar{H} = \text{rot } \bar{A} = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\dot{\bar{d}}(\tau_0)}{r}.$$

При вычислении ротора вдали от излучателя следует проводить дифференцирование по координатам вдали от излучателя, полагая, что величину  $\frac{1}{r}$  можно считать постоянной.

Тогда формулы для напряженности магнитного и электрического полей могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{c^2 r} \left[ \ddot{\bar{d}\bar{n}} \right] \\ \bar{E} &= \frac{1}{c^2 r} \left[ \left[ \ddot{\bar{d}\bar{n}} \right] \bar{n} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из сравнения этих формул следует, что векторы  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$  связаны между собой соотношением

$$\bar{E} = [\bar{H} \cdot \bar{n}]$$

Рассмотрим более общий случай излучения системой движущихся зарядов. Можно считать, что плотность тока в системе и плотность заряда допускают разложение в интеграл Фурье. Тогда, разлагая в интеграл Фурье потенциалы поля и, подставляя эти разложения в уравнение (2.6), находим компоненты Фурье вектора–потенциала и скалярного потенциала. Таким образом, можно найти поле излучающей системы.

Выражения для электромагнитных полей в монохроматических волнах вдали от излучающей системы имеют вид [2]

$$\bar{H} = \frac{k^2}{r} [\bar{n}\bar{d}_0] \cdot e^{i(\omega t - kr)} \quad (3.3a)$$

$$\bar{E} = \frac{k^2}{r} \left[ [\bar{n}\bar{d}_0] \bar{n} \right] \cdot e^{i(\omega t - kr)} \quad (3.36)$$



## Машиностроение

Перейдем в последних формулах к пределу, считая расстояние до системы зарядов настолько большим, что можно пренебречь различием в направлении векторов  $\bar{r}_0, \bar{n}$  ( $\bar{r}_0$  – единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения,  $\bar{n}$  – единичный вектор, направленный от излучателя к точке наблюдения. Тогда

$$\bar{H} = \frac{w^2}{c^2} \frac{1}{\bar{r}} [\bar{n} \bar{d}_0] \cdot e^{i\omega(t - \frac{r\bar{n}}{c})} \quad (3.4a)$$

$$\bar{E} = \frac{w^2}{c^2} \frac{1}{r} [\bar{n} \bar{d}_0] \bar{n} \cdot e^{i\omega(t - \frac{r\bar{n}}{c})} \quad (3.4b)$$

При бесконечно большом расстоянии от начала координат  $r$  изменение функции  $\frac{1}{r}$  можно считать происходящим весьма медленно и положить  $\frac{1}{r} = const$ . Тогда

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{H}_0 e^{i\omega(t - \frac{r\bar{n}}{c})} \\ \bar{E} = \bar{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{r\bar{n}}{c})} \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $\bar{E}_0, \bar{H}_0$  – постоянные в пространстве и во времени величины.

Введем волновой вектор,  $\bar{k} = \frac{w\bar{n}}{c}$ , который по абсолютной величине равен:

$$k = \frac{w}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3.6)$$

где  $w$  – круговая частота,  $\lambda$  – длина волны.  
Перепишем уравнения



$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(wt - \bar{k}\bar{r})} \\ \bar{H} = \bar{H}_0 e^{i(wt - \bar{k}\bar{r})} \end{cases} \quad (3.7)$$

В формулах (3.7) подразумевается, что в окончательных выражениях следует брать вещественную часть. Амплитуды же  $\bar{E}_0, \bar{H}_0$  направлены перпендикулярно друг к другу и к вектору  $\bar{k}$ . Векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  представляют плоские монохроматические волны: плоскости  $\bar{k} \cdot \bar{r} = const$  являются поверхностями равной фазы. На большом расстоянии некоторую область сферы можно считать плоской поверхностью. Если направление распространения совпадает с осью  $x$ , то формулы напряженности примут вид:

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(wt - kx)} \\ \bar{H} = \bar{H}_0 e^{i(wt - kx)} \end{cases} \quad (3.8)$$

Данные уравнения описывают плоские волны, распространяющиеся с фазовой скоростью  $v = \frac{w}{k} = c$  в положительном направлении  $x$ .

Вычислим вектор Умова - Пойтинга в плоской волне:

$$\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\bar{E}\bar{H}] = \bar{n}c \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \bar{n}cu_0$$

В плоской волне он оказывается постоянным и равным потоку энергии, движущемуся со скоростью света. Импульс плоской электромагнитной волны равен:

$$\bar{g} = \frac{\sigma}{c^2} = \bar{n} \frac{u_0}{c} \quad (3.9)$$



## 3.2. Поляризация плоской волны

Рассмотрим детальнее, как происходит изменение векторов напряженности полей в плоской монохроматической волне. Перейдем от комплексной формы записи к вещественным выражениям. Пусть в плоской монохроматической волне колебания векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  будут взаимно перпендикулярными. Выбрав за направление распространения волны ось  $x$ , направим вектор  $\vec{E}_1$  по оси  $y$ , то вектор  $\vec{E}_2$  будет ориентирован по оси  $z$ .

Получим:

$$\begin{cases} E_y = E_1 \cos(\omega t - kx + \alpha) \\ E_z = E_2 \sin(\omega t - kx + \alpha) \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  называются амплитудами, а величина  $\Psi = \omega t - kx + \alpha$  есть фаза волны. Исключив фазу, получили формулу

$$\frac{E_y}{E_1} + \frac{E_z}{E_2} = 1 \quad (3.11)$$

Выражение связывает между собой значения компонент вектора  $\vec{E}$  в плоской волне. Очевидно, что в данной плоскости  $x = \text{const}$  вектор  $\vec{E}$ , вращается в плоскости  $(yz)$  так, что его конец описывает эллипс. Уравнение (3.11) представляет уравнение этого эллипса. Поскольку распространение электромагнитных волн проходит в направлении единичного вектора  $\vec{n}$  можно наглядно представить себе изменение вектора  $\vec{E}$  в пространстве и во времени, как движение конца вектора  $\vec{E}$  по эллиптической спирали, навитой на линию  $\vec{n}$ . При этом шаг спирали определяется соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Аналогично можно представить компоненты



напряженности магнитного поля, что мы рекомендуем сделать самостоятельно.

Волны, в которых  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  вращаются по эллипсу, называются эллиптически поляризованными, при вращении их по окружности - поляризованными по кругу.

Направление вращения вектора  $\vec{E}$  определяется фазой. Если вращение происходит по часовой стрелке для наблюдателя смотрящего по направлению распространения волны, то такая волна имеет положительную спиральность ( $\alpha = -\pi/2$ ).

Если один из векторов  $\vec{E}_1$  или  $\vec{E}_2$  равен нулю, изменение  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходит во взаимно перпендикулярных плоскостях. Такие волны называются поляризованными в плоскости. В настоящее время, принято считать, что плоскостью поляризации называют плоскость, в которой колеблется вектор  $\vec{E}$  (световой вектор).

### 3.3. Интерференция и образование волновых пакетов

Рассмотренная выше монохроматическая плоская волна являлась лишь идеализацией реальных электромагнитных волн: с одной стороны, монохроматическая плоская волна, являющаяся процессом строго периодическим в пространстве и во времени, должна, очевидно, иметь бесконечно большую протяженность в пространстве и бесконечно большую длительность во времени; с другой стороны, не существует строго монохроматических излучателей. Поэтому для описания реальных волновых процессов необходимо рассмотреть результат наложения или интерференции различных плоских монохроматических волн. Пусть их частоты изменяются в узком интервале:

$$w_0 - \Delta w \leq w \leq w_0 + \Delta w,$$

где  $w_0$ , именуемая несущей частотой удовлетворяет условию  $w_0 \gg \Delta w$ .

Для напряженности электрического (или магнитного)





поля можно записать

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(\omega t - kx)} d\omega.$$

Введем переменную интегрирования:  $u = \omega - \omega_0$  и, полагая, что волновое число  $k$  есть некоторая функция частоты, получим после интегрирования следующий результат: наложение спектра волн с частотами, лежащими в узком интервале  $2\Delta\omega$  вокруг несущей частоты  $\omega_0$ , приводит к появлению волны с частотой  $\omega_0$  и волновым числом  $k$ , но с модулированной амплитудой

$$A = 2\bar{E}_0 \frac{\sin \Delta\omega \left( x - v_g t \right)}{x - v_g t} \quad (3.12)$$

где  $v_g = \left( \frac{d\omega_0}{dk} \right)$ . Модулированная амплитуда имеет рез-

кий главный максимум и ряд побочных максимумов с малой амплитудой. Практически можно считать, что электромагнитное поле возбуждено только вблизи главного максимума, а в остальном пространстве наложение волн приводит к их полному погашению.

Возникающее образование в виде группы волн называется волновым пакетом, который движется в пространстве со скоростью  $v_g$ , сохраняя ограниченную протяженность в пространстве.

Величина  $v_g$  называется групповой скоростью движения пакета в отличие от фазовой скорости, с которой перемещается в пространстве поверхность равной фазы  $v = \frac{\omega}{2\pi} \lambda$ .

Волновой пакет обладает ограниченной простран-



ственной и временной протяженностями, удовлетворяющими условиям:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta k_x &\approx 2\pi; & \Delta z \cdot \Delta k_z &\approx 2\pi; \\ \Delta y \cdot \Delta k_y &\approx 2\pi; & \Delta t \cdot \Delta \omega &\approx 2\pi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Полученные результаты имеют большое принципиальное и практическое решение. Отметим, что монохроматические волны, обладающие бесконечно большой протяженностью, не могут быть использованы для передачи каких-либо сигналов. Под сигналами понимаются такие электромагнитные возмущения, которые в принципе можно регистрировать с помощью соответствующих устройств и которые могут служить для информации о некоторых физических событиях. Так, например, сигналом является самый факт излучения, начавшегося в некоторый момент времени. Обнаружение системы зарядов, рассеивающей электромагнитной волны, является другим примером сигнала.

Из сказанного следует, что электромагнитные волны могут быть использованы для образования сигналов только в том случае, если из них сформулированы волновые пакеты. Соотношения (3.13) используются для анализа требуемых свойств сигнала. Пусть, например, регистрирующее устройство требует для своей работы сигнала, длительность которого не меньше некоторой величины  $\Delta t$ . Тогда сигнал будет зарегистрирован только в том случае, если он представляет волновой пакет, сформированный из монохроматических волн с частотами, распределенными в интервале  $\Delta \omega \geq 2\pi/\Delta t$ .

В заключение подчеркнем, что полученное нами выражение для волнового пакета (3.13) имеет приближенный характер. Оно справедливо, если:

- 1) амплитуды всех монохроматических волн, образующих пакет, имеют одно и то же значение;
- 2) в разложении  $k(\omega)$  в ряд по  $\Delta \omega$  можно ограничиться первым членом.

Первое ограничение не имеет принципиального значения, и не представляет особого труда нахождения волновых пакетов, образуемых волнами с различными амплитудами.

Второе требование для электромагнитных волн в



вакууме выполняется автоматически:

$$k = \frac{w}{c} = \frac{\omega_0}{c} + \frac{\Delta\omega}{c} = k_0 + \frac{\Delta\omega}{c}$$

### 3.4. Рассеивание электромагнитных волн свободным и связанным зарядами

Рассеивание электромагнитных волн связанным зарядом рассмотрим на примере линейного гармонического осциллятора. Пусть плоская монохроматическая волна, поляризованная в плоскости, падает на осциллятор. Уравнение движения осциллятора:

$$\ddot{\vec{r}} + w_0^2 \cdot \vec{r} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \dddot{\vec{r}} + \frac{e\bar{E}_0 e^{i\omega t}}{m} \quad (3.14)$$

Считая затухание слабым, получим

$$\dddot{\vec{r}} = -w_0^2 \dot{\vec{r}}$$

Следовательно, уравнение движения примет вид

$$\ddot{\vec{r}} + w_0^2 \cdot \vec{r} + \gamma \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \bar{E}_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

где  $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \bar{w}_0^2}{mc^3}$ .

Частное решение данного уравнения

$$\vec{r} = \frac{\frac{e}{m} \bar{E}_0 e^{i\omega t}}{\bar{w}_0^2 - w^2 + i\omega \cdot \gamma} \quad (3.16)$$



определяет закон движения осциллятора под действием внешней силы.

Интенсивность излучения, рассеянного в телесном угле  $\Omega$  определяется формулой

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^3} [\ddot{r}\bar{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4 w^4 E_0^2}{4\pi \cdot m^2 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2 \gamma^2} \cos^2(wt - \delta) d\Omega \quad (3.17)$$

Рассеянное излучение имеет ту же частоту, что и падающее, но сдвинуто по фазе на  $\delta$  :

$$\delta = \text{arctg} \frac{\gamma \cdot w}{w_0^2 - w^2} \quad (3.18)$$

В формуле для интенсивности (3.17) через  $\theta$  обозначен угол между направлением наблюдения и направлением вектора поляризации  $\bar{E}_0$  (рис.1.4)

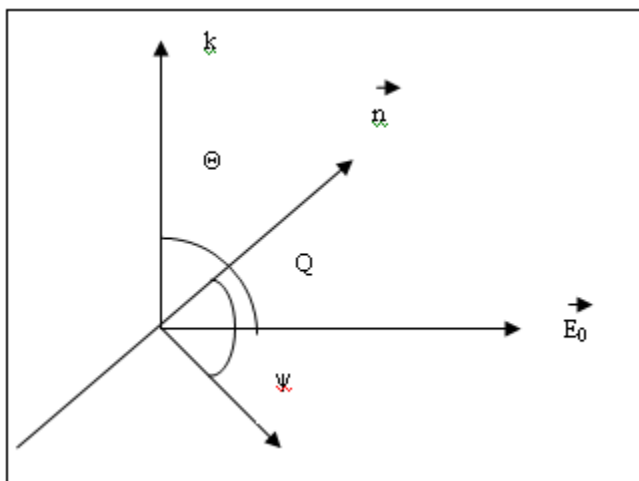


Рис.1.4



Введя падающую интенсивность излучения  $I_0 = \frac{cE_0^2}{4\pi}$  и

усредняя за период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , получим среднее значение ин-

тенсивности

$$d\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T dI dt = r_0^2 I_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \Theta \cdot d\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2 \gamma^2} \quad (3.19)$$

Обычно процесс рассеивания электромагнитных волн характеризуют эффективным дифференциальным сечением, определяемым как отношение интенсивности, рассеянной в угол  $d\Omega$ , к интенсивности падающего излучения:

$$d\sigma = \frac{d\bar{I}}{I_0} = \frac{\bar{r}_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} d\Omega.$$

Интегрируя по всему телесному углу  $d\Omega$ , получаем полное сечение рассеяния неполяризованного излучения

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (3.20)$$

Полученное выражение носит название дисперсионной формулы классической электродинамики, которая имеет общий характер. Она по форме совпадает с аналогичной формулой для рассеяния света атомами, полученной в квантовой механике. При малых частотах, когда  $\omega \ll \omega_0$ , данная формула трансформируется к виду:

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (3.21a)$$

При высоких частотах формула (3.20) вновь упрощается



$$\sigma \approx \frac{8\pi r_0^2}{3} = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} \quad (3.216)$$

Данное выражение получило название формулы Томсона.

Сечение рассеяния оказывается постоянным, не зависящим ни от частоты рассеиваемого излучения, ни от свойств осциллятора.

Данное следствие имеет простой смысл: при высоких частотах сила, действующая на заряд со стороны поля, весьма велика по сравнению с квазиупругой силой. Электрон рассеивается как свободная частица. Согласно формуле Томсона, сечение  $\sigma$  является универсальной постоянной, определяемой классическим радиусом электрона. Ясно, что формула Томсона описывает рассеяние электронами любых систем, например, атомов, если можно пренебречь силами, связывающими электроны в атомах, и считать их свободными. Рассеянием излучения тяжелыми ядрами можно пренебречь, поскольку сечение обратно пропорционально квадрату массы рассеивателя. Универсальный характер формулы (3.216) делает её одним из фундаментальных соотношений классической электродинамики.

### 3.5. Поглощение излучения

В классической электродинамике поглощение излучения рассчитывается для модели осциллятора. Рассмотрим случай, когда частоты падающего излучения близки к резонансной частоте. В этом случае поглощение будет наибольшим. Падающее излучение имеет некоторое непрерывное распределение по частотам. Разложим его в интеграл Фурье.

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{E}(w) e^{iw \cdot t} dw. \quad (3.22)$$

Подставим это в уравнение движения осциллятора (3.14) и разлагая в интеграл Фурье найдем его смещение



$$\bar{r}(w) = \frac{e}{m} \frac{\bar{E}(w)}{w_0^2 - w^2 + iw\gamma}. \quad (3.23)$$

Потеря энергии излучения равна полной работе, произведенной полем над осциллятором. Последнюю вычислим по формуле

$$-\Delta E = \int \bar{F} v \cdot dt = e \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}(t) \cdot \dot{r} dt. \quad (3.24)$$

Используя обобщенную формулу Персеваля, преобразуем уравнение

$$-(\Delta E) = 2 \frac{e^2}{m} \int_0^{+\infty} \frac{\gamma |E(w)|^2}{(w_0 - w)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} dw. \quad (3.25)$$

Будем считать, что спектральное распределение поглощаемого излучения в области резонанса изменяется медленно по сравнению с резонансным множителем. Тогда, используя представление  $\delta$ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2},$$

получим

$$-\Delta E = \frac{\pi \cdot e^2}{m} |\bar{E}(w_0)|^2 = \pi \cdot c^2 r_0 |\bar{E}(w_0)|^2. \quad (3.26)$$

Таким образом, поглощенная энергия оказывается независимой от физических свойств поглощающей среды, за исключением положения резонанса  $w_0$ , и поэтому данное выражение



имеет общий характер.





## ГЛАВА 4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

### 4.1. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Одним из важнейших с практической точки зрения разделов электродинамики является теория движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях является основой всей электроники, электронной и протонной микроскопии, исследований реакций в плазме и другие.

В рамках этой книги мы ограничимся рассмотрением простейших задач. Более сложные вопросы движения заряженных частиц в плазменном разряде можно посмотреть в работе [3]. Будем предполагать, что поле, в котором находится заряженная частица, имеет напряженность, весьма большую по сравнению с полем самой частицы. Иными словами считаем, что движение частицы не искажает заданное, внешнее по отношению к ней поле.

Движение заряженных частиц в постоянных электромагнитных полях рассматривается на примере однородных полей:

$$\bar{E} = const, \quad \bar{B} = const.$$

Уравнение движения в электрическом поле имеет вид:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = e \bar{E} \quad (4.1)$$

Если частица в момент времени  $t = 0$  имела скорость  $U_0$ , направленную под углом  $\theta$  к оси  $y$ , и находилась в начале координат, то двукратное интегрирование уравнений движения дает следующее:



## Машиностроение

$$\dot{x} = \frac{e}{m} E \cdot t + v_0 \sin \theta;$$

$$x = \frac{et^2 E}{2m} + (v_0 \sin \theta) \cdot t;$$

$$\dot{y} = v_0 \cos \theta;$$

$$y = (v_0 \cos \theta) \cdot t.$$

Исключая время из данных уравнений, находим уравнение траектории, которое представляет собой параболу. Поперечное электрическое поле обладает важным свойством фокусирования, то есть если пучок частиц выходит из начала координат по некоторым углом (близким к  $45^\circ$ ), то на некотором расстоянии вдоль оси  $y$  частицы собираются в точку.

Движение частицы в однородном магнитном поле, ориентированном вдоль оси  $z$  имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]. \quad (4.2)$$

Координаты  $x$  и  $y$  будем искать в виде гармонических функций

$$\dot{x} = A \cos\left(\frac{eH}{mc} t + \alpha\right);$$

$$\dot{y} = -A \sin\left(\frac{eH}{mc} t + \alpha\right).$$

Очевидно, что квадрат амплитуды  $A$  можно выразить

$$A^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^{(0)2}, \quad (4.3)$$

где  $v_{\perp}^{(0)}$  — начальная скорость в плоскости  $(xy)$ .

Проинтегрировав выражение и исключив время, получим уравнение окружности:



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_{\perp}^{(0)2}}{\omega_c^2} = R_c^2 \quad (4.4)$$

Частота обращения частицы  $\omega_c$  определяемая формулой

$$\omega_c = \frac{eH}{mc},$$

носит название циклотронной частоты. Радиус

окружности  $R_c$ , определяемый формулой  $R_c = \frac{mc v_{\perp}}{eH}$  имеет

простой смысл: на окружности данного радиуса сила Лоренца уравновешивается центробежной силой.

Если частица в начальный момент помимо скорости в плоскости (xy) имела по оси z компоненту скорости  $v_z^{(0)}$ , то она будет совершать равномерное движение вдоль направления магнитного поля.

Наложение обоих движений, равномерного по оси z и вращения в плоскости (xy) приводит к траектории частицы в продольном поле в виде винтовой линии. Витки траектории навиваются на цилиндр радиуса  $R_c$  с осью, направленной оси z. При движении в постоянном магнитном поле имеют место следующие законы:

- 1) Сохраняется полная энергия частицы

$$\varepsilon = \frac{m}{2} \{ (V_{\perp}^{(0)})^2 + (V_z^{(0)})^2 \} = const ;$$

- 2) Сохраняется проекция момента импульса на ось z

$$L_z = mR_c^2 \dot{\phi} = mR_c^2 \omega_c = const .$$

В общем случае, движения частиц в однородных и постоянных по времени электрическом и магнитном полях, уравнение движения имеет вид



$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = e\bar{E} + \frac{e}{c} [\bar{v}\bar{H}]. \quad (4.5)$$

Введем новую переменную:  $\bar{V} = \bar{v} - \frac{c[\bar{E}\bar{H}]}{H^2}$ , и подставим в уравнение движения (4.5). Заметим, что двойное векторное произведение может быть раскрыто следующим образом  $[[\bar{E}\bar{H}]\bar{H}] = \bar{H}(\bar{H}\bar{E}) - \bar{E}H^2$ . Используя это разложение получим уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{e}{m} \frac{\bar{H}(\bar{H}\bar{E})}{H^2} + \frac{e}{mc} [\bar{V}\bar{H}]. \quad (4.6)$$

Если электрическое поле перпендикулярно магнитному полю, а это так, то скалярное произведение векторов напряженностей магнитного и электрического полей будет равно нулю, т.е.  $(\bar{H}\bar{E}) = 0$ . Тогда уравнение движения запишется следующим образом

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{e}{mc} [\bar{V}\bar{H}]. \quad (4.7)$$

Последнее уравнение совпадает по форме с уравнением движения (4.2). Следовательно,  $\bar{V}$  представляет скорость движения частицы по окружности в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю  $\bar{H}$ , которое происходит с циклотронной частотой. При этом полная скорость частицы равна:

$$\bar{V} = \bar{v} + c \frac{[\bar{E}\bar{H}]}{H^2} \quad (4.8)$$

Слагающая скорости частицы



## Машиностроение

$$\bar{v}_D = \frac{c[\bar{E}\bar{H}]}{H^2},$$

направлена перпендикулярно к обоим полям. По абсолютной величине она равна

$$|\bar{v}_D| = \frac{cE}{H}$$

и не зависит ни от заряда, ни от массы частицы. Движение частицы в направлении  $v_D$  получило название дрейфа.

Если  $\bar{E}$  не перпендикулярно к  $\bar{H}$ , то уравнение (4.6) можно спроектировать на плоскость, перпендикулярную к вектору  $\bar{H}$ , и ось z. Тогда находим

$$\frac{d\bar{V}_\perp}{dt} = \frac{e}{mc}[\bar{V}_\perp H];$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{e}{m}E_\parallel,$$

где  $E_\parallel$  - слагающая электрического поля, параллельная магнитному полю. В скорости дрейфа вместо  $E$  следует при этом написать  $E_\perp$ . На дрейф частицы накладывается равномерно ускоренное движение вдоль магнитного поля под действием силы равной  $eE_\parallel$ .



## 4.2. Функции Лагранжа и Гамильтона для частиц в электромагнитных полях

Уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = e(\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{v} \bar{H}])$$

могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа, если ввести функцию Лагранжа соотношением

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c} \bar{A} \bar{v} . \quad (4.9)$$

Напомним, что функция Лагранжа определяет разность между кинетической и потенциальной энергиями системы. Она является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

Если движение заряженной частицы описывается обобщенными координатами и обобщенными скоростями, то уравнения обычно записываются в форме уравнений Лагранжа. Составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{r}} = 0. \quad (4.10)$$

Используя данное соотношение, получим уравнение для обобщенного импульса

$$\bar{P} = \frac{\partial L}{\partial v} = m\bar{v} + \frac{e}{c} \bar{A} = \bar{p} + \frac{e}{c} \bar{A} . \quad (4.11)$$

Выражение для обобщенной силы имеет вид

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \bar{r}} \right)_{v=const} = -e \cdot grad\varphi + \frac{e}{c} grad(\bar{A} \bar{v}) . \quad (4.12)$$



Подставляем найденные выражения для обобщенного импульса и обобщенной силы в уравнение Лагранжа. Получим после преобразования уравнение вида

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = e \cdot \left( \bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{v}\bar{H}] \right) . \quad (4.13)$$

Данное уравнение определяет движение частицы в электромагнитных полях.

Как известно, функция Гамильтона определяет полную механическую энергию консервативной системы, так же являясь функцией обобщённых координат и импульсов системы. В дальнейшем нам понадобятся выражения для функции Лагранжа и Гамильтона. Функцию Гамильтона для частицы введем следующим образом:

$$\bar{H} = \bar{P}\bar{v} - \bar{L} .$$

Тогда функцию Гамильтона для частицы можно представить в виде

$$H = \frac{1}{2m} \left( \bar{P} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 + e\varphi . \quad (4.14)$$



## ГЛАВА 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 5.1. Основные уравнения поля

Характер электромагнитных процессов в веществе существенно зависит от свойств последнего. Например, механизм прохождения тока через металлические проводники и плазму газового разряда имеет существенно разный характер и сопровождается различными явлениями. Тем не менее, оказывается возможным построить феноменологическую теорию электромагнитных явлений в веществе. Для этого необходимо, прежде всего, найти общие уравнения электромагнитного поля в веществе.

Мы видели, что в основных уравнениях Максвелла - Лоренца фигурировали величины, относящиеся к данной точке и данному моменту времени. В веществе - среде, построенной из атомов или молекул, уравнения Максвелла - Лоренца, содержащие характеристики поля, отнесенные к данной точке и данному моменту времени, теряют смысл. Например, напряженность электрического поля имеет сравнительно малое значение вне данного атома, становится сравнительно большой внутри него и вновь спадает за его пределами. Рост поля в миллионы раз и его последующее спадание происходят в масштабах порядка атомных размеров. Такое же изменение поля во времени происходит в фиксированной точке, например, из-за теплового движения атома за малые доли секунды. Поэтому в макроскопических процессах, происходящих в веществе интерес и значение имеют лишь средние значения соответствующих величин.

Усреднив уравнения Максвелла - Лоренца по физически бесконечно малому объему  $V_0$  и промежутку времени  $\tau$ , вводя средние по формуле

$$\bar{f} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{V_0} \int f dV dt$$

и обозначив среднее значение напряженности электрического поля в среде  $\bar{E}$ , а среднее значение напряженности магнитного поля в среде магнитной индукцией  $\bar{B}$  получим уравне-





ния Максвелла – Лоренца и закон сохранения заряда в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \\
 \operatorname{div} \bar{B} &= 0; \\
 \operatorname{rot} \bar{B} &= \frac{4\pi}{c} \bar{\rho v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \\
 \operatorname{div} \bar{E} &= 4\pi \bar{\rho}; \\
 \operatorname{div} \bar{\rho v} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Дальнейшие преобразования уравнений связаны с нахождением средних значений  $\bar{\rho v}$  и  $\bar{\rho}$ . Нахождение этих средних требует введение некоторых допущений о строении вещества.

В рамках теории электромагнитного поля вещество рассматривается, как сплошная среда, свойства которой описываются при помощи ряда формальных макроскопических характеристик, таких как диэлектрическая проницаемость, проводимость и т.п. Все вещества разобьем на две группы: диэлектрики и проводники. Под проводниками мы будем понимать тела, в которых под действием приложенного внешнего стационарного поля возникает перемещение зарядов по объему и соответствующий этому движению зарядов электрический ток. В диэлектриках внешнее поле не создает движения зарядов, хотя может вызывать их смещение в новые положения равновесия.

В действительности в диэлектриках внешнее электрическое поле вызывает некоторый, хотя и весьма малый ток. С другой стороны, в некоторых проводниках ток также может быть велик. Тем не менее разделение всех тел на проводники и диэлектрики является достаточно хорошим приближением, на основании которого возможно построение феноменологической теории электромагнитных явлений в сплошных средах.



## 5.2. Поляризация среды в электрическом поле

При вычислении  $\bar{\rho}$  следует различать случаи тела в целом электронейтрального и содержащего отличный от нуля заряд.

Если электронейтральное тело помещено во внешнее электрическое поле, в атомах и молекулах происходит смещение отрицательных и положительных зарядов друг относительно друга. Тело, оставаясь электронейтральным, приобретает дипольный момент. Средний дипольный момент единицы объема будем именовать вектором поляризации или, кратко, поляризацией  $\bar{P}$ . Дипольный момент, приобретаемый телом, равен, по определению

$$\bar{d} = \int \bar{P} dV = \int \rho_{\text{связ}} \bar{r} dV.$$

Ввиду произвольности объема интегрирования имеем

$$\bar{P} = \rho_{\text{связ}} \bar{r}.$$

Если тело поляризовано равномерно, т.е.  $\bar{P}$  одинаково во всех точках тела, то

$$\bar{P} = \frac{\bar{d}}{V}.$$

Появление связанного, или индуцированного, заряда называется электростатической индукцией или поляризацией.

Если поляризация тела неоднородна и вектор  $\bar{P}$  изменяется от точки к точке и притом изменяется так, что  $\text{div} \bar{P} \neq 0$ , в теле возникает объемный заряд  $\rho_{\text{связ}}$ , определяемый формулой

$$\rho_{\text{связ}} = - \text{div} \bar{P}. \quad (5.2)$$

Если полный свободный заряд тела отличен от нуля и



распределен в нем с объемной плотностью  $\rho$ , то полная средняя плотность заряда

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{связ}} + \rho$$

и получаем

$$\int \bar{\rho} dV = \int (\rho_{\text{связ}} + \rho) dV = \int \rho dV = e. \quad (5.3)$$

Заряд тела, характеризуемый плотностью  $\rho$ , не связан с атомами вещества и не индуцируется внешним полем. Ниже будет показано, что в постоянном поле свободный заряд  $\rho$  может существовать только у диэлектриков. В проводниках свободные заряды подвижны и смещаются до тех пор, пока не выйдут на его поверхность, образуя поверхностный заряд.

### 5.3. Средняя плотность тока и средняя плотность заряда в среде

Более сложной задачей является вычисление средней плотности тока в среде  $\rho v$ . Это вычисление может быть проведено либо на основе некоторых модельных представлений, либо, более формально, исходя из общих представлений об электромагнитных свойствах среды. Мы изберем здесь второй путь. Отметим, что квантовые эффекты играют основную роль в магнитных свойствах атомов, поэтому нельзя проводить рассмотрение электрических и особенно магнитных свойств атомных систем на основе классических моделей.

Рассмотрим некоторое однородное и изотропное тело, помещенное во внешнее электромагнитное поле. Очевидно, что среднее поле в объеме этого тела мало по сравнению с внутренними полями.

Средняя плотность тока в среде  $\rho v$  в каждой точке тела является функцией напряженностей электрического и магнитного полей. Если поля изменяются в пространстве и во времени, средняя плотность тока будет зависеть от ско-



рости изменения векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$  во времени и пространственных производных этих величин и определяться зависимостью вида

$$\overline{\rho v} = f(\bar{E}, \bar{B}, \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial x_k}, \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial x_k}).$$

Разлагая  $f$  в ряд по степеням переменных, следует учитывать, что  $\overline{\rho v}$  является полярным вектором. Поэтому все члены ряда разложения должны представлять полярные векторы. Не останавливаясь здесь на анализе отмеченных выше разложений и выводе формулы для средней плотности тока отсылаем читателя к работе [2].

Средняя плотность тока в веществе может быть определена формулой

$$\overline{\rho v} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot} \bar{M} \quad , \quad (5.4)$$

где  $\bar{M} = \alpha \bar{B}$  определяет средний магнитный момент единицы объема тела, создаваемый движущимися связанными зарядами, а  $\alpha$  - скаляр, зависящий от свойств среды.

## 5.4. Система уравнений для электромагнитного поля в среде

Вычислив средние значения величины  $\overline{\rho v}$ , можно перейти к формулировке уравнений для электромагнитного поля в среде. Подставляя (5.4) в уравнение (5.1) и используя новые обозначения



$$\begin{aligned}\bar{H} &= \bar{B} - 4\pi \cdot \bar{M}, \\ \bar{E} &= \bar{D} - 4\pi \cdot \bar{P}\end{aligned}\quad (5.5)$$

и проводя усреднение получим систему уравнений Максвелла вида

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (5.6)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = 4\pi \cdot \rho, \quad (5.7)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \quad (5.8)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \quad (5.9)$$

При этом  $\rho$  и  $\bar{j}$  связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{j} = 0$$

В дальнейшем нам понадобится интегральная форма уравнений Максвелла. В интегральной форме они имеют вид:

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = -\frac{1}{c} \cdot \int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S} \quad (5.10)$$

$$\oint \bar{H} d\bar{S} = \frac{4\pi}{c} \int \bar{j} \cdot d\bar{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{D} d\bar{S} \quad (5.11)$$

$$\oint \bar{D} d\bar{S} = 4\pi \int_v \rho \cdot dV \quad (5.12)$$

$$\oint \bar{B} d\bar{S} = 0 \quad (5.13)$$



Фундаментальные уравнения Максвелла в форме (5.6) — (5.9) или в форме (5.10) — (5.13) еще не образуют полной системы уравнений электромагнитного поля в среде. В самом деле, если два первых векторных уравнения Максвелла записать в координатной форме (каждому векторному уравнению соответствуют три скалярных), то получится всего восемь уравнений. Они связывают между собой пятнадцать скалярных составляющих пяти векторов  $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j})$  и один скаляр  $(\rho)$ , т. е. всего шестнадцать неизвестных величин. Таким образом, четыре уравнения Максвелла не позволяют однозначно определить электромагнитное поле в данной среде, так как эти уравнения не содержат никакой информации о свойствах среды, в которой существует электромагнитное поле. Электромагнитные свойства среды определяются дополнительной системой так называемых материальных уравнений Максвелла. В случае слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и времени для изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред, материальные уравнения могут быть записаны в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad (5.14)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad (5.15)$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (5.16)$$

где  $\varepsilon, \mu, \rho$  - постоянные, характеризующие электромагнитные свойства среды (т. е. диэлектрическая и магнитная проницаемости и электрическая проводимость среды).

Фундаментальные уравнения Максвелла совместно с материальными уравнениями образуют полную систему уравнений электромагнитного поля в среде.

Можно ввести электромагнитные потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$  в веществе аналогично выводу формул (1.49). Повторяя выкладки и учитывая условие Лоренца в виде

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

легко прийти к уравнениям для потенциалов



$$\Delta \bar{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi \mu}{c} \bar{j},$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho.$$

## 5. 5. Система граничных условий

В самом общем случае, граница тела служит границей раздела двух сред с различными свойствами.

Рассмотрим связь между векторами  $\bar{E}$  и  $\bar{D}$  на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков (диэлектрические проницаемости которых  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ) при отсутствии на границе свободных зарядов. Построим вблизи границы раздела диэлектриков 1 и 2 небольшой замкнутый прямоугольный контур ABCDA длиной  $l$ , сориентировав его так, как показано на рис.1.5. Согласно теореме о циркуляции вектора  $\bar{E}$

$$\oint_{ABCD} \bar{E} d\bar{l} = 0,$$

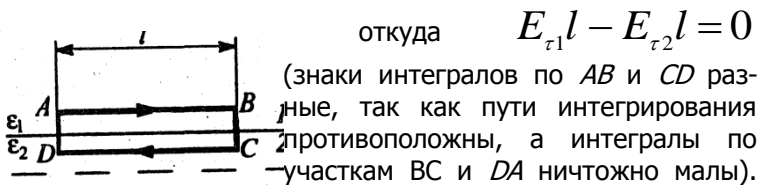


Рис.1.5.

Поэтому  $\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$  учтено, что

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E.$$

На границе раздела двух диэлектриков (рис.1.6) построим прямой цилиндр ничтожной высоты, одно основание которого



Машиностроение

находится в первом диэлектрике, другое - во втором. Основания  $dS$  настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $D$  одинаков. Согласно теореме Гаусса,  $D_{n1}dS - D_{n2}dS = 0$  ( $n$  и  $n'$  к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому

$$D_{n1} = D_{n2} \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (\text{учтено, что } D = \epsilon\epsilon_0 E).$$

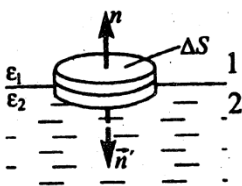
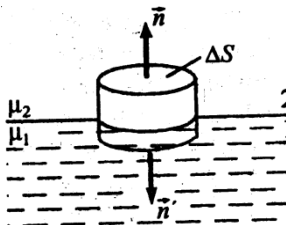


Рис.1.6.

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_\tau$ ) и нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  ( $D_n$ ) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а нормальная

составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_n$  и тангенциальная составляющая вектора  $D_\tau$  претерпевают скачок.

Рассмотрим связь векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух однородных магнетиков (магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ) при отсутствии на границе тока проводимости. Построим вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, другое — во втором (рис.1.7).



Основания  $dS$  настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $\vec{B}$  одинаков. Согласно теореме Гаусса  $B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$





## Машиностроение

(нормали  $n$  и  $n'$  к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому  $B_{n1} = B_{n2}$ ,

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \text{ (учли, что } B = \mu \mu_0 H \text{ )}.$$

Вблизи границы раздела двух магнетиков 1 и 2 построим небольшой замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  длиной  $l$ , ориентируя его так, как показано на рис.1.8.

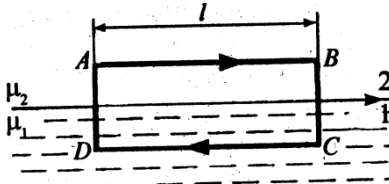


Рис.1.8.

Согласно теореме о циркуляции вектора  $\vec{H}$ ,

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = 0$$

(токов проводимости на границе раздела нет),

откуда  $H_{\tau 1} l - H_{\tau 2} l = 0$  (знаки интегралов по  $AB$  и  $CD$  разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам  $BC$  и  $DA$  ничтожно малы). Поэтому

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \text{ (учтено, что } B = \mu \mu_0 H \text{ )}.$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора  $\vec{B}$  ( $B_n$ ) и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  ( $H_\tau$ ) изменяются *непрерывно* (не претерпевают скачка), а тангенциальная составляющая вектора  $\vec{B}$  ( $B_\tau$ ) и нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  ( $H_n$ ) претерпевают скачок.



## 5.6. Закон сохранения энергии

Если все тела (проводники и диэлектрики), находящиеся в поле, неподвижны, то работа, произведенная (в единицу времени) электрическим полем над зарядами, равна:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt} &= \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int E \cdot \operatorname{rot} H \, dV - \frac{1}{4\pi} \int E \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} dV = \\
 &= \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \operatorname{rot} H - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} E) dV - \frac{1}{4\pi} \int \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) dV = \\
 &= -\oint \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} - \int \frac{\partial}{\partial t} u_0 dV.
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

При этом мы прибавили к вычисляемому интегралу выражение, равное нулю, и обозначили через  $u_0$  плотность энергии электромагнитного поля в среде:

$$u_0 = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}
 \tag{5.18}$$

и через  $\sigma$  - вектор Умова - Пойнтинга

$$\sigma = \frac{c}{4\pi} [EH] = \frac{c}{4\pi\mu} [EB].
 \tag{5.19}$$

Удобно записать закон сохранения энергии в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int u_0 dV = \oint \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} + \frac{dW}{dt}.
 \tag{5.20}$$



В дифференциальной форме закон сохранения энергии выражается соотношением

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon \cdot E^2 + \mu \cdot H^2}{8\pi} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \vec{\sigma}. \quad (5.21)$$

Интерпретация закона сохранения в среде не отличается, в принципе, от данного закона для пустоты. Следует лишь отметить то обстоятельство, что в (5.21) входит только плотность тока свободных зарядов  $\vec{j}$ . При движении свободных зарядов в неподвижном проводнике вся механическая работа поля полностью переходит в тепло, именуемое джоулевым теплом. Механизм последнего процесса зависит от конкретных свойств проводников. Мы коснемся еще этого вопроса в дальнейшем. Обозначив через  $Q_0$  джоулево тепло, выделяющееся в единице объема за 1 с и равное

$$Q_0 = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma},$$

мы можем написать закон сохранения энергии в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int u_0 dV = \int Q_0 dV + \oint \sigma dS.$$

Величины

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{8\pi} \quad \text{и} \quad \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{8\pi}$$

представляют, соответственно, плотность электрической и магнитной энергии единицы объема.

Поскольку величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  в веществе являются функциями температуры, всё наше рассмотрение, предполагает постоянство температуры среды. Поэтому, величину

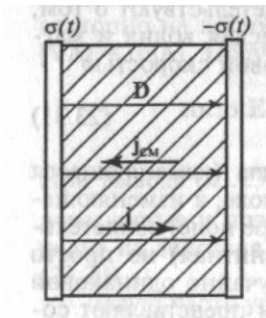


$\frac{\bar{E} \cdot \bar{D} + \bar{B} \cdot \bar{H}}{8\pi}$  следует трактовать как свободную энергию  
единицы объема среды.



## 1.9. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

**Задача 1.** Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой электрической проводимости. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.



*Решение.* Если  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда на положительной обкладке (рис.), то электрическая индукция внутри конденсатора  $D = \sigma$ . Следовательно, плотность тока смещения по определению (см. формулу (1.2)) равна

$$j_{cm} = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} < 0,$$

так как  $\sigma$  в результате разрядки уменьшается, значит, ток смещения направлен от отрицательной к положительной обкладке. Ток проводимости приводит к изменению заряда на обкладке. Заряд, который он уносит за время  $dt$ :  $dq = Idt$ , равен уменьшению заряда на обкладке конденсатора ( $Sd\sigma$ ), т. е.

$$Sd\sigma = -Idt.$$

Отсюда плотность тока проводимости

$$j = \frac{I}{S} = \frac{d\sigma}{dt} > 0,$$

т. е. ток проводимости направлен от положительной обкладки к

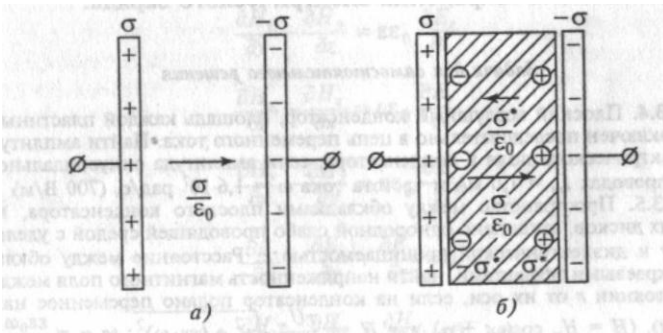


отрицательной.

$$\text{Плотность полного тока } j_{\text{полн}} = j + j_{\text{см}} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

Но именно полный ток определяет магнитное поле в окружающем пространстве, согласно второму уравнению Максвелла. Поскольку  $j_{\text{полн}} = 0$ , то и напряженность магнитного поля равна нулю.

**Задача 2.** Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника электричества. Доказать, что ток смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равен току проводимости в подводящей цепи. Считать диэлектрик идеальным изолятором, и искажениями поля у концов конденсатора пренебречь.



*Решение.* Для определенности предположим, что внутренняя обкладка конденсатора заряжается положительно. Построим внутри конденсатора мысленную цилиндрическую поверхность некоторого радиусом  $r$  и высотой  $l$ , где  $l$  — длина конденсатора (рис.).

Используя теорему Гаусса, легко рассчитать величину электрической индукции внутри диэлектрика на расстоянии  $r$  от оси конденсатора:



## Машиностроение

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

где  $\lambda = \frac{q}{l}$  — линейная плотность заряда на обкладке.

Плотность тока смещения внутри диэлектрика на расстоянии  $r$  от оси

$$j_{см}(r) = \frac{dD(r)}{dt} = \frac{1}{2\pi \cdot r} \frac{dq}{dt},$$

где  $q$  - заряд на обкладке конденсатора. Тогда ток смещения через боковую поверхность вспомогательного цилиндра, т. е. ток смещения в диэлектрике, будет равен

$$I_{см} = \int_{S_6} \frac{1}{2\pi \cdot r \cdot l} \cdot \frac{dq}{dt} dS = \frac{1}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{dq}{dt} \int_{S_6} dS = \frac{dq}{dt}.$$

Но  $\frac{dq}{dt} = I$  - это ток зарядки конденсатора. Таким образом,

$I = I_{см}$  задача доказана.

**Задача 3.** Доказать, что из уравнений Максвелла вытекает уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда.

*Решение.* Запишем второе и третье уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$



$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho.$$

Поддействуем оператором набла скалярно на первое уравнение:

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{D},$$

(учтено, что операторы  $\operatorname{div}$  и  $\frac{\partial}{\partial t}$  коммутируют). С учетом другого уравнения Максвелла получаем

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Но дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю, поскольку  $\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla [\nabla \mathbf{H}]$ , а векторы  $\nabla$ ,  $[\nabla \mathbf{H}]$  всегда взаимно перпендикулярны (по свойству векторного произведения) и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю.

Итак, мы получили

$$\operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

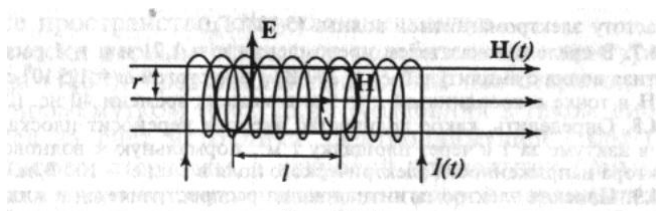
но это и есть уравнение непрерывности. Таким образом, обобщение теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля путем введения тока смещения, по сути дела, являлось необходимым условием согласования уравнений Максвелла с уравнением непрерывности, т. е. с фундаментальным законом сохранения электрического заряда.

**Задача 4.** Сила тока в очень длинном соленоиде увеличивается равномерно от нуля до  $I$  в течение времени  $\tau$ . Число витков соленоида на единицу длины равно  $n$ . Построив внутри соленоида в средней его части коаксиальную с ним воображаемую замкнутую поверхность длины  $l$  и радиуса  $r$  (рис.), опреде-





лить энергию, протекают через эту поверхность за время  $\tau$ .



*Решение.* Напряженность магнитного поля, создаваемого длинным соленоидом, как известно, определяется формулой  $H(t) = nI(t)$ . Поскольку ток в цепи соленоида растет, то напряженность магнитного поля (силовые линии которого направлены вдоль оси соленоида) будет увеличиваться. Но возрастающее магнитное поле породит вихревое электрическое поле. Силовые линии этого поля будут иметь вид концентрических окружностей, причем их направление, в согласии с правилом Ленца, должно быть таким, чтобы соответствующий индукционный ток (который возник бы, если бы среда внутри соленоида была проводящей) имел магнитный момент, направленный против изменения магнитного поля соленоида. Нетрудно убедиться, что вектор напряженности вихревого электрического поля ориентирован таким образом, что векторное произведение  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  на боковой поверхности воображаемой фигуры будет направлено внутрь этой фигуры. Таким образом, направление вектора Пойнтинга, а значит, и направление потока энергии электромагнитного поля таково, что можно говорить о поступлении энергии внутрь этой фигуры.

Из закона электромагнитной индукции имеем

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = E 2\pi r = \int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\sigma = -\mu_0 n \frac{dl}{dt} \pi r^2,$$

откуда модуль напряженности вихревого электрического поля равен

$$E(t) = \frac{\mu_0 n r}{2} \frac{dl}{dt}$$

Плотность тока энергии через боковую поверхность воображаемой фигуры



## Машиностроение

$$S = EH = \frac{\mu_0 n^2 r}{2} I \frac{dl}{dt} \Rightarrow dW = S\sigma dt = \frac{\mu_0 n^2 r}{2} \sigma Idl$$

Получаем энергию, поступившую внутрь фигуры при увеличении тока от нуля до  $I$

$$W = \int \frac{\mu_0 n^2 r}{2} 2\pi rl Idl = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} (\pi r^2 l) = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} V$$

Но эта величина в точности совпадает с полной энергией магнитного поля, сосредоточенной внутри воображаемой фигуры к моменту времени, когда ток в соленоиде достигнет значения  $I$

(действительно  $W = w_H V \frac{\mu_0 H^2}{2} V = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} V$ ).

## Темы контрольной работы

| Вариант | Номер задачи |    |    |    |    |    |
|---------|--------------|----|----|----|----|----|
|         | 1            | 20 | 21 | 40 | 41 | 10 |
| 0       | 1            | 20 | 21 | 40 | 41 | 10 |
| 1       | 2            | 19 | 22 | 39 | 42 | 9  |
| 2       | 3            | 18 | 23 | 38 | 43 | 8  |
| 3       | 4            | 17 | 24 | 37 | 44 | 7  |
| 4       | 5            | 16 | 25 | 36 | 45 | 6  |
| 5       | 6            | 15 | 26 | 35 | 46 | 5  |
| 6       | 7            | 14 | 27 | 34 | 47 | 4  |
| 7       | 8            | 13 | 28 | 33 | 48 | 3  |
| 8       | 9            | 12 | 29 | 32 | 49 | 2  |
| 9       | 10           | 11 | 30 | 31 | 50 | 1  |

1. Применить теорему Остроградского-Гаусса к потоку вектора  $A$ .
2. Применить теорему Стокса к циркуляции вектора  $E$ .
3. Вывести уравнение непрерывности.
4. Доказать, что из уравнений Максвелла вытекает уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда.
5. Доказать, что уравнения Максвелла  $\text{rot } E = -\partial B / \partial t$  и  $\text{div } B = 0$  совместимы, т.е. не противоречат друг другу.
6. Используя операцию дивергенция, получить второе уравнение Максвелла.
7. Используя операцию дивергенция, получить четвёртое



## Машиностроение

- уравнение Максвелла.
8. На основе формальных рассуждений, не противоречащих закону сохранения заряда, получить явный вид тока смещения
  9. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника электричества. Доказать, что ток смещения в диэлектрике  $\epsilon = 2$  (между обкладками) равен току проводимости в подводящей цепи. Считать диэлектрик идеальным изолятором.
  10. Описать векторное поле по его дифференциальным характеристикам (вывести формулы).
  11. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой электрической проводимости. Вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.
  12. В однородной и изотропной среде  $\epsilon = 1$  и  $\mu = 1$  распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны  $E_0 = 10$  В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны и скорость распространения волны.
  13. Написать уравнение плоской электромагнитной волны в вакууме, если при прохождении этой волны в стекле на расстоянии 200 нм фаза колебаний изменилась на величину  $3\pi/2$  и приняла значение  $\varphi = \pi/4$ .
  14. В среде с параметрами  $n = 1,71$  и  $\mu = 1$  распространяется электромагнитная волна с амплитудой  $E_0 = 200$  В/м и частотой  $\omega = 1,5 \cdot 10^8$  Гц. Найти модуль вектора  $H$  в точке с координатой  $x = 5$  м в момент времени 40 нс.
  15. Электромагнитная волна распространяется в немагнитной среде. Отношение векторов напряженностей электрического и магнитного полей в этой среде равно 251,2 В/А. Фаза колебаний в волне на расстоянии 100 нм изменяется на величину  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Определить частоту электромагнитной волны.
  16. В некоторый момент времени вектор напряженности электрического поля в плоской электромагнитной волне частотой  $\omega = 3 \cdot 10^{10}$  Гц в вакууме был равен  $E = 0,5 E_0 = 200$  В/м. Определить через какой промежуток времени в этой же точке вектор напряженности магнитного поля будет равен  $H = 1,062$  А/м.



17. Описать электромагнитное поле векторным  $A$  и скалярным  $\varphi$  потенциалами.
18. В среде с параметрами  $n = 1.5$  и  $\mu = 1$  распространяется электромагнитная волна с амплитудой  $E_0 = 100$  В/м и частотой  $\omega = 2 \cdot 10^8$  Гц. Найти модуль вектора  $H$  в точке с координатой  $x = 3$  м в момент времени 20 нс.
19. В некоторый момент времени вектор напряженности электрического поля в плоской электромагнитной волне частотой  $\omega = 2 \cdot 10^{10}$  Гц в вакууме был равен  $E = 0.5 E_0 = 100$  В/м. Определить через какой промежуток времени в этой же точке вектор напряженности магнитного поля будет равен  $H = 0.6$  А/м.
20. В среде с параметрами  $n = 1.7$  и  $\mu = 1$  распространяется электромагнитная волна с амплитудой  $E_0 = 150$  В/м и частотой  $\omega = 3 \cdot 10^8$  Гц. Найти модуль вектора  $H$  в точке с координатой  $x = 2$  м в момент времени 10 нс.
21. Определить какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 1 секунду через площадку  $1 \text{ м}^2$ , нормальную волновому вектору  $k$ . Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 100 В/м.
22. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 10 секунду через площадку  $10 \text{ м}^2$ , нормаль которой составляет угол 30 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 150 В/м.
23. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 5 секунд через площадку  $2 \text{ м}^2$ , нормаль которой составляет угол 60 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 250 В/м.
24. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 1 секунду через площадку  $10 \text{ м}^2$ , нормальную к волновому вектору. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 200 В/м.
25. Атом излучает электромагнитные волны и находится в возбужденном состоянии в течение времени  $\tau$ . Зависимость напряженности электрического поля атома от времени дается формулой  $E(t) = E_0 e^{-(t/\tau + i\omega_0 t)}$ . Определить ширину линии, излучаемой атомом.



26. Описать распространение электромагнитных волн в пространстве между проводящими плоскостями, разделенными диэлектриком. Расстояние между плоскостями  $d$ , диэлектрическая постоянная среды  $\varepsilon$ .
27. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 10 секунд через площадку  $1\text{ м}^2$ , нормаль которой составляет угол  $30^\circ$  с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне  $200\text{ В/м}$ .
28. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 8 секунд через площадку  $15\text{ кв.м}$ , нормаль которой составляет угол  $45$  градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне  $300\text{ В/м}$ .
29. В однородной и изотропной среде  $\varepsilon = 3$  и  $\mu = 1$  распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны  $E_0 = 100\text{ В/м}$ . Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны и скорость распространения волны.
30. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 7 секунд через площадку  $5\text{ кв.м}$ , нормаль которой составляет угол  $30$  градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне  $300\text{ В/м}$ .
31. В однородной и изотропной среде  $\varepsilon = 2$  и  $\mu = 1$  распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны  $E_0 = 150\text{ В/м}$ . Найти скорость распространения волны в среде.
32. В однородной и изотропной среде  $\varepsilon = 4$  и  $\mu = 2$  распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны  $E_0 = 190\text{ В/м}$ . Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны и скорость распространения волны.
33. В среде с параметрами  $n = 2.5$  и  $\mu = 1$  распространяется электромагнитная волна с амплитудой  $E_0 = 200\text{ В/м}$  и частотой  $\omega = 3 \cdot 10^8\text{ Гц}$ . Найти модуль вектора  $H$  в точке с координатой  $x = 2\text{ м}$  в момент времени  $10\text{ нс}$ .
34. В среде с параметрами  $n = 1.5$  и  $\mu = 1$  распространяется электромагнитная волна с амплитудой  $H_0 = 100\text{ А/м}$  и частотой  $\omega = 2 \cdot 10^8\text{ Гц}$ . Найти модуль вектора  $E$  в точке с координатой  $x = 3\text{ м}$  в момент времени  $20\text{ нс}$ .
35. В однородной и изотропной среде  $\varepsilon = 3.5$  и  $\mu = 2$  распро-



## Машиностроение

- страняется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны  $H_0 = 250$  А/м. Найти амплитуду напряженности электрического поля волны и скорость распространения волны.
36. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 12 секунд через площадку 35 кв.м, нормаль которой составляет угол 45 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности магнитного поля в волне 230 А/м.
  37. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с  $\omega$  порядка  $10^{10}$  с<sup>-1</sup>. Амплитуда колебаний электрического поля  $E_0 = 0.8$  В/м. На пути волны располагается поглощающий экран радиусом  $r = 0.6$  м. Какую энергию поглотит экран за время 2 с?
  38. Определить напряженность электрического поля в лазерном излучении, прошедшем в вакууме расстояние 100 м, если мощность импульса  $5 \cdot 10^{10}$  Вт, а расхождение пучка 0.5 мрад.
  39. Найти амплитудное значение напряженности электрического поля излучения лазера, если известны его параметры: длительность импульса 012 мс, энергия импульса 1.5 Дж, диаметр пучка 3 мм.
  40. Получить потенциалы поля вдали от излучателя.
  41. Найти собственные значения энергии частицы массой  $m$ , находящейся в двумерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме, имеющей размеры:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .
  42. Описать распространение электромагнитных волн в пространстве между проводящими плоскостями, разделенными диэлектриком. Расстояние между плоскостями  $d$ , диэлектрическая постоянная среды  $\mathcal{E}$ .
  43. Определить уровни энергии атома водорода, свободно движущегося в объеме, ограниченном:  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $0 < z < c$ .
  44. Найти напряженность,  $Z$ -и дисперсии и граничную частоту для ТЕ- и ТН- волн, в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками, имеющими размеры  $a$  и  $b$ .
  45. Найти траекторию движения заряженной частицы в однородном электрическом поле с напряженностью  $E_0$ .
  46. В среде, движущейся со скоростью  $v$  относительно некоторой системы К, распространяется плоская электромаг-



## Машиностроение

- нитная волна. Найти скорость распространения волны в системе  $K$ , если показатель преломления среды  $n$ . Рассмотреть также случай  $U \ll c$ .
47. Считая, что при малых скоростях частицы выполняется условие  $p^2 \ll m^2 c^2$ , найти зависимость энергии частицы от импульса до члена порядка  $(p^2 / m^2 c^2)^2$ .
  48. Получить выражение для потенциалов равномерно движущегося заряда со скоростью  $U_0$ .
  49. Получить выражение для напряженности электрического и магнитного полей движущегося заряда со скоростью  $U_0$ .
  50. Определить уровни энергии частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, при  $x=0$  и  $x=a$ .



## ЧАСТЬ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕНЕРАЦИИ ПЛАЗМЫ

### ГЛАВА 6. ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

#### 6.1. Квазинейтральность и разделение заряда

Плазма – квазинейтральная система, содержащая положительно и отрицательно заряженные свободные частицы (ионы и электроны). Положительные частицы – это всегда ионы, а отрицательные – обычно электроны. Понятие квазинейтральная плазма – плазма, электрически нейтральная в среднем, в достаточно больших объёмах или за достаточно большой промежуток времени, которые определяются пространственным и временным масштабами разделения зарядов.

Рассмотрим масштаб разделения зарядов во времени. В результате получим выражение для плазменной частоты  $\omega_0$ .

Пусть в результате разделения зарядов в плазме возник объёмный заряд плотностью  $q$ . По закону сохранения заряда

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\text{div } \bar{j}, \text{ где } j - \text{плотность тока. Пусть ток определяется}$$

только электронами  $j = n \cdot e \cdot \bar{V}$ . Уравнение движения электрона

$m$  в электрическом поле  $\frac{d\bar{V}}{dt} = -e \cdot \bar{E}$ . Подставим выражение

для  $j$  в уравнение закона сохранения заряда и продифференцируем по  $t$ :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \text{div } \bar{E}, \quad (6.1)$$

$$\text{div } \bar{E} = 4 \cdot \pi \cdot q, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m} \cdot q, \quad (6.3)$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0, \quad (6.4)$$





$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m}} \quad \text{- плазменная частота.}$$

Таким образом, плотность объёмного заряда в плазме колеблется с круговой частотой  $\omega_0$ . Из вывода следует, что всякое разделение заряда в плазме приводит к колебаниям плотности заряда. В среднем за много периодов колебаний плазма ведет себя как квазинейтральная среда. Временной масштаб разделения заряда есть величина того же порядка, что и период плазменных колебаний и ограничивается  $t_0 \sim \frac{1}{\omega_0}$ . Разделение зарядов может быть суще-

ственным только за периоды времени малые по сравнению с этим масштабом. За пространственный масштаб разделения зарядов принимают расстояние, которое частица при своём тепловом движении проходит за время  $\frac{1}{\omega_0}$ . Таким образом, расстояние

$$d \approx \frac{\langle V \rangle}{\omega_0} \quad \text{определяет пространственный масштаб.}$$

В физике плазмы температуру измеряют в энергетических единицах, т.е. называют температурой величину  $k \cdot T$ , где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - термодинамическая температура. При этом полагают постоянной Больцмана

$k \equiv 1$ . Практической энергетической единицей температуры служит электронвольт

$$1 \text{ эВ} = 11600 \text{ К.}$$

## 6.2. Плазма как сплошная среда

Для описания плазмы обычно используют *модель проводящей жидкости*, которая удовлетворенно определяет свойства плазмы в приближении магнитной гидродинамики. Если пренебречь вязкостью и другими диссипативными процессами в проводящей среде, то уравнение движения плазмы в приближении магнитной гидродинамики можно представить следующим образом:



$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}], \quad (6.5)$$

где  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$  - производная, взятая вдоль траектории движения.

Плотность тока в приближении магнитной гидродинамики находится по закону Ома:

$$j = \sigma \cdot E^* = \sigma \cdot \left( E + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}] \right), \quad (6.6)$$

где  $E$  - напряженность электрического поля;  $\sigma$  - проводимость плазмы;  $E^*$  - напряженность электрического поля в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой.

С учетом уравнений Максвелла, формул векторного анализа и частного случая, когда магнитное поле меняется только поперёк своего направления, уравнение движения примет вид:

$$\frac{\partial \bar{V}_{\perp}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot \left( P + \frac{H^2}{8 \cdot \pi} \right). \quad (6.7)$$

Анализ данной формулы показывает, что движение плазмы поперек магнитного поля происходит так, как если бы на неё кроме давления  $P$  действовало бы магнитное давление  $\frac{H^2}{8 \cdot \pi}$ .

Оно имеет ту же величину, как и давление, производимое магнитным полем в вакууме в курсе электродинамики. Поэтому величину  $\frac{H^2}{8 \cdot \pi}$  называют силой магнитного давления. Взаимодействие

между частицами плазмы проявляется как вязкость. Действие вязкости можно учесть введением в уравнение движения добавочного члена:

между частицами плазмы проявляется как вязкость. Действие вязкости можно учесть введением в уравнение движения добавочного члена:



$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [j \cdot \bar{H}] + \nu \cdot \Delta \cdot \bar{V}, \quad (6.8)$$

где  $\Delta = \nabla^2$ ;  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  - кинематическая вязкость,  $\eta$  - коэффициент вязкости.

### 6.3. Идеальная проводимость и дрейфовое движение

Во многих задачах используют более простой подход: *приближение идеальной проводимости*. В этом случае полагают, что проводимость плазмы  $\sigma \rightarrow \infty$ . В том случае, когда  $\sigma = \infty$  любое малое электрическое поле вызвало бы бесконечный по величине ток и такие же затраты энергии и поэтому невозможно. Поэтому полагают, что в приближении идеальной проводимости электрическое поле в системе координат связанной с плазмой, должно быть равным нулю:

$$\bar{E}^* \equiv \bar{E} + \frac{1}{c} \cdot [\bar{V} \cdot \bar{H}]. \quad (6.9)$$

Векторное произведение  $[\bar{V} \cdot \bar{H}]$  зависит только от составляющей скорости  $V_{\perp}$ , а скорость  $V_{\parallel}$  может принимать любые значения. Значение  $V_{\perp}$  можно получить, умножив последнее выражение векторно на  $\bar{H}$  справа, тогда имеем:

$$\bar{V}_{\perp} = c \cdot \frac{[\bar{E} \cdot \bar{H}]}{H^2}. \quad (6.10)$$

Движение идеально проводящей среды (плазмы) в скрещенных магнитном и электрическом полях описывается данной формулой называется дрейфом (дрейфовой скоростью), а величина дрейфовой скорости выражается как



$$|\overline{V}_\perp| = c \cdot \frac{|\overline{E}_\perp|}{H}. \quad (6.11)$$

При приближённом рассмотрении поведения плазмы в магнитном поле в некоторых случаях пренебрегают электрическим сопротивлением плазмы, т.е. рассматривают её как идеально проводящую среду. Движение плазмы в этом приближении будет иметь дрейфовый характер. Поэтому данное приближение и называется *дрейфовым приближением*.

### 6.4. Проводимость плазмы

Для простейшего случая постоянного тока в однородной плазме уравнение обобщенного закона Ома имеет вид:

$$\vec{j} + \omega_e \cdot \tau \cdot [\vec{j} \cdot \vec{h}] = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \tau \cdot \vec{E}^*, \quad (6.12)$$

где  $\omega_e = \frac{e \cdot H}{m \cdot c}$  - электронная циклотронная частота;  $h$  - единичный вектор в направлении магнитного поля. При отсутствии магнитного поля или вдоль его направления векторное произведение  $[\vec{j} \cdot \vec{h}]$  выпадает из уравнения определяются нормальная или продольная проводимость плазмы

$$\sigma_0 = \sigma_{||} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \tau, \quad (6.13)$$

где  $\tau$  - время передачи импульса.

Поперечная проводимость плазмы есть величина тензорная и может быть получена из закона Ома с помощью тензора сопротивления  $R$ . Обычно вместо тензора сопротивления используют тензор проводимости. В случае постоянного тока тензор проводимости однородной плазмы имеет вид:



$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & -\frac{\omega_e \cdot \tau \cdot \sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & 0 \\ \frac{\omega_e \cdot \tau \cdot \sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & \frac{\sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

В явном виде составляющие тока определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \overline{j_x} &= \sigma_0 \cdot \frac{\overline{E_x} - \omega_e \cdot \tau \cdot \overline{E_y}}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2}, \\ \overline{j_y} &= \sigma_0 \cdot \frac{\overline{E_y} + \omega_e \cdot \tau \cdot \overline{E_x}}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2}, \\ \overline{j_z} &= \sigma_0 \cdot \overline{E_z}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Здесь ось z направлена вдоль магнитного поля.

Для замагниченной плазмы  $\omega_e \cdot \tau$  - большое число. Поэтому поперечная проводимость должна быть значительно меньше продольной и уменьшаться обратно пропорционально квадрату циклотронной частоты. Электрический ток должен течь не только вдоль электрического поля, но и поперёк него (скин-эффект). Причем в замагниченной плазме при скрещенных полях ток поперёк электрического поля (холловский ток) должен быть гораздо больше, чем ток вдоль электрического, но поперёк магнитного поля. В реальных условиях проводимость плазмы сильно осложняется пространственной неоднородностью, приводящей к поляризации электрического поля, дрейфовым токам и токам намагниченности.



## 6.5 Кулоновские столкновения

В плазме передача импульса происходит при двойных (парных) взаимодействиях, которые можно рассматривать как столкновения. Вероятность взаимодействия характеризуется *эф-фективным сечением*  $Q$ , имеющем размерность площади ( $\text{см}^2$ ). В уравнении проводимости время передачи импульса  $\tau$  определяется соотношением

$$\tau = \frac{1}{\langle Q \cdot u \rangle \cdot n_i}, \quad (6.16)$$

а нормальная проводимость плазмы  $\sigma_0$  выражается через сечение взаимодействия, как

$$\sigma_0 = \frac{n \cdot e^2}{n_i \cdot m \cdot \langle Q \cdot u \rangle} = \frac{Z \cdot e^2}{n_i \cdot \langle Q \cdot u \rangle}, \quad (6.17)$$

где  $u$  - относительная скорость,  $m$  - приведенная масса.

Взаимодействие между заряженными частицами осуществляется посредством электростатических кулоновских сил. Величина передаваемого импульса определяется *прицельным параметром*  $b$ , т.е. расстоянием по перпендикуляру от одной частицы до невозмущенной траектории другой. Первый импульс оценивается, как

$$\Delta(\tilde{m}\bar{V}) \approx Z_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot e^2}{b \cdot u}. \quad (6.18)$$

Расстояние ближайшего взаимодействия определяется соотношением

$$b_0 = Z_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot e^2}{\tilde{m} \cdot u^2}. \quad (6.19)$$

Это расстояние, на котором потенциальная энергия взаимодействия равна по абсолютной величине удвоенной кинетической энергии относительного движения. *Эффективное сечение* куло-



новского взаимодействия выражается формулой

$$\bar{Q} = 2 \cdot \pi \cdot b_0^2 \cdot \ln \Lambda, \quad (6.20)$$

где  $\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$ . Величину  $\ln \Lambda$  называют *кулоновским логарифмом*. Под верхним пределом  $b_{\max}$  понимают длину экранирования (дебаевская длина), под нижним пределом  $b_{\min}$  берется большее из двух величин: расстояние ближнего взаимодействия  $b_0$  и квантовомеханическая длина волны частицы

$$\tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{\tilde{m} \cdot u}. \quad (6.21)$$

Проводимость полностью ионизированной плазмы определяется кулоновским сечением рассеивания электрона на ионе. Для рассматриваемого случая:

$$b_0 = \frac{Z \cdot e^2}{m \cdot u^2}, \quad (6.22)$$

где  $m$  - масса электрона,  $u$  - скорость движения электронов относительно ионов.



## ГЛАВА 7. ТЕРМОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

Термодинамика изучает свойства систем, находящихся в состоянии теплового, или термического, равновесия. Важнейшей характеристикой такой системы является её температура. В дальнейшем под температурой мы будем понимать температуру в энергетических единицах, как это было показано выше. Согласно закону равнораспределения энергии, она равна средней энергии, приходящейся на две степени свободы идеального газа. При измерении температуры в энергетических единицах вероятность состояния с энергией  $E_i$  пропорциональна величине  $\exp(-E_i/T)$ . Поэтому удобной для физики плазмы энергетической температурой является электронвольт (эВ).

Плазма имеет определённую температуру, только если она находится в состоянии *полного термодинамического равновесия*. Обычно в плазме приходится иметь дело с частичным термодинамическим равновесием. Так обмен энергиями электронов с ионами происходит гораздо медленнее, чем обмен между частицами, близкими по массе. Поэтому в не слишком плотной плазме может длительное время существовать состояние, когда плазма характеризуется двумя температурами: *электронной*  $T_e$  и *ионной*  $T_i$ . Плазму с  $T_e \equiv T$  называют *изотермической*.

### 7.1 Тепловая и кулоновская энергия плазмы

Для равновесной плазмы тепловая энергия выражается так же, как для идеального газа ( $Q = n \cdot k \cdot T$ ). В полностью ионизирующей плазме плотность тепловой энергии

$$e_T = \frac{3}{2} \cdot (n_e \cdot T_e + n_i \cdot T_i), \quad (7.1)$$

где  $n$  – концентрация частиц;  $T$  – температуры в энергетических единицах.

В частично ионизированной плазме добавляется энергия нейтральных частиц (атомов и молекул), определяемая формула-





ми классической термодинамики газов.

В термодинамическом отношении плазма отличается от идеального газа тем, что кроме тепловой энергии в ней может оказаться существенной энергия электростатического взаимодействия, которая в приближении Дебая может быть определена соотношением

$$e_k = -\frac{T}{8 \cdot \pi} \cdot \chi^3 = -\frac{T}{8 \cdot \pi \cdot l_D^3}, \quad (7.2)$$

где  $\chi$  - постоянная экранирования;  $l_D$  - длина экранирования.

Полезно рассмотреть сферу с радиусом, равным длине экранирования; такую сферу называют дебаевской. Объем данной сферы находим как

$$V_D = \frac{4}{3} \pi \cdot l_D^3. \quad (7.3)$$

В первом приближении можно считать, что потенциал частицы сказывается только внутри дебаевской сферы, т.е. вне её он пренебрежимо мал. Если от плотности кулоновской энергии перейти к кулоновской энергии, рассчитанной на одну частицу, то она выразиться как

$$E_k = -\frac{T}{6 \cdot V_D \cdot n} = -\frac{T}{6 \cdot N_D}, \quad (7.4)$$

где  $V_D$  - дебаевский объем;  $N_D$  - число частиц в дебаевском объеме.

В силу статического характера теории Дебая она справедлива в случае, если в дебаевской сфере содержится много частиц

$$N_D \gg 1.$$

Но тогда согласно последней формуле кулоновская энергия мала по сравнению с тепловой. Таким образом, число частиц в дебаевской сфере может служить критерием идеальности плазмы.



Если  $N_D$  велико, то плазма в термодинамическом отношении ведет себя как идеальный газ.

Таким образом, теория Дебая применима только тогда, когда электростатическое взаимодействие является малой поправкой, т.е. когда плазма по своему термодинамическому поведению близка к идеальному газу. Основное

назначение данных формул заключается в том, что они позволяют оценить границы плотности плазмы, для которых справедливы законы идеального газа. При более высоких плотностях плазмы тепловой расчет термодинамического поведения плазмы невозможен.

## 7.2 Равновесие ионизации

Для не полностью ионизированной плазмы важнейшая термодинамическая задача заключается в нахождении степени ионизации. Применяя термодинамику к решению этой задачи, следует помнить, что термодинамика дает равновесную степень ионизации. В замкнутой системе стандартное состояние всегда совпадает с состоянием термодинамического равновесия. Однако, для открытой системы, через которую проходит стационарный поток энергии, стационарное состояние может *не совпадать* с состоянием термодинамического равновесия.

Для открытых систем применим принцип детального равновесия, согласно которому стационарное состояние совпадает с состоянием термодинамического равновесия, т.е. если прямой и обратный процессы совершаются по одному и тому же пути. Рассмотрим это принцип на примере равновесия ионизации. Основными процессами ионизации являются: ионизация электронным ударом



и ионизация излучением



где символ  $a$  обозначает атом;  $i$  - ион;  $h \cdot \nu$  - фотон (квант энергии).

Каждому из этих процессов отвечает обратный процесс ре-



комбинации. Для ионизации электронным ударом обратным процессом является рекомбинация при тройных столкновениях



при этом избыточную энергию уносит второй электрон. Для второго процесса ионизации обратным процессом является рекомбинация с излучением



Получим общий вид условия равновесия ионизации из элементарных кинетических представлений. В случае ионизации электронным ударом скорость ионизации  $\omega_1$  определяется как

$$\omega_1 = k_1 \cdot n_a \cdot n_e, \quad (7.9)$$

а скорость рекомбинации

$$\omega_2 = k_2 \cdot n_i \cdot n_e^2, \quad (7.10)$$

где  $k_1, k_2$  - константы скоростей ионизации и рекомбинации;

$n_a, n_i, n_e$  - концентрации атомов, ионов и электронов соответственно.

По принципу детального равновесия, скорости прямого и обратного процессов должны быть равны, т.е.

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Откуда получаем *закон действующих масс* (в соответствии с терминологией в физической химии)

$$\frac{n_i \cdot n_e}{n_a} = \frac{k_1}{k_2} \equiv K, \quad (7.11)$$

здесь  $K$  - константа равновесия.

В случае, если ионизация производится излучением, а рекомбинация происходит при двойных столкновениях с испускани-



ем излучения, имеем

$$\frac{n_i \cdot n_e}{n_a} = \frac{k_1' \cdot I}{k_2'} , \quad (7.12)$$

где  $I$  - интенсивность излучения. Для равновесного излучения интенсивность  $I$  является функцией только температуры. Сопоставление последних двух формул следует равенство

$$\frac{k_1' \cdot I}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2} = K . \quad (7.13)$$

Таким образом, из принципа детального равновесия следует общий вид *условия равновесия ионизации*

$$\frac{n_i \cdot n_e}{n_a} = K . \quad (7.14)$$

Частным случаем этой зависимости для идеальной плазмы является формула Саха, которая будет получена ниже.

Стационарное состояние ионизации совпадает с состоянием термодинамического равновесия как в случае, если ионизация происходит электронным ударом, а рекомбинация - при тройных столкновениях, так и в случае ионизации равновесным излучением и лучистой рекомбинации. В замкнутой системе, где излучение находится в равновесии с веществом, соответствие между прямым и обратным процессом обеспечивается автоматически. Однако, в разряженной плазме нередко реализуется случай открытой системы, когда излучение свободно выходит из плазмы. При этом ионизация производится только электронным ударом, рекомбинация же, если плазма не слишком плотная, может происходить в основном с излучением. В таком случае прямой и обратный процессы совершаются по разным путям и стационарное состояние ионизации не совпадает с состоянием термодинамического равновесия. В открытой системе тройными столкновениями можно пренебречь. Тогда стационарное состояние ионизации может быть определено формулой Эльверта



$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_1}{k_2} . \quad (7.15)$$

Согласно формуле Эльверта, в разряженной плазме, из которой излучение выходит свободно, степень ионизации не зависит от концентрации электронов.

### 7.3 Формула Саха

Формула для равновесной ионизации имеет фундаментальное значение в физике плазмы и называется формулой Саха, по имени индийского астронома впервые её получившего. Она справедлива, если ионизации и рекомбинация происходят по одному и тому же пути и плазму можно рассматривать как идеальный газ. Это оправдано при не слишком низких, но и не слишком высоких плотностях. Наряду с условием детального равновесия должен удовлетворяться также общий критерий идеальности плазмы: кулоновская энергия должна быть мала в сравнении с тепловой, или, что то же самое, число частиц в дебаевской сфере должно быть большим.

Согласно квазиклассической статистике, вероятность нахождения частицы в состоянии с энергией  $E$  выражается формулой Больцмана

$$\omega(E) = A e^{-\frac{E}{T}} , \quad (7.16)$$

где  $T$  - температура в энергетических единицах. Число частиц с энергией  $E$  равно вероятности, умноженной на число состояний. Для частицы, не имеющей внутренних степеней свободы, число состояний равно числу элементарных ячеек фазового пространства объёмом  $h^3$ , где  $h$  - постоянная Планка. Для электрона с импульсом между  $p$  и  $p + dp$  фазовый объём равен

$$d\Gamma = 4 \pi p^2 dp V , \quad (7.17)$$

где  $V$  - обычный объём.

Число электронов в этом объёме выразиться как



$$dN_e = V g_e \frac{4\pi p^2}{h^3} dp e^{-\frac{E}{T}}, \quad (7.18)$$

где  $g_e$  - статистический вес, т.е. число состояний с одинаковой энергией, различающихся внутренними степенями свободы. Рассматривая равновесие электронов с атомами, мы можем за нуль энергии считать энергию электрона в атоме. Тогда энергия свободного электрона с импульсом  $p$  будет

$$E = J + \frac{p^2}{2m}, \quad (7.19)$$

где  $J$  - энергия ионизации атома (или потенциал ионизации). Число свободных электронов на один атом в определённом квантовом состоянии найдётся интегрированием по всем значениям импульса

$$N_e^* = V g_e \frac{4\pi}{h^3} e^{-\frac{J}{T}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp. \quad (7.20)$$

Интеграл берётся по формуле, приведённой обычно в математических приложениях, как интегралы от распределения Максвелла [4]. В итоге получается следующая формула

$$N_e = N_a \frac{g_e}{g_a} V \frac{(2\pi mT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}. \quad (7.21)$$

В рамках квазиклассического подхода приходится сделать два неочевидных допущения. Во-первых, мы полагали, что проведённое интегрирование даёт число электронов на один атом в определённом квантовом состоянии. Во-вторых, в равновесии ионизации участвуют также и ионы, и, чтобы учесть это, нужно за объём  $V$  принять объём, приходящийся на один ион в определённом квантовом состоянии



## Машиностроение

$$V = \frac{1}{\frac{n_i}{g_i}}, \quad (7.22)$$

где  $n_i$  - число ионов в единице объёма;  $g_i$  - статистический вес иона.

Подстановка этой формулы в предшествующее выражение даёт формулу Саха в окончательном виде

$$\frac{N_e}{N_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \frac{1}{n_i} \frac{(2\pi mT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}. \quad (7.23)$$

Отношение полных чисел частиц  $N$  равно отношению концентраций  $n$ , что позволяет записать формулу Саха в симметричном виде

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} = \frac{g_e \cdot g_i}{g_a} \cdot \frac{(2 \cdot \pi \cdot m \cdot T)^{3/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{J}{T}} \quad (7.24)$$

Выполним анализ данного уравнения. Левая часть уравнения Саха характеризует (определяет) константу равновесия для процесса ионизации, рассматриваемого в качестве химической реакции. Подставив в уравнение универсальные константы ( $h$ ,  $\pi$ ,  $m$ ) и выразив температуру в электрон-вольтах, то формула Саха в следующем виде:

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} = \frac{g_e \cdot g_i}{g_a} \cdot 3 \cdot 10^{21} \cdot T_{(\text{эВ})}^{3/2} \cdot e^{-\frac{J}{T}} \quad (7.25)$$

где размерность концентрации в  $\tilde{n} \text{ л}^{-3}$ .

Квазиклассический вывод формулы Саха обладает физической наглядностью, но содержит допущения, которые строго не обоснованы.



## 7.4 Статистический вес и внутренние степени свободы

Внутренними степенями свободы частиц (атомов, ионов и электронов) плазмы являются пространственная ориентация спина  $S$ , орбитального момента  $L$  и электронное возбуждение. Вращательные моменты измеряются в квантовых единицах:

$\hbar = \frac{h}{2 \cdot \pi}$ . Полный момент  $J_i$  может принимать значения от  $[L + S]$  до  $[L - S]$  через единицу. Состояние с моментом  $J$  имеет статистический вес

$$g = 2 \cdot J + 1. \quad (7.26)$$

У свободного электрона  $L = 0$ ,  $J = S = \frac{1}{2}$ , и его статистический вес равен  $g_e = 2$ . У атомов и ионов, у которых не все электроны оторваны, возможны разные состояния электронного возбуждения характеризующиеся энергией  $E_j$  и статистическим весом  $g_j$ . Полным статистическим весом атома (или иона) называется статистическая сумма по внутренним степеням свободы

$$g = \sum_j g_j e^{-\frac{E_j}{T}}. \quad (7.27)$$

Если известны энергии и моменты для всех возбуждённых уровней, то полный статистический вес атома или иона можно вычислить непосредственно по предшествующей формуле, находя статистические веса разных уровней как

$$g_i = 2 J_j + 1. \quad (7.28)$$

Расчёт можно значительно упростить, пользуясь схемой Рессела-Саундерса, согласно которой уровни, отличающиеся только взаимной ориентацией спина и орбитального момента, объединяются в один мультиплет. Тогда под энергией  $E_i$





## Машиностроение

для статистического веса  $g$  понимают среднюю энергию мультиплетта, а статистический вес его выражается как

$$g_j = (2L+1) \cdot (2S+1). \quad (2.29)$$

Полный же статистический вес атома или иона находится по схеме Рессела - Саундерса как

$$g = \sum_j (2 \cdot L + 1) \cdot (2 \cdot S + 1) \cdot e^{-\frac{E_j}{T}} \quad (7.30)$$

Здесь суммирование идет по всем мультиплеттам.

Если температура высока в сравнении с энергиями мультиплетного расщепления, но низка в сравнении с энергиями электронного возбуждения, то экспоненциальные множители в последней формуле можно считать равными нулю и полный статистический вес сводится к статистическому весу основного электронного состояния:

$$g \approx (2L+1) \cdot (2S+1). \quad (7.31)$$

При расчёте равновесия ионизации обычно достаточно учитывать возбуждённые состояния только исходного атома (или иона), а для конечного – ограничиться статистическим весом основного состояния. Величины энергии спинов и орбитальных моментов возбужденных элементарных состояний берутся из спектроскопических данных. Обычно достаточно учитывать только первое возбужденное состояние, тогда формула Саха принимает вид

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} \approx \frac{2 \cdot g_i}{g_0 + g_1 \cdot e^{-\frac{E_1}{T}}} \cdot 3 \cdot 10^{21} \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{J}{T}}, \quad (7.32)$$

где  $g_i$  - статистический вес основного состояния иона;  $g_0$ ,  $g_1$  - статистические веса основного и первого возбужденного состояния атома,  $E_1$  - энергия возбуждения.





## 8. ТРАЕКТОРИЯ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

### 8.1. Дрейфовое движение. Скорость дрейфа

Если на плазму действуют сильные внешние поля, то уравнение движения заряженной частицы можно представить следующим образом, полагая, что плазма представляет собой систему независимых заряженных частиц, движущихся по своим траекториям в заданных внешних полях

$$M \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{Z \cdot e}{c} \cdot [\bar{V} \cdot \bar{H} + \bar{F}], \quad (8.1)$$

где  $M$  - масса частицы,  $Z$  - её зарядовое число,  $\bar{V}$  - скорость частицы,  $\bar{H}$  - напряженность магнитного поля,  $\bar{F}$  - равнодействующая всех остальных сил действующих на частицу.

Данное уравнение, за исключением простейших случаев, не поддаются аналитическому решению и обычно используют один из приближённых методов решения данного уравнения, носящий название *дрейфового приближения*. Этот метод применим, если движение происходит в достаточно сильном внешнем магнитном поле и взаимодействием между частицами можно пренебречь. При этих условиях движение частицы можно разложить на три составляющие:

- 1) быстрое циклотронное вращение вокруг силовых линий магнитного поля;
- 2) дрейфовое движение центра циклотронной окружности поперек магнитного поля;
- 3) свободное движение вдоль силовой линии, на которую магнитное поле не действует.

Если сила  $\bar{F}$  в уравнении движения отсутствует и магнитное поле однородно, то движение частицы складывается из циклотронного вращения и движения вдоль силовой линии. В зависимости от характера силы  $\bar{F}$  на эту простейшую картину накладываются различные виды дрейфа:

- 1) Электрический дрейф: сила  $\bar{F}$  есть сила постоянного электрического поля;
- 2) Градиентный дрейф: магнитное поле меняется по величине;



## Машиностроение

- 3) Центробежный дрейф: магнитное поле меняется по направлению;
- 4) Поляризационный дрейф: в переменном по времени электрическом поле;
- 5) Дрейф под действием сил неэлектрической природы, например силы тяжести (гравитационный дрейф).

Дрейфовое движение обладает замечательными свойствами, которому присущи следующие особенности:

- скорость дрейфового движение направлено не вдоль действия силы, а перпендикулярно к ее направлению и к направлению магнитного поля;
- постоянная сила вызывает не равноускоренное, а равномерное движение;
- сила электрического поля вызывает движение ионов и электронов в одном направлении, т.е. течение плазмы как целого, а неэлектрические силы возбуждают токи.

Следует отметить, что особые свойства дрейфа не противоречат законам механики Ньютона, так как дрейф есть усредненное движение. Отметим так же, что дрейфовое движение есть адиабатическое движение частиц в замагниченной плазме, удовлетворяющей условию

$$\omega_c \cdot \tau \gg 1.$$

Мерой взаимодействия между частицами является эффективная частота столкновений, равная обратной величине среднего времени передачи импульса

$$\nu = \frac{1}{\tau}.$$

*Условие замагниченности* для частицы с циклотронной частотой  $\omega_c$  записывается как

$$\omega_c \gg \nu \quad (8.2)$$

Циклотронная частота ионов  $\omega_i$  в 1000 раз меньше чем для электронов  $\omega_e$ , поэтому условие замагниченности для электронов осуществляется легче. Возможен случай, когда  $\omega_e \gg \nu \gg \omega_i$ . Отсюда следует, что электроны замагниченны, а ионы нет. В этом случае в дрейфовом движении принимает участие только элек-



троны.

Приближённый метод рассмотрения движения частиц в плазме посредством разделения его на циклотронное вращение и дрейфовое движение носит название *дрейфового приближения*.

Величина скорости дрейфа может быть представлена следующей формулой

$$|V| = \frac{c \cdot F_{\perp}}{Ze \cdot H}, \quad (8.3)$$

где  $F_{\perp}$  - сила действует поперёк магнитного поля  $\vec{H}$ . Чтобы узнать не только величину, но и направление дрейфовой скорости нужно написать её выражение в векторной форме

$$\vec{V}_{\perp} = c \cdot \frac{[\vec{F} \cdot \vec{H}]}{Ze \cdot H^2}. \quad (8.4)$$

При постоянной силе  $\vec{F}_{\perp}$  разделение движения частицы на циклотронное вращение и дрейфовое движение является точным. Данное приближение тем ближе к действительности, чем лучше выполняется условие адиабатичности движения частиц в замагниченной плазме, т.е.  $\omega_c \cdot \tau \gg 1$ . Направление дрейфовой скорости можно определить с помощью последней формулы по правилам векторного умножения.

## 8.2 Электрический дрейф

Простейший случай дрейфового движения тот, когда силой  $F_{\perp}$  является сила электрического поля. Такой дрейф называется электрическим. Его также называют дрейфом в скрещенных полях, так как электрическое поле здесь направлено поперёк магнитного, т.е.  $\vec{E} \perp \vec{H}$ . Электрическое поле  $\vec{E}$  действует на частицу с зарядовым числом  $Z$  с силой

$$\vec{F} = Ze \cdot \vec{E}.$$

Скорость электрического дрейфа определяется из формулы



для  $V_{\perp}$  как

$$\overline{V}_E = c \cdot \frac{[\overline{E} \cdot \overline{H}]}{H^2}, \quad (8.5)$$

или по абсолютному значению

$$|\overline{V}_E| = c \cdot \frac{E}{H}. \quad (8.6)$$

Очевидно, эти формулы применимы лишь при условии, что в гауссовой системе единиц напряженность электрического поля значительно меньше напряжённости магнитного

$$E \ll H.$$

В противном случае скорость дрейфа будет приближаться к скорости света и нужно будет пользоваться релятивистской механикой. Особенность формулы для скорости электрического дрейфа заключается в том, что при выводе её зарядовое число сокращается. Поэтому скорость электрического дрейфа не зависит от заряда частицы. Электроны и ионы дрейфуют при этом в одном направлении и с одинаковой скоростью  $V_E$ . Если магнитное поле направлено к нам, а электрическое поле вверх, то все частицы дрейфуют вправо, как показано на рис. 8.1.

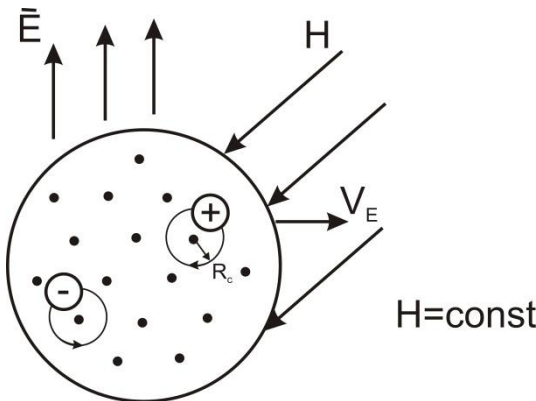


Рис. 8.1. Электрический дрейф для однородного магнитного поля

Таким образом, если как электроны, так и ионы замагниче-



ны, то электрический дрейф не приводит к разделению зарядов, а вызывает только движение плазмы как целого. Если замагничены только электроны, но не ионы, то дрейфуют только электроны. В этом случае дрейф приводит к разделению зарядов.

### 8.3. Дрейф в неоднородном магнитном поле

Изменение напряженности магнитного поля по величине приводит к изменению циклотронного радиуса частицы  $R_c$ . Это является причиной градиентного дрейфа. Ввиду того, что циклотронное вращение происходит в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля, то дрейф вызывается только градиентом магнитного поля  $\nabla_{\perp} \cdot H$  поперек его направления.

Скорость градиентного дрейфа определяется формулой

$$|V_H| = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_c \cdot V_{\perp}}{H} \cdot \nabla_{\perp} \cdot H, \quad (8.7)$$

где  $R_c = \frac{M_c \cdot V_{\perp}}{Z \cdot e \cdot H}$  - циклотронный радиус. Полученная

формула определяет скорость градиентного дрейфа только по величине. Чтобы определить направление дрейфовой скорости, нужно представить её в векторной форме. Для этого составляющую градиента в направлении, перпендикулярном к  $H$ , можно представить как векторное произведение

$$\nabla_{\perp} H = [\nabla H \cdot \bar{h}] = -[\bar{h} \cdot \nabla H], \quad (8.8)$$

где  $\bar{h}$  - единичный вектор в направлении магнитного поля. Подстановка последнего выражения в формулу для дрейфовой скорости дает

$$\vec{V}_H = \frac{1}{2} R_c V_{\perp} \frac{[\bar{H} \cdot \nabla H]}{H^2}. \quad (8.9)$$

Если магнитное поле направлено к нам, то положи-



тельные частицы движутся по часовой стрелке, а отрицательные – против часовой стрелки. Если при этом напряженность магнитного поля возрастает вверх, то положительные частицы будут дрейфовать влево, а отрицательные – вправо, как показано на рис. 8.2.

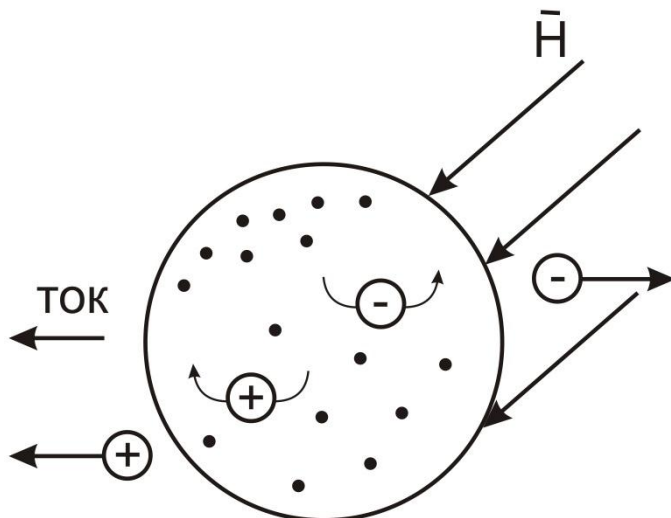


Рис. 8.2. Градиентный дрейф в неоднородном магнитном поле

Изменение направления магнитного поля может быть описано как искривление магнитных силовых линий. Центр циклотронного кружка движется по искривленной силовой линии. Полагаем, что на него действует центробежная сила, тогда скорость центробежного дрейфа определяется по формуле

$$|V_c| = c \cdot \frac{M \cdot V_{\parallel}^2}{Z \cdot e \cdot H \cdot R}. \quad (8.10)$$

где  $R$  - радиус кривизны силовой линии магнитного поля. Если рассматривать радиус кривизны как вектор  $\bar{R}$  (радиус-вектор), направленный от центра кривизны к силовой линии, то формулу скорости центробежного дрейфа можно представить в





векторном виде

$$\bar{V}_c = c \frac{M \cdot V_u^2}{ZeH^2 R^2} [\bar{R} \bar{H}]. \quad (8.11)$$

Если вектор  $\bar{H}$  направлен к нам и выгнуто вверх, то положительные частицы дрейфуют вправо, а отрицательные – влево, как показано на рис.8.3.

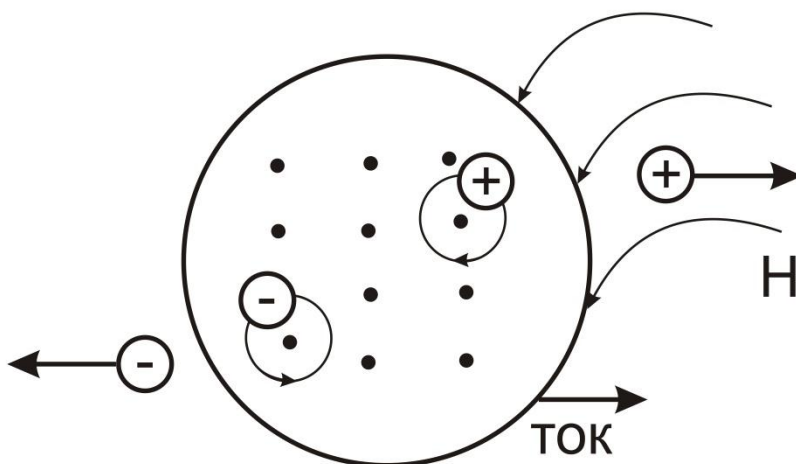


Рис.8.3. Центробежный дрейф

Скорости градиентного и центробежного дрейфов зависят от заряда частицы, так что противоположно заряженные частицы дрейфуют в противоположных направлениях. Следовательно, неоднородность магнитного поля возбуждает в плазме дрейфовые токи, приводящие к разделению зарядов. Для упрощения вида формул для дрейфовых токов обычно вводят понятия продольного  $P_u$  и поперечного  $P_\perp$  давления плазмы. Давление равно произведению концентрации на среднюю энергию, приходящуюся на две степени свободы. В продольном направлении частица имеет одну степень свободы, в поперечном – две. Градиентный дрейф определяется поперечным, а центробежный – продольным дав-



лением плазмы.

Таким образом, неоднородность магнитного поля приводит к появлению в плазме дрейфовых токов с плотностью:

для градиентного дрейфа

$$|j_i| = c \cdot \frac{P_{\perp}}{H \cdot L} \quad (8.12)$$

и для центробежного

$$|j_c| = c \cdot \frac{P_{\parallel}}{H \cdot R}, \quad (8.13)$$

где

$$P_{\parallel} = n \cdot M \cdot V_{\parallel}^2$$

$$P_{\perp} = n \cdot \frac{M \cdot V_{\perp}^2}{2} +$$

$$L = \frac{H}{\nabla \cdot H} - \text{характерная длина изменения магнитного по-$$

ля.

## 8.4 Поляризационный дрейф

Поляризационный дрейф есть важнейший случай инерционного дрейфа, когда ускорение частиц обусловлено изменением скорости электрического дрейфа, вызванного переменным электрическим полем. Если переменное электрическое поле напряженностью  $E$  направлено поперек магнитного поля, то скорость поляризационного дрейфа будет направлена вдоль электрического поля

$$\bar{V}_i = \frac{M \cdot c^2}{Z \cdot e \cdot H^2} \cdot \dot{E}. \quad (8.14)$$

Таким образом, поперечное переменное электрическое поле вызывает в замагниченной плазме дрейфовый ток плотностью



$$\bar{j}_n = -\frac{\rho \cdot c^2}{H^2} \cdot \dot{E}, \quad (8.15)$$

где  $\rho = \sum_k M_k \cdot n_k$  - плотность плазмы,  $n_k$  - концентрация частиц  $k$  типа.

Плотность дрейфового тока пропорциональна массе частицы, так что он переносится практически целиком ионами. Этот дрейфовый ток во многих случаях оказывается гораздо существеннее, чем ток, происходящий от поперечной проводимости плазмы.

Отметим, что плазму можно рассматривать как среду с электрической проницаемостью

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi \cdot \rho \cdot c^2}{H^2}. \quad (8.16)$$

Если  $\varepsilon_{\perp} \gg 1$ , то ей соответствует показатель преломления

$$n_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \approx \frac{c \cdot \sqrt{4\pi \cdot \rho}}{H}. \quad (8.17)$$

Данному показателю преломления соответствует фазовая скорость волны  $U_A$

$$U_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi \cdot \rho}}, \quad (8.18)$$

называемая альфвеновской скоростью.

Эти результаты справедливы, если справедливо дрейфовое движение, т.е. движение можно считать адиабатическим. Для этого частоты рассматриваемых процессов должны быть малы в сравнении с наименьшей из циклотронных частот, т.е. с ионной циклотронной частотой  $\omega_i$ .

## 8.5. Ток намагничивания



В неоднородной плазме, кроме тока проводимости и дрейфовых токов, имеется ещё один механизм возникновения электрического тока, связанный с пространственной неоднородностью. Ток, возникающий из-за пространственной неоднородности плазмы, называют током намагничивания. Под неоднородностью понимается переменность в пространстве любой из основных характеристик плазмы:

- концентрации заряженных частиц;
- температуры (или средней кинетической энергии циклотронного вращения);
- напряженности магнитного поля.

Переменность хотя бы одной из них приводит к возникновению тока намагниченности с плотностью:

$$\overline{j}_i = -c \cdot \text{rot} \sum \left( \frac{n_k \cdot M_k \cdot V_{\perp k}^2}{2 \cdot H^2} \right) \cdot \overline{H}. \quad (8.19)$$

Плотность данного тока удобно выразить через давление плазмы. Здесь только нужно учесть направление магнитного момента циклотронного вращения всех частиц, откуда

$$\overline{j}_i = -c \cdot \text{rot} \cdot \frac{P_{\perp}}{H^2} \cdot \overline{H}. \quad (8.20)$$

Оказывается, циклотронное вращение внутри объема, занятого замагниченной плазмой позволяет приписать ей внутреннюю диамагнитную восприимчивость

$$\chi = \frac{P_{\perp}}{H_0^2},$$

где  $H_0$  - внешнее магнитное поле.

Для описания плазмы обычно используют безразмерную характеристику плазмы  $\beta$ , как отношение газового давления к магнитному

$$\beta = \frac{8 \cdot \pi \cdot P}{H_0^2}. \quad (8.21)$$



Максимальное значение магнитной восприимчивости замагниченной плазмы связано с параметром  $\beta$  соотношением

$$\chi_i = \frac{\beta}{8 \cdot \pi}. \quad (8.22)$$

Холодной, называют плазму, у которой параметр  $\beta \ll 1$ . Для плазмы, удерживаемой магнитным полем, значение параметра  $\beta$  не может превосходить по величине единицу. Следовательно, магнитная восприимчивость даже в сильно неравновесном состоянии не может принимать больших значений.



## ГЛАВА 9. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

### 9.1. Основные понятия и определения

Холодной мы называем плазму – плазма, у которой газовое давление мало по сравнению с магнитным

$$\beta \equiv \frac{8\pi \cdot P}{H^2} \ll 1. \quad (9.1)$$

Тогда можно пренебречь тепловым движением и рассматривать усредненное движение под действием внешних сил. Будем пренебрегать столкновениями и процессами диссипации (рассеивания) энергии, т.е. будем рассматривать так называемое *приближение идеальной плазмы*. Используем первое уравнение Максвелла

$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}. \quad (9.2)$$

Применим операцию *rot* к обеим частям данного уравнения

$$\text{rot} \text{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{H}, \quad (9.3)$$

используем третье уравнение Максвелла для  $\text{rot} \bar{H}$

$$\text{rot} \bar{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot \bar{j}, \quad (9.4)$$

подстановка которого даёт

$$\text{rot} \text{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot \frac{\partial \bar{j}}{\partial t}.$$



(9.5)

Раскрывая операцию  $rot\ rot$  по формулам векторного анализа, получим уравнение, для случая плоской волны в следующем виде

$$\Delta \bar{E} - \nabla \cdot div \bar{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (9.6)$$

Ищем решение как плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ , в которой любая величина  $f$  зависит от координат и времени следующим образом:

$$f = \tilde{f} \cdot e^{i(k \cdot x - \omega t)}, \quad (9.10)$$

где  $\tilde{f}$  - комплексная амплитуда,  $\omega$  - круговая частота,  $k$  - волновое число.

Под фазовой скоростью понимается выражение  $u_\delta = \frac{\omega}{k}$ ; а под групповой скоростью -  $u_a = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ . Уравнение, связывающее  $\omega$  и  $k$  называется дисперсионным уравнением.

Показатель преломления холодной плазмы определяется как

$$N = \frac{c}{u_\delta} = \frac{k \cdot c}{\omega}. \quad (9.11)$$

Зависимость фазовой скорости от частоты называется дисперсией. Она приводит к различию между групповой и фазовой скоростями. В анизотропной среде частота связана не только с величиной, но и направлением волнового вектора, т.е. дисперсионное уравнение имеет вид

$$F(\omega, k_1, k_2, k_3) = 0. \quad (9.12)$$

В векторной форме групповая скорость записывается как



$$\bar{u}_{\bar{a}} = \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{k}}. \quad (9.13)$$

Направление групповой скорости совпадает с направлением переноса энергии волной. В дальнейшем оси координат выбираем так, чтобы волновое число  $k_2 = 0$ ;  $k_1 \perp \bar{H}$ , а  $k_3$  - вдоль поля. Для плоской волны дифференциальным операторам отвечают алгебраические операции

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E} &= -k^2 \cdot \bar{E}, \\ \nabla \cdot \operatorname{div} \bar{E} &= -\bar{k} \cdot (\bar{k} \cdot \bar{E}), \\ \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \cdot \bar{E}, \\ \frac{\partial \bar{j}}{\partial t} &= -i \cdot \omega \cdot \bar{j}. \end{aligned}$$

Применение этих операторов преобразует уравнение (9.6) к виду

$$k^2 \cdot \bar{E} - \bar{k} \cdot (\bar{k} \cdot \bar{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \bar{E} + i \cdot \frac{4\pi \cdot \omega}{c^2} \cdot \bar{j} \quad (9.14)$$

Использование уравнений движений электронов и ионов с весами  $n_e \cdot m$ ,  $n_i \cdot M$  дает гидродинамическое уравнение вида

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}_0], \quad (9.15)$$

где  $\bar{V}_i$  - массовая скорость;  $\bar{H}_0$  - постоянное внешнее поле.

Уравнение для плотности тока





$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \cdot [\bar{V}_i \cdot \bar{H}_0] \right) - \frac{e}{m \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}_0]. \quad (9.16)$$

Система последних двух уравнений совпадает с системой уравнений магнитной гидродинамики для идеального проводника, поэтому приближение холодной плазмы называют *гидродинамическим приближением*. Обычно вводят характерные частоты плазмы:

плазменную частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m}}; \quad (9.17)$$

циклотронные частоты для электрона и иона

$$\begin{aligned} \omega_e &= \frac{e \cdot H_0}{m \cdot c}; \\ \omega_i &= \frac{Z \cdot e \cdot H_0}{M \cdot c}. \end{aligned} \quad (9.18a,б)$$

Для плоской волны система уравнений (9.3) и (9.4) принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{V}_i &= \frac{i}{\omega \cdot \rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}_0] \\ \omega^2 \cdot \bar{j} &= i \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot \omega}{4 \cdot \pi} \cdot \bar{E} + \omega_i \cdot \omega_e \cdot \left\{ \bar{j} - \bar{h} \cdot (\bar{j} \cdot \bar{h}) \right\} - i \cdot \omega \cdot \omega_e \cdot [\bar{j} \cdot \bar{h}] \end{aligned} \right. \quad (9.19)$$

$$(9.20)$$

Рассмотрение всех типов колебаний холодной плазмы сводится к совместному решению уравнений (9.14) и (9.19).



## 9.2. Магнитогидродинамические волны

Пусть волны распределяются в плазме вдоль магнитного поля, поляризованной поперек него. Для этой волны скалярное произведение волнового вектора  $\vec{k}$  и вектора напряжённости электрического поля равно нулю

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \quad (9.21)$$

и уравнение (9.14) сводится к следующему виду

$$k^2 \cdot \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{E} + i \cdot \frac{4\pi \cdot \omega}{c^2} \cdot \vec{j} . \quad (9.22)$$

Током смещения, т.е. числом  $\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{E}$  можно пренебречь, если показатель преломления плазмы велик, т.е.

$$\frac{k^2 \cdot c^2}{\omega^2} \gg 1 . \quad (9.23)$$

При выполнении этого условия вместо уравнения (9.22) можно записать следующее

$$\vec{E} \approx i \cdot \frac{4\pi \cdot \omega}{k^2 \cdot c^2} \cdot \vec{j} . \quad (9.24)$$

Отсюда следует, что ток  $\vec{j}$  параллелен электрическому полю. Таким образом, для рассматриваемых волн ток перпендикулярен к магнитному полю. Следовательно, уравнение (9.20) преобразуется к виду



## Машиностроение

$$\omega^2 \cdot \bar{j} = \left( \omega_i \cdot \omega_e - \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{k^2 \cdot c^2} \right) \cdot \bar{j} - i \cdot \omega \cdot \omega_e \cdot [\bar{j} \cdot \bar{h}]. \quad (9.25)$$

Рассмотрим предельную область низких частот, т.е. область для которой выполняется условие

$$\omega \ll \omega_i. \quad (9.26)$$

В уравнении (9.25) члены, содержащие  $\omega^2$  и  $\omega \cdot \omega_e$  малы по сравнению с числом, содержащим произведение  $\omega_i \cdot \omega_e$ , поэтому отсутствует анизотропия (или гиротропность) свойств волны. Для предельного случая имеем простое дисперсионное уравнение:

$$\omega_i \cdot \omega_e = \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{k^2 \cdot c^2}, \quad (9.27)$$

откуда выразим квадрат показателя преломления в следующем виде

$$N^2 = \frac{k^2 \cdot c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \cdot \omega_e} = \frac{4\pi \cdot M \cdot c^2}{Z \cdot H_0} = \frac{4\pi \cdot n_i \cdot M \cdot c^2}{H_0^2}. \quad (9.28)$$

Выразим так же фазовую скорость волны

$$u_\delta = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega_i \cdot \omega_e \cdot c^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi \cdot \rho}} \equiv u_A. \quad (9.29)$$

Здесь  $\rho$  - плотность плазмы;

$$\rho \approx n_i \cdot M = \frac{nM}{Z}, \quad (9.30)$$



где  $u_A$  - альфеновские (или гидродинамические) волны.

Квадрат альфеновского показателя преломления (9.28) равен значению поперечной диэлектрической проницаемости плазмы, которое мы получили ранее при рассмотрении поляризационного дрейфа.

Физическая картина магнитогиродинамических (МГД) волн может быть представлена следующим образом. Они могут рассматриваться как поперёчные колебания силовых линий вместе с плазмой, в которую они вморожены, наподобие упругих колебаний струны. В области низких частот магнитогиродинамические волны распространяются с постоянной скоростью, т.е. дисперсия отсутствует и групповая скорость равна фазовой. Чтобы наряду с условием (9.26) выполнялось также неравенство (9.23), т.е. альфеновский показатель преломления был велик, требуется, согласно выражения (9.28), выполнение неравенства

$$n_i \cdot M \cdot c^2 \gg \frac{H_0^2}{4\pi}, \quad (9.31)$$

т.е. магнитная энергия плазмы должна быть мала в сравнении с энергией покоя. При малой плотности плазмы или очень сильной магнитном поле это условие может не выполняться, и требуется более сложное дисперсионное уравнение.

Если условие  $\omega \ll \omega_i$  не выполняется, то возникает дисперсия и проявляются гиротропные свойства плазмы, для которой дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{k^2 \cdot c^2} - \omega_i \cdot \omega_e + \omega^2 \pm \omega \cdot \omega_e = 0. \quad (9.32)$$

Для квадрата показателя преломления плазмы из данного уравнения имеем

$$N^2 = \frac{k^2 \cdot c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2 \pm \omega \cdot \omega_e}. \quad (9.33)$$

Две частоты, обращающие в ноль знаменатель назы-



ваются частотами аномальной дисперсии.

Отметим, что амплитуды тока одинаковы во всех направлениях перпендикулярных к магнитному полю. Это относится и к амплитуде электрического поля. В течение цикла меняется только фаза волны, т.е. волна вращается вокруг направления магнитного поля, как показано на рис.9.1. Такие волны называются волнами с круговой поляризацией и могут вращаться в противоположных направлениях. Одна из них может распространяться в плазме только при частотах  $\omega < \omega_i$  и называется обыкновенной, другая распространяется только при  $\omega < \omega_e$  и называется необыкновенной. У обыкновенной волны электрический вектор  $\vec{E}$  вращается в том же направлении, как и положительный заряд, у необыкновенной - как отрицательный заряд в магнитном поле.

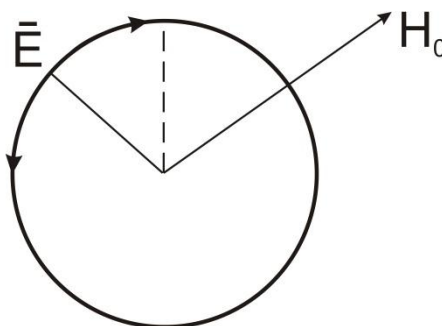


Рис. 9.1. Схема вращения волны относительно магнитного поля  $\vec{H}_0$

### 9.3. Магнитный звук. Гибридные частоты

Рассмотрим волны, распределяющиеся перпендикулярно к магнитному полю. Волна поляризована вдоль поля. Пусть ось  $x$  направлена вдоль направления распространения, ось  $y$  - перпендикулярно к нему, ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля. Для предельной области очень низких частот, т.е. когда  $\omega \ll \omega_i$



и показатель преломления плазмы велик следует, что

$$j_x \ll j_y \quad \text{и} \quad E_x \ll E_y. \quad (9.34)$$

Это значит, что в данной области эллиптическая волна вырождается в плоскополяризованную. Дисперсионное уравнение оказывается аналогично случаю распространения волны вдоль магнитного поля. Скорость распространения волны определяется альфвеновской скоростью. Однако, физическая природа этих волн различна. Если вдоль магнитного поля распространяются поперечные колебания, то это гидродинамические (альфвеновские) волны. Гидродинамическая скорость вещества в холодной плазме направлена поперек магнитного поля  $\overline{H}$ . Следовательно, альфвеновские волны являются поперечными как в электродинамическом, так и в гидрокинематическом смысле.

Если волна распространяется поперек магнитного поля  $\overline{H}$ , то ток и вектор  $\overline{E}$  волны направлены по оси  $y$ , а гидродинамическая скорость по оси  $x$ . Таким образом, волна является поперечной в электродинамическом смысле, но продольной - в гидродинамическом. Процесс колебания можно рассматривать как периодическое сжатие и расширение плазмы с вмороженным в нее магнитным полем, т.е. аналогично распространению звука. Поэтому этот процесс и называется магнитным звуком.

Частоты аномальной дисперсии магнитного звука в случае, когда  $\overline{U}_A \perp \overline{H}$  принято называть гибридными частотами  $\omega_h$ . Для гибридных частот существует биквадратное уравнение, имеющее два корня. Верхняя гибридная частота

$$\omega_{h1}^2 \approx \omega_0^2 + \omega_e^2 \quad (9.35)$$

зависит только от плазменной  $\omega_0$  и электронной циклотронной  $\omega_e$  частот и называется *электронно-плазменной гибридной частотой*.

Вторая гибридная частота в плотной плазме (если  $\omega_0^2 \gg \omega_i \cdot \omega_e$ )



$$\omega_{h2}^2 \approx \frac{\omega_i \cdot \omega_e}{1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}} \quad (9.36)$$

зависит в основном от электронной и ионной циклотронной частот и называется *электронно-ионной гибридной частотой*.

## 9.4. Структура волн в плотной плазме

Волны, распространяющиеся точно вдоль и поперек постоянного внешнего магнитного поля называются прямыми. Волна с электрическим полем вдоль внешнего магнитного поля является плазменной при распространении вдоль поля и электромагнитной при распространении поперек поля.

Прямые волны, у которых вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости перпендикулярной к постоянному внешнему магнитному полю  $\vec{H}$ , при распространении вдоль поля будут поляризованы по кругу, переходящие при низких частотах в альфвеновскую волну (плоскополяризованную). При распространении поперек поля это будут прямые магнитозвуковые волны. При низких частотах (в магнитоакустической области) скорости распространения магнито-гидродинамических и магнитоакустических волн стремятся к альфвеновской скорости. Структура волны с круговой поляризацией может быть представлена рис.9.2. Изображенные на рис.9.2 векторы вращаются вокруг направления внешнего магнитного поля. С уменьшением частоты волны вращение замедляется.

Структура волны упрощается, если считать, что плазма достаточно плотная

$$\omega_0^2 \gg \omega_e \omega . \quad (9.37)$$

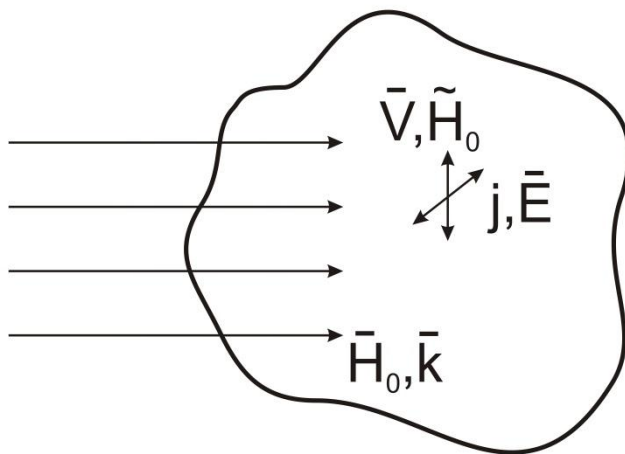


Рис.9.2. Структура волны с круговой поляризацией

В плотной плазме магнитозвуковая волна является эллиптически поляризованной. Отношение амплитуд плотности тока имеет вид

$$\frac{|j_x|}{|j_y|} \approx \frac{\omega \cdot \omega_e}{\omega_0^2} \ll 1, \quad (9.38)$$

а отношение амплитуд полей

$$\frac{|E_x|}{|E_y|} \approx \frac{\omega \cdot \omega_e}{\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2}. \quad (9.39)$$

Таким образом, в плотной плазме ток течет поперек направления распространения. Вещество движется перпендикулярно току, т.е. вдоль направления распространения. Поляризация остается эллиптической, вытянутость эллипса зависит от частоты.

В магнитоакустической области ( $\omega^2 \ll \omega_i \cdot \omega_e$ ) вытянутость эллипса поляризации выражается как





$$\left| \frac{E_x}{E_y} \right| \approx \frac{\omega}{\omega_i}. \quad (9.40)$$

При частотах ниже ионной и циклотронной поляризация становится поперечной (к направлению распределения). Структура прямой магнитозвуковой волны проиллюстрирована на рис. 9.3. Перпендикулярно к направлению распределения в плотной плазме движутся только электроны, переносящие ток.

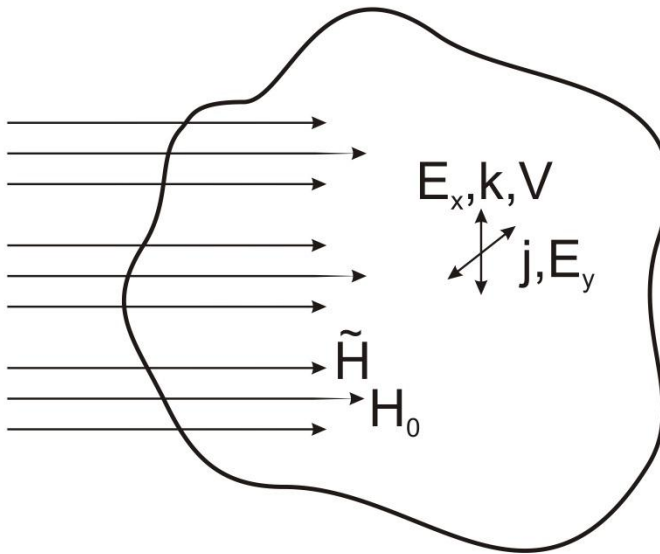


Рис. 9.3. Структура магнитно-звуковой волны

Цилиндрические магнитозвуковые волны отличаются от плоских только тем, что распределение всех величин по радиусу выражается линейными комбинациями из функций Бесселя. Дисперсионное уравнение оказывается аналогичным уравнению для плоских волн. Прямой плоской волне отвечает радиальная цилиндрическая магнитно-звуковая волна, у которой направление рас-



пространения совпадает с радиусом. Переменное магнитное поле направлено (также как и постоянное) вдоль оси цилиндра. В плотной плазме вещество сжимается и расширяется в радиальном направлении, а замкнутые токи текут по азимуту.

## 9.5. Плазменные волноводы

В ограниченном объеме плазмы на волновое число накладываются граничные условия. Объем, имеющий ограниченное поперечное сечение, но неограниченную длину называется волноводом. Граничные условия на боковой поверхности волновода определяют поперечное волновое число. При заданной частоте волны и геометрии сечения дисперсное уравнение определяет продольное волновое число, а значит и скорость распространения вдоль волновода. При определенных значениях частоты продольное волновое число может стать мнимым, т.е. распространение волны не возможным. Такие частоты называют граничными.

В цилиндрическом плазменном волноводе с продольным магнитным полем могут распространяться цилиндрические и винтовые волны, в которых все величины зависят от координат и времени как

$$f(z, r, \varphi, t) = Z(k_1, r) \cdot e^{i\psi}, \quad (9.41)$$

где  $Z$  - цилиндрическая функция, т.е. линейная комбинация функций Бесселя;  $k_1$  - радиальное волновое число;

$$\psi = k_3 \cdot z + m \cdot \varphi - \omega \cdot t; \quad (9.42)$$

$k_3$  - осевое волновое число;  $m$  - азимутальное число.

В предельном случае низких частот скорость распространения определяется как



$$u_{II}^2 \equiv \frac{\omega^2}{k_3^2} = \frac{u_A^2}{1 + \frac{\alpha^2 \cdot u_A^2}{\omega^2 \cdot R^2}}, \quad (9.43)$$

где  $R$  - радиус волновода;  $\alpha$  - один из корней, соответствующей функции Бесселя.

## 9.6. Магнитозвуковой резонанс

Отрезок трубы можно превратить в резонатор, закрыв его торцы отражающими поверхностями. При резонансных условиях возникают стоячие волны, и амплитуда волны резко возрастает. Резонансные условия зависят от размера и формы плазменного объема. Это есть резонансы раскачки. Для плазменного объема конечной длины резонансные частоты равны частотам волн, распространяющихся с соответствующим значением волнового вектора  $k_2$  в волноводе. С увеличением длины резонатора его собственные частоты стремятся к предельным значениям. Собственная частота резонатора бесконечной длины равна граничной частоте волновода.

При частотах ниже гибридной в цилиндрическом объеме возможны чисто радиальные магнитозвуковые колебания. Граничные условия для них (при контакте с металлическими стенками) даются формулами

$$\begin{aligned} J_1(k_1 R) &= 0; \\ J_0(k_1 R) &= 0 \end{aligned} \quad (9.44)$$

и дают значение волнового числа  $k_1 = \frac{\alpha}{R}$  в зависимости от радиуса цилиндра. Для чисто радиальных колебаний ( $k = k_1$ ) подстановка этого значения волнового вектора в дисперсионное уравнение магнитного звука позволяет определить резонансную частоту. В длинном цилиндре при частотах порядка гибридной резонансная частота магнитного звука может быть найдена как



## Машиностроение

$$\omega^2 \approx \omega_i \cdot \omega_e \cdot \frac{1 + \frac{1}{\ddot{I}^* + 1} \cdot \frac{\omega_e}{\omega_i} \cdot \frac{k_3^2}{k_1^2}}{\ddot{I}^* + 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}}, \quad (9.45)$$

где  $\ddot{I}^*$  - эффективное погонное число электронов;

$$\ddot{I}^* \equiv \frac{4}{\alpha} \cdot \ddot{I} \equiv \frac{\omega_0^2}{k_1^2 \cdot c}; \quad (9.46)$$

$\ddot{I}$  - погонное число электронов на длине, равной классическому радиусу электрона,

$$r_c \sim \frac{e^2}{m \cdot c^2}; \quad (9.47)$$

$k_1$  - радиальное волновое число;  $k_3 = \ell \cdot \frac{\pi}{L}$  - осевое волновое число, определяется длиной цилиндра;  $\ell$  - целое число;  $L$  - длина цилиндра.



## ГЛАВА 10. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

### 10.1. Уравнения гидродинамического приближения

Для приближенного описания влияние теплового движения в уравнении для усредненных скоростей вводят силы давления. Считают, что электронное давление действует только на электроны, а ионное - только на ионы. Взаимодействие между ними описывается, как в модели двух жидкостей, эффективными числом столкновений, т.е. электрическим сопротивлением плазмы. Такой метод описания движения плазмы называется *гидродинамическим приближением*. Если при этом рассматривается предельный случай идеальной проводимости, то взаимодействие между ионами и электронами вообще не учитывается, т.е. они движутся друг сквозь друга как две независимые жидкости. Конечная проводимость, т.е. когда существует взаимодействие между электронами и ионами приводит к затуханию колебаний.

Если сложить уравнения давления электронов и ионов с учётом условия электронейтральности

$$Z \cdot n_i = n_e = n \quad (10.1)$$

и плотности тока

$$\bar{j} = e \cdot (Z \cdot n_i \cdot \bar{V}_i - n_e \cdot \bar{V}_e), \quad (10.2)$$

то для массовой скорости уравнение магнитной гидродинамики имеет вид

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}] - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P, \quad (10.3)$$

где  $\bar{V}$  - массовая скорость,



$$\bar{V} = \frac{M \cdot n_i \cdot \bar{V}_i + m \cdot n_e \cdot \bar{V}_e}{M \cdot n_i + m \cdot n_e}; \quad (10.4)$$

$\rho = M \cdot n_i + m \cdot n_e$  - плотность плазмы.

Для случая идеальной проводимости обобщенный закон Ома имеет вид

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \cdot [\bar{V} \cdot \bar{H}] \right) + \frac{e}{m \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}] + \frac{e}{m \cdot c} \cdot \nabla \cdot P_e - \nu \cdot j, \quad (10.5)$$

$P_e$  - давление на электроны;  $\nu = \frac{1}{\tau_{ei}}$ .

Гидродинамическое приближение не описывает затухание колебаний, связанного с диссипацией без столкновения. При этом волна передает свою энергию частицам, у которых составляющая скорости теплового движения вдоль направления распространения близка к фазовой скорости волны.

Для волн с низкой фазовой скоростью специфическое затухание оказывается весьма сильным и может приводить к тому, что некоторые типы колебаний, получаемые из гидродинамического приближения в действительности не реализуются. Этот вопрос может быть рассмотрен методами физической кинематики.

В холодной плазме при отсутствии магнитного поля  $H = 0$  плазменные колебания имеют одну фиксированную частоту, не зависящую от волнового числа, т.е. не являются распространяющимися волнами. При введении теплового давления плазменные колебания переходят в распространяющиеся волны. В этих волнах действуют одновременно электростатические силы (как в плазменных колебаниях) и силы давления (как в звуке). Поэтому их называют плазменными или электроразвучковыми волнами. При распространении плазменных волн вдоль внешнего магнитного поля  $H_0$  поперечные (магнитогидродинамические и электромагнитные) волны распространяются независимо от продольных электроразвучковых волн.

При распространении волн поперек внешнего поля  $\bar{H}_0$  силы



газового давления складываются с силами магнитного давления, возникают магнитозвуковые волны, которые с понижением температуры переходят в магнитозвуковые колебания холодной плазмы.

## 10.2. Скорость звука

Для описания влияния давления на волновые движения необходимо связать градиент давления со скоростью движения вещества

$$\nabla P = i \cdot \frac{u_3 \cdot M \cdot n_i}{\omega} \cdot \bar{K} \cdot (\bar{K} \cdot \bar{V}) \approx i \cdot \frac{u_3^2 \cdot \rho}{\omega} \cdot \bar{K} \cdot (\bar{K} \cdot \bar{V}), \quad (10.6)$$

где

$$u_3^2 = u_i^2 + \frac{Z \cdot m}{M} \cdot u_e^2 = \gamma_i \cdot \frac{T_i}{M} + \gamma_e \cdot \frac{Z \cdot T_e}{M} \quad (10.7)$$

есть скорость ионного звука (в отличие от ионной скорости звука  $u_i$ ). Она определяется суммарной температурой электронов и ионов

$$T_i + Z \cdot T_e, \quad (10.8)$$

но массой ионов. Электронная температура входит с множителем  $Z$ , потому, что это число электронов на один ион.



Рассмотрим продольные волны без магнитного поля. Дисперсионное уравнение высокочастотной ветви имеет вид

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + k^2 \cdot u_e^2 = \omega_0^2 + k^2 \cdot \gamma_e \cdot \frac{T_e}{m}. \quad (10.9)$$

С понижением температуры плазмы или с возрастанием длины волны колебания высокочастотной ветви стремятся к электростатическим колебаниям холодной плазмы с фиксированной частотой  $\omega_0$ . Низкочастотная (или ионная) ветвь определяется уравнением

$$\omega^2 \approx \frac{k^2 \cdot u_e^2 \cdot \frac{Z \cdot m}{M} \cdot \omega_0^2 + k^2 \cdot u_i^2 \cdot \omega_0^2 + k^4 \cdot u_e^2 \cdot u_i^2}{\omega_0^2 + k^2 \cdot (u_e^2 + u_i^2)}. \quad (10.10)$$

Для длинных волн, когда  $k \rightarrow 0$ , дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega_0^2 = k^2 \cdot \left( \gamma_i \cdot \frac{T_i}{M} + \gamma_e \cdot \frac{Z \cdot T_e}{M} \right). \quad (10.11)$$

Для коротких волн, когда  $k \rightarrow \infty$  дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2 \approx k^2 \cdot \frac{u_e^2 \cdot u_i^2}{u_e^2 + u_i^2} \approx k^2 \cdot u_i^2. \quad (10.12)$$

Здесь  $u_e$  и  $u_i$  - электронная и ионная скорости звука, которые определяются следующими соотношениями:

$$u_i^2 = \gamma_i \cdot \frac{T_i}{M}, \quad u_e^2 = \gamma_e \cdot \frac{T_e}{m}. \quad (10.13а,б)$$

Для коротких волн фазовые скорости как электронной,





так и ионной ветвей стремятся к скорости звука, т.е. близки к средним скоростям теплового движения. Эти колебания быстро затухают по причине фазового резонанса с частицами, у которых скорость теплового движения равна фазовой скорости волны.

Реальные значения имеют длинноволновые колебания. При этом электронная ветвь имеет частоту, близкую к плазменной ( но всегда выше её ). Скорость же распространения ионного звука выражается формулой для скорости звука  $u_3$ . Если электронная температура значительно выше ионной, то скорость ионного звука ниже тепловых скоростей электронов, но выше тепловых скоростей ионов и возможно распространение волны без быстрого затухания.

#### 10.4. Ускоренные и замедленные магнитозвуковые волны

Рассмотрим простейший случай, когда коэффициент преломления плазмы велик  $N \gg 1$ , т.е. можно пренебречь током смещения, но плотность плазмы велика, что  $\omega_0^2 \gg k^2 \cdot c^2$  (эффективное погонное число электронов велико). Эти допущения соответствуют приближению магнитной гидродинамики.

Разлагая по степеням фазовые скорости, получим биквадратное уравнение вида

$$u_{\delta}^4 - u_{\delta}^2 \cdot (u_A^2 + u_3^2) + u_A^2 \cdot u_3^2 \cdot \cos^2 \theta = 0. \quad (10.14)$$

Больший из корней уравнения можно оценить как

$$u_{\delta 1}^2 \approx u_A^2 + u_3^2. \quad (10.15)$$

Это решение описывает ускоренную магнитно-звуковую волну. Меньший корень

$$\frac{1}{u_{\delta 2}^2} \approx \left( \frac{1}{u_A^2} + \frac{1}{u_3^2} \right) \cdot \sec^2 \theta \quad (10.16)$$



описывает замедленную магнитно-звуковую волну.

## 10.5 Дисперсия магнитного звука

Переходя к предельному случаю низких частот, мы пренебрегли гиروتропными членами. Поэтому полученные в предыдущем разделе результаты не описывают дисперсию в области циклотронных частот. Если сохранить гиروتропные члены, то получаются громоздкие формулы, которые мы в общем виде выписывать не будем. Вопрос о дисперсии рассмотрим только для простейшего случая прямой магнитно-звуковой волны, распространяющейся точно поперёк магнитного поля. Дисперсионное уравнение будет иметь следующий вид

$$\frac{\omega_0^2}{N^2 - 1} - \frac{\omega_i \cdot \omega_e}{1 - N_3^2} + \omega^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_e^2}{\tilde{\omega}_0^2} \cdot \left( 1 + \frac{\omega_i}{\omega_e} \cdot \frac{N_e^2}{1 - N_3^2} \right) \right] = 0, \quad (10.17)$$

$$\text{здесь } N = \frac{k \cdot c}{\omega}; \quad N_3 = \frac{k \cdot u_3}{\omega}; \quad N_e = \frac{k \cdot u_e}{\omega};$$

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 + \omega_i \cdot \omega_e - \omega^2 + k^2 \cdot u_e^2. \quad (10.18)$$

Из дисперсионного уравнения следует, что ограничения, накладываемые гибридной частотой в горячей плазме, снимаются. При частоте выше гибридной фазовая скорость остается вещественной и при высоких частотах стремится к скорости ионного звука.



## ГЛАВА 11. ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ

В предыдущих разделах рассматривалось усреднённое движение частиц плазмы: всем частицам, находящимся в данном элементе объёма, приписывалась одна средняя скорость. В действительности на эту среднюю скорость накладывается хаотическое тепловое движение. Количественное описание теплового движения частиц составляет предмет физической кинетики.

Важнейшими характеристиками теплового движения являются процессы переноса вещества, импульса и энергии: диффузия, внутреннее трение (вязкость) и теплопроводность. Тепловое движение также оказывает влияние на колебательные и волновые процессы в плазме и приводит, в частности, к дополнительному затуханию, не зависящему от столкновений.

### 11.1. Уравнение Фоккера - Планка.

Если плазма находится в термодинамическом равновесии, то ее состояние описывается равновесной функцией распределения Максвелла

$$f^{\circ} = \text{const} \cdot e^{-\frac{M \cdot v^2}{2 \cdot T}}, \quad (11.1)$$

где  $T$  - температура в энергетических единицах.

Обычно для описания плазмы используется каноническое фазовое пространство системы. Оно представляет собой совокупность конфигурационного пространства (составленного из координат всех частиц) и пространства импульсов. Объём элементарной ячейки канонического фазового пространства равен кубу постоянной Планка

$$\Delta \tilde{A}^* = h^3 = (2\pi \cdot \hbar)^3. \quad (11.2)$$

В силу сложности взаимодействия в системах с большим числом частиц, в физической кинетике приходится широко использовать приближённые методы. Простейшие из них отвечают



предельным случаям дискретного и непрерывного взаимодействия.

Поведение функции распределения в приближении непрерывного взаимодействия описывает уравнение Фоккера - Планка. Пусть функция распределения  $f$  зависит от набора величин  $X_\alpha$  и от времени  $t$ :  $f(X_\alpha; t)$ . Пусть круговая частота  $\omega(X'; X; \Delta t)$  есть вероятность перехода системы из состояния  $X'$  в состояние  $X$ , осуществляемое за время  $\Delta t$ . Тогда уравнение Фоккера - Планка имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \cdot \left( A_{\alpha} \cdot f - \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial f}{\partial X_{\beta}} \right), \quad (11.3)$$

где коэффициенты  $A_{\alpha}$  образуют вектор скорости переноса по величине  $X$ , а  $B_{\alpha\beta}$  есть тензор обобщенных коэффициентов диффузии.

Если за векторную величину  $X$  принять вектор положения в обычном пространстве, то уравнение Фоккера-Планка будет описывать процессы переноса. Если же принять за  $X$  вектор скорости, то это уравнение будет описывать диффузию в пространстве скоростей.

## 11.2. Феноменология процессов переноса

Если за переменную  $X_\alpha$  принять координаты обычного пространства, то уравнение (11.3) представляет собой уравнение диффузии. Вектор  $\bar{A}$  представляет собой скорость макроскопического течения  $\bar{V}$ , а тензор  $B$  составлен из коэффициентов диффузии  $D_{\alpha\beta}$ .

При наличии магнитного поля диффузия анизотропна и коэффициент диффузии является тензорной величиной. Продольный коэффициент диффузии (вдоль магнитного поля  $\bar{H}$ ) сохраняет ту же величину, что и в отсутствие поля и определяется как



$$D_{||} \approx \frac{\ell^2}{\tau} \approx \ell \cdot V \approx \bar{V}^2 \cdot \tau, \quad (11.4)$$

где  $l$  - длина свободного пробега,  $\ell = V \cdot \tau$ ;

$\tau$  - среднее время передачи импульса.

Поперечный коэффициент диффузии проявляется в перескоке частицы с одной циклотронной орбиты на другую

$$D_{\perp} \approx \frac{\bar{V}^2}{\omega_c^2 \cdot \tau} \approx \frac{\ell \cdot V}{\omega_c^2 \cdot \tau^2}. \quad (11.5)$$

В замагниченной плазме при больших значениях величины  $\omega_c \cdot \tau$  поперечный коэффициент диффузии должен быть в  $(\omega_c \cdot \tau)^2$  раз меньше продольного и уменьшаться пропорционально квадрату напряженности магнитного поля.

Если вид распределения остается неизменным, то диффузионный поток определяется соотношением

$$\bar{J} = -\frac{1}{3} \cdot \langle \ell \cdot V \rangle \cdot \nabla n. \quad (11.6)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по основной функции распределения. Множитель пропорциональности между диффузионным потоком и градиентом концентрации носит название коэффициента диффузии  $D$ . Для плазмы без магнитного поля коэффициент диффузии имеет простую зависимость

$$D = \frac{\langle \ell \cdot V \rangle}{3}. \quad (11.7)$$

Для термической плазмы функция  $n(V)$  содержит в качестве параметра температуру  $T$ . Тепловой поток будет определяться в этом случае как



$$\bar{q} = -\frac{1}{3} \cdot \left\langle \frac{M \cdot V^3}{2} \cdot \ell \cdot \left( \frac{\partial n(V)}{\partial T} \right)_p \right\rangle \cdot \nabla T \equiv \lambda \cdot \nabla T, \quad (11.8)$$

где  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности. По порядку величины он равен произведению коэффициента диффузии на теплоемкость единицы объема при постоянном давлении. Обычно для коэффициентов используют формулы:

$$D \approx \frac{1}{3} \cdot \ell \cdot V, \quad (11.9)$$

$$\lambda = C_p \cdot \rho \cdot D, \quad (11.10)$$

где  $\rho$  - плотность,  $\ell$  - средний пробег. Здесь  $V$  рассматривается как средняя скорость теплового движения;

Отношение коэффициентов диффузии дает

$$\frac{D_{\perp}}{D_{\parallel}} = \frac{R_c^2}{V^2 \cdot \tau} = \frac{1}{\omega_c^2 \cdot \tau^2}, \quad (11.11)$$

которая пригодна для замагниченной плазмы, т.е. при  $\omega \cdot \tau \gg 1$ .

В переходной области действует формула вида

$$D_{\perp} = \frac{D_{\parallel}}{1 + \omega_c^2 \cdot \tau^2}. \quad (11.12)$$

Важнейшим фактором, определяющим процессы переноса в плазме, является действие электрических полей. Диффузия в плазме неизбежно приводит к разделению зарядов, а следовательно к появлению электрических полей. Ионы и электроны не могут диффундировать независимо друг от друга. Возникшее электрическое поле вынуждает их к совместной или амбиполярной диффузии. Для характеристики этого процесса вводят понятие подвижности частиц по Эйнштейну



$$\mu = \frac{Z_e}{T} \cdot D. \quad (11.13)$$

Поток амбиполярной диффузии обычно выражается как

$$J = -D_a \cdot \nabla n, \quad (11.14)$$

где коэффициент амбиполярной диффузии определяется как

$$D_a = \frac{2 \cdot D_e \cdot D_i}{D_e + D_i}. \quad (11.15)$$

В отсутствии магнитного поля  $H = 0$  коэффициент диффузии для электронов  $D_e \gg D_i$ , поэтому коэффициент амбиполярной диффузии оказывается равным удвоенному коэффициенту ионной диффузии

$$D_a \approx 2 \cdot D_i. \quad (11.16)$$

### 11.3. Кинетическая теория плазменных волн

Изменение функции распределения во времени и в пространстве описывается кинетическим уравнением Больцмана, которое выводится из рассмотрения движения частиц в фазовом пространстве. Из механики Гамильтона следует теорема Луивилля, выраженная законом сохранения фазового объема. Кинетическое уравнение без столкновений с использованием теоремы Луивилля можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \cdot f + \frac{1}{M} \cdot (\bar{F} \cdot \nabla_V) \cdot f = 0, \quad (11.17)$$

где  $M$  - масса частицы,



$\bar{F}$  - действующая на нее сила.

Применение метода самосогласованного поля к кинематическому уравнению дает:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \cdot f_k + \frac{Z_k \cdot e}{M_k} \cdot \left\{ \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \cdot [\bar{V} \cdot \bar{H}] \right) \cdot \nabla_V \right\} \cdot f_k = 0. \quad (11.18)$$

Индекс  $k$  нумерует разные сорта частиц в плазме. Если поля  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  находятся по уравнению Максвелла, то это уравнение Власова.

Рассмотрим высокочастотные линейные продольные колебания плазмы без внешнего магнитного поля. Движением иона можно пренебречь, тогда кинематическое уравнение для электронов имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \cdot f - \frac{e}{m} \cdot \left\{ \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \cdot [\bar{V} \cdot \bar{H}] \right) \cdot \nabla_V \right\} \cdot f = 0. \quad (11.19)$$

Дисперсионное уравнение можно представить как:

$$\omega_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(V) \cdot dV}{(\omega - k \cdot V)^2} = 1. \quad (11.20)$$

Приближенное решение дисперсионного уравнения можно получить для случая, когда функция распределения  $f$  быстро совпадает с возрастанием скорости и при фазовой скорости  $V = \frac{\omega}{k}$  уже мала. Это значит, что подынтегральная функция заметно отличается от нуля только в двух областях: при малых скоростях и в близи точки:

$$V = \frac{\omega}{k} \equiv U_\phi. \quad (11.21)$$

Интеграл разбивается на две части  $J_1$  и  $J_2$ , отвечающие





двум указанным областям.

Интеграл по области малых скоростей находится посредством разложения подынтегральной функции по степеням малой в этой области величины. Разлагая в биномиальный ряд величину

$\left(1 - \frac{k \cdot V}{\omega}\right)^2$  после интегрирования получим:

$$J_1 = 1 + 3 \cdot \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V^2 \cdot f \cdot dV + \dots; \quad (11.22)$$

$$J_2 = i \cdot \pi \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial V} \right]_{V=\frac{\omega}{k}}. \quad (11.23)$$

Подстановка  $J_1$  и  $J_2$  в дисперсионное уравнение и последующие преобразования дают дисперсионное уравнение вида:

$$\begin{aligned} \omega^2 &\approx \omega_0^2 + 3 \cdot k^2 \cdot \bar{V}^2; \\ \tilde{\omega} &= \omega - i \cdot \delta; \end{aligned} \quad (11.24)$$

$$\delta \approx -\frac{\pi \cdot \omega_0}{2} \cdot U_{\phi}^2 \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial V} \right]_{V=V_{\phi}} - \text{декремент затухания};$$

$\tilde{\omega}$  - комплексная частота.

Для плоской волны зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i \cdot \tilde{\omega} \cdot t}$ . Следовательно, положительные значения  $\delta$  отвечают затуханию, отрицательные – раскатке колебания. Если функция распределения  $f$  уменьшается при возрастании абсолютного значения скорости, то мнимый член приводит к затуханию колебаний. Раскатка получится только в случае, если у функции  $f$  имеется горб, при скоростях близких по величине и направлению к фазовой скорости волны.

Применим полученные результаты к случаю колебаний около состояния термодинамического равновесия. Нормирование функции распределения Максвелла имеет вид:



## Машиностроение

$$f = \sqrt{\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot T}} \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot T}}. \quad (11.25)$$

Усреднение квадрата скорости движения в одном направлении дает:

$$\overline{v^2} = \frac{T}{m}. \quad (11.26)$$

Для равновесной термической плазмы дисперсионное уравнение и декремент имеют следующий вид:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3 \cdot k^2 \cdot \frac{T}{m}, \quad (11.27)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \omega_0}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{\ell_D}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot k^2 \cdot \ell_D^2}}, \quad (11.28)$$

где  $\ell_D$  - дебаевская длина.

Таким образом, если длина волны меньше дебаевской, то затухание происходит за время порядка периода колебаний. Для длинных волн затухание экспоненциально мало, но частота длинных волн близка к плазменной.



## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Как изменится уравнение диффузии магнитного поля, если не пренебрегать током смещения?

**Решение.** При учете тока смещения магнитное поле  $\bar{H}$  и плотность тока проводимости  $\bar{j}$  связаны уравнением Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j}.$$

Выразив отсюда  $\bar{j}$  и подставив в выражение (6.2) вместо равенства (6.3), получим:

$$\bar{E} + \frac{1}{c} [v \bar{H}] = \frac{c}{4\pi\sigma} (\operatorname{rot} \bar{H} - \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}).$$

Взяв ротор от обеих частей равенства и учитывая  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} = -\Delta \bar{H}$ , получим уточненное уравнение диффузии магнитного поля:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [v \bar{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} (\Delta \bar{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}).$$

**Задача 2.** В приближении магнитной гидродинамики рассчитать стационарное вязкое течение плазмы в плоском канале между двумя параллельными плоскостями поперек постоянного магнитного поля.

**Решение.** Уравнение вязкого течения в магнитной гидродинамике:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho c} [j \bar{H}] + \bar{v} \Delta \bar{v}.$$

Если внешнее электрическое поле отсутствует, в сопутствующей системе координат на движущуюся плазму действует электрическое поле:

$$E^* = \frac{1}{c} [v \bar{H}].$$

В плотной плазме, где применимо приближение магнитной гидродинамики, т.е. выполнено условие  $\omega_c \tau \ll 1$ , можно пренебречь анизотропией проводимости и выразить плотность тока со-



гласно закону Ома:

$$\bar{j} = \frac{\sigma}{c} [\bar{v}\bar{H}].$$

Подстановка этого выражения в уравнение движения после раскрытия двойного векторного произведения дает:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho c^2} [\bar{H}(\bar{v}\bar{H}) - \bar{v}H^2] + \bar{v}\Delta\bar{v}.$$

Расположим ось  $x$  вдоль канала, и пусть приложенное внешнее магнитное поле  $\bar{H}_0$  направлено по оси  $z$ . При стационарном упорядоченном (ламинарном) течении скорость  $v$  направлена вдоль канала (по оси  $x$ ). При этом ток направлен по оси  $y$ . Скорость меняется только в направлении  $z$ , от координаты  $y$  ничто не зависит. В направлении движения плазма растягивает силовые линии и возникает составляющая поля  $H_x$ , связанная с плотностью тока уравнением Максвелла

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_y.$$

Поперечное поле не искажается течением плазмы:  $H_z = H_0$ .

Отсюда

$$H^2 = H_0^2 + H_x^2,$$

$$(\bar{v}\bar{H}) = vH_x,$$

и составляющая векторного уравнения движения по оси  $x$  приобретает вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2} v + v \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет общее решение:

$$a = \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot v}} = \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}},$$

где  $C' = -\frac{c^2}{\sigma H_0^2} \frac{\partial P}{\partial x}$ .

Для канала постоянного сечения и длины  $L$ :



$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L},$$

где  $\Delta P$  – напор, т.е. разность давлений между входом и выходом.

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничного условия: для вязкого течения скорость у стенок канала должна обращаться в нуль. Для канала полушириной  $d$ , если отсчитывать координату  $z$  от середины канала, находим  $v = 0$  при  $z = \pm d$ , откуда

$$C_1 = C_2 = \frac{C'}{2ch \cdot a \cdot d},$$

где  $ch$  – гиперболический косинус,

$$ch \alpha \cdot d = \frac{1}{2}(e^{\alpha \cdot d} + e^{-\alpha \cdot d}).$$

Подстановка значений постоянных интегрирования дает окончательно распределение скорости течения по ширине канала:

$$v = \frac{c^2 \Delta P}{\sigma H_0^2 L} \left(1 - \frac{ch \alpha \cdot z}{ch \alpha \cdot d}\right).$$

**Задача 3.** Считая заданной константу равновесия ионизации, вычислить равновесную степень ионизации для вещества, являющегося малой примесью в плазме, и для вещества, являющегося основным компонентом плазмы. Степенью ионизации называется отношение концентрации ионов к начальной концентрации атомов.

**Решение.** Для малой примеси концентрацию электронов можно считать заданной: она определяется ионизацией основного компонента плазмы. Тогда из условия равновесия ионизации мы имеем

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{K}{K + n_e}.$$

Если степень ионизации мала, то она обратно пропорциональна общей электронной концентрации в плазме.

Для основного компонента плазмы концентрация электронов определяется самим равновесием ионизации. Для первой ступени ионизации  $n_e = n_i$ . В этом случае мы имеем:

$$n_i^2 = K \cdot n_a.$$



## Машиностроение

Если степень ионизации велика, то заданной следует считать начальную концентрацию атомов

$$n_0 = n_a + n_i .$$

Тогда

$$n_i^2 = K \cdot (n_0 - n_i) ,$$

или

$$\left(\frac{n_i}{n_0}\right)^2 + \frac{K}{n_0} \frac{n_i}{n_0} - \frac{K}{n_0} = 0 .$$

Степень ионизации есть положительный корень квадратного уравнения

$$\frac{n_i}{n_0} = -\frac{1}{2} \frac{K}{n_0} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{K}{n_0}\right)^2 + \frac{K}{n_0}} .$$

Если степень ионизации мала, то  $n_i \ll n_0$  и приблизительно

$$n_i \approx \sqrt{K \cdot n_0} ,$$

или

$$\frac{n_i}{n_0} \approx \sqrt{K / n_0} .$$

В этом случае степень ионизации обратно пропорциональна корню квадратному из начальной концентрации.

**Задача 4.** Найти температурную зависимость равновесной концентрации электронов для слабоионизованной плазмы, имеющей основной компонент с энергией ионизации.

**Решение.** Согласно результату предыдущей задачи для основного компонента слабоионизованной плазмы

$$n_e = n_i \approx \sqrt{K} .$$

По формуле Саха температурная зависимость константы равновесия ионизации имеет вид

$$K \approx T^{3/2} e^{-\frac{J}{T}} .$$

Поскольку степень ионизации мала, то и возбужденных атомов будет немного, а следовательно, полные статистические веса совпадают со статистическими весами основных состояний и от температуры не зависят. Тогда



$$n_e \propto T^{3/4} e^{-\frac{J}{2T}}.$$

В узком температурном интервале удобно аппроксимировать зависимость степенной  $n_e \propto T^\alpha$ .

Для показателя степени получается:

$$\alpha = \frac{d \ln n_e}{d \ln T} \approx \frac{J}{2T} + \frac{3}{4}.$$

**Задача 5.** Вычислить равновесную степень ионизации паров цезия как функцию температуры и концентрации электронов.

**Решение.** Из таблицы приложения берем для цезия численные значения: энергия ионизации  $J = 3,893$  эВ; энергия возбуждения первого уровня атома  $E = 1,38$  эВ. Для основного состояния атома  $^2S$ :

$$L = 0; \quad S = \frac{1}{2}; \quad g_0 = 2.$$

Для первого возбужденного состояния атома  $^2P$ :

$$L = 1; \quad S = \frac{1}{2}; \quad g_1 = 6.$$

Для основного состояния иона  $^1S$ :

$$L = S = 0; \quad g_i = 1.$$

Энергия отрыва следующего электрона 25,1 эВ. Следовательно, возбужденные состояния иона лежат высоко и их можно не учитывать, т. е. пользоваться формулой (2.32). Подставив в нее численные значения, получим:

$$\frac{n_e}{n_a} = \frac{1}{1 + 3 \cdot e^{-\frac{1.38}{T}}} \cdot 3 \cdot 10^{21} \cdot e^{-\frac{3.893}{T}}.$$

Далее степень ионизации находится как в задаче 1.

**Задача 6.** Найти зависимость равновесной концентрации многозарядных ионов от температуры и концентрации электронов для вещества, присутствующего в плазме в качестве малой примеси, пренебрегая электронным возбуждением.



**Решение.** Последовательное применение формулы Саха к различным ступеням ионизации дает:

$$n_1 : : \frac{n_a}{n_e} T^{3/2} e^{-\frac{J_1}{T}} ;$$

$$n^2 : : \frac{n_1}{n_e} T^{3/2} e^{-\frac{J_2}{T}} : : \frac{n_a}{n_e^2} T^3 e^{-\frac{J_1+J_2}{T}} ;$$

$$n_i : : \frac{n_a}{n_e^i} T^{\frac{3}{2}i} e^{-\sum_1^i \frac{J_k}{T}} .$$

**Задача 7.** Выразить концентрацию трижды ионизованного кислорода O IV в плазме, где кислород присутствует в виде малой примеси.

**Решение** аналогично предыдущей задаче. Однако учитывая постоянные коэффициенты, получаем

$$\frac{n_{IV}}{n_I} = \frac{g_{IV}}{g_I} 2^3 \left( \frac{3 \cdot 10^{21}}{n_e} \right)^3 T^{9/2} e^{-\frac{J_I+J_{II}+J_{III}}{T}} ,$$

где по табл. приложения

$$g_1 = 9 + 5 \cdot e^{\frac{2.0}{T}} + e^{\frac{4.2}{T}} + \dots,$$

$$g_{IV} = 6 + 10 \cdot e^{\frac{15.7}{T}} + 2 \cdot e^{\frac{20.3}{T}} + 6 \cdot e^{\frac{22.2}{T}} + \dots,$$

$$J_I = 13.614; J_{II} = 35.146; J_{III} = 54.87.$$

**Задача 8.** Записать приближенно формулу Саха через дебройлевскую и комптоновскую длины волны электрона.

**Решение.** Дебройлевская длина волны электрона:

$$\lambda \sim \frac{h}{mv} .$$

В тепловом равновесии среднее значение скорости

$$v \sim \sqrt{\frac{T}{m}} ,$$

откуда





## Машиностроение

$$\lambda \sim \frac{h}{\sqrt{mT}}.$$

Сопоставляя с формулой Саха в симметричном виде, заключаем, что её можно приближенно записать как

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} \sim \frac{1}{\lambda^3} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Произведение

$$n_e \lambda^3 \approx \frac{n_e}{(mv)^3} h^3 -$$

порядок числа электронов в элементарной ячейке фазового пространства. Обозначив это число  $n_{\sigma}$  можем записать формулу Саха в виде

$$\frac{n_i}{n_a} \sim \frac{1}{n_{\sigma}} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}.$$

Через эту величину формула (2.24) запишем приближенно как

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} = \frac{1}{\lambda_C^3} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Входящая сюда величина  $mc^2$  есть собственная энергия электрона, равная 511 кэВ. Комптоновская длина волны электрона  $2,426 \cdot 10^{-10}$  см. Полученная формула удобна для грубых численных оценок.

**Задача 9.** Найти зависимость степени ионизации от концентрации для стационарного (но неравновесного) состояния ионизации в разреженной плазме, из которой излучение выходит свободно, так что ионизация происходит электронным ударом, а рекомбинация — с излучением. Ионизацией под действием излучения можно пренебречь из-за того, что излучение свободно выходит из системы,



рекомбинацией при тройных столкновениях — из-за малой плотности плазмы.

**Решение.** Приравнивая выражения  $\omega_1 = k \cdot n_0 \cdot n_e$  и  $\omega_1' = k' \cdot n_0' \cdot n_e'$ , получаем:

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_1}{k_2'} = K^*,$$

где величина  $K^*$  уже не может быть найдена из термодинамики, а определяется сечениями процессов ионизации и рекомбинации. Стационарное состояние ионизации не зависит от концентрации электронов. Степень ионизации

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{K^*}{1 + K^*}$$

независимо от того, является ли рассматриваемое вещество малой примесью или основным компонентом плазмы.

**Задача 10.** Вывести уравнение для скорости градиентного дрейфа, учитывая непрерывность изменения циклотронного радиуса.

**Решение.** Пусть магнитное поле направлено по оси  $z$  и меняется вдоль оси  $y$ . Радиус кривизны траектории частицы в каждой точке равен значению циклотронного радиуса для этой точки

$$\frac{ds}{d\vartheta} = R_c,$$

где  $s$  — расстояние вдоль траектории;  $\vartheta$  — угол между касательной к траектории и произвольным фиксированным направлением.

Если взять это направление вдоль оси  $x$ , то  $dx = ds \cdot \cos \vartheta = R_c \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta$ .

В дрейфовом приближении циклотронный радиус меняется медленно и его можно разложить в ряд

$$R_c = R_c(0) + \frac{dR_c}{dy} y + \dots, \text{ где } y \approx R_c \cos \vartheta.$$

Смещение частицы за один оборот



$$\Delta x = \frac{dR_c}{dy} \int_0^{2\pi} y \cos \vartheta d\vartheta \approx R_c \frac{dR_c}{dy} \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta.$$

Интеграл равен  $\pi$ , откуда дрейфовая скорость

$$v_H = \Delta x \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2} R_c \frac{dR_c}{dy} \omega_c,$$

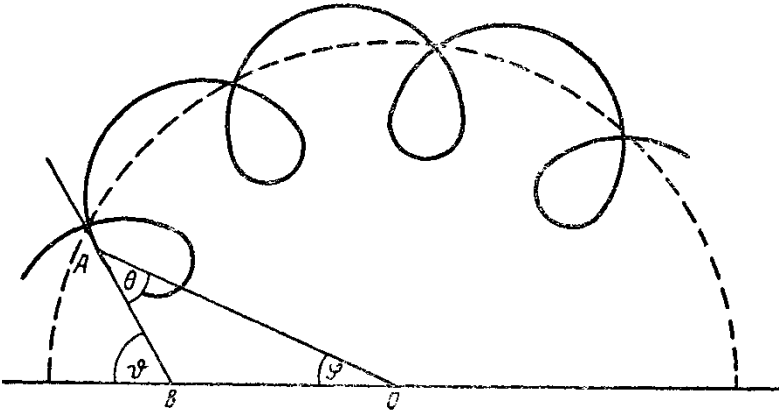
что совпадает с формулой  $\omega(E) = Ae \cdot \frac{E}{T}$

**Задача 11.** Рассмотреть движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока и сравнить с дрейфовым приближением.

**Решение.** Радиус кривизны траектории в каждой точке равен циклотронному радиусу частицы

$$\frac{ds}{d\vartheta} = R_c,$$

где  $s$  – расстояние вдоль траектории;  $\vartheta$  – угол между касательной к траектории и произвольным фиксированным направлением. Поскольку движение вдоль поля происходит по инерции, то его рассматривать не нужно. Будем считать, что искомая траектория лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Пусть проводник с током пересекает эту плоскость в точке  $O$ , которую примем за начало полярной системы координат. Проведем из точки  $O$  радиус-вектор к частице и угол между радиусом-вектором  $OA$  и касательной к траектории  $BA$  обозначим  $\theta$  (см. рисунок) и  $\varphi$  – угол между радиусом-вектором и произвольным фиксированным направлением  $Ox$ . Тогда  $\vartheta = \theta + \varphi$ ,  $dk = ds \cdot \cos \theta$ .



Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока

Для радиуса кривизны  $R$  получим уравнение:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds} = \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dr} + \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

С другой стороны, из рисунка видно, что

$$r \cdot d\varphi = dr \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

Комбинируя эти два уравнения, получаем

$$\frac{r}{R} \cdot d\varphi = \sin \theta \cdot (d\theta + d\varphi).$$

Для магнитного поля прямого тока  $H \propto 1/r$ ,  $R = R_c \propto r$ , т.е.  $r/R$  – величина постоянная. В этом случае легко найти угол между двумя соответственными положениями частицы:

$$\Delta\varphi = \frac{R}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \frac{R}{r} \sin \theta} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2} - 1}.$$

В дрейфовом приближении циклотронная орбита перемещается с дрейфовой скоростью:

$$|v_H| = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}}{H} R_c \left| \frac{dH}{dr} \right|.$$

Для магнитного поля прямого тока:

$$\frac{dH}{dr} = -\frac{H}{r},$$



откуда

$$|v_H| = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}}{r} R_c.$$

Угловое перемещение за один период

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi v_H}{\omega_c r} = \pi \left( \frac{R_c}{r} \right)^2.$$

Тот же результат получится, если точную формулу

$$\Delta\varphi = \frac{R}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{1 - \frac{R}{r} \sin\theta} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2} - 1}$$

разложить в ряд и отбросить члены со степенями  $R/r$ , начиная от четвертой. Очевидно, что дрейфовое приближение применимо только при условии, если  $R/r$  – малая величина.

**Задача 12.** Выразить в явном виде условие применимости дрейфового приближения для движения заряженной частицы в магнитном поле прямого тока.

**Решение.** Напряженность магнитного поля прямого тока

$$H = \frac{2J}{cr}, \text{ где } r \text{ – расстояние в плоскости, перпендикулярной к}$$

току.

Циклотронный радиус

$$R_c = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{Mc^2 v_{\perp} r}{2J \cdot Z \cdot e}.$$

Характерная длина изменения магнитного поля равна в данном случае расстоянию  $r$ , так как

$$\frac{d \ln H}{dr} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{R_c}{r} \ll 1$$

в согласии с результатом задачи 2. Подстановка значения  $R_c$  даст условие в явном виде

$$\frac{Mc^2 v_{\perp} r}{2J \cdot Z \cdot e} \ll 1.$$

Расстояние  $r$  сюда не входит, так что если дрейфовое приближение применимо, то оно применимо на любых расстояни-



ях.

**Задача 13.** На плазменный цилиндр наложено радиальное электрическое поле, заставляющее плазму вращаться. Найти энергию системы, считая, что вращение происходит со скоростью электрического дрейфа. Из сравнения с энергией цилиндрического конденсатора определить эффективную поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы.

**Решение.** Если вращение происходит со скоростью электрического дрейфа, то кинетическая энергия на единицу объема

$$\rho \frac{v_E^2}{2} = \rho c^2 \frac{E^2}{2H^2}.$$

Полная плотность энергии

$$\frac{E^2}{8\pi} + \rho c^2 \frac{E^2}{2H^2} = \frac{E^2}{8\pi} \left( 1 + \frac{4\pi\rho c^2}{H^2} \right).$$

Если рассматривать ту же систему как цилиндрический конденсатор, наполненный средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , то плотность энергии составит  $\frac{\varepsilon \cdot E^2}{8\pi}$ . Из сравнения находим эффективную диэлектрическую проницаемость плазмы поперек магнитного поля

$$\varepsilon_{\perp} = \left( 1 + \frac{4\pi\rho c^2}{H^2} \right).$$

в согласии с формулой, полученной из рассмотрения поляризационного дрейфа.

**Задача 14.** Как изменится скорость распространения прямых магнитогидродинамических и магнитозвуковых волн при приближении ее к скорости света?

**Решение.** Приближение фазовой скорости к скорости света означает малый показатель преломления, т.е. невыполнение условия

$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \gg 1$ . При этом получаем:

$$E = i \frac{4\pi\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} j.$$



Дисперсионное уравнение  $\omega_i \omega_e = i \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2}$  примет вид

$$\omega_i \omega_e = i \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2},$$

откуда для фазовой скорости  $u_\phi$  получаем:

$$\frac{1}{u_\phi^2} = \frac{1}{u_A^2} + \frac{1}{c^2},$$

где  $u_A$  – альфвеновская скорость. Таким образом, хотя формально альфвеновская скорость при малых плотностях и сильных магнитных полях может быть сколь угодно больше скорости света, скорость распространения магнитогидродинамических и магнито-звуковых волн не превышает скорости света. При частотах, низких в сравнении с ионной циклотронной, дисперсия по-прежнему отсутствует и групповая скорость равна фазовой.

**Задача 15.** Каково должно быть соотношение между циклотронными частотами и плазменной частотой, для того чтобы альфвеновская скорость была мала в сравнении со скоростью света?

**Решение.** Умножив обе части неравенства (4.12) на

$\frac{Z \cdot e^2}{M \cdot m \cdot c^2}$ , получим:

$$\frac{Z \cdot e^2 H^2}{M \cdot m \cdot c^2} \ll \frac{4\pi \cdot n \cdot e^2}{m},$$

т.е.  $\omega_i \cdot \omega_e \ll \omega_0^2$ . Это значит, что энергия магнитного поля должна быть мала в сравнении с собственной энергией ионов  $n_i M c^2$ . При  $\omega_i \cdot \omega_e \gg \omega_0^2$  магнитогидродинамические и магнито-звуковые волны распространяются со скоростью света.

**Задача 16.** Вычислить групповую скорость прямых магнито-звуковых волн в плотной плазме.

**Решение.** Дифференцирование приближенного дисперсионного уравнения дает  $u_\Gamma \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{k^2 c^2 (\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2)^2}{\omega_0^2 \omega \cdot \omega_i \omega_e}$ . Фазо-



вая скорость из того же уравнения  $u_{\Gamma} = \frac{\omega}{k} = \frac{c \sqrt{\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2}}{\omega_0}$ .

Исключив с помощью последнего соотношения волновое число, получим связь между групповой и фазовой скоростями:

$$u_{\Gamma} = u_{\phi} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \cdot \omega_e} \right).$$

В магнитоакустической области  $\omega_i \cdot \omega_e \geq \omega_0^2$ , и групповая скорость совпадает с фазовой. При приближении к электронно-ионной гибридной частоте групповая скорость стремится к нулю еще быстрее, чем фазовая.

**Задача 17.** Найти максимальное значение фазовой скорости волн с круговой поляризацией, распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля.

**Решение.** Из формулы  $N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e - \omega^2 \pm \omega \omega_e}$

получаем:

$$u_{\phi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\omega_0^2} (\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2 \pm \omega \cdot \omega_e); \quad \frac{du_{\phi}^2}{d\omega} = \frac{c^2}{\omega_0^2} (-2\omega \pm \omega_e).$$

Отсюда видно, что максимум имеется только для необыкновенной волны и достигается при частоте  $\omega = \frac{\omega_e}{2}$ . Фазовая

скорость при  $u_{\text{макс}} \approx \sqrt{\frac{c^2 \omega_e^2}{4\omega_0^2}} = \frac{1}{2} \frac{H}{\sqrt{4\pi \cdot m \cdot n}}$ .

Таким образом, максимальное значение фазовой скорости волн с круговой поляризацией равно половине «электронной альфвеновской скорости» с точностью до величин порядка отношения массы электрона к массе иона.

**Задача 18.** Получить формулу для гибридных частот из точного тензора электрической проницаемости холодной плазмы.

**Решение.** Для волны, распространяющейся поперек магнитного поля, показатель преломления обращается в бесконечность, если компонент  $\varepsilon = 8$ . Приравняв нулю правую часть





формулы  $\varepsilon = 1 + (\omega_{0e}^2 - \omega_{0i}^2) \frac{\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2}{(\omega_c^2 - \omega^2)(\omega_i^2 + \omega^2)}$ , получаем

для гибридной частоты биквадратное уравнение:

$$\omega_h^4 - \omega_h^2(\omega_0^2 + \omega_e^2 + \omega_i^2) + \omega_i \omega_e (\omega_0^2 + \omega_i \cdot \omega_e) = 0,$$

где  $\omega_0^2 = \omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2$ .

Если плазменная частота велика в сравнении с циклотронными частотами, то приближенные значения корней этого уравнения получаются отбрасыванием третьего и первого членов:

$$\omega_{h2}^2 \approx \omega_i \cdot \omega_e \frac{\omega_0^2 + \omega_i \cdot \omega_e}{\omega_0^2 + \omega_e^2 + \omega_i^2}.$$

Полученное значение для верхней гибридной частоты совпадает с формулой  $\omega_{h1}^2 \approx \omega_0^2 + \omega_{ci}^2$ , для нижней – отличается от

формулы  $\omega_{h2}^2 \approx \omega_i \cdot \omega_e - \frac{\omega_i \cdot \omega_e + \omega^2}{\omega_0^2 + \omega_i \cdot \omega_e + \omega_0^2}$  только на величину

порядка  $\frac{\omega_i}{\omega_e}$ .

**Задача 19.** Найти фазовую и групповую скорости электронных плазменных волн как функции частоты и температуры.

**Решение.** Выделив из дисперсионного уравнения волновое число, получим:

$$k^2 = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{u_e^2 + u_i^2}.$$

Откуда

$$u_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = (u_e^2 + u_i^2) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}; \quad u_r^2 = (u_e^2 + u_i^2) \cdot \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).$$

Здесь скорости звука являются известными функциями температуры ( $u_e = \gamma_e \frac{T_e}{m}$ ;  $u_i = \gamma_i \frac{T_i}{M}$ ).

Если температура стремится к нулю, то групповая скорость независимо от частоты обратится в нуль. Фазовая же скорость обращается при этом в нуль для всех частот,



кроме  $\omega = \omega_0$ , когда она становится неопределенной.

**Задача 20.** Найти зависимость резонансной частоты и фазовой скорости магнитного звука от эффективного погонного числа электронов в плотной горячей плазме.

**Решение.** Для плотной плазмы можем принять  $\tilde{\omega}_0^2 \approx \omega_0^2 \gg \omega_e^2$ ,  $N^2 \gg 1$ , после чего получаем дисперсионное уравнение следующего вида:

$$\frac{\omega_0^2}{k^2 c^2} - \frac{\omega_i \omega_e}{\omega^2 - k^2 u_3^2} + 1 = 0.$$

Отсюда частота находится в явном виде:

$$\omega^2 = k^2 u_3^2 + \frac{\omega_i \omega_e}{1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2}} \equiv k^2 u_3^2 + \frac{\omega_i \omega_e}{1 + \Pi^*},$$

где  $\Pi^*$  – эффективное погонное число электронов. Это выражение дает непосредственно резонансную частоту прямого магнитного звука в плотной горячей плазме. При малом погонном числе электронов она уже не стремится к гибридной частоте. Для фазовой скорости получаем:

$$u_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = u_3^2 + \frac{\omega_i \omega_e c^2}{\omega_0^2 + k^2 c^2} = u_3^2 + \frac{u_A^2}{1 + \frac{1}{\Pi^*}}.$$

При большом погонном числе электронов (в магнитоакустической области) фазовая скорость стремится к  $\sqrt{u_A^2 + u_3^2}$ . При малом погонном числе электронов она стремится к скорости ионного звука.

**Задача 21.** Найти зависимость фазовой скорости от частоты для магнитного звука в плотной горячей плазме.

**Решение.** В приближениях предыдущей задачи приводим уравнение  $\frac{\omega_0^2}{N-1} - \frac{\omega_i \omega_0}{1-N_0^2} + \omega^2 \left[ 1 + \frac{\omega_i}{\omega_0} \frac{N_0^2}{1-N_a^2} \right]$  к общему знаменателю и располагаем по степеням волнового числа  $k$ . Получается биквадратное уравнение:



$$k^4 c^2 u_3^2 + k^2 [\omega_0^2 u_3^2 + (\omega_i \omega_e - \omega^2) \cdot c^2] - \omega_0^2 \cdot \omega^2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня, описывающие коротковолновую и длинноволновую ветви колебаний. Один из корней для  $k^2$  всегда положителен, т. е. дает вещественное значение фазовой скорости. Для коротковолновой ветви (большие  $k$ ) пренебрегаем свободным членом, после чего для фазовой скорости получаем:

$$u_\phi^2 \approx \frac{\omega^2 u_3^2 c^2}{\omega^2 c^2 - (\omega_0^2 u_3^2 + \omega_i \omega_e c^2)}.$$

Эта ветвь дает вещественные решения только при высоких частотах

$$\omega^2 > \omega_i \omega_e + \frac{u_3^2}{c^2} \omega_0^2.$$

Фазовая скорость коротковолновой ветви больше скорости ионного звука и в предельном случае очень высоких частот стремится к ней.

Для длинноволновой ветви (малые  $k$ ) пренебрегаем высшей степенью  $k$ , после чего для фазовой скорости получаем выражение:

$$u_\phi^2 \approx u_3^2 + \frac{c^2}{\omega_0^2} (\omega_i \omega_e - \omega^2) = u_3^2 + u_A^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \omega_e}\right).$$

При низких частотах это решение стремится к (5.14). Кроме того, возможен промежуточный случай, когда корни биквадратного уравнения близки по абсолютной величине, т.е. коротковолновая и длинноволновая ветви не разделяются. Этот случай осуществляется при достаточно малых скоростях звука и частотах, близких к нижней гибридной  $\frac{u_3}{c} \ll \frac{\omega}{\omega_0}$ ;  $\omega \sim \sqrt{\omega_i \omega_e}$ .

При этом в левой части биквадратного уравнения можно пренебречь средним членом\*, и приближенное решение будет иметь вид

$$k^2 \approx \frac{\omega_0 \cdot \omega}{c u_3},$$

откуда



$$u_{\phi}^2 \approx \frac{\omega}{\omega_0} cu_3.$$

**Примечание.** \*Для квадратного уравнения  $x^2 + px - q = 0$  ( $p > 0, q > 0$ ) корни сильно отличаются, если  $q \ll p^2/4$ . Рассматриваемый случай, когда ветви не разделяются, осуществляется при условии  $q \gg p^2/4$ . При этом решение стремится к  $x = \sqrt{q}$ , т.е. можно пренебречь средним членом.

**Задача 22.** Найти фазовую скорость магнитного звука в плотной горячей плазме при электронно-ионной гибридной частоте.

**Решение.** Электронно-ионная гибридная частота в плотной плазме определяется соотношением  $\omega^2 = \omega_i \omega_e$ . При этом биквадратное уравнение предыдущей задачи принимает вид

$$k^4 + k^2 \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2 \omega^2}{c^2 u_3^2} = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$k^2 = -\frac{\omega_0^2}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^4}{4c^4} + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{c^2 u_3^2}}.$$

Если скорость звука велика  $u_3 \gg \frac{\omega}{\omega_0} c$ , то вещественный корень лежит на длинноволновой ветви  $u_{\phi} \approx u_3$ , т.е. фазовая скорость равна звуковой.

Если же скорость звука мала  $u_3 \ll \frac{\omega}{\omega_0} c$ , то осуществляется промежуточный случай

$$u_{\phi}^2 = \frac{\omega}{\omega_0} cu_3 = \sqrt{\frac{\omega_i \omega_e}{\omega_0}} cu_3 = u_A u_{\bar{z}}.$$

В этом случае фазовая скорость прямого магнитного звука равна средней геометрической из альфвеновской и звуковой скоростей.

**Задача 23.** Вывести общее выражение для потока амбиполярной диффузии в плазме произвольного состава и получить



из него простейшие частные случаи.

**Решение.** Подстановка результата (6.10) в равенство дает:

$$\mathbf{J} = D \left( -\nabla n + \frac{eE}{T} Z n \right)$$

и после подстановки в выражение  $\sum_k Z_k J_k = 0$  получим:

$$\sum_k Z_k D_k \nabla n_k = \frac{eE}{T} \sum_k Z_k^2 n_k D_k,$$

откуда

$$\frac{eE}{T} = \frac{\sum_k Z_k D_k \nabla n_k}{\sum_k Z_k^2 n_k D_k}.$$

Подстановка в равенство (5.21) дает:

$$\mathbf{J}_j = -D_j \frac{\nabla n_j \sum_k Z_k^2 n_k D_k - Z_j n_j \sum_k Z_k D_k \nabla n_k}{\sum_k Z_k^2 n_k D_k}.$$

Это и есть общее выражение для потока амбиполярной диффузии. Здесь индекс  $k$  нумерует все составные части плазмы, индекс  $j$  выделяет ту составную часть, для которой вычисляется поток. Если выделить электроны и нумеровать ионы разного рода индексом  $i$ , то получим:

$$\mathbf{J}_e = -D_e \frac{\sum_i Z_i^2 n_i D_i \nabla n_e + n_e \sum_i Z_i D_i \nabla n_i}{n_e D_e + \sum_i Z_i^2 n_i D_i}.$$

В общем случае диффузионный поток зависит от всех концентрационных градиентов. Если же вся плазма диффундирует как целое, то

$$\nabla n_i = \frac{n_i}{n_e} \nabla n_e,$$

и предыдущее выражение переходит в

$$\mathbf{J}_e = -D_a \nabla n_e,$$

где коэффициент амбиполярной диффузии



## Машиностроение

$$D_a = D_e \frac{\sum_i Z_i (Z_i + 1) n_i D_i}{n_e D_e + \sum_i Z_i^2 n_i D_i}.$$

При  $Z = 1$  получаем формулу (6.12). Если в плазме есть ион только одного рода с зарядовым числом  $Z$ , то с учетом условия  $D_{\perp} \approx \frac{R_c}{\tau}$

$$D_a = \frac{(Z + 1) D_e D_i}{D_e + Z D_i}.$$

При отсутствии магнитного поля  $D_e \ll D_i$  и  $D_a \approx (Z + 1) D_i$ ; поперек магнитного поля в замагниченной плазме  $D_e \ll D_i$ , откуда

$$D_a \approx \frac{Z + 1}{Z} D_e.$$

**Задача 24.** Найти длину экранирования, если концепция электронов плазмы составляет  $n_e = 10^{30} \text{ см}^{-3}$  при температуре 3000 К.

**Решение.** Длина экранирования

$$d = \sqrt{\frac{T}{4\pi \cdot n_e e^2}},$$

где  $T$  - в эВ;  $n_e$  - в  $\text{см}^{-3}$ ;  $d$  - в см.

**Задача 25.** Для плазмы, заключенной в цилиндр диаметра  $D$ , дать количественную формулировку второго условия замагниченности.

**Решение.** Должно выполняться условие  $R_c \ll D$ , которое после постановки  $R_c$  принимает вид  $\frac{V_{\perp} \cdot M_c}{Ze \cdot H} \ll D$ .

Возведем в квадрат и представим в виде:

$$\frac{V_{\perp}^2 \cdot M}{H^2} \ll \frac{Z^2 \cdot e^2}{M \cdot c^2} D^2.$$

Величина  $\frac{Z^2 \cdot e^2}{M \cdot c^2}$  - так называемый классический радиус частицы  $R_0$ . Он определяется из условия, что кулоновская энергия взаимодействия частицы (рассматриваемой как жесткий ша-



рик радиуса  $R_0$ ) с возбуждаемым его полем равна собственной энергии частицы  $M \cdot c^2$ . Умножим на  $n$  и приведем второе условие замагниченности к виду:

$$n \cdot \frac{V_{\perp}^2 \cdot M}{H^2} \ll R_0 \cdot D^2 \cdot n.$$

Здесь речь идет о порядках величин, поэтому левую часть можно представить как

$$\beta = \frac{4\pi \cdot n \cdot V_{\perp}^2 \cdot M}{H^2},$$

а правую как 
$$\Pi = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot R_0 n}{4}.$$

Таким образом  $\beta$  будет порядка отношения тепловой энергии и магнитной, а  $\Pi$  - порядка числа частиц на длине цилиндра, равной  $R_0$ , величину  $\Pi$  называют погонным числом частиц.

Следовательно, с точностью до порядка величины второе условие замагниченности можно записать в виде  $\beta \ll \Pi$ .

### Рекомендуемая литература

1. Франк – Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы /Д.А.Франк – Каменецкий. – М.: Атомиздат, 1966. – 284 с.
2. Новик А.Е. Газоразрядные лазеры /А.Е.Новик. – М.: Радио и связь, 1982. – 192 с.
3. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред /Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1978. – 560 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Данные для расчета равновесий ионизации \*  
Легкие элементы

| Z  | Элемент | Нейтральный атом   |                   |   | Однозарядный ион   |                   |                                      |
|----|---------|--------------------|-------------------|---|--------------------|-------------------|--------------------------------------|
|    |         | основное состояние | энергия ионизации | возбужденные состояния                                  | основное состояние | энергия ионизации | возбужденные состояния               |
| 1  | H       | $^2S$              | 13,595            | $^2S_{10,15}; ^2P_{10,15}$                              | —                  | —                 | —                                    |
| 2  | He      | $^1S$              | 24,580            | $^3S_{19,14}; ^1S_{20,5}$<br>$^3P_{20,96}; ^2P_{21,13}$ | $^2S$              | 54,403            | $^2S_{40,9}; ^2P_{40,9}$             |
| 3  | Li      | $^2S$              | 5,390             | $^2P_{1,84}$  | $^1S$              | 75,619            | $^3S_{58,8}$                         |
| 4  | Be      | $^1S$              | 9,320             | $^3P_{2,71}; ^1P_{5,25}$                                | $^2S$              | 18,206            | $^2P_{4,0}$                          |
| 5  | B       | $^2P$              | 8,296             | $^4P_{3,57}; ^2S_{4,94}$                                | $^1S$              | 25,149            | $^2P_{9,2}$                          |
| 6  | C       | $^3P$              | 11,264            | $^1D_{1,3}; ^1S_{2,7}; ^5S_{4,16}$                      | $^2P$              | 24,376            | $^4P_{5,2}; ^2D_{9,2}; ^2S_{11,95}$  |
| 7  | N       | $^4S$              | 14,54             | $^2D_{2,2}; ^2P_{3,6}$                                  | $^3P$              | 29,605            | $^1D_{1,89}; ^1S_{4,03}$             |
| 8  | O       | $^3P$              | 13,614            | $^1D_{2,0}; ^1S_{4,2}$                                  | $^4S$              | 35,146            | $^2D_{3,3}; ^2P_{4,9}$               |
| 9  | F       | $^2P$              | 17,418            | $^4P_{12,69}; ^2P_{12,98}$                              | $^3P$              | 34,98             | $^3P_{20,3}; ^5S_{21,6}; ^3S_{22,5}$ |
| 10 | Ne      | $^1S$              | 21,559            | $^3P_{16,62}; ^1P_{16,84}$                              | $^2P$              | 41,07             | $^2S_{26,8}; ^4P_{27,0}; ^2P_{27,6}$ |
| 11 | Na      | $^2S$              | 5,138             | $^2P_{2,10}$  | $^1S$              | 47,29             | $^3P_{32,5}; ^1P_{32,5}$             |
| 12 | Mg      | $^1S$              | 7,644             | $^3P_{2,71}; ^1P_{4,33}$                                | $^2S$              | 15,03             | $^2P_{4,4}; ^2S_{8,3}; ^2D_{8,3}$    |
| 13 | Al      | $^2P$              | 5,984             | $^2S_{3,13}; ^4P_{3,5}; ^2D_{4,0}; ^2P_{4,0}$           | $^1S$              | 18,823            | $^3P_{4,7}$                          |
| 14 | Si      | $^3P$              | 8,149             | $^1D_{0,80}; ^1S_{1,92}; ^3P_{4,93}$                    | $^2P$              | 16,34             | $^2D_{6,84}; ^2S_{8,09}$             |

\* все энергии даны в электрон-вольтах (эВ). Цифры при символах возбужденных состояний означают энергии возбуждения.





## ЧАСТЬ 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕНЕРАЦИИ ЛАЗЕРОВ

### ГЛАВА 12. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

#### 12.1. Структура атомов. Энергетические уровни. За- селенность уровней

Все окружающие нас тела состоят из атомов и молекул. Любой атом (молекула) состоит из совокупности электронов и атомных ядер, движение и взаимное расположение которых определяет значение внутренней энергии атома (молекулы). Каждый атом может обладать вполне определенными (квантованными) значениями энергии, т.е. находиться в том или ином энергетическом состоянии. Если построить диаграмму, откладывая по вертикали значение энергии атома, то каждому значению его энергии будет соответствовать свой уровень, и диаграмма состояний атома будет представлена рядом вполне определенных дискретных энергетических уровней.

Одним из методов нахождения возможных значений энергии является уравнение Шредингера

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \Psi = 0, \quad (12.1)$$

где  $E$  – полная энергия частицы с массой  $m$ , находящейся в силовом поле с потенциальной энергией  $U$ , являющейся функцией координат;  $\Psi$  – волновая функция координат и времени, непрерывная, конечная и однозначная во всех точках пространства;  $h$  – постоянная Планка. Решения уравнения (12.1) могут быть только при определенных значениях энергии  $E_i$  и избранных функциях  $\Psi_i$ . Возможные значения энергии называют собственными значениями энергии, а соответствующие им функции – собственными



функциями.

Например, для частицы, движущейся в параболической потенциальной яме (линейный гармонический осциллятор), возможные значения энергии, найденные из решения уравнения (12.1), различаются на одну и ту же величину  $\Delta E$ . Волновые же функции  $\Psi$ , соответствующие различным значениям энергии, различны. Диаграмма ее состояний представляется рядом вполне определенных дискретных, эквидистантно расположенных уровней.

Уравнение Шредингера для атома водорода имеет следующий вид

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( E + \frac{e^2}{r} \right) \Psi = 0. \quad (12.2)$$

Простейшим решением (12.2) является  $\Psi(r) = e^{-ra}$ , где  $a = m e^2 / \hbar^2$ , при  $E_1 = m e^4 / (2 \hbar^2)$ . Это решение соответствует основному состоянию атома. Вероятность пребывания электрона в шаровом слое между сферами радиуса  $r$  и  $r + dr$  оказывается при этом равной  $4\pi r^2 \Psi^2 dr$ , т.е. пропорциональной  $r^2 e^{-2ra}$ . Вероятность нахождения электрона на различных расстояниях от ядра имеет максимум при  $r = 1/a$ , что соответствует первому боровскому радиусу  $r = 0.53 \cdot 10^{-8}$  см.

Из (12.2) следует, что кроме состояний с минимальным значением энергии возможны также другие состояния со значением энергии  $E_i > E_1$ . При этом  $E_i = E_1 / i^2$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots$

Волновые функции  $\Psi_{ii}$  соответствующие энергиям  $E_{ii}$  сферически симметричны. Состояния атомов, волновые функции которых симметричны, называют  $s$ -состояниями.

Уравнение (12.2) имеет также решения, не обладающие сферической симметрией. Например, решения, соответствующие функциям вида  $\Psi_x = x f(r)$ ;  $\Psi_y = y f(r)$ ;  $\Psi_z = z f(r)$ , которые определяют  $p$ -состояния. Каждая из функций  $\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$  является решением для одного и того же значения энергии. В этом случае говорят, что  $p$ -состояния трехкратно вырождены, т.е. неразличимы по энергии.

Существуют решения (12.2) при волновой функции, пропорциональной  $x^2, xy, xz$  и т.д. Эти функции описывают  $d$ -состояния атома, при котором имеет место пятикратное вырождение. Оказывается, что нижний энергетический уровень  $p$ -состояния совпадает со вторым уровнем  $s$ -состояния. Значит, энергетический уровень атома  $E_2$  четырехкратно вырожден. Ниж-



ний уровень  $d$ -состояния совпадает со вторым уровнем  $p$ -состояния, что приводит к соответствующему вырождению уровня  $E_3$  и т. д. Однако это свойство вырождения присуще только кулоновскому потенциалу. Для всякого другого потенциала  $s$ - и  $p$ -расстояния имеют различные энергии.

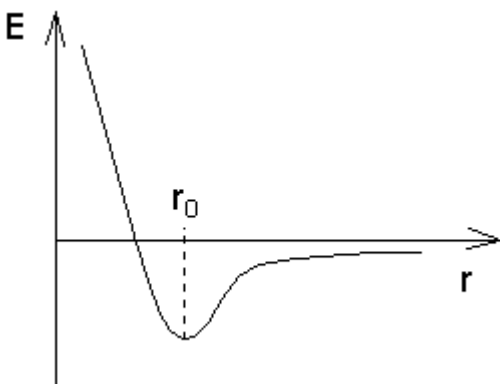
Более сложные атомы обладают вполне определенными энергетическими уровнями и их состояния могут быть представлены в виде соответствующих энергетических диаграмм. Атом с порядковым номером  $z$  (в таблице Менделеева) состоит из ядра с положительным зарядом  $ze$ , окруженного электронами. Если пренебречь взаимодействием между электронами, можно считать, что каждый электрон движется независимо от других в потенциальном поле  $U = z e^2 / r$ , т.е. в уравнении Шредингера нужно заменить  $U = - e^2 / r$  на  $U = - z e^2 / r$ . Очевидно, что при этом получим те же энергетические уровни, отличающиеся от уровней атома водорода только масштабом. Чтобы найти уровни всего атома нужно распределить все  $z$  электронов в соответствии с принципом Паули. При этом, если уровень имеет параметр вырождения  $g$ , т.е. представляет собой совпадение  $g$  уровней, то на таком уровне могут находиться  $2g$  электронов.

Фактически, в отличие от нашего предположения, для всех атомов (кроме водородного) выражение для потенциала будет отличаться от кулоновского потенциала, так как будет сказываться наличие других электронов. Это выражается в том, что отрицательное зарядное облако электронов, находящихся ближе к ядру, будет экранировать поле ядра. Поэтому электрон на высшем энергетическом уровне будет находиться не точно в кулоновском поле. В результате этого, энергетические уровни, например  $2s$  и  $2p$  или  $3p$  и  $3d$  не совпадают, как это имело место в атоме водорода. Разделение уровней увеличивается по мере перехода к более тяжелым элементам. Таким образом, для каждого атома будем иметь свою диаграмму энергетических состояний.

Два или несколько атомов могут образовать молекулу, структура которой имеет строго определенное расположение атомов в пространстве, что является следствием действия между атомами сил притяжения и отталкивания. Химическая связь осуществляется с участием внешних электронов атомов. При сближении, например двух атомов водорода, с больших расстояний они вначале притягиваются (если спины их электронов антипараллельны). Энергия взаимодействия имеет минимум на расстоянии порядка боровского радиуса. Для меньших расстояний притяжение переходит в отталкивание. Минимум  $E(r)$  определяет



равновесное состояние и энергию связи или энергию диссоциации молекулы водорода (Рис. 12.1). Атомы в молекуле колеблются около равновесного положения  $r_0$  с некоторой амплитудой, величина которой возрастает при увеличении температуры. Молекула в целом также вращается. Колебательная и вращательная энергии согласно законам квантовой механики могут принимать только дискретные (квантованные) значения. Расстояние между энергетическими уровнями, соответствующие колебательной энергии, значительно меньше, чем расстояние между уровнями электронной энергии. Различие между уровнями ротационных квантовых состояний еще меньше.



В двухатомных молекулах энергия колебательных квантовых состояний определяется из соотношения

$$E_K = (v + 1/2) h\omega, \quad (12.3)$$

где  $v = 0, 1, 2, \dots$  - колебательные квантовые числа;  $\omega$  - частота колебаний атома.

В общем случае для линейной молекулы (в которой все ядра расположены на одной прямой), состоящей из  $N$  атомов (Рис. 12.2, а) имеется  $r = 3N - 5$  колебательных степеней свободы. Для нелинейной молекулы число степеней свободы равно  $r = 3N - 6$ . Так, линейная трехатомная молекула  $CO_2$  имеет четыре колебательные степени свободы. Однако двум степеням свободы соответствуют одинаковые частоты нормальных колебаний, т.е. дважды вырожденные колебания. Для четырехатомной молекулы аммиака (Рис.12.2, б) число степеней свободы  $r = 6$  и т. д.

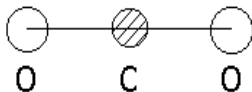
В линейных молекулах возможны ротационные состояния с энергией



$$E_B = J(J + 1) \frac{h^2}{8\pi^2 I}$$

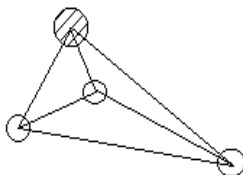
, (12.4)

а)



CO<sub>2</sub>

б)

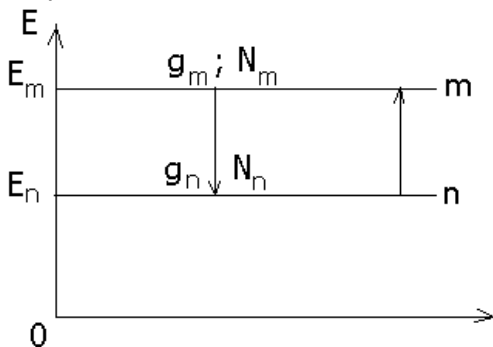


NH<sub>3</sub>

где  $I$  - момент инерции молекул;  $J = 0, 1, 2, \dots$  - ротационное квантовое число (может изменяться только на  $\Delta J = \pm 1$ ). Различным значениям  $J$  соответствуют различные значения момента импульса. Для нелинейных многоатомных молекул

схема вращательных уровней энергии усложняется тем более, чем менее симметрична молекула.

В квантовой электронике обычно имеют дело с большим числом атомов, представляющим целый ансамбль частиц. Достаточно вспомнить, что в одном кубическом сантиметре газа при нормальных условиях (температуре  $t = 0^\circ\text{C}$  и давлении, равном 133.3 Па) находится  $2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  атомов (число Лошмидта), а в твердом теле - около  $10^{22} \text{ см}^{-3}$ .



Частицы, входящие в состав ансамбля, непрерывно взаимодействуют между собой, что приводит к вполне определенному распределению их по энергиям. При термодинамическом равновесии распределение частиц по энергиям подчиняется закону Больцмана, согласно которому вероятность пребывания атома в состоянии  $i$  с энергией  $E_i$  равна



$$P_i = C e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (12.5)$$

где  $C$  – константа;  $T$  – абсолютная температура;  $k$  – постоянная Больцмана,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж / °С.

Таким образом, из общего числа частиц ансамбля  $N_0$  на уровне  $i$  находятся

$$N_i = N_0 C e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad (12.6)$$

Отношение числа частиц, пребывающих в состоянии  $m$ , с энергией  $E_m$  к числу частиц с энергией  $E_n$  будет

$$N_m / N_n = e^{-(E_m - E_n) / kT}. \quad (12.7)$$

В случае, если одному энергетическому уровню атома соответствует несколько различных его устойчивых состояний, то данный энергетический уровень вырожден. Число  $g$  различных независимых состояний с одинаковым значением энергии определяет кратность вырождения или статистический вес уровня.

Отношение населенностей двух вырожденных уровней  $m$  и  $n$  при их статистических весах  $g_m$  и  $g_n$  в отличие от (12.7) определяется соотношением

$$N_m / N_n = (g_m / g_n) e^{-(E_m - E_n) / kT}. \quad (12.8)$$

Из (12.7) и (12.8) следует, что при термодинамическом равновесии число частиц, находящихся на верхнем энергетическом уровне, оказывается меньше, чем на нижнем. Причем. Чем выше располагается энергетический уровень, тем меньше находится на нем частиц. На рис.12.3 представлена диаграмма энергетических уровней. Длина горизонтальной черты (на рисунке) определяет населенность того или иного уровня.



## 12.2. Излучение и поглощение света атомами: спонтанное и индуцированное излучение, поглощение

Свет представляет собой электромагнитные волны. Энергия электромагнитного поля света также квантована. Каждый квант энергии излучения (фотон) равняется  $h\nu$ , где  $\nu$  - частота колебаний, а  $h$  - постоянная Планка. Таким образом, энергия фотона прямо пропорциональна частоте и возрастает с уменьшением длины волны.

Атом может взаимодействовать с электромагнитным излучением, изменяя при этом свое энергетическое положение. При поглощении электромагнитной энергии происходит переход атома в состояние с большим значением энергии, а значит переход его на более высокий энергетический уровень. При переходе на нижний энергетический уровень происходит испускание энергии в виде кванта света.

Если атом находится в верхнем энергетическом состоянии с энергией  $E_m$ , то имеется определенная вероятность того, что через некоторое время он перейдет в нижнее состояние, определяемое энергией  $E_n$  и при этом произойдет излучение кванта света, величина которого будет равна

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n. \quad (12.9)$$

Вероятность перехода атома с одного энергетического уровня на другой имеет две составляющие. Первая зависит от свойств атома и не зависит от внешних факторов. Вторая – линейно зависит от плотности энергии поля (соответствующей частоте перехода), действующего на атом извне. Первая определяет так называемое спонтанное излучение, вторая – вынужденное индуцированное. При воздействии света частотой  $\nu_{mn}$  на атом, находящийся на нижнем энергетическом уровне  $n$ , происходит поглощение фотона  $h\nu_{mn}$ , сопровождаемое переходом атома на верхний уровень  $m$ . Спонтанного перехода атома с нижнего уровня на верхний не происходит.

Индуцированное и спонтанное излучение впервые были рассмотрены Эйнштейном. Им теоретически были выведены коэффициенты спонтанного и индуцированного излучений  $A$  и  $B$  (получившие название коэффициентов Эйнштейна), а также установлено соотношение между ними. Коэффициент спонтанного



перехода  $A_{mn}$  определяет вероятность спонтанного перехода изолированного атома в единицу времени с уровня  $m$  на уровень  $n$ . Коэффициенты вынужденного излучения и поглощения  $B_{mn}$  и  $B_{nm}$  определяют вероятность соответствующих переходов в единицу времени при воздействии на атом электромагнитной энергии со спектральной плотностью, равной единице.

Эйнштейн, рассматривая совокупность молекул, находящихся в тепловом равновесии, на основе заключения о том, что при установившемся состоянии каждая часть элементарного объема должна излучать в единицу времени на данной частоте столько же энергии, сколько она ее поглощает, установил соотношение

$$\rho_\nu B_{nm} N_n = \rho_\nu B_{mn} N_m + A_{mn} N_m. \quad (12.10)$$

Здесь  $\rho_\nu$  - плотность энергии излучения на соответствующей частоте перехода между уровнями  $m$  и  $n$ ;  $\rho_\nu B_{nm}$  - вероятность вынужденных переходов в единицу времени с уровня  $n$  на уровень  $m$  под влиянием излучения с плотностью энергии  $\rho_\nu$ , т.е. вероятность поглощения;  $\rho_\nu B_{mn}$  - вероятность вынужденных переходов с уровня  $m$  на уровень  $n$ , т.е. вероятность вынужденного излучения. Левая часть уравнения (12.10) определяет поглощенную в единицу времени энергию, а правая – полную энергию излучения при вынужденных и спонтанных переходах.

Поскольку при термодинамическом равновесии отношение населенностей уровней определяется уравнением (12.8), то решая совместно систему уравнений (12.8), (12.9) и (12.10) относительно плотности энергии излучения  $\rho_\nu$  находим

$$\rho_\nu = \frac{A_{mn} / B_{mn}}{(g_n B_{nm} / g_m B_{mn}) e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (12.11)$$

С другой стороны, известно, что излучение абсолютно черного тела определяется формулой

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT}}. \quad (12.12)$$

Сравнение (12.11) и (12.12) приводит к заключению, что

$$g_n B_{nm} = g_m B_{mn} \quad (12.13)$$





и что соотношение между коэффициентами спонтанного и вынужденного излучений имеет вид

$$A_{mn} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} h\nu B_{mn} . \quad (12.14)$$

На основе (12.14) проведем оценку. Так, при частоте  $\nu = 6 \cdot 10^{14}$  Гц (длина волны 0.5 мкм) и плотности потока 1 мВт/см<sup>2</sup>  $A_{mn} \approx B_{nm}$ , т.е. индуцированное излучение значительно преобладает над спонтанным даже при очень малых плотностях энергии излучения.

Если энергетические уровни частицы не вырождены, то, как это следует из теории Эйнштейна,  $B_{mn} = B_{nm}$ , т.е. коэффициент вынужденного излучения, соответствующий переходу с уровня  $m$  на уровень  $n$ , оказывается численно равным коэффициенту поглощения, определяемому переходом частицы с уровня  $n$  на уровень  $m$ .

### 12.3 Принцип действия лазеров

Представим себе ансамбль, состоящий из  $N_0$  атомов в единице объема, и пусть на него действует электромагнитное излучение с частотой  $\nu_{mn}$  и спектральной плотностью потока энергии  $\rho_\nu$ . Пусть  $N_m$  и  $N_n$  число атомов, находящихся соответственно на верхнем и нижнем энергетическом уровнях. Тогда число поглощенных ансамблем фотонов за время  $dt$ , равное числу переходов атомов с уровня  $n$  на уровень  $m$ , будет  $N_n B_{nm} \rho_\nu dt$ , при этом поглощенная ансамблем энергия равна

$$W_{\text{пол}} = N_n B_{nm} \rho_\nu h\nu_{mn} dt . \quad (12.15)$$

Общее число переходов атомов с  $m$  на  $n$ , как спонтанных, так и вынужденных, за то же время будет  $N_m B_{mn} \rho_\nu dt + N_m A_{mn} dt$ . Так как  $A_{mn} \ll B_{mn}$ , то излученная энергия определяется как

$$dW_{\text{изл}} = N_m B_{mn} \rho_\nu h\nu_{mn} dt . \quad (12.16)$$



## Машиностроение

Если  $dW_{изл}$  будет больше, чем  $dW_{полн}$ , то произойдет усиление интенсивности падающей на систему электромагнитной волны. Следовательно, условием усиления является

$$N_m B_{mn} \rho_v h \nu_{mn} dt > N_n B_{nm} \rho_v h \nu_{nm} dt .$$

Подставив значение  $B_{mn}$  из (12.13), получим

$$N_m > N_n g_m / g_n . \quad (12.17)$$

При невырожденных энергетических уровнях  $g_m = g_n = 1$  из (12.17) следует, что  $N_m$  должно быть больше  $N_n$ . Таким образом, приходим к заключению, что условием усиления электромагнитной волны ансамблем атомов является распределение в нем населенностей по энергетическим уровням, противоположное условию термодинамического равновесия. Число молекул на верхнем энергетическом уровне в отличие от больцмановского распределения должно быть больше, чем на нижнем. Это основное условие, которое лежит в основе принципов работы всех типов квантовых усилителей и генераторов.

В случае, когда  $N_m$  будет меньше  $N_n$ , в ансамбле молекул в большей мере будут осуществляться переходы с нижнего уровня на верхний при поглощении фотонов, чем с верхнего на нижний. При этом ансамбль молекул будет являться поглощающей средой, ослабляющей проходящую через него электромагнитную волну.

Мгновенная мощность излучения ансамблем атомов при наличии поглощения будет равна

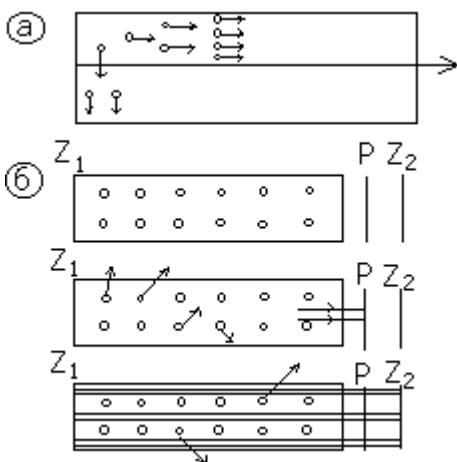
$$dW/dt = (N_m B_{mn} - N_n B_{nm}) \rho_v h \nu . \quad (12.18)$$

При  $g_m = g_n = 1$   $dW/dt = (N_m - N_n) B_{mn} \rho_v h \nu$ . Из (12.18) следует, что мощность излучения пропорциональна разности населенности энергетических уровней. Таким образом, при создании квантового генератора необходимо прежде всего выполнение таких условий, при которых в ансамбле частиц населенность верхнего энергетического уровня была по возможности больше населенности нижнего. Для этого необходимо предварительно ансамбль подвергнуть соответствующему воздействию, которое привело бы к должному перераспределению частиц по энергиям. Такого рода воздействие, называемое накачкой, по существу



сводится к возбуждению частиц ансамбля. Оно может быть осуществлено различными способами, например путем облучения ансамбля потоком фотонов или электронов, обладающих такой энергией, при которой происходит переход частиц на верхний рабочий уровень  $m$  с одного из уровней  $i$ , расположенных ниже уровня  $n$ , а потому обладающих значительно большей населенностью, чем населенность нижнего рабочего уровня.

Если теперь, после того, как была произведена накачка и осуществлена инверсия, т.е. достигнута соответствующая перенаселенность энергетических уровней, ансамбль частиц подвергнуть



в каком-либо направлении облучению потоком фотонов слабой интенсивности, но имеющим частоту, равную частоте рабочего перехода с уровня  $m$  на уровень  $n$ , то в результате взаимодействия с частицами ансамбля произойдет их размножение. Действительно, взаимодействие какого-либо фотона частоты  $\nu_{mn}$  с возбужденной частицей приведет к вынужденному излучению фотона такой же частоты  $\nu_{mn}$ , распространяющегося в том же направлении. В результате акта взаимодействия окажется уже два фотона, которые распро-

страняясь дальше и встретив соответственно две возбужденные частицы, породят еще два фотона, четыре фотона, затем превращаются в 8, 16 и т. д. (Рис. 12.4, а). В таком размножении будут участвовать все взаимодействующие с частицами фотоны потока электромагнитной энергии, которым был освещен ансамбль. В результате на выходе из области, где был расположен ансамбль рабочих молекул, интенсивность пучка света будет значительно превосходить интенсивность на входе (Рис.12.4, б).

Все вышеизложенное приводит нас к заключению о возможности усиления электромагнитных волн при индуцированном из-



## Машиностроение

лучении в некотором ансамбле атомов при условии, что большинство атомов находится в верхнем из двух энергетических состояний, связанных соответствующим переходом.

Из (12.15) и (12.16) следует (принимая во внимание, что интенсивность и плотность энергии связаны соотношением  $\rho = I/c$ ), что если излучение пройдет слой, заполненный активными атомами, равный  $dx$ , то на пути  $dx$  приращение его интенсивности будет равно

$$dI = \frac{I}{c} h\nu_{mn} (N_m B_{mn} - N_n B_{nm}) dx .$$

Отсюда, интегрируя, находим изменение интенсивности на пути  $l$ :

$$I = I_0 e^{\frac{h\nu_{mn}}{c} (N_m B_{mn} - N_n B_{nm}) l} . \quad (12.19)$$

Вводя понятие о поперечных сечениях взаимодействия фотона с атомом на соответствующих переходах  $\sigma_{mn} = B_{mn} h\nu_{mn}$  и  $\sigma_{nm} = B_{nm} h\nu_{nm}$  и принимая во внимание (12.13), выражение (12.19) можно представить в следующем виде:

$$I = I_0 e^{\alpha l} , \quad (12.20)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\sigma_{mn}}{c} (N_m - \frac{g_m}{g_n} N_n) .$$

Формула (1.20) представляет известный закон Бугера, где  $\alpha$  - имеет положительное значение, когда  $N_m > (g_m/g_n) N_n$  т.е. при наличии инверсии, и определяет коэффициент усиления. Отрицательное значение коэффициента  $\alpha$  имеет при обычном термодинамическом равновесии, и в этом случае ансамбль атомов представляет собой поглощающую среду. На рис. 12.4, б изображено распространение излучения в усиливающей среде.

Как следует из (12.20), степень усиления излучения определяется произведением  $\alpha l$ . Очевидно, что значительное усиление на небольшом пути возможно лишь при очень больших значениях коэффициента  $\alpha$ , т.е. при достижении весьма высокой инверсии. В противном случае для этого требуется значительное



расстояние, на котором происходит размножение фотонов.

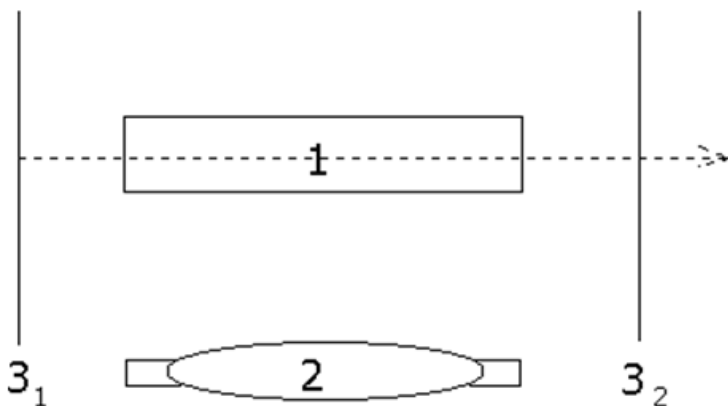


Рис. 12.5. Принципиальная схема оптического квантового генератора: 1 – рабочее тело; 2 – элемент подкачки;  $3_1$  – глухое зеркало;  $3_2$  – зеркало, частично пропускающее излучение

Однако, если ансамбль поместить в резонатор, самым простым вариантом которого является система, состоящая из двух параллельно расположенных плоских зеркал (Рис. 12.5), то излучение, прежде чем покинуть резонатор, претерпевает большое число отражений от зеркал, и, таким образом, при этом имеется большая эффективная длина. В резонаторе, настроенном на частоту колебаний атомов (молекул), находящихся в нем, будет происходить интенсивное индуцированное излучение. Если испускаемая энергия будет больше потерь в резонаторе, то становится возможным усиление поступающего в резонатор излучения. В тех случаях, когда индуцированное излучение окажется достаточным не только для преодоления потерь в резонаторе, но и в различных его нагрузках, оказывается возможным также и генерирование электромагнитных волн.

Из вышеизложенного следует, что необходимыми элементами любого лазера, как правило, являются следующие.

1. Ансамбль молекул, представляющих собою рабочее вещество, в котором может быть осуществлена инверсия, т.е. распределение по энергиям, несвойственное термодинамическому равновесию, удовлетворяющее условию  $N_m > N_n g_m / g_n$ .

2. Устройство, в котором используется какое-либо физическое воздействие на рабочее вещество, позволяющее осуще-



ствить инверсию, т.е., как принято говорить, накачку. Накачка может быть осуществлена либо путем воздействия на рабочее тело потоком фотонов или электронов, либо каким-нибудь другим способом.

3. Элемент, при помощи которого и в котором осуществляется достаточно интенсивное взаимодействие излучения с веществом и в котором происходит отбор энергии от ансамбля молекул. Это обычно резонатор.

4. Устройство, обеспечивающее вывод энергии, удовлетворяющее необходимым требованиям и позволяющее осуществить локализацию энергии и доставку ее к месту назначения.

5. Дополнительные элементы, зависящие от того, для какой цели предназначается лазер. Сюда относятся различного рода приборы управления лучом, модуляторы, сканаторы и др.

## 12.4. Классификация лазеров

В настоящее время существует большое количество лазеров, отличающихся друг от друга либо одним, либо несколькими из перечисленных выше элементов. Эти отличия могут быть принципиального характера, когда работа лазеров базируется на различных физических явлениях, как, например, в лазерах, у которых в качестве рабочего вещества используются газы или твердое тело. В связи с этим при изучении лазеров необходима их классификация.

Основное общепринятое деление всех существующих лазеров на группы производится по агрегатному состоянию рабочего вещества:

- Лазеры на твердом теле;
- Газовые лазеры;
- Жидкостные лазеры;
- Полупроводниковые лазеры.

Лазеры на полупроводниках выделяются в отдельную группу, хотя используемые в квантовой электронике полупроводники, по существу, являются твердыми телами. Объясняется это тем, что физические явления, протекающие при генерации в полупроводниках, существенно отличаются от явлений, протекающих в обычных твердотельных лазерах.

В свою очередь, каждая из перечисленных групп может быть подразделена на более мелкие подгруппы.



В твердотельных лазерах рабочим ансамблем атомов являются примесные атомы, введенные в небольших количествах в основную матрицу твердого тела, которая может быть кристаллической или аморфной. Например, рубин представляет собой корунд ( $Al_2O_3$ ), в кристаллической решетке которого часть атомов Al заменена атомами Cr, или стекло (является аморфным телом) с примесью неодима. Рабочими атомами в этом случае являются соответственно атомы хрома и неодима.

Инверсия в твердотельных лазерах достигается воздействием потоков фотонов соответствующей частоты на примесные атомы рабочего тела, т.е. при помощи оптической накачки, осуществляемой путем использования специальных газоразрядных ламп. Поэтому, твердотельные лазеры подразделяются на две подгруппы: с кристаллической и аморфной матрицами.

В газах могут быть использованы энергетические уровни атомов, ионов или молекул, в связи с этим газовые лазеры подразделяются на атомарные, ионные и молекулярные.

Рабочие уровни ионов располагаются на энергетической диаграмме выше, чем уровни атомов, а расстояние между ними больше, что приводит к более коротковолновому излучению ионных лазеров по сравнению с атомарными лазерами. Ввиду того, что вероятность ионных переходов, как правило, больше вероятности атомных переходов, мощность ионных лазеров значительно больше атомарных.

В молекулярных лазерах используются энергетические уровни, соответствующие колебательным и вращательным движениям атомов и молекул. Данные уровни расположены ниже атомных уровней, и интервалы между ними значительно меньше. Вследствие этого излучение молекулярных газовых лазеров более длинноволновое, соответствующее инфракрасной части спектра, а коэффициент полезного действия их на много больше атомарных и ионных лазеров. Кроме вышеуказанных трех подгрупп газовых лазеров в отдельные группы могут быть выделены лазеры на парах металлов, например, Cu, Pb и т. д.

К первой подгруппе лазеров, работающих на атомных переходах, относятся, например, лазеры с чистыми инертными газами He, Ne, Ar, Kr, на смеси He-Ne и др. Типичным представителем второй подгруппы является аргоновый лазер. К третьей подгруппе молекулярных лазеров относятся лазер на  $CO_2$ , парах воды, на смеси  $CO_2 + He + N_2$  и т. д.

Рассмотренные подгруппы газовых лазеров могут быть, в свою очередь, подразделены на лазеры с однородным газом и



лазеры, в которых к основному рабочему газу прибавляется примесь других газов для осуществления условий создания наибольшей инверсии. Например, в первой подгруппе лазеры на чистом Ne и лазер на смеси Ne- Ne, в третьей подгруппе – лазер на  $\text{CO}_2$  и лазер на  $\text{CO}_2 + \text{He} + \text{N}_2$  и т. д.

В подавляющем большинстве случаев инверсия в газовых лазерах осуществляется при прохождении электрического тока через рабочий газ. При электрическом разряде в газе происходит столкновение электронов и ионов с нейтральными частицами газа, а также столкновение нейтральных частиц между собой. В результате этих столкновений при определенных условиях осуществляется инверсия, необходимая для генерации излучения. В газовых лазерах оптическая накачка используется весьма редко. К таким лазерам относится, например, лазер на парах цезия.

Лазеры, рабочим веществом у которых является жидкость, принято подразделять на две подгруппы. В первую подгруппу входят лазеры, рабочим веществом у которых являются растворы неорганических соединений, во вторую – растворы различных органических красителей. К первой подгруппе относятся лазеры на растворах солей неодима в неорганических жидкостях, например, на оксиде хлорида селена с четыреххлористым оловом ( $\text{SeOCl}_2 : \text{SnCl}_4$ ). Рабочими атомами в этом случае являются атомы неодима. Ко второй подгруппе относятся, например, лазеры на растворах пиронина, родамина, триафлавита и др.

В жидкостных лазерах инверсия осуществляется при помощи оптической накачки.

В полупроводниковых лазерах рабочим телом является кристалл полупроводника. Генерация осуществляется при рекомбинации неравновесных электронов и дырок при соответствующих переходах носителей. Полупроводниковые лазеры подразделяются на две основные подгруппы.

Лазеры, в которых рабочим телом являются кристаллы полупроводники, изготовленные таким образом, что одна их часть обладает электронной проводимостью (n – тип), а другая – проводимостью, обусловленной наличием дырок (p – тип). В этих условиях на границе, называемой p - n – переходом, возникает большой градиент концентрации как электронов, так и дырок. Инверсия в данном случае осуществляется при инжекции носителей тока через p - n - переход под влиянием прикладываемой к кристаллу разности потенциалов. Полупроводниковые лазеры, относящиеся к данной подгруппе, получили название инжекционных ПКГ, типичным представителем их является лазер на p - n – пе-





переходе в арсениде галлия.

Ко второй подгруппе относятся лазеры, в которых рабочим телом являются кристаллы полупроводников одного типа. В этом типе лазеров возбуждение осуществляется при бомбардировке кристалла полупроводника электронным пучком или достигается оптической накачкой. В качестве рабочих тел используются, например, полупроводники-кристаллы сульфида кадмия CdS, арсенида галлия GaAs, теллура свинца PbTe и др.

В последние годы большое внимание уделяется химической накачке, когда инверсия возникает при той или другой химической реакции. Химическая реакция может быть осуществлена либо при фотодиссоциации молекул, как, например, в лазере на атомарном газе, либо в электрическом разряде в смеси газов, например, Ne – O<sub>2</sub>, Ar - O<sub>2</sub>. В результате этих процессов образуются атомы или молекулы в возбужденном состоянии.

Следует отметить, что лазеры можно подразделять также на группы в зависимости от режима их работы. Различают лазеры, работающие в непрерывном режиме с длительностью импульса  $10^{-3} - 10^{-5}$  с (режим свободной генерации); в режиме гигантских импульсов, когда длительность определяется  $10^{-7} - 10^{-9}$  с; в режиме синхронизации мод, при которой длительность импульса может быть короче  $10^{-12}$  с.

## 12.5. Форма спектральной линии

Мощность излучения лазера, определяемая по формуле (12.18), относится лишь к идеализированному случаю. Мы полагаем, что энергетические уровни атомов являются бесконечно тонкими и поэтому при переходе с верхнего уровня  $m$  на нижний  $n$  излучается вполне определенная частота  $\nu_{mn}$ . Каждый энергетический уровень имеет степень размытости, определяемую интервалом энергии  $\Delta W$ . Поэтому частота рабочего перехода лежит в определенном интервале частот  $\Delta\nu_{mn}$ . Интенсивность излучения в пределах этого интервала непостоянна, и она определяет ширину и форму излучаемой спектральной линии.

С точки зрения квантовой механики естественная ширина спектральной линии вызвана неопределенностью в энергии стационарных состояний атома. Из принципа неопределенности следует, что энергия системы известна лишь с точностью  $\Delta W$ ,



определяемой соотношением

$$\Delta W \Delta t \approx h = h/(2\pi) . \quad (12.21)$$

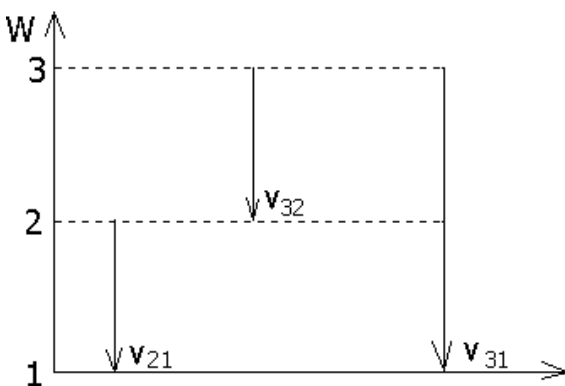
В данном случае  $\Delta t$  представляет собой среднее время жизни атома в состоянии с энергией  $W$  относительно перехода с уровня  $m$  на уровень  $n$ . Среднее время жизни обратно пропорционально вероятности перехода, т.е.  $\Delta t = 1/A_{mn}$ . Так как  $\Delta W = h \Delta \nu_{mn}$ , то из уравнения (12.21) следует, что

$$\Delta \nu_{mn} = A_{mn} / (2\pi) .$$

Чем меньше вероятность перехода с какого-либо энергетического уровня на другой, т.е. чем больше время жизни атома по отношению к данному переходу, тем уже интервал значений  $\Delta W$  и тем менее размыт данный уровень, а следовательно, тем меньше ширина соответствующей спектральной линии.

Существенным является то, что коэффициент  $A_{mn}$  связан с временем жизни обоих уровней ( $m$  и  $n$ ), т.е. оно зависит как от  $\tau_m$ , так и от  $\tau_n$ :

$$A_{mn} = 1/\tau_m + 1/\tau_n .$$



Энергетическая диаграмма трехуровневой системы представлена на рис. 12.6. Уровень 1 – нормальный уровень основного состояния атома, время жизни на нем  $\Delta t \rightarrow \infty$  и может быть принято равным бесконечности, поэтому  $\Delta W_1 \rightarrow 0$ . Вероятность пере-

хода с уровня 2 на уровень 1 велика ( $\Delta t = \tau_{21}$  мало), уровень размыт очень сильно, линия широкая. Вероятности переходов с уровня 3  $A_{31}$  и  $A_{32}$  малы, уровень размыт немного. Ширина линии с частотой  $\nu_{31}$  мала. Линия  $\nu_{32}$  вследствие значительной ши-



рины второго уровня широкая, линии с частотами  $\nu_{21}$  и  $\nu_{32}$  имеют приблизительно одинаковую ширину, определяемую в основном размытостью уровня 2.

Если принять заселенности уровней одинаковыми, то вследствие того, что вероятность  $A_{21}$  велика, линия с частотой  $\nu_{21}$  будет яркой, соответственно линия  $\nu_{31}$  – слабой яркости,  $\nu_{32}$  – средней.

Распределение интенсивности по частотам, присущим данной спектральной линии, определяет форму спектральной линии. Форма спектральной линии представляется нормированной функцией  $S(\nu, \nu_0)$ :  $\int S(\nu, \nu_0) d\nu = 1$ . Здесь  $\nu_0$  - резонансная частота. Расчет, выполненный методом возмущений (применяемым в квантовой механике), показывает, что для естественной ширины спектральной линии

$$S(\nu, \nu_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta\nu_e}{(\nu - \nu_0)^2 + \Delta\nu_e^2} \quad (12.22)$$

Из (12.22) следует, что при частоте  $\nu$ , равной  $\nu_0$  функция  $S(\nu, \nu_0)$  имеет максимальное значение, а при  $\Delta\nu_e = (\nu - \nu_0) = A_{mm}/4\pi$  убывает в два раза. Величина  $\Delta\nu_e$ , взятая на уровне половинной интенсивности, определяет так называемую полуширину спектральной линии (Рис. 12.7). Ширина спектральной линии может изменяться под действием процессов, ограничивающих время жизни возбужденного состояния и модулирующих случайным образом энергетические состояния.

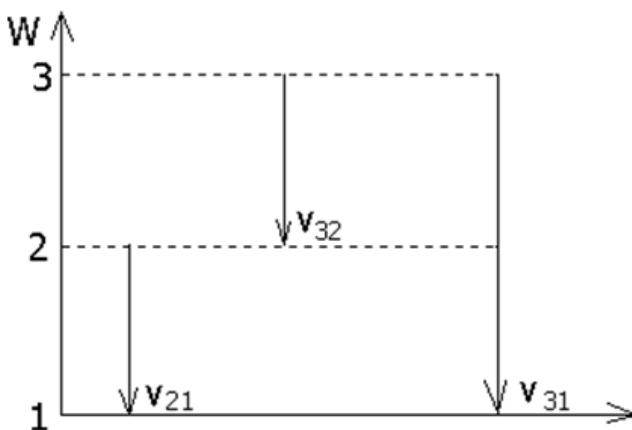


Рис. 12.6. Энергетическая диаграмма трехуровневой системы

Таковыми причинами могут выступать: *в газообразных излучающих веществах*: процессы соударения возбужденного атома с нейтральными атомами, ионами, электронами и стенками сосудов; эффект Доплера (обусловленный тепловым движением атомов);

*в твердых кристаллических телах*: воздействие электрических и магнитных полей (которое заключается в сдвиге либо в расщеплении энергетических уровней (эффекты Зеемана и Штарка)); несовершенство кристалла.

Различного рода уширения спектральной линии принято подразделять на две категории: однородные и неоднородные уширения.

Поскольку идеально монохроматического излучения не существует и каждая спектральная линия имеет определенную ширину и форму, представляется необходимым произвести уточнение формулы (12.18). Для этого помимо коэффициентов Эйнштейна  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  и  $B_{nm}$  рассмотренных ранее, вводят спектральные коэффициенты Эйнштейна  $a_{mn}(\omega)$ ,  $b_{mn}(\omega)$ ,  $b_{nm}(\omega)$ , которые определяют спектральные плотности соответствующих переходов. Их зависимость от частоты определяется формой спектральной линии  $S(\omega)$ :

$$a_{mn}(\omega) = A_{mn} S(\omega); \quad b_{mn}(\omega) = B_{mn} S(\omega); \quad b_{nm} = B_{nm} S(\omega). \quad (12.23)$$



Из (12.23) следует, что

$$A_{mn} = \int a_{mn}(\omega) d\omega; \quad B_{mn} = \int b_{mn}(\omega) d\omega; \quad B_{nm} = \int b_{nm}(\omega) d\omega$$

.

Спектральные характеристики, так же, как интегральные, связаны между собой соотношениями:

$$g_n b_{nm}(\omega) = g_n b_{mn}(\omega); \quad a_{mn}(\omega) = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} b_{mn}(\omega)$$

.

С учетом спектральных коэффициентов выражение для мощности, испускаемой единицей объема при спонтанных переходах  $m \rightarrow n$  атомов в спектральном интервале  $d\omega$  имеет вид

$$dW_{mn} = N_m h \omega a_{mn}(\omega) d\omega$$

и соответственно мощности, испускаемые при индуцированных переходах и поглощаемой в единице объема, в виде:

$$dW_{mn}^{ind} = N_m h \omega b_{mn}(\omega) d\omega; \quad dW_{nm}^{ногл} = N_m h \omega b_{nm}(\omega) d\omega$$

.

Таким образом, изменение интенсивности потока с частотой  $\omega$  после прохождения им пути  $dx$  будет равно

$$dI = \frac{dx}{c} h \omega I(\omega) [N_m b_{mn}(\omega) - N_n b_{nm}(\omega)].$$

При этом коэффициент усиления

$$\alpha(\omega) = \frac{h\omega}{c} \left[ N_m - \frac{g_m}{g_n} N_n \right] B_{mn} S(\omega).$$



## 12.6. Характеристики излучения лазеров

Основными характеристиками излучения лазеров являются его энергия, мощность, угловая расходимость, монохроматичность, поляризация и когерентность.

Остановимся прежде всего на когерентности, т.е. согласованности фаз колебаний. Степень когерентности двух источников определяется степенью сохранения постоянства их фаз. В реальных источниках свет излучается множеством атомов, излучаемые волны некогерентны. Для упрощения описания процесса излучения предположим, что группа  $N$  атомов излучает электромагнитные волны на одной частоте  $\omega$ , в одном направлении, с одной поляризацией. Тогда напряженность электрического поля в некоторой удаленной точке будет равна

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum E_{0i} \cos(\omega t + \varphi_i),$$

где  $E_{0i}$  - амплитуда волны излучения  $i$ -м атомом;  $\varphi_i$  - фаза. Допустим далее, что амплитуды излучения различных атомов одинаковы, однако фазы различны и случайны. Если между импульсами нет интервалов, то результирующее колебание можно представить как хаотически модулированное по фазе и амплитуде:

$$E = E_0(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]. \quad (12.24)$$

Можно показать, что вследствие несогласованности по фазам интенсивность света в некоторой точке от  $N$  атомов будет равна сумме интенсивности волн, испускаемых отдельными атомами.

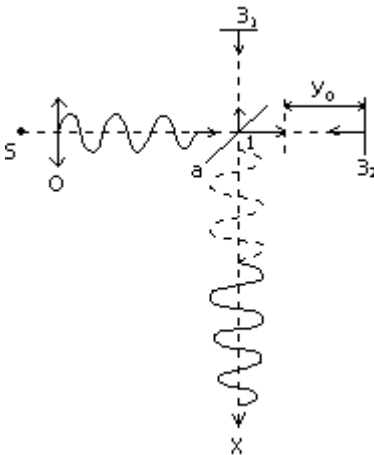
Излучение лазеров обладает принципиально другими свойствами. Это объясняется тем, что волны испущенные атомами при вынужденных переходах, имеют не только частоту, но и фазу, направление распространения и состояние поляризации такие же, как и у излучения вызвавшего переходы. Таким образом, вынужденное излучение когерентно падающей волне. Если в некоторую точку придут электромагнитные волны от двух источников,



то результирующее колебание будет зависеть от разности фаз в данной точке и иметь максимальное значение при разности фаз, равной  $0, 2\pi, 2\pi n$  и минимальное – при  $(\varphi_1 - \varphi_2) = (2n + 1)\pi$ . Таким образом, при освещении некоторой площадки двумя когерентными источниками света освещенность будет меняться от точки к точке в зависимости от разности фаз. Однако следует иметь в виду, что когерентность источников не всегда может быть полной. Степень когерентности обычно определяют выражением

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (12.25)$$

В предыдущих рассуждениях рассматривались точечные источники излучения. Реальные источники обладают определенной протяженностью, что может приводить к размазыванию интерференционных полос или к их полному исчезновению. В таких случаях говорят, что источники пространственно некогерентны. Замечательной особенностью лазеров является то, что они сочетают пространственную когерентность с большой интенсивностью излучения.



Большое значение имеет также временная когерентность лазерного излучения. Согласно классической теории атомы излучают в течение очень коротких отрезков времени  $\tau$ , за это время атом излучает определенный «цуг» волн, который можно изобразить в виде соответствующей длины отрезка синусоиды. Представим себе интерферометр Майкельсона, в котором источник настолько мал, что его можно считать пространственно когерентным. Испущенный источником волновой цуг в точке 1 разделяется на два, один из которых отражается от зеркала  $Z_1$ , второй – от  $Z_2$  (Рис. 12.8). На выходе в

одном и том же направлении по оси  $x$  будут распространяться два цуга, которые будут интерферировать друг с другом. Если зеркала расположены на одном и том же расстоянии от точки 1, то оба



цуга будут полностью накладываться друг на друга. Если теперь отодвинуть одно из зеркал на расстояние  $y_0$ , то цуг, отразившийся от этих зеркал, будет запаздывать по времени относительно другого цуга, и цуги окажутся сдвинутыми. Продолжая отодвигать зеркало будем увеличивать запаздывание одного цуга от другого, при этом интерференционная картина становится менее четкой и наконец исчезает. При этом говорят, что существует временная некогерентность. В случае, если один цуг будет отставать от другого на величину  $\delta$ , намного меньшую, чем длина цуга, интерференционная картина будет очень четкой, и в этом случае имеем полную временную когерентность. Таким образом, когерентность определяется длиной волнового цуга. Длина волнового цуга  $l$  называется длиной когерентности. Очевидно, что  $l = c\tau$ , где  $c$  - скорость света. Время  $\tau$  называют временем когерентности.

Длина цугов в излучении лазеров значительно больше длины цугов обычных источников. У обычных источников  $l \approx 3 \text{ м}$ , в то время как в излучении лазеров она измеряется километрами. Поэтому лазерное излучение помимо высокой степени пространственной когерентности обладает большой временной когерентностью.

Время когерентности света связано с шириной спектральной линии. Действительно, представим себе цуг длительность  $\tau$  как функцию от времени  $F(t) = f_0 e^{j2\pi\nu t}$ , удовлетворяющую условию

$$F(t) = f_0 e^{j2\pi\nu_0 t} \quad \text{при} \quad |t| \leq \frac{\tau}{2}; \quad F(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| > \frac{\tau}{2}$$

где  $f_0$  - некоторая постоянная (Рис. 12.9).



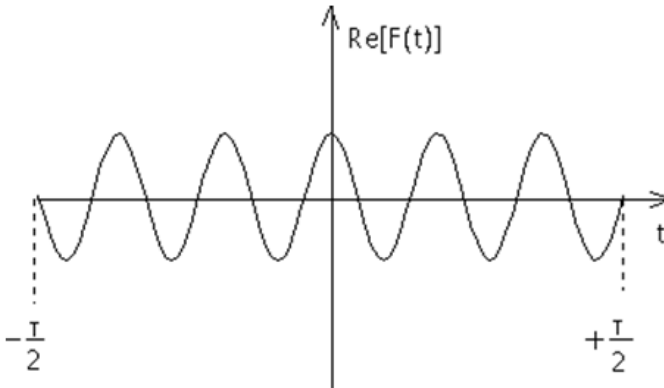


Рис. 12.9. Ограниченный по времени цуг волн длительностью  $\tau$

Согласно теореме Фурье, комбинация одного цуга волне может быть представлена как

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{j2\pi\nu t} dt ,$$

где  $f(\nu)$  дает распределение по амплитуде монохроматических составляющих  $F(t)$ . Обратная зависимость имеет вид

$$f(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j2\pi\nu t} dt .$$

Таким образом,

$$f(\nu) = f_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi(\nu-\nu_0)t} dt = f_0 \frac{\sin[\pi(\nu-\nu_0)\tau]}{\pi(\nu-\nu_0)\tau} .$$

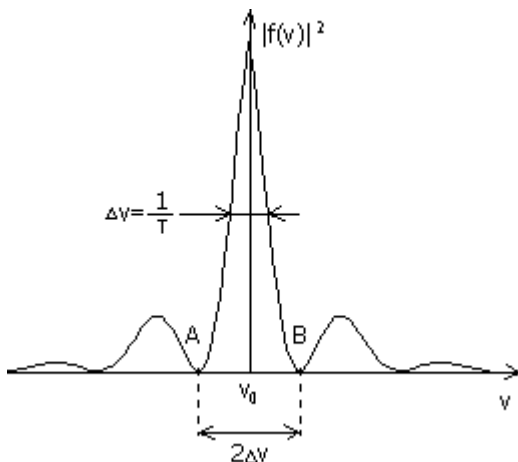
Распределение интенсивности по частоте определяется выражением

$$|f(\nu)|^2 = f_0^2 \left\{ \frac{\sin[\pi(\nu-\nu_0)\tau]}{\pi(\nu-\nu_0)\tau} \right\}^2 \tau^2 .$$



Зависимость  $|f(\nu)|^2$  от представлена на рис.1.10. Интервал частоты между точками  $A$  и  $B$  равен  $\nu - \nu_0 = \pm 1/\tau$ , а ширина спектральной полосы  $\Delta\nu = 1/\tau$ , т.е. ширина спектральной линии равна длительности цуга.

Рис. 12.10. Зависимость  $|f(\nu)|^2$  от частоты



Когерентность является одной из наиболее важных характеристик электромагнитного поля. Она определяет ряд других характеристик излучения. Высокая пространственная когерентность лазерного излучения приводит к узкой диаграмме направленности распространения его энергии. Направленность излучения определяется телесным углом, охватывающим

основную часть излучаемой энергии, поэтому направленность иногда называют угловой расходимостью лазерного излучения. Если считать лазер идеальным излучателем с совершенно однородным распределением амплитуды и фазы в поперечном сечении потока излучения, то на расстояниях, очень больших по сравнению с  $L = D^2/2\lambda$ , его поле излучения может быть представлено в приближении Фраунгофера. На расстояниях значительно меньших оно может описано в приближении Френеля. Здесь  $D$  является диаметром потока излучения. Его расходимость будет ограничена дифракцией и составит угол  $\theta_{0.5} = 1.22 \lambda/D$ . При этом основная часть энергии излучения сосредоточена в основном лепестке диаграммы направленности. Максимальная интенсивность в боковых лепестках обычно не превышает 2 %. В действительности амплитуда и фаза на излучающей поверхности лазера обладают некоторой однородностью, фронт волны не иде-



ально плоский, а несколько искривлен, что приводит к значительному увеличению угловой расходимости по сравнению с идеальным случаем. Существенное значение на угловую расходимость оказывает многомодовый характер генерации, о чем подробнее будет изложено в дальнейшем.

Высокая пространственная когерентность лазерного излучения обуславливает его малую расходимость, а временная когерентность – его монохроматичность, что позволяет осуществить исключительно высокую концентрацию световой энергии и ее спектральную плотность.

Обычно, если лазер работает в непрерывном режиме, то основной его энергетической характеристикой является мощность излучения  $P$ , имеющая для различных лазеров различное значение, от микроватт до сотен киловатт. Работа лазера в импульсном режиме характеризуется энергией излучения в импульсе  $W$  и длительностью импульса  $\tau$ . Средняя мощность излучения во время импульса определяется как

$$P = W/\tau . \quad (12.26)$$

Следует отметить, что существует несколько различных импульсных режимов, отличающихся различной длительностью импульса излучения.

При одной и той же энергии излучения средняя мощность в значительных пределах, как следует из (1.26), изменяется в зависимости от длительности генерируемого импульса. Например, при энергии в 1 Дж и миллисекундной длительности мощность в импульсе составит 1 кВт, при пикосекундном импульсе –  $10^{12}$  Вт. При увеличении энергии импульса импульсная мощность может достигать еще большего значения в соответствии с величиной  $W$ .

Различные типы лазеров генерируют излучение с различными параметрами: энергией, длительностью импульса, мощностью излучения, степенью когерентности, угловой расходимостью, шириной спектральной линии и т. д., - в конечном счете, определяющими наиболее эффективные области их применения.



## Контрольные вопросы

1. Какой характер имеют атомные и молекулярные спектры?
2. Что такое инверсная населенность энергетических уровней?
3. Какое излучение называется вынужденным?
4. Что представляет собой цуг волны лазерного излучения?
5. Что называют угловой расходимостью лазерного излучения и какими факторами она определяется?



## ГЛАВА 13. ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЛАЗЕРОВ

### 13.1 Основные уравнения электродинамики

Одним из главных элементов любого лазера является резонатор. Основные характеристики лазера зависят от типа используемого в нем резонатора, от образующих его оптических элементов: зеркал, призм, призмённых блоков и т. д. Проанализируем электродинамические свойства так называемых пассивных резонаторов, т.е. резонаторов внутри которых отсутствуют активные рабочие вещества. Для подобного рассмотрения необходимы сведения из электродинамики.

Основная группа уравнений электродинамики, описывающая нестационарный процесс в среде, обладающей диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$ , и электропроводностью  $\gamma$  при отсутствии конвекционных токов, имеет следующий вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \delta + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (13.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (13.2)$$

$$\operatorname{div} B = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \delta = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{cm})$$

где  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  - напряженности магнитного и электрического полей;  $\delta$  - плотность тока;  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$  - магнитная и электростатическая индукция;  $\rho$  - плотность электрических зарядов;  $\vec{E}_{cm}$  - напряженность электрического поля не электростатического происхождения;  $c$  - скорость света.

Для диэлектрической среды  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0$ . Когда  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависят от времени и плотности свободных зарядов ( $\rho = 0$ ), эта система уравнений сводится к следующей:



## Машиностроение

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (13.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (13.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}.$$

Взяв операцию  $\operatorname{rot}$  от левой и правой частей (13.3), принимая во внимание что  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}$  и используя (13.4) находим

$$\Delta \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (13.5)$$

Аналогично, беря операцию  $\operatorname{rot}$  от (13.4) и используя (13.3), получаем

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (13.6)$$

Следовательно,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют волновому уравнению, и (13.5) и (13.6) описывают электромагнитную волну в диэлектрической среде. Скорость распространения волны  $v = c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ . Для вакуума  $\varepsilon = 1, \mu = 1, v = c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Расчет электромагнитных полей произведем через векторный  $\vec{A}$  и скалярный  $U$  потенциалы. Для непроводящей среды

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}; \quad \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial U}{\partial t},$$

а напряженность электрического поля связана с потенциалом соотношением



## Машиностроение

$$\vec{E} = -\text{grad } U - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (13.7)$$

Потенциалы  $\vec{A}$  и  $U$  удовлетворяют волновому уравнению. Для проводящей среды, беря операцию *rot* от (13.1) и используя (13.2), получим

$$\Delta \vec{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \gamma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (13.8)$$

Аналогично получим

$$\Delta \vec{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \gamma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (13.9)$$

В отличие от диэлектрических сред  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в проводящей среде удовлетворяют не волновому, а телеграфному уравнению. Потенциалы в этом случае калибруются таким образом, что для них имеет место следующие соотношения

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}; \quad \text{div } \vec{A} = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{4\pi \gamma \mu}{c} U.$$

Соотношение между напряженностью электрического поля и потенциалами (13.7) сохраняется.

Рассмотрим теперь плоские волны, распространяющиеся в непроводящей среде.

Если  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  будут являться функциями только одной координаты, например  $z$ , то волновые уравнения (13.5) и (13.6) примут следующий вид

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (13.10)$$



$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 . \quad (13.11)$$

Решением этих уравнений является функции вида  $f(t - z/v)$ , характеризующие распространение электромагнитной волны вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ . При этом во всех точках любой плоскости, перпендикулярной к оси  $z$ , в данный момент времени  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  будут иметь одно и тоже значение. Такие волны называются плоскими. Если поле волны будет гармонической функцией времени, волна называется монохроматической.

Оперирование с гармоническими функциями упрощается, если произвести их замену экспоненциальными, т.е. комплексными величинами. Проведя замену и выполнив соответствующие математические действия от окончательного результата следует взять только вещественную часть. Этим методом будем пользоваться в дальнейшем.

В комплексной записи выражения для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  плоской монохроматической волны будут иметь следующий вид:

$$\vec{E} = \vec{E}^*(z) e^{j\omega t} ; \quad (13.12)$$

$$\vec{H} = \vec{H}^*(z) e^{j\omega t} , \quad (13.13)$$

где комплексные векторы  $\vec{E}^*(z)$  и  $\vec{H}^*(z)$  зависят только от координаты  $z$ . Физическое значение имеет только вещественная часть выражений (13.12) и (13.13), которые в дальнейшем будем обозначать знаком  $\text{Re}$ .

Подставив значения  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в (13.10) и (13.11) и сократив на  $e^{j\omega t}$  получим

$$\frac{\partial^2 \vec{E}^*}{\partial z^2} + k^2 \vec{E}^* = 0; \quad \frac{\partial^2 \vec{H}^*}{\partial z^2} + k^2 \vec{H}^* = 0 ,$$

где  $k^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2}$ , т.е.  $k = \omega \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое чис-





ло. Решение этих уравнений имеет вид:

$$\vec{E}^* = \vec{E}_0^* e^{-jkz} + \vec{E}_0^{*'} e^{+jkz} ; \quad \vec{H}^* = \vec{H}_0^* e^{-jkz} + \vec{H}_0^{*'} e^{+jkz}$$

где  $\vec{E}_0^*$ ,  $\vec{E}_0^{*'}$  и  $\vec{H}_0^*$ ,  $\vec{H}_0^{*'}$  - произвольные постоянные.

Подставив решения  $\vec{E}^*$  и  $\vec{H}^*$  в (13.12) и (13.13) и оставив лишь слагаемое, описывающее волну, распространяющуюся в плоскости в положительном направлении  $z$ , получим

$$\vec{E} = \vec{E}_0^* e^{j(\omega t - kz)} ; \quad (13.14)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0^* e^{j(\omega t - kz)} . \quad (13.15)$$

Как следует из данных соотношений, комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного поле для волны в диэлектрике не зависят от координаты  $z$ . Это означает, что плоская волна в диэлектрике распространяется без изменения интенсивности.

Для рассмотрения распространения электромагнитной волны в проводящей среде полезно представление о комплексной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^* = \varepsilon - j4\pi\gamma/\omega$ . Уравнение (13.9) при этом может быть представлено волновым уравнением

$$\Delta \vec{E} = \frac{\mu \varepsilon^*}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} . \quad (13.16)$$

Таким образом, распространение электромагнитной волны в проводящей среде может быть описано волновым уравнением, но при этом диэлектрическая проницаемость должна быть представлена комплексным числом, в котором мнимая его часть определяется проводимостью среды и частотой распространяющейся волны. Комплексность  $\varepsilon$  свидетельствует не только о скорости распространения волны, но и ее затухании. Решением уравнения (13.16) в этом случае будет



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k^* z)} \quad (13.17)$$

где  $k^* = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu^* \varepsilon^*}$  - комплексное число. Показатель

преломления среды  $n^* = \sqrt{\mu^* \varepsilon^*}$  при этом также будет комплексной величиной. Так как  $k^* = k' - jk''$ , то подставив его значение в (13.17), получим уравнение плоской волны (с волновым числом  $k'$ )

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k'' z} e^{j(\omega t - k' z)}. \quad (13.18)$$

Амплитуда волны  $\vec{E}_0 e^{-k'' z}$  убывает экспоненциально по мере распространения волны. Подставив в равенство  $k^* = k' - jk'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu^* \varepsilon^*}$  значение  $\varepsilon^* = \varepsilon - j \frac{4\pi\gamma}{\omega}$  и разделив на вещественную и мнимую части, получим систему уравнений для определения  $k'$  и  $k''$ :

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu; \quad k' k'' = \frac{2\pi \mu \gamma \omega}{c^2}.$$

Полагая  $k' = (\omega/c)n$  и  $k'' = (\omega/c)\alpha$ , где  $\alpha$  - действительный коэффициент поглощения;  $n$  - показатель преломления, получим

$$n^2 - \alpha^2 = \varepsilon \mu; \quad n\alpha = \mu\gamma T, \quad (13.19)$$

где  $T$  - период колебаний. Решив систему уравнений (13.19) найдем

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2} \{ \sqrt{\varepsilon^2 + 4\gamma^2 T^2} + \varepsilon \}}; \quad (13.20)$$



## Машиностроение

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{2} \{ \sqrt{\varepsilon^2 + 4\gamma^2 T^2} - \varepsilon \}}. \quad (13.21)$$

Заметим, что комплексный показатель преломления равен

$$n^* = \sqrt{\mu^* \varepsilon^*} = \frac{c}{\omega} k^* = \frac{c}{\omega} (k' - jk'') = n - j\alpha.$$

При распространении электромагнитной волны в диэлектрике соотношение между напряженностями электрического и магнитного полей определяется равенством

$$\varepsilon \sqrt{E} = \mu \sqrt{H}.$$

При распространении в проводящей среде это соотношение имеет вид

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu^2}{n^2 + \alpha^2}}.$$

При распространении электромагнитной волны в диэлектрике величины  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются синфазно, а в среде обладающей проводимостью, имеется сдвиг фаз между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Разность фаз  $\mathcal{G}$  зависит от отношения  $\alpha/n$  и определяется соотношением

$$\mathcal{G} = \text{arctg}(\alpha/n).$$

Из уравнений (13.20) и (13.21) следует, что при больших значениях  $\gamma$  и не слишком малом периоде, когда  $\varepsilon^2 \ll 4\gamma^2 T^2$ ,

$$\alpha = n = \sqrt{\mu\gamma T}. \quad (13.22)$$



При этом  $tg \vartheta = 1$  и  $\vartheta = 45^\circ$ . Для хороших проводников при выполнении условия  $\mu\gamma T \gg \varepsilon$  главные коэффициенты определяются формулой (13.22). Если  $\mu\gamma T$  велико по сравнению с единицей, то коэффициент отражения при  $\vartheta = 0$

$$\rho = 1 - 2/(\gamma T). \quad (13.23)$$

### 13.2 Электромагнитные волны на границе раздела двух сред

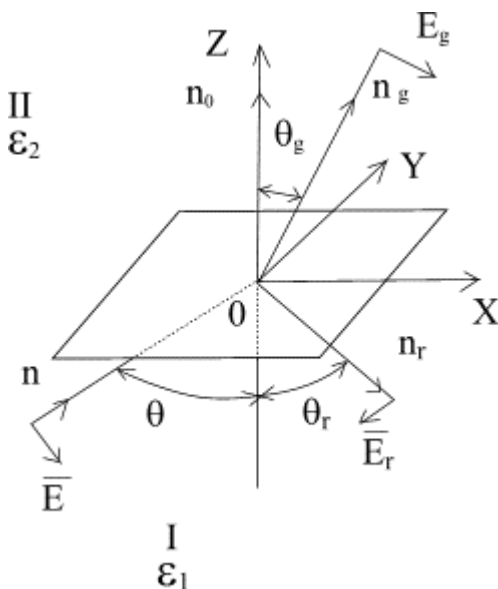
Рассмотрим процессы отражения и преломления плоской электромагнитной волны (ЭМВ) на границе диэлектрических сред. Пусть ЭМВ падает в направлении единичного вектора  $n$  на плоскую границу раздела двух сред  $I$  и  $II$  под некоторым углом  $\vartheta$  (Рис. 13.1). Диэлектрические постоянные двух сред обозначим  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Допустим  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Во второй среде световая волна имеет другую скорость и направление. Пусть направление преломленной волны определяется единичным вектором  $n_g$ , а направление отраженной волны  $n_r$ . Представим уравнение всех трех волн в комплексной форме

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{j(\omega_0 t - knR)} && \text{- падающая волна;} \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_0^r e^{j(\omega_r t - k_r n_r R)} && \text{- отраженная волна;} \\ \vec{E}_g &= \vec{E}_0^g e^{j(\omega_g t - k_g n_g R)} && \text{- преломленная волна.} \end{aligned} \quad (13.24)$$

Используя известное в электродинамике граничное условие, заключающееся в сохранении тангенциальных составляющих напряженности электрического поля и уравнений (13.24) можно показать, что частота ЭМВ не изменяется при ее отражении и



преломлении, т.е.  $\omega = \omega_r = \omega_g$ .



Для волны, поляризованной в плоскости падения (вектор  $\vec{E}$  лежит в данной плоскости), соотношение интенсивностей падающей и отраженной волн определяется формулами Френеля

$$E_r/E = \operatorname{tg}(\theta - \theta_g)/\operatorname{tg}(\theta + \theta_g). \quad (13.25)$$

В случае волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения формула Френеля имеет вид

$$E_r/E = \sin(\theta - \theta_g)/\sin(\theta + \theta_g). \quad (13.26)$$

Уравнения (13.25) и (13.26) позволяют определить амплитудные коэффициенты отражения электромагнитных волн при двух различных их поляризациях. Энергетическим коэффициентом отражения электромагнитных волн называется отношение энергии отраженной волны  $W_r$  к энергии падающей волны  $W$ . Поскольку энергия волны пропорциональна квадрату напряженности электрического поля, из формул (13.25) и (13.26) следует, что коэффициент отражения волны (поляризованной в плоскости падения) равен



$$\rho_s = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta - \theta_g)}{\operatorname{tg}^2(\theta + \theta_g)}. \quad (13.27)$$

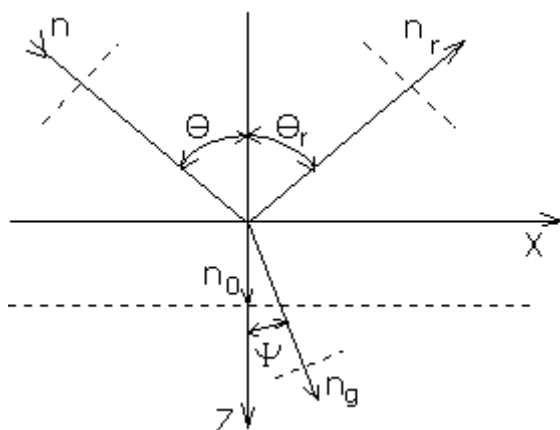
Для волны же, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, имеем

$$\rho_p = \frac{\sin^2(\theta - \theta_g)}{\sin^2(\theta + \theta_g)}. \quad (13.28)$$

При падении естественного света на границу раздела, коэффициент отражения определяется формулой

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_s - \rho_p).$$

Полное внутреннее отражение плоскополяризованной световой волны на границе двух диэлектрических сред, происходящее при увеличении угла  $\theta$  свыше критического (угла Брюстера), сопровождается ее деформацией (преобразованием) в эллиптически поляризованную.



При рассмотрении отражения и преломления ЭМВ на плоской границе раздела непроводящей и проводящей сред следует иметь в виду, что показатель преломления проводящей среды (по отношению к диэлектрической среде) – комплексная



величина. Отсюда следует, что и угол преломления  $\theta_g$  будет также комплексным (Рис. 13.2). Вещественный показатель преломления и коэффициент затухания ЭМВ в проводящей среде при различных углах ее падения на границу из диэлектрической среды определяется уравнениями Кеттелера

$$n_2(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ n_2^2 - \alpha_2^2 + n_1^2 \sin^2 \theta + \sqrt{4n_2^2 \alpha_2^2 + (n_2^2 - \alpha_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta)^2} \right]}; \quad (13.29)$$

$$\alpha^2(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ -n_2^2 + \alpha_2^2 + n_1^2 \sin^2 \theta + \sqrt{4n_2^2 \alpha_2^2 + (n_2^2 - \alpha_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta)^2} \right]} \quad (13.30)$$

При угле падения  $\theta = 0$  данные уравнения сводятся к:

$$n_2(\theta) = n_2(0) = n_2 \quad \text{и} \quad \alpha_2(\theta) = \alpha_2(0) = \alpha_2.$$

Эти величины определяются формулам (13.20) и (13.21) и называются главными коэффициентами преломления и поглощения проводящей среды.

Из изложенного следует, что скорость распространения волны во второй среде зависит от угла падения  $\theta$ :

$$V_2 = \frac{V_1}{n_2(\theta)}.$$

Коэффициенты отражения ЭМВ могут быть вычислены по формулам Френеля (13.27) и (13.28) при условии подстановки в них комплексных значений  $\sin \theta_g$  и  $\operatorname{tg} \theta_g$  (при  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ). При



отражении происходит изменение характера поляризации волны. Плоскополяризованная волна после отражения будет поляризована по кругу.

### 13.3 Плоские слои

Представим себе плоский слой вещества, имеющего параметры  $\varepsilon_2, \mu_2, \gamma_2$ , с одной стороны которого находится среда 1, с параметрами  $\varepsilon_1, \mu_1, \gamma_1$ , а с другой среда 3 - с параметрами  $\varepsilon_3, \mu_3, \gamma_3$  (Рис. 13.3). Таким образом, имеется две границы раздела.

Пусть на слой в направлении нормали к границе раздела падает плоская плоскополяризованная ЭМВ. Определим коэффициент отражения волны от слоя и коэффициент прозрачности слоя. В каждой из сред распространение волны описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon_i^* \mu_i}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2},$$

где  $\varepsilon_i^*$  - комплексная диэлектрическая проницаемость  $i$ -й среды ( $i = 1, 2, 3$ );  $\mu_i$  - магнитная проницаемость  $i$ -й среды;  $\psi_i$  - напряженность электрического или магнитного поля. Для монохроматической волны решением уравнения является

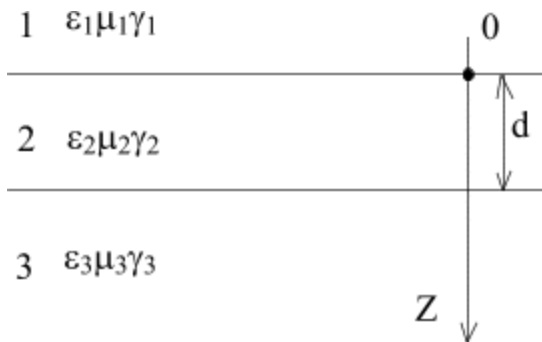
$$E_i = E_{0i} e^{j(\omega t - k_i^* z)},$$

где  $k_i^*$  - комплексное волновое число  $i$ -й среды;





## Машиностроение



$$k_i^* = \frac{\omega}{c}(n_i - j\alpha_i) = \frac{\omega}{c}n_i^* .$$

Окончательные формулы для коэффициентов отражения и коэффициентов прозрачности довольно громоздки. Анализ их для частных случаев показывает, что при отражении световой волны от проводящего тонкого слоя коэффициенты отражения и прозрачности слоя являются осциллирующими функциями от  $(\omega/c)n_2 d$  или функциями от  $2\pi d/\lambda_2$ , где  $\lambda_2$  - длина волны в проводящем слое (Рис. 13.4).

Если толщина слоя  $d$  будет значительно превосходить глубину проникновения ЭМВ в слой, то отражение будет определяться только коэффициентом отражения

$$\rho_{21} = \left( \frac{1 - z_{12}}{1 + z_{12}} \right)^2 ,$$



где  $z_{12} = \sqrt{\mu_i / \varepsilon_i^*}$  внутренний импеданс среды.

Если подобрать электрические параметры второй среды такими, чтобы  $1 - z_{12} = 0$ , то  $\rho_{21} = 0$  и отражения от границы

раздела не будет. Так как  $z_{12} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^*}}$ , то в случае, ко-

гда первой средой является вакуум или воздух ( $\mu_1 = 1$ ;  $\varepsilon_1^* = 1$ ),

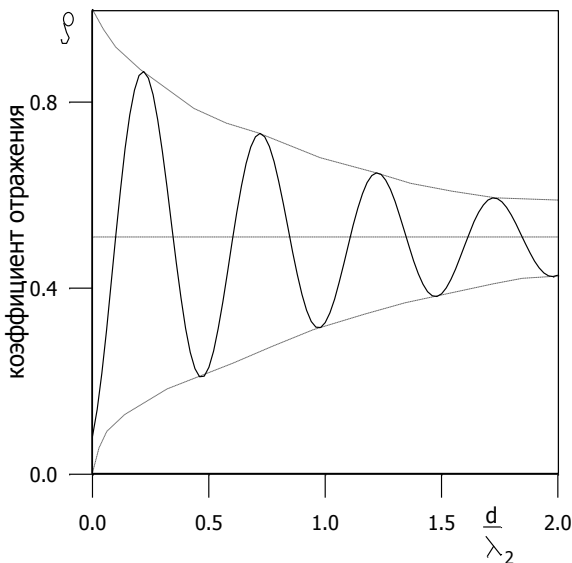
условие отсутствие отражения будет  $\sqrt{\varepsilon_2^* / \mu_2} = 1$ , т.е.

$\sqrt{\varepsilon^*} = \sqrt{\mu_2}$ . В практической системе единиц

$z_1 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 376.6$ . Таким образом, условие отсутствия отра-

жения будет следующие:

$$\sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2^*} = 376.6$$



Рассмотрим отражение ЭМВ от плоского диэлектрического слоя. В этом случае все среды прозрачные, поглощение отсутствует во всех средах ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ).

Пусть при этом  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ , а  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ .

Коэффициенты отражения и прозрачности слоя



будет определяться следующими формулами:

$$\rho = \frac{\rho_{21} + 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos 2\frac{\omega}{c} n_2d + \rho_{32}}{1 + 2\sqrt{\rho_{21}\rho_{32}} \cos 2\frac{\omega}{c} n_2d + \rho_{21}\rho_{32}}$$

$$\tau = 1 - \rho.$$

Частные коэффициенты отражения будут равны:

$$\rho_{ik} = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_i} - \sqrt{\varepsilon_k}}{\sqrt{\varepsilon_i} + \sqrt{\varepsilon_k}} \right)^2.$$

Окончательно получим:

$$\rho_{21} = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \right)^2; \quad \rho_{32} = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_3} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right)^2.$$

Так же, как и в случае проводящего слоя, коэффициент отражения является осциллирующей функцией от  $d/\lambda$ . Он достигает максимума, когда  $d/\lambda = 1/4 + m/2$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Первый минимум получается при  $d = \lambda_2/4$ , т.е. слой имеет толщину, равную одной четверти длины волны (при условии, что  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ ).

Коэффициент отражения равняется нулю, когда  $\rho_{21} = \rho_{32}$ , т.е. при

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_3} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_2}}.$$



Отсюда условие отсутствия отражения в этом случае будет следующее

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3},$$

когда  $\varepsilon_2$  слоя является геометрической средней между  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$ .

Отметим, что вопросы отражения электромагнитных волн оптического диапазона имеют большое значение в лазерной технике. Переходя к рассмотрению пассивных элементов оптических квантовых генераторов, будем обращаться к физическим процессам и ссылаться на приведенные выше формулы.

### 13.4 Металлические и диэлектрические зеркала

Основным оптическим элементом резонаторов, используемых в лазерной технике, является зеркало. Применяются плоские, цилиндрические и сферические зеркала, как металлические, так и диэлектрические, с металлическими и диэлектрическими и другими покрытиями.

Широкое распространение получил резонатор, состоящий из плоских зеркал. Прежде всего нужно знать, что отражение ЭМВ от поверхности зеркал в соответствии с формулами Френеля будет происходить в случае хорошей полировки их поверхности. В зависимости от диапазона излучаемых волн допустима различная высота выступа на поверхности зеркала. Если задаться требованием  $h \leq 0.1 \cdot \lambda$ , то для лазера субмиллиметрового диапазона при  $\lambda = 500$  мкм высота неровностей может быть до 50 мкм; для лазеров ультрафиолетового диапазона ( $\lambda = 0.4$  мкм)  $h$  не может превосходить 0.04 мкм.

Одним из основных параметров, характеризующих резонатор, является его добротность, которая определяется потерями в нем



электромагнитной энергии. Примем во внимание, что ЭМВ в плоском резонаторе поочередно отражается от зеркал, поэтому одним из видов потерь в резонаторе являются потери энергии при отражении. Чем выше будет коэффициент отражения от зеркал, тем меньше будет потери на отражение и тем выше его добротность. Поскольку ЭМВ в оптическом резонаторе падает почти нормально к поверхности, то для металлических зеркал применимы формулы (13.22) и (13.23):

$$\alpha = n \approx \sqrt{\mu \gamma T}, \quad \rho = 1 - 2/(\gamma T) \quad .$$

При длинах волн  $\lambda > 5$  мкм коэффициент отражения металлических зеркал с достаточной степенью точности может быть определен при использовании статических значений электрических параметров  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ . При длинах волн короче 5 мкм должны быть использованы дисперсионные формулы.

Коэффициент отражения металлов в видимой части спектра невелик. Широко используемые в лазерной технике металлы – серебро, алюминий, золото, медь – обладают отражающей способностью в пределах от 80 до 95%. Таким образом, потери на поглощение в металлических зеркалах достаточно велики (от 5 до 20%). Высокие потери в зеркалах, снижая добротность приводят к разрушению зеркал при больших интенсивностях световых потоков.

Коэффициент отражения ЭМВ от металлов значительно возрастает при увеличении длины волны, стремясь к значению близкому к единице при длине волн больших 500 нм.

При образовании резонатора из двух зеркал необходимо обеспечить частичный выход энергии из резонатора, которая и определяет генерируемую лазером мощность излучения. Для этого одно из зеркал делают с определенным коэффициентом пропускания. В массивных металлических зеркалах пропускание энергии через зеркало осуществляют через окно связи. При каждом отражении часть энергии через отверстие выходит из резонатора во внешнее пространство и используется по назначению.

Наряду с массивными металлическими зеркалами используются зеркала с металлическими покрытиями, нанесенными на поверхность диэлектрика из стекла или кварца. Такие зеркала ис-



пользуются в лазерах малой мощности.

При значительной мощности лазеров, в особенности работающих в постоянном режиме, (даже при высоком коэффициенте отражения зеркал) поглощенная металлом энергия нагревает зеркала. Так как коэффициент электропроводности металла  $\gamma$  уменьшается с температурой, то коэффициент его отражения уменьшается, что приводит к ухудшению свойств резонатора и уменьшению его добротности. Весьма существенным при этом является нарушение юстировки зеркал, приводящее к прекращению генерации излучения. Для обеспечения номинального теплового режима зеркал массивные металлические зеркала часто охлаждают проточной водой.

В качестве выходного зеркала иногда используется набор плоскопараллельных диэлектрических пластинок, разделенных воздушным промежутком. Воздушные промежутки играют роль второй среды в двойном слое. При нормальном падении волны на такое зеркало в воздушной среде  $n_1 = 1$ , при равной толщине пластин и зазорах между ними, равных нечетному числу  $d = \lambda_0 / 4$ , коэффициент отражения равен

$$\rho = \left( \frac{1 - n^{2m}}{1 + n^{2m}} \right)^2,$$

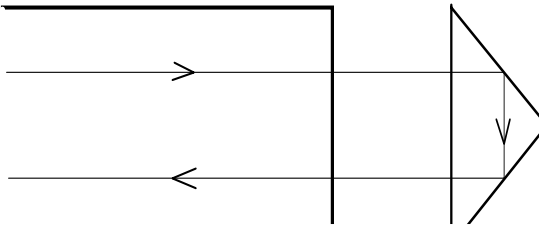
где  $n$  - показатель преломления пластин;  $m$  - число пластин.

Точность изготовления пластин такого рода должна быть не хуже  $\lambda/8$ . В случае, если пластины изготовлены с точностью хуже  $\lambda/4$ , коэффициент отражения будет равен сумме френелевских коэффициентов отражений всех плоскостей. Такая система пластин называется сеткой. Сетка обычно используется в случае многомодового режима работы лазера.

В качестве глухого зеркала резонатора часто используется призма с полным внутренним отражением. Такая призма (Рис.13.5) получила название призмы-крыши.



## Машиностроение



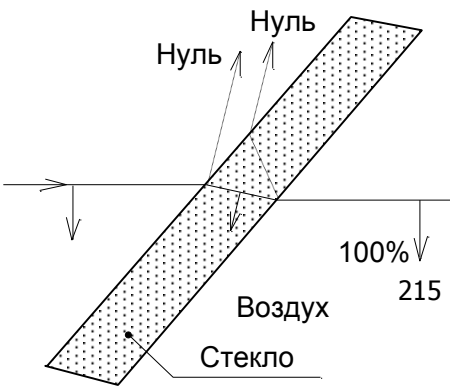
Как известно, коэффициент отражения при полном внутреннем отражении весьма близок к 100 % при условии, что во второй среде, куда проникает электромагнитное поле отсутствует поглощение. Использование

призмы-крыши в резонаторе позволяет увеличить допустимую плотность мощности. При этом происходит выравнивание плотности излучения по сечению активного образца.

Остановимся на окнах, используемых в лазерной технике. Необходимым требованием к таким окнам является весьма высокий коэффициент пропускания света, близкий к 100 %, и весьма малые потери в нем. Таким условиям удовлетворяют окна Брюстера. При прохождении луча через прозрачное окно, например стеклянное, при нормальном падении на него излучения теряется около 4 % каждый раз на отражение. На двух границах раздела потери на отражение при одном проходе будут составлять 8 %.

При многократном прохождении потери будут велики. В этом случае используется зависимость коэффициента отражения от угла. Как известно, при определенной степени поляризации луча (когда луч поляризован перпендикулярно плоскости падения) интенсивность отраженного излучения составляла 8 % при нормальном падении и уменьшается до нуля при угле Брюстера (удовлетворяющим условию  $tg \varphi = n$ . При окнах из стекла  $n = 1.5$ ,  $\varphi = 56^\circ$ ). При дальнейшем увеличении угла ко-

эффициент отражения света возрастает, стремясь к 100 % при скользющем падении.



Таким образом, если расположить окно под углом Брюстера, то компонента поля с поляризацией, перпендикулярной



плоскости падения, будет полностью проходить через окно. Для данной компоненты даже после многих прохождений потери будут пренебрежимо малы. Ход лучей в окне Брюстера показан на Рис.2.6. В конечном итоге работа лазера осуществляется на излучении с данной поляризацией, и свет, выходящий из лазера, оказывается полностью поляризованным. Такие окна используются, например, в газоразрядных трубках гелий-неонового лазера.

### 13.5 Электромагнитные волны в волноводах

При наклонном падении ЭМВ на границу раздела в области наложения падающей и отраженной волн происходит их интерференция. Напряженность поля в зоне интерференции определяется суперпозицией обеих волн. Для падающей волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения (Рис.13.7), имеем

$$E_y = E_0 e^{j(\omega t - k z \sin \theta)} (e^{-jkx \cos \theta} + \rho_0 e^{jkx \cos \theta}) .$$

Если отражение происходит от среды с коэффициентом отражения, близким к единице, то

$$\operatorname{Re}(E_y) = 2E_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \sin \theta) \sin(\frac{2\pi}{\lambda} x \cos \theta) . \quad (13.31)$$

Из (13.31) следует, что напряженность электрического поля имеет минимумы в плоскостях, параллельных границе раздела, на расстояниях  $x = n \frac{\lambda}{2 \cos \theta}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , и максимумы на рассто-

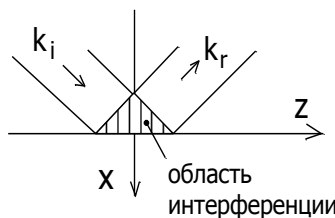
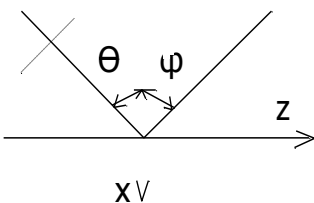




Машиностроение

ниях  $x = m \frac{\lambda}{4 \cos \theta}$ , где  $m = 1, 3, 5, \dots$

Таким образом, параллельно поверхности раздела образуется система интерференционных полос с узлами электрического поля,



отстоящими друг от друга на расстоянии  $\lambda/2 \times 1/\cos \theta$

При увеличении угла падения ЭМВ на границу раздела оно возрастает. При этом вся область интерференции (за исключением случая нормального падения) скользит вдоль поверхности в направлении z с фазовой скоростью  $dz/dt$ . Уравнение (13.31) можно представить как

$$\vec{E} = \vec{E}_0' \sin(\omega t - 2\pi z / \lambda')$$

где  $\vec{E}_0' = \vec{E}_0 \sin[(2\pi / \lambda)x \cos \theta]$  представляет собой амплитуду, а  $\lambda' = \lambda / \sin \theta$  -длину волны, распространяющейся вдоль оси z. Так как  $\lambda' = Tu$ , то скорость распространения волны

$$u = \frac{\lambda'}{T} = \frac{\omega \lambda}{2\pi \sin \theta}$$

В узлах электрической волны, образующейся около границы раздела при отражении, имеет место такая же картина поля



ЭМВ, как и на границе металла. Поэтому в плоскости интерференционных минимумов можно поместить вторую пластинку, параллельную первой, не нарушая распределения поля между плоскостями. Без второй пластинки отраженное излучение уходило в пространство, теперь же в результате многократного отражения оно принимает направленный характер распространения. Эти два параллельных металлических отражателя представляют собой металлический волновод, который может быть использован для канализации энергии ЭМВ в заданном направлении.

Рассмотрим основные свойства волновода произвольного поперечного сечения. Будем считать, что размеры и форма поперечного сечения не меняются вдоль оси цилиндра и что стенки волновода обладают бесконечной проводимостью, т.е. потери в волноводе отсутствуют.

Решение электродинамических задач осуществляется при помощи вспомогательного вектора Герца. Обычно вводятся в рассмотрение два вектора: электрический вектор Герца  $\vec{\Pi}$  и магнитный вектор Герца  $\vec{\Pi}^m$ . Электрический вектор Герца связан со скалярным и векторным потенциалами соотношениями:

$$U = -\text{div} \vec{\Pi}; \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}.$$

В случае монохроматических электромагнитных полей векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  определяются через вектор  $\vec{\Pi}$ :

$$\vec{H} = -jk \text{rot} \vec{\Pi}; \quad (13.32)$$

$$\vec{E} = \text{grad} \text{div} \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi}. \quad (13.33)$$

Возможность введения второго магнитного вектора Герца вытекает из симметричности уравнений Максвелла, при этом магнитный



вектор Герца будет определять  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  :

$$\vec{E} = -jk \operatorname{rot} \vec{\Pi}^m ; \quad (13.34)$$

$$\vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}^m + k^2 \vec{\Pi}^m . \quad (13.35)$$

Таким образом, если при решении задачи будут найдены векторы Герца, то могут быть определены и напряженности электрического и магнитного полей. Вектор Герца, так же как и значения потенциалов  $U$  и  $\vec{A}$  удовлетворяют волновому уравнению, которое в случае монохроматических полей имеет вид

$$\Delta \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = 0 . \quad (13.36)$$

Рассмотрим два класса решений волнового уравнения (13.36), соответствующие векторам Герца со следующими составляющими:

$$\Pi_x = 0; \quad \Pi_y = 0; \quad \Pi_z = \Pi(x, y)e^{jhz} ,$$

где  $h$  - пока неизвестное волновое число.

Можно утверждать, что введение только одних составляющих по оси  $z$  электрического и магнитного векторов Герца описывает любое возможное поле в волноводе.

Обратимся к решениям, соответствующим электрическому вектору Герца. Полагая  $(k^2 - h^2) = g^2$ , представим волновое уравнение (13.36) в виде



$$\frac{\partial^2 \Pi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi(x, y)}{\partial y^2} + g^2 \Pi(x, y) = 0 . \quad (13.37)$$

Так как  $h$  характеризует распространение волн вдоль оси  $z$ , то его называют продольным волновым числом. Величина  $g$  - относится к  $\Pi(x, y)$  и поэтому может быть названа поперечным волновым числом;  $k$  - волновое число в свободном пространстве.

Формулы (13.32) и (13.33) дадут при этом следующие значения для составляющих электрического и магнитного полей, выраженных через  $\Pi(x, y)$  :

$$E_x = jh \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial x} e^{jhz}; \quad E_y = jh \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial y} e^{jhz}; \quad E_z = g^2 \Pi(x, y) e^{jhz}; \quad (13.38)$$

$$H_x = -jk \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial y} e^{jhz}; \quad H_y = jk \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial x} e^{jhz}; \quad H_z = 0. \quad (13.39)$$

Таким образом, приходим к заключению, что этот класс решений волнового уравнения соответствует волнам в волноводе, у которых нет продольной составляющей магнитного поля. Электрическое поле имеет все составляющие, отличные от нуля. Такие волны называют электрическими или  $\vec{E}$ -волнами. Поскольку  $H_z = 0$ , вектор  $\vec{H}$  располагается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения. Поэтому этот тип волн называют поперечными магнитными волнами и обозначают  $ТН$ .

Для окончательного определения величин  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  надо решить уравнение (13.37), найти  $\vec{\Pi}(x, y)$ , затем определить напряжение поля по формулам (13.38) и (13.39). Решение уравнения (13.37) производят при использовании граничных условий,



которыми являются значения  $E_t$  на контуре. Поскольку принято, что проводимость стенок бесконечна, тангенциальная составляющая напряженности электрического поля внутри металла будет равна нулю.

Таким образом, из граничных условий, заключающихся в равенстве тангенциальных составляющих электрического поля в двух средах, вытекает, что  $E_t$  на контуре, а вместе с тем и  $\Pi(x, y)$  равна нулю.

В математике доказывается, что двухмерное уравнение типа (13.37) имеет внутри замкнутого контура решение, отличное от нуля, удовлетворяющее на контуре граничным условиям только при определенных значениях параметра  $g^2$ , т.е. при вполне определенных  $g_1^2, g_2^2, g_3^2$ , образующих спектр собственных значений данной геометрической задачи. Величина  $g$  образует возрастающую последовательность положительных вещественных чисел.

Каждому значению поперечного волнового числа  $g$  соответствует два значения продольного волнового числа и некоторая собственная функция  $\Pi(x, y)$ . Эта функция дает распределение поля, а волновое число  $h$  - зависимость его от координат  $z$ . Заметим, что значение  $h^2 = k^2 - g^2$  может быть как положительным, так и отрицательным.

Если  $h^2 > 0$ , то

$$h = \pm \sqrt{k^2 - g^2}, \quad (13.40)$$

что соответствует волне, распространяющейся вдоль оси волновода  $z$ . Поскольку не учитываем потерь в стенках волновода, эта волна распространяется без затухания.

Если  $h^2 < 0$ , то волновое число  $h$  чисто мнимое:



## Машиностроение

$$h = \pm j\sqrt{k^2 - g^2},$$

при этом волна не распространяется, а быстро затухает в волноводе.

Принимая во внимание, что  $k = 2\pi / \lambda$ , где  $\lambda$  - длина волны в свободном пространстве;  $h = 2\pi / \lambda_g$  ( $\lambda_g$  - длина волны, распространяющейся в волноводе), представим (13.40) в виде

$$\frac{2\pi}{\lambda_g} = \pm \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - g^2}.$$

Пусть  $\lambda_0$  - критическая длина волны, при которой  $h$  обращается в нуль; тогда

$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}}. \quad (13.41)$$

Из (13.41) следует, что  $h > 0$  при  $\lambda < \lambda_0$  ( $\lambda_0$  - называется критической длиной волны), а следовательно, в волноводе могут распространяться только такие волны, длина которых меньше критической волны  $\lambda_0$ . Каждое собственное значение  $g^2$ , а следовательно, и критическая длина волны  $\lambda_0$  определяются лишь геометрией поперечного сечения волновода, т.е. его размерами и формой. В зависимости от соотношения  $\lambda$  и  $\lambda_0$  данная волна или распространяется, или затухает.

Решение волнового уравнения (13.36) для магнитного вектора Герца позволяет определить второй класс решений, при этом из (13.34) и (13.35) следует:



$$E_x = jk \frac{\partial \Pi^m}{\partial y} e^{jhz}; \quad E_y = jk \frac{\partial \Pi^m}{\partial x} e^{jhz}; \quad E_z = 0;$$

$$H_x = jh \frac{\partial \Pi^m}{\partial x} e^{jhz}; \quad H_y = jh \frac{\partial \Pi^m}{\partial y} e^{jhz}; \quad H_z = g^2 \Pi^m e^{jhz}.$$

Таким образом, этот класс решений определяет электромагнитное поле, у которого продольная составляющая вектора  $\vec{E}$  равна нулю, а вектор магнитного поля имеет отличные от нуля все три составляющие. Волны, у которых имеется продольная составляющая магнитного поля, называются магнитными волнами или  $\vec{H}$ -волнами. Поскольку  $E_z = 0$ , вектор  $\vec{E}$  располагается в плоскости, перпендикулярной к распространению колебаний, такие поля иногда называются поперечными электрическими волнами и обозначаются ТЕ.

Для магнитных волн, так же как и электрических, волновые числа  $g$ ,  $h$  и  $k$  связаны соотношениями (13.40), остается в силе также уравнение (13.41), описывающее зависимость волн в свободном пространстве  $\lambda$ , в волноводе  $\lambda_g$  от критической длины волны  $\lambda_0$ .

Чаще всего используются волноводы с прямоугольным и круглым поперечными сечениями. Решение двухмерного волнового уравнения для электрических волн в прямоугольном волноводе находится известным методом разделения переменных. При этом получим значения собственных функций

$$\Pi = c \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (13.42)$$

и соответствующие им собственные значения параметра  $g^2$



$$g^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (13.43)$$

Уравнения (13.42) и (13.43) определяют все возможные электрические волны в прямоугольном волноводе. Каждой паре чисел  $m$  и  $n$  соответствует вполне определенная электромагнитная волна, которую будем обозначать  $E_{mn}$ . Поскольку числа  $m$  и  $n$  не могут быть равными нулю, в прямоугольном волноводе не может быть волн с индексами  $0,0$ ;  $0, n$ ;  $m, 0$ . Простейшая электрическая волна имеет индексы  $m = n = 1$  и обозначается  $E_{11}$ .

Граничная задача для магнитных волн решается аналогичным образом. Однако другое граничное условие для  $\Pi^m$ , заключается в том, что при  $x = 0$  и  $x = a$   $\partial\Pi^m/\partial x = 0$  и при  $y = 0$  и  $y = b$   $\partial\Pi^m/\partial y = 0$ , приводит к следующему виду собственных функций для магнитных волн:

$$\Pi^m = C \cos\left(m\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Магнитные волны в прямоугольном волноводе обозначаются  $H_{mn}$ . Отметим, что среди магнитных волн в волноводе могут быть волны, у которых один индекс равен нулю, т.е.  $H_{10}$ ,  $H_{20}$ ,  $H_{30}$  или  $H_{01}$ ,  $H_{02}$ ,  $H_{03}$ . Однако, волн, у которых оба индекса равны нулю, быть не может, т.к. при этом  $\Pi = C$  и поле волны равно нулю. Заметим также, что поле волны  $H_{m0}$  не зависит от координаты  $y$  (Рис. 13.8).

Рассмотрим электромагнитное поле и возможные системы волн в круглом волноводе. Решением волнового уравнения, представленного в цилиндрической системе координат, являются формулы





$$\Pi - CJ_m(gr) \cos m\varphi; \quad (13.44)$$

$$\Pi = CJ_m(gr) \sin m\varphi, \quad (13.45)$$

где  $C$  – постоянная;  $m$  - любое целое число, включая нуль;  $g$  - поперечное волновое число;  $J_m(gr)$  - функция Бесселя;  $gr$  - аргумент функции Бесселя;  $m$  - ее индекс.

При  $m = 0$  решение (13.45) обращается в нуль, а (13.44) дает

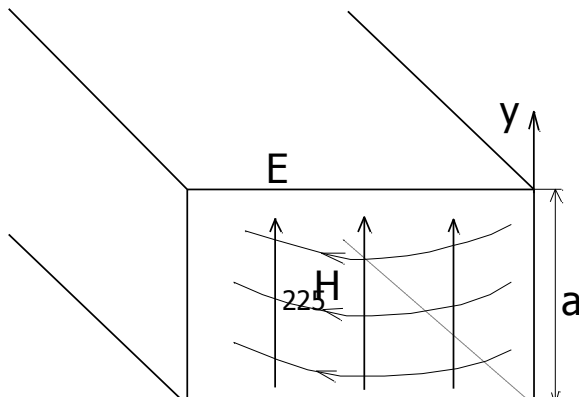
$$\Pi = CJ_0(gr).$$

Так как функция  $\Pi$  должна удовлетворять граничному условию  $\Pi = 0$  при  $r = a$ , то для поперечного волнового числа получаем уравнение

$$J_m(ra) = 0.$$

Положительные корни этого уравнения  $v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}$  определяют возможные значения  $g$  для электрических волн

$$g = v_{nm} / a. \quad (13.46)$$





Электрическая волна, рассчитанная таким образом, имеет индексы  $mn$  и называется волною  $E_{mn}$ . Первый индекс  $m$  означает порядок функции Бесселя, а второй – номер корня уравнения (13.46).

Магнитные волны выражаются через вектор  $\vec{\Pi}^m$  аналогично электрическим. Однако при этом следует иметь в виду, что граничные условия для  $\vec{\Pi}^m$  иные:  $\partial \Pi^m / \partial r|_{r=0} = 0$ . Отсюда следует, что в этом случае поперечное волновое число должно удовлетворять уравнению

$$\left. \frac{dJ_m(gr)}{dr} \right|_{r=a} = 0 .$$

Положительные корни этого уравнения будут определять магнитные волны в волноводе  $g_{mn} = \mu_{mn} / a$ . Числа  $\nu_{mn}$  и  $\mu_{mn}$  образуют возрастающую последовательность волновых чисел, по которым можно определить критические длины волн для различных типов.

## 13.6 Световоды

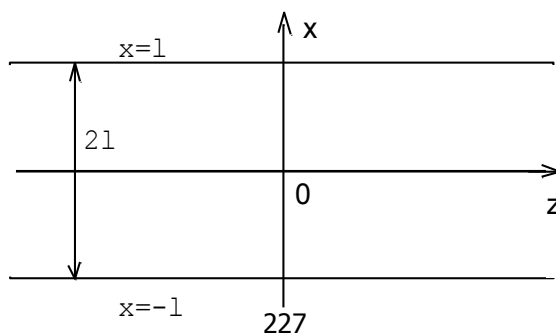
Рассматривая явление полного внутреннего отражения мы



отмечали, что вдоль границы раздела распространяется замедленная электромагнитная волна. Такая же картина наблюдается в плоском слое диэлектрика в том случае, если для волны, последовательно отражаемой от верхней и нижней границ слоя, выполняется условие полного внутреннего отражения. Такой плоский диэлектрический слой представляет собой плоский диэлектрический волновод. Аналогичными направляющими свойствами обладает также и круглый диэлектрический волновод.

Диэлектрический волновод широко используемый для канализации ЭМВ, соответствующих видимой и инфракрасной областям спектра, называется световодом. Световоды нашли широкое применение в лазерной технике. Гибкие световоды оказываются удобными для канализации светового потока в труднодоступные места или когда нужно изменить место использования энергии. Для выяснения характеристик световодов, определения в них типов волн и условий их распространения необходимо решение соответствующих электродинамических задач. Существуют два типа световодов: в виде диэлектрического слоя и в виде круглого диэлектрического цилиндра.

Рассмотрим слой, в котором  $\varepsilon \neq 1, \mu = 1$ , находящийся в среде, где  $\varepsilon = \mu = 1$ . Пусть поля не зависят от  $y$  (Рис. 13.9). С помощью вектора Герца вычислим поля,





■

имеющие только одну составляющую по оси  $z$

$$\Pi_x = 0; \quad \Pi_y = 0; \quad \Pi_z = \Pi(x)e^{jh_z};$$

$$\Pi_x^m = 0; \quad \Pi_y^m = 0; \quad \Pi_z^m = \Pi(x)e^{jh_z}.$$

Из волнового уравнения  $\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$  следует, что вне слоя имеем

$$\frac{\partial^2 \Pi(x)}{\partial x^2} + g^2 \Pi(x) = 0, \quad (13.47)$$

где  $g^2 = k^2 - h^2$ . В металлических волноводах  $g^2$  является положительной величиной, так как  $h^2 < k^2$ .

В случае медленных волн, которые будут иметь место при наличии диэлектрика,  $\lambda_g < \lambda$  и, так как  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $h = 2\pi/\lambda_g$ ,  $h^2$  оказывается больше  $k^2$ , поэтому  $g^2$  отрицательно. Таким образом, поперечное волновое число  $g$  является чисто мнимым. Обозначим  $-g^2 = p^2 = h^2 - k^2$ , тогда уравнение (13.47) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \Pi(x)}{\partial x^2} - p^2 \Pi(x) = 0,$$



которое имеет общее решение в виде

$$\Pi(x) = Ae^{px} + Be^{-px},$$

где  $A$  и  $B$  произвольные постоянные. Если диэлектрик начинается при  $x = 0$ , то  $x$  будет расстояние от поверхности диэлектрика до точки наблюдения. Первое частное решение не имеет физического смысла, т.к. оно дает поле, нарастающее с увеличением координаты, поэтому должно быть отброшено. Следовательно,

$$\Pi(x) = Be^{-px}. \quad (13.48)$$

Уравнение (13.48) показывает, что вне пластинки поле экспоненциально убывает вместе с координатой, что согласуется с рассмотренной ранее электродинамической задачей на полное внутреннее отражение. Из (13.38) и (13.39) находим составляющие электрического и магнитного поле вне диэлектрика:

$$E_x = -jhpBe^{-px+jhz}; \quad H_y = -jkpBe^{-px+jhz}; \quad E_z = -p^2Be^{-px+jhz};$$

$$E_y = H_x = H_z = 0. \quad (13.49)$$

Для области внутри слоя применимо волновое уравнение (13.47), но следует иметь ввиду, что волновое число  $k$  будет теперь определяться выражением  $k = 2\pi n / \lambda$ , где  $n$  -показатель преломления среды. Таким образом,  $g^2 = k^2 n^2 - h^2$ . Частными решениями данного волнового уравнения будут

$$\Pi = A_1 \sin gx; \quad (13.50)$$



$$\Pi = A_2 \cos gx, \quad (13.51)$$

которые позволяют найти компоненты поля. Так для решения (13.50) получаем:

$$(13.52)$$

$$E_x = jh \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} e^{jhz} = jhgA_1 \cos gx e^{jhz}; \quad E_z = g^2 \Pi(x) e^{jhz} = g^2 A_1 \sin gx e^{jhz};$$

$$H_y = jkn^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} e^{jhz} = jkgn^2 A \cos gx e^{jhz}; \quad E_y = H_x = H_z = 0.$$

Для нахождения характеристического уравнения, позволяющего вычислить фазовую скорость волн, распространяющихся вдоль пластины, воспользуемся граничными условиями равенства тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей в двух средах (вне пластины и внутри пластины). Получим

$$pl = \frac{1}{n^2} gl \operatorname{tg}(gl). \quad (13.53)$$

При заданной пластине, т.е. когда ее толщина и показатель преломления известны, данное уравнение определяет необходимые соотношения между  $g$  и  $p$  для волн, которые могут существовать в пластине. Так как  $p$  соответствует как бы поперечному волновому числу вне пластины и по существу определяет затухание в направлении оси  $x$ , а  $g$  - поперечное волновое число в пластине, то распространение волн может быть только при определенном соотношении этих величин. Второе частное решение аналогично приводит к соотношению

$$pl = -\frac{1}{n^2} gl \operatorname{ctg}(gl). \quad (13.54)$$



Электрические волны, определяемые уравнениями (13.50) и (13.51), имеют различную симметрию относительно пластины  $x = 0$ . Электрическую волну (13.51) называют четной электрической волной, так как ее составляющие  $E_x$  и  $H_y$  определяются  $\cos(gx)$ , т.е. четной функцией. Волна, описываемая (13.50), называется нечетной.

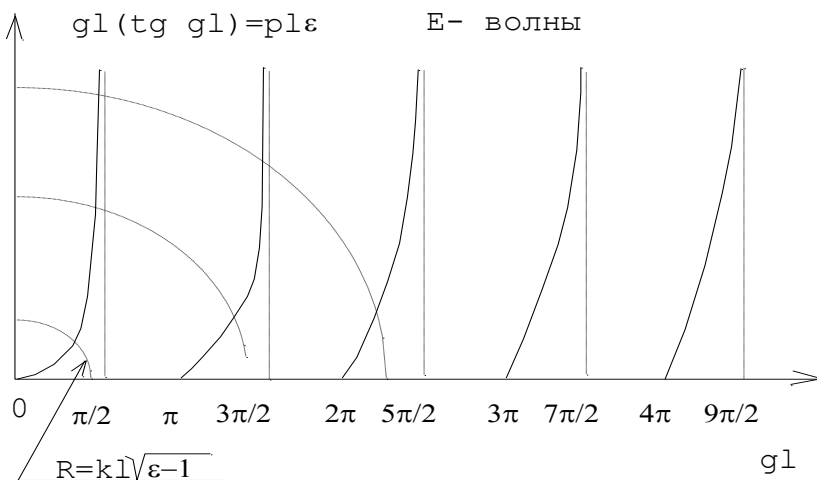
Диаграмма зависимости  $pl$  от  $f(gl)$  для четных волн представлена на Рис.13.10. Для волн в пластинке помимо уравнений (2.53), (2.51) должны быть выполнены соотношения:

$$g^2 = k^2 n^2 - h^2; p^2 = h^2 - k^2; g^2 + p^2 = k^2(n-1); (gl)^2 = (pl)^2 = (kl)^2(n^2 - 1). \quad (13.55)$$

Данные уравнения есть уравнения окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  с центром в точке 0 и радиусом  $R = kl\sqrt{n^2 - 1}$ . Если пластинка имеет толщину  $l$  и показатель преломления  $n$ , то при заданной частоте  $k$  радиус окружности оказывается заданным. На диаграмме величины  $gl$  и  $pl$ , которые соответствуют волне в пластине, с одной стороны, должны являться точками окружности (определяя значение ее координат  $x$  и  $y$ ), а с другой принадлежать кривым  $pl = f(gl)$ . Этим требованиям будут удовлетворять точки пересечения окружности с кривыми  $pl = f(gl)$ . Искомое решение будет иметь лишь конечное число корней.



## Машиностроение



Из диаграммы видно, что при  $R < \pi$  имеется лишь один корень решения – волна  $E_{00}$ , при  $\pi < R < 2\pi$  появляется второй корень – волна  $E_{20}$  и т.д. Чем больше  $R$ , т.е. частота, тем больше число возможных волн в заданной пластинке. Волновые числа этих волн находят из соотношения  $h^2 = k^2 + p^2$ .

Таким же образом определяют и нечетные электрические волны. При заданной пластинке ( $l$  и  $n$ ) и частоте значение  $R$  оказывается известным, затем находят точки пересечения соответствующей окружности с ветвями функции  $gl = f(pl)$ , а значит типы волн. По определенным из графика значениям  $pl$  и известному значению  $k$  определяют волновое число  $h$  медленных волн, распространяющихся в пластине. Отметим, что при  $R < \pi/2$  для нечетных волн решения нет. При  $R > \pi/2$  появляется волна  $E_{10}$ , при  $R > 3\pi/2$  – волна  $E_{30}$  и т.д. Вообще волны типа  $E_{m0}$  как четные, так и нечетные существуют лишь при условии  $R \geq m\pi/2$ . Частоты, при которых появляются новые распространяющиеся волны, называют критическими частотами.

Вместе с электрическими волнами в пластинке могут распространяться и магнитные волны. Их рассчитывают введением





магнитного вектора Герца с компонентами

$$\Pi_x^m = 0; \quad \Pi_y^m = 0; \quad \Pi_z^m = \Pi_x e^{jh_z}.$$

Заметим, что при очень высоких частотах волна при удалении от диэлектрика быстро затухает. При таких высоких частотах волновое число  $h = \sqrt{k^2 n^2 - g^2}$  стремится к  $h = kn$ , т.е. волна распространяется с той же скоростью, что и в безграничном диэлектрике. При частотах, лишь немного превышающих критическую частоту,  $p \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow k$ , при этом поле в основном расположено вне слоя, а скорость распространения волны близка скорости распространения в вакууме  $c$ .

Электромагнитное поле цилиндрических световодов определяют аналогичным образом при помощи введения вспомогательных электрического и магнитного векторов Герца. При этом используется цилиндрическая система координат. Векторы Герца для области вне стержня оказываются равными:

$$\Pi_z = B_1 K_m(pr) \sin(m\varphi + \varphi_0) e^{jh_z};$$

$$\Pi_z^m = B_2 K_m(pr) \cos(m\varphi + \varphi_0) e^{jh_z},$$

для области внутри стержня равными

$$\Pi_z = A_1 J_m(gr) \sin(m\varphi + \varphi_0) e^{jh_z};$$

$$\Pi_z^m = A_2 J_m(gr) \cos(m\varphi + \varphi_0) e^{jh_z},$$

где  $K_m(pr)$  - функция Макдональда;  $J_m(gr)$  - модифицированная функция Бесселя с индексом  $m$ . Отсюда, используя соотно-



шения между  $\vec{P}$  и  $\vec{E}, \vec{H}$  определяют составляющие электрического и магнитного полей как в стержне, так и вне его.

Покрывая сердечник с достаточно малым поперечным сечением и большим показателем преломления материалом с более низким показателем преломления, можно получить световод, пропускающий один или несколько типов колебаний в оптическом диапазоне.

Рассмотрение вопроса о распространении электромагнитных волн в диэлектрических стержнях и световодах имеет большое значение не только с точки зрения канализации электромагнитной энергии по световоду, но и с точки зрения понимания физических процессов, происходящих в лазерах, в которых рабочие тела представляют собой оптические волокна.

### 13.7 Общие сведения об оптических резонаторах

Одним из основных элементов оптического лазера является резонатор. Термин «резонанс» предполагает нарастание амплитуды электромагнитных волн вследствие многократного отражения их некоторыми отражающими поверхностями.

Колебательная система, представляющая собой некоторый объем диэлектрика, ограниченного замкнутой окружающей поверхностью, носит название объемного резонатора. Объемный резонатор имеет бесчисленное множество собственных резонансных частот. Задача определения параметров объемных резонаторов и их собственных частот сводится к решению уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях на стенках. Задача значительно упрощается, если использовать результаты, полученные для других электродинамических систем.

Обычно используемые в электродинамических системах замкнутые резонаторы имеют размеры, соизмеримые с длиной рабочей волны. При этом спектр собственных частот в рабочем диапазоне сильно разрежен. В лазерной технике замкнутые резонаторы используют лишь в крайней длинноволновой части оптического диапазона. В ИК области и в видимой части спектра ввиду весьма малых  $\lambda$  используют резонаторы с размерами значительно превосходящими длину волны. При этом собственные типы колебаний имеют высокий порядок. В замкнутых объемных резонаторах спектр собственных частот резонатора становится

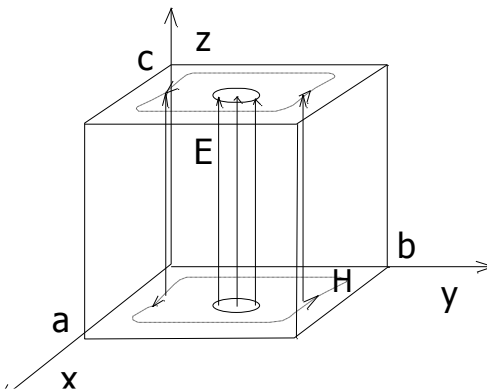


весьма плотным, т.е. разница между двумя соседними частотами в рабочем диапазоне становится малой. Число колебаний  $\Delta N$ , приходящихся на интервал частот  $\Delta\omega$ , равно

$$\Delta N = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega, \quad (13.56)$$

где  $V$  - объем резонатора;  $c$  - скорость света.

Из (13.56) следует, что для высоких частот (когда длина волны мала по сравнению с размерами резонатора) спектр не зависит от формы резонатора и определяется его объемом. Применение закрытых резонаторов в оптическом диапазоне не представляется возможным. Использование резонаторов в оптическом диапазоне становится возможным, если сделать спектры их собственных частот более редкими и уменьшить потери в резонаторе, т.е. увеличить его добротность. Это достигается удалением боковых стенок резонатора. При этом в резонаторе остаются лишь те типы колебаний, которые образуются путем отражения волн от торцевых стенок. Все другие типы волн исчезают, в результате спектр собственных частот становится разреженным по сравнению со спектром аналогичного замкнутого резонатора. Простейшим видом резонатора является резонатор, состоящий из двух плоских зеркал. Резонатор в лазере может быть образован двумя сферическими зеркалами, одним плоским и другим сферическим зеркалами. Если система зеркал обеспечивает циркуляцию луча по замкнутому контуру, то такой резонатор называют кольцевым.



Рассмотрим основные свойства прямоугольного объемного закрытого резонатора (Рис.13.11). Определим собственные колебания резонатора, полагая, что его стенки обладают идеальной проводимостью и что внутри резонатора среда с  $\varepsilon = 1$  и



$\mu = 1$ . Волновое уравнение для вектора  $\vec{E}$  имеет вид

$$\Delta E + k^2 \vec{E} = 0.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных и принимая во внимание граничные условия  $E_t = 0$ , а также, что внутри резонатора нет свободных зарядов ( $\text{div} \vec{E} = 0$ ), найдем

$$E_x = A \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{c} z ;$$

$$E_y = B \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{c} z ; \quad (13.57)$$

$$E_z = C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{c} z ,$$

где  $m, n$  и  $p$  - целые числа, каждое из которых может принимать значения  $0, 1, 2, \dots$ ;  $A, B$  и  $C$  - комплексные постоянные числа. Величины  $m\pi/a$ ,  $n\pi/b$  и  $p\pi/c$  представляют собой составляющие волнового вектора  $\vec{k}$  по осям  $x, y, z$ , т.е.  $k \cos \alpha = m\pi/a = k_x$ ;  $k \cos \beta = n\pi/b = k_y$ ;  $k \cos \gamma = p\pi/c = k_z$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы между направлением вектора  $\vec{k}$  и соответствующими осями координат.

Волновое число  $k$  определяется из уравнения

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{c} \right)^2. \quad (13.58)$$

Составляющие магнитного поля  $\vec{H}$  можно найти из уравнения



## Машиностроение

$$\vec{H} = \frac{1}{jk} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Отсюда имеем:

$$H_x = \frac{\pi}{jk} \left( \frac{n}{b} C - \frac{p}{c} B \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c};$$

$$H_y = \frac{\pi}{jk} \left( \frac{p}{c} A - \frac{m}{a} C \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \quad (13.59)$$

$$H_z = \frac{\pi}{jk} \left( \frac{a}{m} B - \frac{n}{b} A \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c}.$$

Таким образом, каждой тройке числе  $m, n, p$  соответствует некоторое поле в резонаторе, определенное уравнениями (13.57) и (13.59) с волновым числом  $k$ , которое может быть найдено из (13.58). Поле имеет длину волны

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}$$

и частоту

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}.$$

Каждой тройке чисел соответствует волна с определенной частотой, имеющая свое распределение поля и свое определенное направление распространения.

Простейшее колебание в полости будет при  $m=1, n=1, p=0$  (если два индекса будут равны нулю, то поле вообще исчезает). Оно имеет частоту



$$v = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} .$$

Это так называемая основная собственная частота колебаний резонатора. При этом электрическое поле имеет только одну составляющую по оси  $z$ , т.е.  $E_x = E_y = 0$ ;  $E_z \neq 0$ ; магнитное поле по оси  $z$  не имеет составляющей, а отличными от нуля будут составляющие по осям  $x$  и  $y$ .

Заметим, что множитель  $\pm j$ , стоящий в формулах для магнитного поля, показывает, что магнитное поле сдвинуто по фазе на  $\pi/2$  относительно электрического. При стоячих волнах в резонаторе бывает момент времени, когда вся энергия сосредоточена в магнитном поле. Электрическое поле в этот момент времени отсутствует, и бывают моменты, когда вся энергия сосредоточена в электрическом поле.

На примере рассмотренного резонатора видно, что резонаторы имеют дискретные резонансные частоты колебаний. Это означает, что поля правильной формы в резонаторе возникают лишь в случае, если частота возбуждения будет в точности равна резонансной частоте. Этот результат получен в предположении, что нет потерь энергии в стенках резонатора и в диэлектрике, заполняющей резонатор. В действительности проводимость стенок имеет вполне определенное значение, не исключается возможность также потерь в диэлектрике. В резонаторе частота колебаний  $\omega_g$  отлична от частоты  $\omega$  незаполненного резонатора

$\omega_g = \omega / \sqrt{\varepsilon \mu}$ . Если  $\varepsilon$  и  $\mu$  - комплексные величины, то частота оказывается также величиной комплексной:  $\omega_g = \omega' - j\omega''$ .

Мнимая часть  $\omega_g$  определяет затухание колебаний. И то и другое приводит к потере энергии при колебаниях. Затухающие колебания, возникающие в резонаторе при отсутствии источника энергии, представляют собой суперпозицию частот, расположенных около резонансной частоты  $\omega_0$ .

Таким образом, имеется некоторый узкий интервал частот, внутри которого возможно возбуждение резонатора. Кривая зависимости интенсивности возникающих в резонаторе колебаний от частоты воздействующего на него колебания (резонансная кривая) имеет вполне определенную форму и полуширину.



## Машиностроение

Острота резонансной кривой определяется относительными потерями в резонаторе за один проход, т.е. его добротностью

$$Q = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\text{Запасенная энергия}}{\text{Мощность потерь}} .$$

Если запасенная в резонаторе энергия будет  $W$ , то мощность потерь равна взятой с обратным знаком производной по времени от  $W$ :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_0}{2\pi} \frac{W}{Q} ,$$

отсюда

$$W_t = W_0 e^{-\frac{\omega_0}{2\pi Q} t} . \quad (13.60)$$

Таким образом, запасенная в начальный момент времени энергия  $W_0$ , экспоненциально убывает. Коэффициент затухания оказывается обратно пропорциональным добротности резонатора.

Из (13.60) следует, что напряженность электрического поля в резонаторе изменяется в течение времени по закону

$$E_t = E_0 e^{-\frac{\omega_0}{4\pi Q} t} e^{-j\omega_0 t} .$$

Отсюда, представляя  $E_t$  через интеграл Фурье, находим

$$E_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-j\omega t} d\omega ,$$

где

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} E_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{4\pi Q}} e^{j(\omega - \omega_0) t} dt .$$

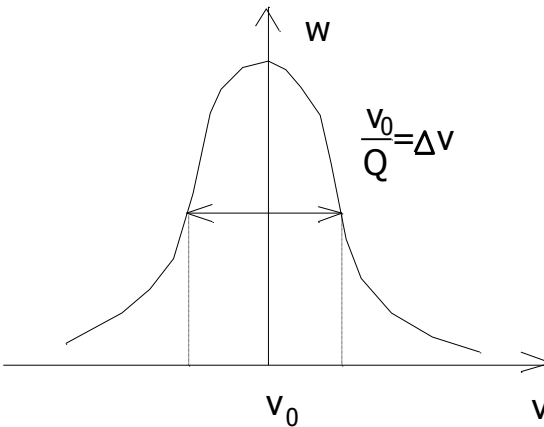


Произведя соответствующее интегрирование, найдем следующее распределение энергии по частоте в резонаторе:

$$|E(\nu)| \approx \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + [\nu_0/(2Q)]^2},$$

где произведена соответствующая замена  $\omega$  на  $2\pi\nu$ . Таким образом, резонансная кривая имеет лоренцову форму (Рис.13.12). На высоте, равной половине максимального значения энергии, ширина спектральной линии резонатора равняется  $\nu_0/Q$ . Половина этой величины называется полушириной резонансной кривой. Таким образом, полуширина спектральной линии резонатора обратно пропорциональна его добротности, или, так как добротность обратно пропорциональна потерям, резонансная кривая имеет размытость, прямо пропорциональную потерям. Острая кривая получается только в резонаторе, обладающем

весьма малыми потерями.



Из (13.60) следует, что при наличии затухания энергия в резонаторе уменьшается в  $e$  раз за время  $\tau = 2\pi Q/\omega_0 = Q/\nu_0$ .

Так как  $\nu_0 = 1/T_0$ , где  $T_0$  - время, требуемое для одного колебания, то  $Q = \tau/T$ . Таким образом, добротность резонатора

определяет число свободных колебаний, необходимое для уменьшения энергии в нем до 0.368 начального значения, а величина  $\tau$  может быть рассмотрена как время «звучания» резонатора.

Поскольку добротность определяется потерями энергии, а последние зависят от частоты, то и добротность резонатора





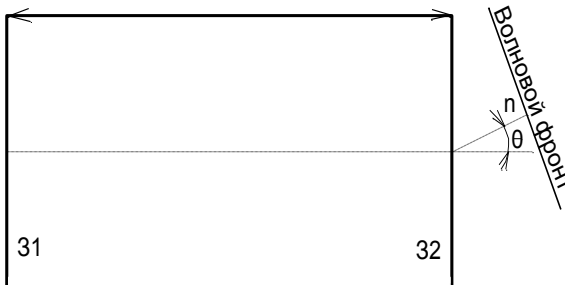
является функцией частоты и имеет различные значения для различных собственных частот резонатора. Наибольшей добротностью резонаторы обладают при самых низких типах колебаний (которые в них возникают), т.е. при основных частотах. Это обстоятельство наряду с необходимостью разрежения спектра собственных частот приводит к тому, что размеры закрытых резонаторов выбирают соизмеримыми с рабочей длиной волны.

В оптическом диапазоне необходимо использовать открытые резонаторы, обладающие не только сильно разреженным спектром собственных частот, но и достаточно высокой добротностью на возникших в них колебаниях высших типов. Высокая добротность в открытых системах осуществляется благодаря одному из трех физических явлений, происходящих в них:

- отражения электромагнитных волн от краев резонатора;
- образования каустических поверхностей;
- явления полного внутреннего отражения.

### 13.8 Резонаторы с плоскими зеркалами

Рассмотрим простейший тип открытого резонатора, представляющего собой два плоских параллельных зеркала, отстоящих на некотором расстоянии друг от друга. Такая система известна в оптике под названием интерферометра Фабри - Перо.



Пусть на систему из двух плоских зеркал (рис.13.13) падает плоская волна под углом  $\vartheta$  (к оси резонатора). Если при этом выполняется условие

$$2d \cos \vartheta = q\lambda$$

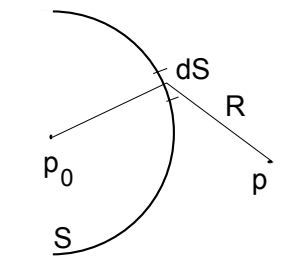
(где  $q$  - целое число), то в про-

странстве между зеркалами возникают стоячие волны. Этот простейший случай имеет место лишь для резонатора, зеркала которого значительно больше расстояния между зеркалами (при воз-



буждении его внешним источником света). В лазерах обычно используются резонаторы типа Фабри - Перо, в которых размеры зеркал значительно меньше длины резонатора. При этом появляется необходимость учитывать искажение фронта на краях зеркал и возникающие при этом дифракционные потери.

Проблема нахождения распределения поля и определения собственных частот в интерферометре с зеркалами ограниченного размера приводит к краевой задаче, которая не решается обычными методами в явном виде. Для этой цели обычно используют метод Фокса и Ли, который заключается в рассмотрении однородной плоской волны, начинающей свое распространение с одного из зеркал интерферометра. Применяя принцип Гюйгенса-Кирхгофа, вычисляют распределение поля на другом зеркале. Найдя это распределение, т.е. отраженную от второго зеркала волну берут за исходную и вычисления повторяют и т.д. После большого числа таких операций оказывается, что распределение поля на зеркалах приходит к определенному предельному значению и не меняется при последующих прохождениях волны. При этом уменьшается лишь общая амплитуда из-за дифракционных потерь. Полученное распределение и принимается за нормальный тип колебаний. В методе Фокса и Ли считается, что внутри резонатора нет поглощающей или усиливающей среды, и он является чисто пассивным. Начальное распределение интенсивности поля на поверхности первого зеркала произвольно. Выражение принципа Гюйгенса используется в виде скалярного интеграла Френеля. Рассмотрим подробно этот метод.



Согласно принципу Гюйгенса-Френеля световое возмущение в некоторой точке  $P$  возникает вследствие суперпозиции вторичных волн, испускаемых элементами поверхности, находящейся между точкой  $P$  и источником света  $P_0$  (Рис. 13.14). Кирхгоф

показал, что значение поля в произвольной точке  $P$  выражается через значение искомой величины и ее производной во всех точках произвольной замкнутой поверхности, окружающей точку  $P$ .

• •



Пусть  $\Psi_1(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z, t)e^{-j\omega t}$  представляет монохроматическую скалярную волну. Согласно теореме Кирхгофа для скалярного поля

$$\Psi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \Psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp jkR}{R} \right) - \frac{\exp jkR}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right\} dS \quad (13.61)$$

где  $\partial/\partial n$  означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к поверхности  $S$ ;  $R$  - расстояние от точки  $P$  до элемента поверхности.

Используя (13.61), оказывается возможным определить возмущение от точки  $P_0$  в некоторой произвольной точке  $P$  (Рис.13.15), находящейся за экраном с отверстием  $S_0$ . Предположим, что линейные размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны, но малы по сравнению с расстоянием от  $P_0$  и  $P$  до экрана. Возьмем в качестве замкнутой поверхности бесконечную плоскость, включающую отверстие и сферу бесконечного радиуса, и будем полагать, что на отверстии значения  $\Psi$  и  $\partial\Psi/\partial n$  мало отличаются от тех значений, которые они имели бы при отсутствии экрана, а на остальной части поверхности  $\Psi$  и  $\partial\Psi/\partial n$  равны нулю. Пренебрегая в производных по нормали членами, малыми по сравнению с  $k$ , найдем

$$\Psi(P) = -\frac{jAk}{4\pi} \iint_{S_0} \frac{\exp[jk(R+r)]}{Rr} [\cos(nr) - \cos(nR)] dS \quad (13.62)$$

Это так называемая дифракционная формула Френеля-Кирхгофа.

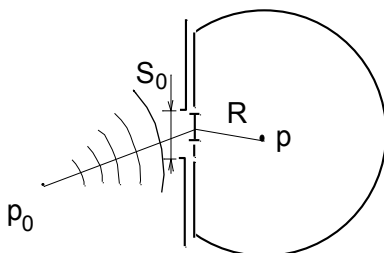
Очевидно, что вместо  $S_0$  можно взять любую другую поверхность, границы которой совпадают с краями отверстия. Если вместо  $S_0$  взять часть падающего волнового фронта  $S_q$ , то при достаточно большом радиусе кривизны фронта последняя формула может быть представлена в виде



$$\Psi(P) = \frac{jk}{4\pi} \frac{A \exp(jkS)}{r} \int_{S_0} \frac{e^{jkR}}{R} (1 + \cos \vartheta) dS, \quad (13.63)$$

так как  $\cos(nr) = 1$ , а  $\vartheta = \pi - (nR)$ .

Формула (13.63) берется за основу в рассматриваемом методе. Использование формул, имеющих место для скалярного поля, обусловлено предположением, что электромагнитные волны в резонансе квазипоперечные и линейно поляризованные.



Согласно (13.63) амплитуда поля в некоторой точке  $P$  на поверхности второго зеркала, обусловленная освещенной поверхностью  $A$ , т.е. первым зеркалом, при заданном распределении поля определяется выражением

$$\Psi_P = \frac{jk}{4\pi} \int_{S_0} \Psi_a \frac{e^{jkR}}{R} (1 + \cos \vartheta) dS, \quad (13.64)$$

где  $\Psi_a$  - амплитуда поля в некоторой точке  $a$  поверхности первого зеркала;  $R$  - расстояние между точками  $a$  и  $P$ ;  $\vartheta$  - угол между нормалью  $n$  к зеркалу и  $R$ .

Рассматривая волну в резонаторе, попеременно отражающуюся от зеркал, найдем, что после  $q$  проходов поле у одного зеркала связано с полем, отраженным от другого зеркала, соотношением (13.64), где  $\Psi_P$  следует заменить на  $u_{(q+1)}$  - поле рассматриваемого зеркала, а  $\Psi_a$  на  $u_q$  - поле у противоположного зеркала, вызывающее появление поля  $u_{(q+1)}$ :

$$u_{(q+1)} = \frac{jk}{4\pi} \int_A u_q \frac{e^{-jkR}}{R} (1 + \cos \vartheta) dS. \quad (13.65)$$



При увеличении числа  $q$ , т.е. после многочисленных проходов, распределение поля у зеркал будет подвергаться незначительным изменениям от отражения к отражению и со временем станет стационарным. На этой стадии распределение поля на обоих зеркалах должно совпадать с точностью до постоянного комплексного множителя, отвечающего за изменение амплитуды и фазы при прохождении волны от одного зеркала к другому. Это условие можно представить в виде

$$u_q = (1/\gamma)^q v \quad , \quad (13.65)$$

где  $v$  - функция распределения (зависит только от положения точки на поверхности зеркала и не изменяется от отражения к отражению);  $\gamma$  - постоянная, не зависящая от пространственных координат.

Из (13.64) и (13.65) получим следующее интегральное уравнение

$$v = \gamma \int_A K v dS \quad , \quad (13.66)$$

в котором ядро интегрального уравнения имеет вид

$$K = \frac{k}{4\pi R} (1 + \cos \vartheta) e^{-jkR} \quad . \quad (13.67)$$

Собственные функции  $v_{\Pi}$ , удовлетворяющие уравнению (13.66), соответствующие различным собственным значениям  $\gamma_{\Pi}$ , описывают распределение поля на поверхности зеркала и представляют собой различные нормального типа колебания, т.е. моды резонатора;  $\ln \gamma$  определяет постоянную распространения, связанную с данным нормальным типом колебаний. Постоянная распространения является величиной комплексной. Действительная ее часть определяет потери за один проход, а мнимая часть – соответствующий сдвиг фазы за один проход (добавляемый к геометрическому сдвигу). Интегральное уравнение (13.66) решается методом последовательных приближений на ПЭВМ. Следует заметить, что когда решения становятся стационарными, можно взять любую точку на волновом фронте на зеркале (например



центр зеркала) и изучить изменения фазы и амплитуды от отражения к отражению. Фокс и Ли провели решение на ЭВМ для прямоугольных плоских зеркал, круглых плоских зеркал и конфокальных сферических зеркал.

Для наиболее часто встречающихся круглых зеркал (Рис. 13.16) формула (2.66) принимает следующий вид

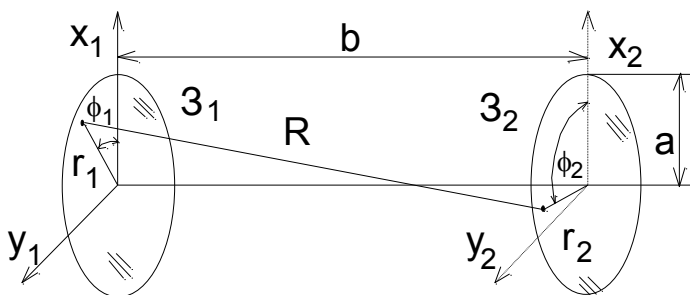
$$v(r_2, \varphi_2) = \gamma \iint_0 K(r_2, \varphi_2, r_1, \varphi_1) v_1(r_1, \varphi_1) r_1 dr_1 d\varphi_1 .$$

Если выполнено условие  $a^2/b\lambda \ll (b/a)^2$ , то правую часть можно проинтегрировать по  $\varphi$ , в результате чего получим

$$v(r, \varphi) = R_n(r) e^{-jn\varphi} ,$$

где  $n$  - целое число, а

$$R_n(r_2) \sqrt{r_2} = \gamma_n \int_0^a (j)^{n+1} \frac{K}{b} J_n \left( \frac{K r_1 r_2}{b} \right) \sqrt{r_1 r_2} e^{-\frac{jK(r_1^2 + r_2^2)}{2b}} R_n(r_1) \sqrt{r_1} dr_1 . \quad (13.68)$$



■

Здесь  $J_n$  - функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка.

Уравнение (13.67) является однородным линейным интегральным уравнением второго рода с непрерывным и симмет-



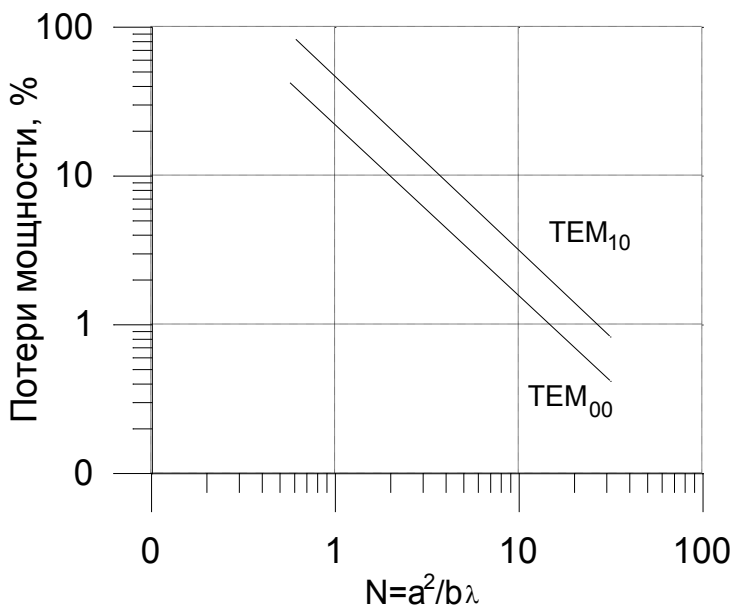
ричным ядром. Его собственные функции

$$v_{nm}(r, \varphi) = R_{nm}(r)e^{(-jn\varphi)},$$

соответствующие дискретным собственным значениям  $\gamma_{nm}$ , описывают распределение поля на круглом зеркале и представляют собой различные моды резонаторов. Нормальные типы колебаний являются поперечными электромагнитными и обозначаются как  $TEM_{nm}$ , где  $n$  - индекс, характеризующий их угловое,  $m$  - радиальное распределение;  $R_{nm}$  описывает радиальное распределение амплитуды поля, угловое распределение носит синусоидальный характер. Константу распределения для данной моды  $\ln \gamma_{nm}$  вычисляют из формулы (13.68).

Условие резонанса той или другой моды требует, чтобы изменение фазы волны при прохождении от одного зеркала к другому и обратно было целым числом, кратным  $2\pi$ , что эквивалентно  $b = q\lambda/2$ .

Таким образом, собственные типы колебаний резонатора отождествляются с модами поперечных электромагнитных колебаний  $TEM_{nmq}$ . Основным параметром является число Френеля  $N = a^2/b\lambda$  (равное числу зон Френеля на поверхности одного зеркала при наблюдении из центра другого). Зависимость потерь мощности на один проход от числа Френеля  $N$  для мод  $TEM_{00q}$  и  $TEM_{10q}$  приведена на Рис. 13.17. Откуда следует, что потери мощности минимальны для низшей (основной) моды.



Метод Фокса и Ли не дает аналитического выражения распределения поля на поверхности зеркал. Используя аналогии с теорией волноводов Вайнштейн получил аналитическое решение данной задачи. Его результаты хорошо согласуются с численными решениями Фокса и Ли. Вайнштейном задача решается исходя из представления о том, что собственные колебания в открытых резонаторах с плоскими зеркалами имеют характер волноводных волн между параллельными плоскостями при частотах, лишь немного превышающих критические частоты. Такие волны, приходя к краю резонатора, почти не излучают, а имея коэффициент отражения, близким к единице, отражается обратно.





### 13.9 Резонаторы со сферическими зеркалами

В качестве резонатора в лазерах часто используется другой тип интерферометра, который обладает рядом практических преимуществ перед интерферометром Фабри - Перо. Им является интерферометр Коннэ, который образуется двумя идентичными вогнутыми зеркалами, фокусы которых расположены в одной и той же точке. Такая система часто называется конфокальным резонатором. Электромагнитное поле в такой системе исследовалось также Фоксом и Ли вышеописанным методом. Одна из исследованных ими конфигураций зеркал представляла собой конфокальную систему, образованную сферическими зеркалами с круговым поперечным сечением (Рис. 13.18). В этом случае уравнение (13.64) для амплитуды поля принимает следующий вид

$$u_{q+1}(r_2, \varphi_2) = \frac{j}{2\lambda} \iint_0 u_q(r_1, \varphi_1) \frac{e^{-jkR}}{R} \left(1 + \frac{b_1}{R}\right) r_1 dr_1 d\varphi_1 . \quad (13.69)$$

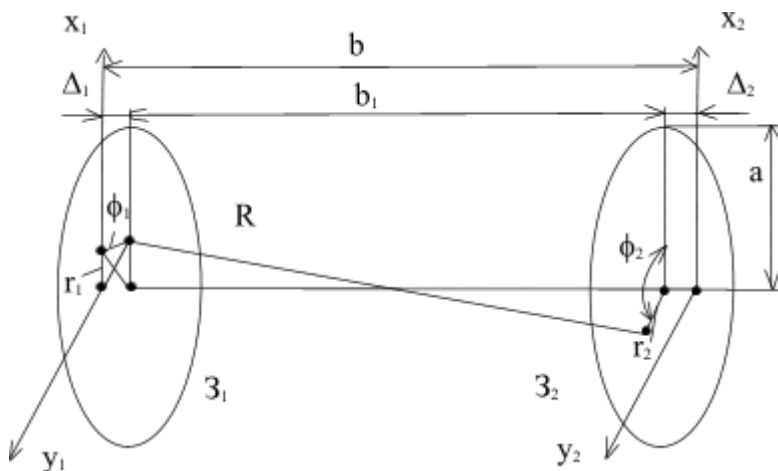
Здесь

$$R = \sqrt{b_1^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} ,$$

а расстояние  $b_1$  определяется соотношением  $b_1 = b - \Delta_1 - \Delta_2$ , где  $\Delta_i = b - \sqrt{b^2 - r_i^2}$ ,  $i = 1, 2$ . Если  $b/a$  велико, то  $\Delta_i \approx r_i^2 / (2b)$ .



## Машиностроение



Сферическое зеркало с малой кривизной хорошо аппроксимирует параболическое зеркало. В этом случае значение  $\Delta_i \approx r_i^2 / (2b)$  является точным и уравнение (13.69) при  $a^2 / b\lambda \ll (b/a)^2$  существенно упрощается, принимая вид

$$u_{q+1}(r_2, \varphi_1) = \frac{je^{-jkb}}{b\lambda} \iint_0 u_q(r_1, \varphi_1) e^{jk(r_1 r_2 / b \cos(\varphi_1 - \varphi_2))} r_1 d\varphi_1 dr_1 .$$

Соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$v(r_2, \varphi_2) = \gamma \iint_0 K(r_2, \varphi_2, r_1, \varphi_1) v(r_1, \varphi_1) r_1 d\varphi_1 dr_1 .$$

Решением уравнения будет

$$v(r, \varphi) = S_n(r) e^{-jn\varphi} ,$$

где  $n$  - целое число. Величина  $S_n(r)$  удовлетворяет приведен-



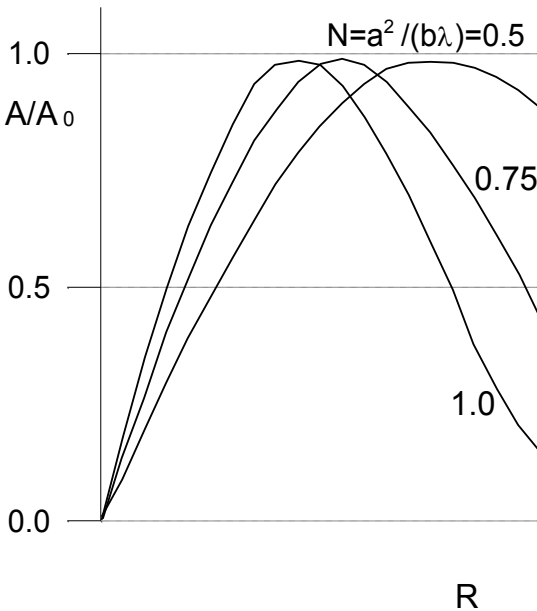
ному интегральному уравнению

$$S_n(r_2)\sqrt{r_2} = \gamma_n \int_0^a K_n(r_2, r_1) S_n(r_1)\sqrt{r_1} dr_1,$$

где

$$K_n(r_2, r_1) = \frac{j^{(n+1)} K}{b} J_a \left( K \frac{r_1 r_2}{b} \right) \sqrt{r_1} \sqrt{r_2}.$$

Набор функции  $V$  при различных  $N$  описывает распределение поля на зеркале. Рассчитанные на ЭВМ распределения поля для типов колебаний  $TEM_{10}$  показаны на рис. 13.19. Следует отметить, что распределение фазы однородно по поверхности



зеркал. На рис. 13.20 представлены типовые зависимости потерь мощности за один проход от числа Френеля для различных типов колебаний для конфокальных (сплошные кривые) и круглых плоских зеркал (штриховые кривые).

Таким образом, в конфокальном резонаторе поле существенно отличается от поля резонатора с плоскими круговыми зеркалами. Поле значительно сконцентрировано у оси отражателей, амплитуда поля на поверхности зеркал быстро спадает по мере пе-



ремещения от оси системы к периферии. Вследствие этого значительно уменьшается влияние искажения волнового фронта на краях зеркал, что, в свою очередь, приводит к уменьшению дифракционных потерь. Поверхность зеркал в конфокальном отражателе совпадает с фазовым фронтом, т.е. является поверхностью равных фаз.

Необходимо отметить, что для конфокальной системы условия юстировки значительно упрощаются. При этом не требуется строгой параллельности зеркал (как в резонаторе с плоскими зеркалами), необходимо лишь, чтобы центры кривизны одного зеркала находились на поверхности другого зеркала, не очень близко к краю. Вышеуказанные преимущества конфокальных зеркал обеспечили их широкое применение в лазерной технике. Однако резонаторы со сферическими зеркалами имеют и свои недостатки. Одним из них является значительно большая расходимость лазерного луча.

Бойд и Гордон (одновременно с работами Фокса и Ли) решили задачу о конфокальных резонаторах аналитически. При этом они рассчитали поле не только на поверхности зеркал, но и во всем пространстве между зеркалами. Эти расчеты показали, что поле конфокального резонатора при больших значениях числа Френеля определяется приближенным уравнением

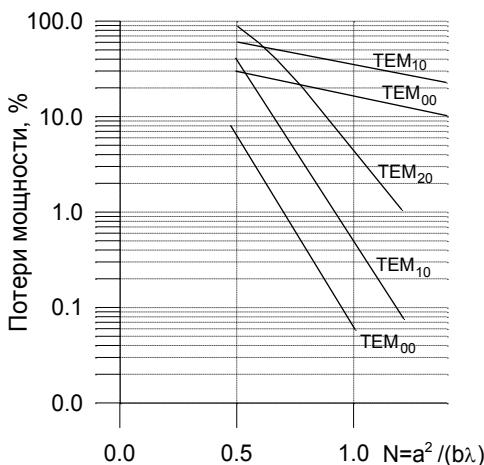
$$\frac{E_{mn}}{E_0} = \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} H_m \left( X \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} \right) H_n \left( Y \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} \right) e^{-\left[ \frac{2\pi}{R_1} \frac{x^2-y^2}{1+\xi^2} \right]} e^{-j\Psi_{mn}}, \quad (13.70)$$

где  $H_m$  и  $H_n$  полиномы Эрмита;  $X = x[2\pi/R_1\lambda]^{1/2}$ ;  $Y = y[2\pi/R_1\lambda]^{1/2}$ ;  $\xi = 2z/R_1$  при отчете  $Z$  от центра резонатора;  $R_1$  - радиус кривизны конфокальных отражателей, равный расстоянию  $b$  между ними;



Машиностроение

$$\Psi_{mn} = K \left[ \frac{R_1}{2} (1 + \xi) + \frac{\xi}{1 + \xi^2} \frac{X^2 + Y^2}{R_1} \right] - (1 + m + n) \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right) \quad (13.71)$$



Из (13.71) следует, что поверхность равной фазы, пересекающая ось  $Z$  в точке  $Z_0$ , определяется уравнением

$$z - z_0 \approx \frac{\xi}{1 + \xi^2} \frac{X^2 + Y^2}{R_1}$$

т.е. поверхности постоянной фазы поля внутри резонатора оказываются сферическими с радиусом кривизны

$$R' = \left| \frac{1 + \xi_0^2}{2\xi_0} \right| R_1$$

При  $\xi_0 = \pm 1$  эта поверхность совпадает с поверхностью сферического отражателя. Плоскость симметрии резонатора ( $\xi_0 = 0$ ) является поверхностью равной фазы.

Распределение поля в конфокальном резонаторе дается модулем выражения (13.70), т.е.  $\left| \frac{E_{mn}}{E_0} \right|$ . На рис. 13.21 показано распределение поля для типа колебаний низшего порядка, т.е.  $TEM_{00}$ . Приблизительно изменение амплитуды в зависимости от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  определяется выражением



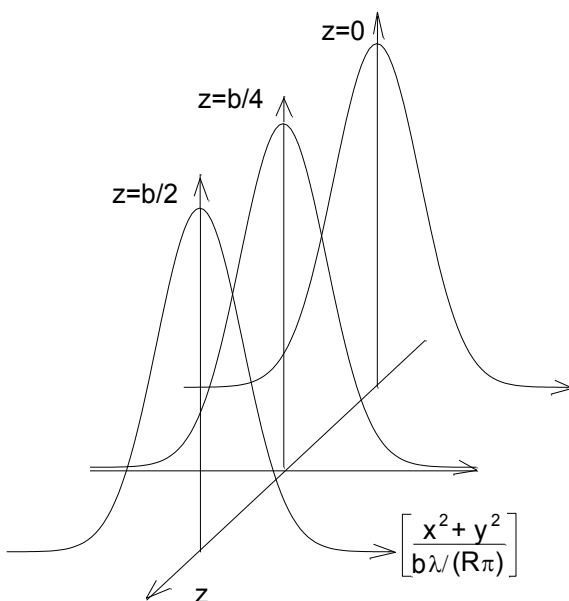
$$A = C \exp \left[ \frac{-kr^2}{R_1(1+\xi^2)} \right].$$

При

$$r = r_e = \sqrt{\frac{R_1 \lambda}{2\pi} (1 + \xi^2)} \quad (13.72)$$

амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Так на поверхности зеркал при  $z = R_1/2\xi = 1$  и  $r_e = \sqrt{R_1 \lambda / \pi}$  в фокусе, т.е. при  $z = 0, \xi = 0$

получается наименьший размер пятна при  $r = \sqrt{R_1 \lambda / 2\pi}$ .



Таким образом, сечение пучка в фокусе сжимается до половины его сечения на поверхности зеркал. Радиус пятна на отражателе, как это следует из (13.72), не зависит от размера отражателя. Как указывалось ранее, дифракционные потери зависят от амплитуды поля на краях зеркала. Чем

**σ**

меньше амплитуда поля на краю зеркала, тем меньше потери мощности. Так как увеличение размера отражателя не влияет на размеры пятна, то очевидно, что увеличение размера отражателя будет сопровождаться уменьшением поля на краю зеркала, что в свою очередь, будет приводить к соответствующему уменьшению дифракционных потерь.



Угловая ширина диаграммы рассеяния сферической волны  $TEM_{00q}$  характеризуется отношением диаметра пятна, определяемого (13.72), к расстоянию от центра резонатора. Сечение пучка в конфокальном резонаторе имеет вид (Рис. 13.22).

Ширина пучка между точками половинной мощности равна

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{R}} = 0,939\sqrt{\frac{\lambda}{R}} \text{ рад.}$$

Резонансная длина волны для конфокальной системы с отражателями, имеющими одинаковые размеры, определяется выражением

$$\frac{4R_1}{\lambda_{mnq}} = 2q + (1 + m + n). \quad (13.73)$$

Из (13.73) видно, что увеличение значения  $m+n$  на две единицы и уменьшение значения  $q$  на единицу приводят к получению одной и той же резонансной длины волны. Это вырождение может быть снято при помощи неконфокального расположения зеркал. Из (13.73) следует, что собственная частота резонатора будет

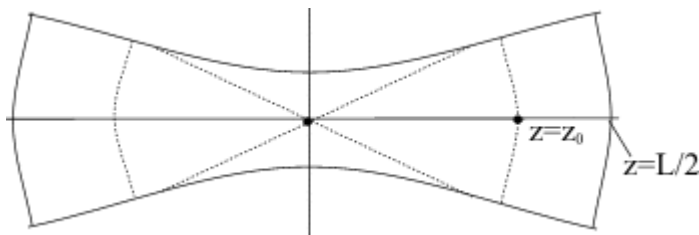
$$\nu_{mnq} = \frac{c}{4R_1} (2q + 1 + m + n). \quad (13.74)$$

Минимальный интервал частот соответствует изменению  $m$  или  $n$  на единицу и равен



$$\Delta \nu = \nu_{mnq} - \nu_{m-1,nq} = \frac{c}{4R_1} .$$

Интервал частоты между соседними продольными модами в два раза больше.



Рассмотрим резонатор, состоящий из двух одинаковых сферических

зеркал радиуса кривизны  $R$ , расположенных на произвольном расстоянии друг от друга. Свойства такого резонатора могут быть определены путем приведения его к соответствующему конфокальному резонатору. Такое действие оказывается возможным ввиду того, что поле конфокального резонатора имеет сферические поверхности равной фазы. Очевидно, что конфокальный резонатор с расстоянием между зеркалами, в котором какие-либо две поверхности постоянной базы совпадают с поверхностями заданных зеркал, будет иметь поле, совпадающее с искомым. Поскольку радиус кривизны сферической поверхности равной фазы в конфокальном резонаторе равен

$$R' = \frac{1 + \xi_0^2}{2\xi_0} R_1 ,$$

то, полагая  $\xi_0 = 2z_0/R_2 = b/b_2$ , получим расстояние между зеркалами эквивалентного конфокального резонатора





## Машиностроение

$$b_{\mathcal{D}} = \sqrt{b(2R - b)} .$$

Условие резонанса (2.74) при этом имеет следующий вид:

$$2b / \lambda_{mnq} = q + \frac{1}{\pi} (1 + m + n) \arccos(1 - b/R) . \quad (13.75)$$

Размер пятна на отражателях для основного типа колебаний  $TEM_{00q}$  моды определяется выражением

$$r_e' = \sqrt{\frac{b\lambda}{\pi} \left[ 2 \frac{b}{R} - \left( \frac{b}{R} \right)^2 \right]^{-1/4}} .$$

При заданном расстоянии между зеркалами  $b$  он является минимальным при  $R = b$ , т.е. при выполнении условия конфокальности. При  $R = b/2$ , что соответствует сферическому резонатору, размер пятна на отражателе становится очень большим.

Несколько позже метод эквивалентного конфокального резонатора был распространен на случай неконфокальности расположенных зеркал разного размера и разного радиуса кривизны. Для зеркал с радиусом кривизны  $R_1$  и  $R_2$  расстояние между зеркалами должно удовлетворять соотношению

$$2b = R_1 + R_2 \pm \sqrt{R_1^2 - b_{\mathcal{D}}^2} \pm \sqrt{R_2^2 - b_{\mathcal{D}}^2} ,$$

где  $b$  есть так называемый конфокальный параметр, изменяя который можно получить разные резонаторы. Условие резонанса в этом случае имеет вид



$$\frac{2b}{\lambda_{mq}} = q + \frac{1}{\pi}(1+m+n)\arccos \sqrt{\left(1 - \frac{b}{R_1}\right)\left(1 - \frac{b}{R_2}\right)}. \quad (13.76)$$

Выражение (13.76) при  $R_1 = R_2$  переходит в (13.75). Размеры пятен на зеркалах находят, используя соотношения:

$$r_1 = \sqrt{\frac{\lambda R_1}{\pi}} \left[ \frac{(R_2 - b)b}{(R_1 - b)(R_1 + R_2 - b)} \right]^{1/4}, \quad (13.77)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{\lambda R_2}{\pi}} \left[ \frac{(R_1 - b)b}{(R_2 - b)(R_1 + R_2 - b)} \right]^{1/4}. \quad (13.78)$$

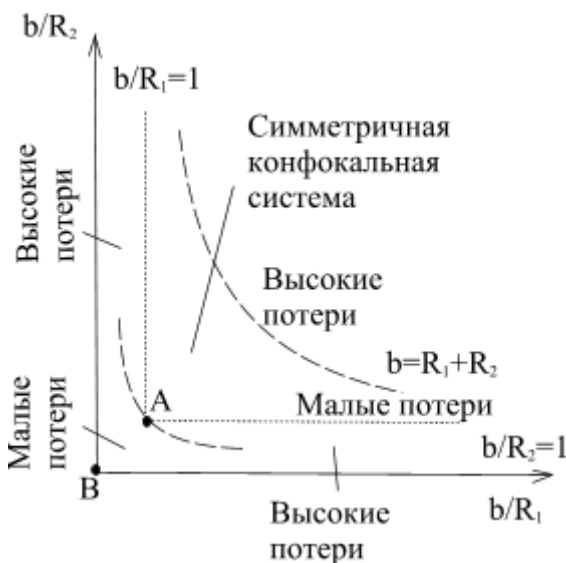
Как видно из (13.77) и (13.78), для резонаторов, состоящих из отражателей с неравномерными радиусами кривизны, размеры пятен на каждом отражателе различны. При изменении расстояния между отражателями  $b$ , обуславливающее увеличение пятен, происходит приближение к области больших потерь. При  $R_1 < b < R_2$  или  $b > R_1 + R_2$  размеры пятен становятся мнимыми. Это означает, что дифракционные потери в резонансной системе становятся весьма большими.

Можно показать, что области с большими дифракционными потерями, т.е. с неустойчивыми модами (13.76), определяются следующими неравенствами:

$$\left(\frac{b}{R_1} - 1\right)\left(\frac{b}{R_2} - 1\right) \leq 1; \quad \left(\frac{b}{R_1} - 1\right)\left(\frac{b}{R_2} - 1\right) \geq 0;$$



$$1 > \left( \frac{b}{R_1} - 1 \right) \left( \frac{b}{R_2} - 1 \right) > 0 .$$



Если в прямоугольной координатной системе по осям  $X$  и  $Y$  отложить величины  $b/R_1$  и  $b/R_2$ , то область больших дифракционных потерь будет с одной стороны ограничена гиперолой, определяемой уравнением

$$\left( \frac{b}{R_1} - 1 \right) \left( \frac{b}{R_2} - 1 \right) = 1$$

Диаграмма устойчивости резонаторов имеет вид (Рис. 13.23). Эти области на рисунке заштрихованы. Между областями высоких потерь располагается область малых потерь. Приведенная диаграмма позволяет оценить устойчивость различных резонаторов с произвольными сферическими зеркалами.

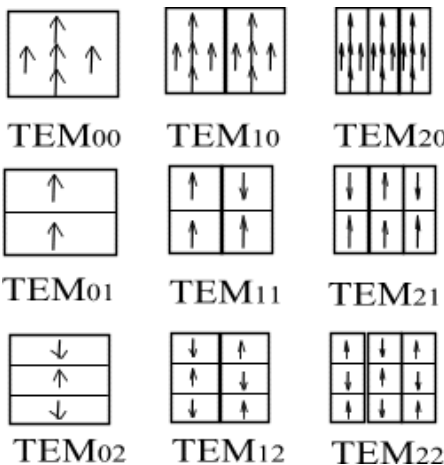
В зависимости от радиусов кривизны зеркал и расстояния между ними точка, соответствующая данным резонатора, определяемая координатами  $b/R_1$  и  $b/R_2$ , может оказаться в той или иной области. В соответствии с этим резонатор будет являться либо устойчивым, либо неустойчивым. В устойчивых резонаторах имеет место периодическая фокусировка пучков, отражаю-



щихся от зеркал, вследствие этого дифракционные потери значительно меньше. В неустойчивых резонаторах фокусировка отраженных пучков отсутствует, и таким образом, при каждом отражении значительная доля энергии выходит из резонатора.

Различным резонаторным системам будут соответствовать на диаграмме точки, принадлежащие различным областям. Так, симметричному конфокальному резонатору ( $R_1 = R_2 = b$ ) будет соответствовать точка  $A$ . Резонатор с плоскими зеркалами ( $R_1 = R_2 = \infty$ ) отображается точкой  $B$ . Вышеуказанные резонаторы отображаются точками, лежащими на границе больших и малых потерь, поэтому небольшие изменения геометрических размеров могут приводить к переходу резонаторов из одной области в другую. С этой точки зрения особый интерес представляют резонаторы, образованные одним плоским, а другим сферическим зеркалами.

Конфигурация поля для различных типов колебаний в резонаторах с плоскими и сферическими зеркалами показана на Рис. 13.24.



Полуконфокальный резонатор, имеющий длину, равную  $b - R/2$ , изображается точкой, лежащей глубоко в области малых потерь, поэтому такие резонаторы являются весьма устойчивыми, имеют малые потери и не зависят от изменения расстояния между зеркалами.

продольное и поперечное давления плазмы,



Различные резонаторы со сферическими зеркалами в зависимости от радиусов кривизны зеркал  $R_1$  и  $R_2$  и расстояния между ними  $L$  обладают различными дифракционными потерями. На диаграмме устойчивости резонаторов области малых потерь определяют устойчивые состояния резонаторов, области больших потерь - неустойчивые. При одних и тех же зеркалах в зависимости от расстояния между ними резонатор может оказаться либо устойчивым, либо неустойчивым. Если резонатор, определяется некоторой точкой диаграммы, расположенной в устойчивой области вблизи границы устойчивых и неустойчивых состояний, то сравнительно небольшие изменения его геометрических параметров могут перевести его из устойчивого в неустойчивый. В неустойчивом состоянии не только возрастают дифракционные потери, но и увеличивается различие потерь для различных мод.

Важнейшей характеристикой резонаторов является коэффициент увеличения поперечных размеров сферических волн  $M$ . Обычно коэффициент  $M$  определяется как увеличение поперечного размера волн за один проход (от одного зеркала к другому). В несимметричных резонаторах коэффициент  $M$  определяется как увеличение при двойном проходе (от одного зеркала к другому и обратно). При этом

$$M = \frac{g_1 g_2 + \sqrt{g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1)}}{g_1 g_2 - \sqrt{g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1)}},$$

где  $g_1 = 1 + b/R_1$  и  $g_2 = 1 + b/R_2$ .

В симметричных неустойчивых резонаторах  $g_1 = g_2 = g$  и значение коэффициента  $M$ , относящегося к одному проходу, находят по формуле

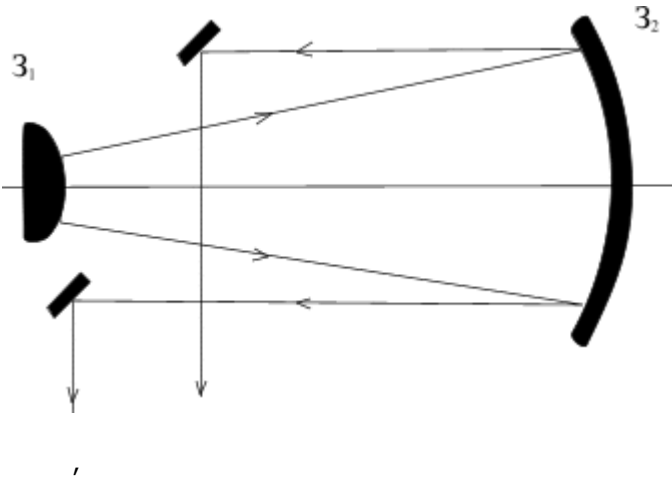
$$M_S = g + \sqrt{g^2 - 1}.$$

При больших значениях  $M$  в неустойчивых резонаторах оказывается возможным использовать оба зеркала глухими, осуществляющими вывод излучения из резонатора вследствие увеличения сечения луча до размеров, превосходящих размеры одного из зеркал. При этом излучение выходит из резонатора в виде кольца. Вывод энергии при таком способе может быть срав-



нительно просто доведен до оптимального значения. Поток энергии внутри резонатора при этом уменьшается в  $M^2$  раз. Относительные потери на проход равняются  $1/M^2$ .

Наиболее часто в лазерной технике используются так называемые телескопические неустойчивые резонаторы, образованные двумя сфокусированными выпуклыми и вогнутыми зеркалами (Рис.13.25). Коэффициент  $M$  для такого резонатора равен  $M = 1 + 2b/R_2$ . Особенностью телескопических резонаторов яв-



ляется возможность появления сходящихся волн.

В неустойчивых резонаторах дифракционные потери значительно превос-

ходят другие виды потерь. Полные потери при этом сильно зависят от поперечного индекса колебаний. Это обстоятельство позволяет использовать неустойчивые резонаторы в том случае, когда требуется осуществить генерацию лазера на одном основном типе колебаний. Неустойчивые резонаторы обладают также положительными качествами, заключающимися в том, что объем в резонаторе, занимаемый полем основной моды, велик даже в резонаторах, имеющих небольшую длину. Неустойчивые резонаторы нашли широкое применение в лазерной технике. Наиболее рационально их применение при сравнительно больших коэффициентах усиления.



### 13.10 Селекция мод

Уже отмечалось, что в резонаторах может одновременно возбуждаться большое число собственных колебаний. Число колебаний в интервале рабочей частоты, возникающих в открытых резонаторах, значительно меньше, чем в равноценных по размерам закрытых резонаторах. Однако это число оказывается еще очень большим. Ввиду того, что линия люминесценции активного вещества значительно шире интервала частот между отдельными колебаниями в резонаторе, излучение лазера представляет собой совокупность различных частот, лежащих внутри линии люминесценции. Многомодовый режим работы генератора приводит к значительному ухудшению таких основных свойств лазерного излучения, как монохроматичность, когерентность, угловая расходимость. При применении лазера иногда необходимо иметь одномодовый, одночастотный лазер. В связи с этим применяют специальные методы подавления нежелательных колебаний высших порядков, т.е. осуществляется селекция колебаний. При подавлении колебаний высших порядков общая энергия излучения заметно не изменяется, но она при этом сосредотачивается в одном типе колебаний. При осуществлении одномодового одночастотного режима работы лазера, очевидно, должны быть приняты меры к селекции как поперечных, так и продольных колебаний.

Селекция поперечных колебаний заключается в подавлении высших колебаний, т.е. с индексами  $m$  и  $n$ , отличными от нуля. В результате селекции в резонаторе остаются только продольные колебания вида  $TEM_{00q}$ , при этом мощность продольных колебаний может увеличиваться за счет увеличения числа активных частиц, которые ранее участвовали в формировании поперечных мод.

Существует много различных методов селекции поперечных колебаний, рассмотрим лишь наиболее часто встречающиеся.



## Машиностроение

Наиболее распространенным и простым способом подавления поперечных колебаний является использование диафрагмы, которая располагается между рабочим веществом и одним из зеркал. Поскольку поле в резонаторе, соответствующее основному типу  $TEM_{00q}$ , сосредотачивается в основном вблизи оси, а поле

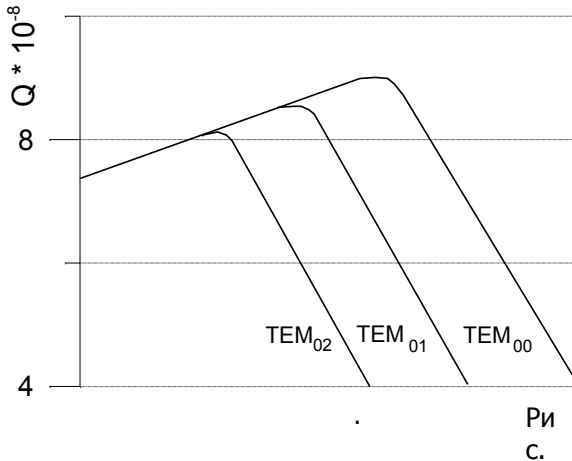


Рис. 12.1. Зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух атомов от радиуса

более высоких типов проецируется на значительно большие расстояния от оси, диаграмма, расположенная на оси, будет оказывать более сильное влияние на распространение высоких типов. Подбирая диафрагмы, можно осуществить подавление всех типов колебаний, кроме основного  $TEM_{00q}$ . Однако

и для основного типа колебаний диафрагма вносит значительные потери, поэтому данный метод селекции имеет существенный недостаток, заключающийся в уменьшении выходной мощности при переходе на одномодовый режим.

Значительно более эффективным является метод, основанный на увеличении дифракционных потерь колебаний высших порядков при сравнительно меньшем их увеличении для колебаний основного типа. Потери в резонаторе зависят от числа Френеля, причем потери различны для различных типов. При уменьшении числа Френеля потери быстро растут, при этом увеличивается и разность между потерями колебаний основного типа и потерями колебаний более высоких порядков. При  $N \ll 1$  эта разность достигает таких значений, что оказывается возможным сравнительно просто осуществить селекцию. Для данной цели особенно пригоден резонатор, состоящий из сферического и плоского зеркал, расположенных на расстоянии, приблизительно равном радиусу кривизны сферического зеркала (плоско-





сферический резонатор). Дифракционные потери в таком резонаторе определяются в основном числом Фарадея для сферического зеркала

$$N_{сф} = \frac{a_2^2}{\lambda \sqrt{bR}} \sqrt{1 - \frac{b}{R}} . \quad (13.79)$$

Из (13.79) следует, что при  $b/R$ , близком к единице,  $N_{сф}$  может иметь настолько малые значения, при которых разница в дифракционных потерях различных мод оказывается вполне достаточной для осуществления селекции. Зависимость добротности резонатора от числа зон Френеля  $N$  для различных типов колебаний представлена на Рис. 13.26. Селекция поперечных мод может быть осуществлена путем использования сильной зависимости коэффициента отражения от угла вблизи угла полного внутреннего отражения. В этом случае используется резонатор, имеющий в качестве одного из отражателей призму, в которой могут происходить многократные внутренние отражения. Призма обладает высоким отражением только в направлении, составляющем весьма малый угол с направлением выбранной оси (около  $1^\circ$ ). В призме, угол которой  $\theta_{np}$  равен критическому углу полного внутреннего отражения  $\theta_{кр}$ , коэффициенты отражения по амплитуде для лучей с параллельной и перпендикулярной поляризацией по отношению к плоскости падения при условии, что угол  $\delta = (\theta_{кр} - \theta_{пад}) \ll 1$ , соответственно равны:

$$\rho_{\parallel} = 1 - \left[ (2N)^{3/2} / (1 - 1/N^2) \right]^{1/4} \delta^{1/2} ;$$

$$\rho_{\perp} = 1 - \left[ 2^{3/2} / (1 - 1/N^2) \right]^{1/4} N^{1/2} \delta^{1/2} .$$

Легко найти относительную интенсивность отраженного света для призмленного селектора мод. Например, при угле призмы  $\theta_{np}$  несколько большем  $\theta_{кр}$ , коэффициент отражения в диапазоне углов  $2(\theta_{np} - \theta_{кр})$  примерно равен 1.0.

Угловая селекция может быть осуществлена также с помощью интерферометра Фабри - Перо, устанавливаемого внутри



резонатора. Так как интерферометр пропускает излучение не только в зависимости от длины волны, но и от направления распространения волны, боковые моды испытывают большие потери.

Рассмотрим основные методы подавления продольных мод. Использование вышеуказанных методов позволяет добиться излучения, содержащего только одну поперечную моду  $TEM_{00q}$ .

При этом угловая расходимость луча лазера значительно уменьшается, приближаясь к значению, определяемому дифракционной расходимостью. Однако при этом в пределах контура усиления активной среды будет содержаться значительное число продольных колебаний, соответствующих различным значениям индекса. Интервал между соседними продольными типами колебаний будет зависеть от длины резонатора и определяться величиной  $c/2L$ . В ряде случаев возникает необходимость получения одночастотного излучения - колебания лишь на одной продольной волне. Для этого могут быть использованы различные методы. Наиболее эффективным из них является метод сложных резонаторов, представляющих собой связанные резонаторы, позволяющие реализовать продольные типы колебаний различной интенсивности. Изменяя коэффициент связи между резонаторами и их длины, можно осуществить возбуждение одного или нескольких типов колебаний. Простейшим видом такого резонатора является линейный трехзеркальный резонатор, представленный на рис.13.27. Допустим, что зеркала плоские, бесконечных размеров.

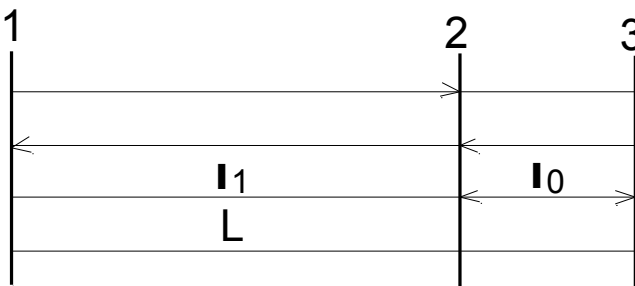


Рис. 12.2. Условная схема молекулы:

комплексными амплитудами отраженных волн от соответствующих зеркал будут иметь следующий вид:

Считая, что в такой системе плоские электромагнитные волны распространяются в направлении нормали к зеркалам, соотношения между



## Машиностроение

$$\begin{aligned} A_1 e^{\gamma l_1} &= A_2 \rho_1; & A_3 e^{\gamma l_0} &= A_1 \tau_2 + A_4 \rho_2; \\ A_2 e^{\gamma l_1} &= A_1 \rho_2 + A_4 \tau_2; & A_4 e^{\gamma l_0} &= A_3 \rho_3 \end{aligned} \quad (13.80)$$

где  $\gamma$  - постоянная распространения волн в среде, заполняющей резонаторы;  $\rho_i$  и  $\tau_i$  - коэффициенты отражения и пропускания по полю.

Решение данной системы уравнений находят при приравнивании нулю ее определителя. Раскрывая определитель, получим уравнение

$$e^{2\gamma(l_1+l_0)} - \rho_2 \rho_3 e^{2\gamma l_1} - \rho_1 \rho_2 e^{2\gamma l_0} + \rho_1 \rho_3 (2\rho_2^2 - 1) = 0 \quad (13.81)$$

Полученные из этого уравнения значения  $\gamma$  позволяют определить собственные частоты резонатора и их потери.

Так, если бы среднее зеркало отсутствовало ( $\rho_2 = 0$ ), то рассчитанный по (13.81) спектр собственных частот был бы эквидистантным с интервалом между частотами, равным  $\Delta \nu_q = c/(2L)$  и представленным на рис. 13.28,а.

В случае, когда среднее зеркало имеет коэффициент отражения  $\rho_2 = 0.65$ , а крайние зеркала  $\rho_1 = \rho_3 = 0.99$ , то частоты, соответствующие корням уравнения (13.81), будут равны (при  $l_1 = 3l_0$ ):

$$\begin{aligned} \nu_{q1} &= \frac{c}{8l_0} 4q; & \nu_{q3} &= \frac{c}{8l_0} (4q + 2); \\ \nu_{q2} &= \frac{c}{8l_0} (4q + 1.14); & \nu_{q4} &= \frac{c}{8l_0} (4q + 2.86). \end{aligned}$$

При этом амплитуды колебаний в относительных единицах будут соответственно равны 1.2; 0.76; 0.24; 0.76 (см. Рис. 13.27,б).



Таким образом, в системе связанных резонаторов добротность для разных типов колебаний существенно различна. Максимальную добротность в сложных резонаторах будут иметь частоты, совпадающие для различных его ветвей. Эффективность данного метода селекции может быть повышена путем использования нескольких связанных резонаторов.

### 13.11. Описание процессов и расчетов в лазерах

При расчете квантовых генераторов и усилителей возникает необходимость составления и решения уравнений, описывающих распространение электромагнитного излучения в активной среде и взаимодействие этой среды с излучением. Если электромагнитное поле описывается на основе уравнений Максвелла, то метод называется классическим. Если используется квантовая трактовка электромагнитного излучения на основе уравнения Шредингера, то имеем квантовый метод.

Квантовый аспект теории начинается уже с представления об энергетических уровнях и дискретных значениях энергии, которыми обладают активные центры. Если излучение описывается классическими методами, а активная среда квантовыми, то соответствующая теория процессов в лазерах называется полуклассической. Ниже приводится изложение полуклассического метода.

При описании процессов в лазерах ранее предполагалось, что коэффициенты, характеризующие вероятности спонтанного и вынужденного излучений известны или для произвольной системы они могут быть рассчитаны при условии, что активные атомы взаимодействуют с излучением в свободном пространстве. В случае, когда атомы находятся в резонаторе, они взаимодействуют с электромагнитным полем в виде стоящих волн. Подобное распределение поля возникает при наличии вынужденного излучения активной среды, при этом свойства самой среды изменяются в присутствии поля. Поэтому более точное решение поставленной задачи требует более строгого рассмотрения взаимодействия излучения в лазерах с активной средой.

При более строгом рассмотрении необходимо учитывать, что под действием электромагнитного поля внутри резонатора атомы активной среды начинают осциллировать подобно микродиποлям.



Эти диполи создают микроскопическую поляризацию  $P$ , численно равную электрическому моменту единицы объема активной среды. Микроскопический дипольный момент, действуя как источник излучения, возбуждает поле. Измененное поле действует на атомы. В результате взаимодействия внутри резонатора устанавливается самосогласованное электромагнитное поле.

При построении самосогласованной теории лазеров оказывается возможным два пути в зависимости от того, каким методом представлять взаимодействие электромагнитного поля: с точки зрения классической электродинамики или в позиций квантовой механики, при этом атомная система как в том, так и в другом случае описывается аппаратом квантовой механики.

Сущность полуклассической теории лазеров заключается в следующем.

1. Предполагают, что в некоторый начальный момент времени в резонаторе лазера существует электромагнитное поле, которое действует на атомы среды. При этом вычисляют согласно законам квантовой механики атомную поляризацию  $P_i$ .

$$P_{rt} = \sum_{i=1}^N p_i(r, t),$$

где  $N$  - число возбужденных атомов в единице объема в момент времени  $t$ . При однородном возбуждении  $P(r, t) = Np(r, t)$ .

2. Вычисляют в соответствии с уравнениями Максвелла возбужденное этой поляризацией поле лазера. Представим основную группу уравнений классической электродинамики, при помощи которой может быть описан любой электромагнитный процесс в среде. Данная группа включает в себя уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{4\pi}{c} \delta + \frac{1}{c} D + \frac{4\pi}{c} \rho v; \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} B; \quad \operatorname{div} B = 0; \quad \operatorname{div} D = 4\pi \rho \end{aligned} \quad (13.82)$$



где  $E$  и  $H$  - напряженности электрического и магнитного полей;  $D$  и  $B$  - электрическая и магнитная индукция;  $\delta$  - плотность электрического тока;  $\rho$  - плотность свободных электрических зарядов;  $c$  и  $v$  - скорость света и скорость движения зарядов (определяющая ток конвекции) и так называемые материальные уравнения

$$D = \varepsilon E ; \quad (13.83)$$

$$B = \mu H ; \quad (13.84)$$

$$\delta = \gamma(E + E_{стор}) , \quad (13.85)$$

где  $E_{стор}$  - напряженность электрического поля сторонних сил.

Уравнения (13.83) – (13.85) устанавливают связь между векторами  $H$  и  $B$ ,  $E$  и  $D$ , а также  $\delta$  и  $E$  через электромагнитные параметры среды  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  (представляющие собой соответственно магнитную и электрическую проницаемости и коэффициент электропроводности среды). При отсутствии в среде конвекционных токов в уравнении (13.82) третий член в правой части исчезает.

Для диэлектрических сред, в которых работают большинство твердотельных лазеров ( $\gamma = 0$ ), при отсутствии свободных электрических зарядов приведенная система уравнений значительно упрощается. Однако при расчет в ряде случаев удобно ввести в уравнение поля феноменологический член, содержащий проводимость  $\delta = \gamma E$ , позволяющий учесть затухание колебаний, возникающих из-за потерь при дифракции, отражении и рассеянии, которые заменяются фиктивным током проводимости. Формально тогда оказывается возможным сохранить уравнения электромагнитного поля (13.82) и (13.85).



## Машиностроение

Характеристики вещества  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  в общем случае являются нелинейно зависящими от напряженности электрического поля, они могут зависеть также от температуры, давления и других внешних факторов. В кристаллах они являются тензорными величинами, задаваемыми тензорами различных рангов.

Для наших целей нам необходимо иметь уравнение, связывающее  $E$  с макроскопической поляризацией активной среды  $P$ . Микроскопическая поляризация среды зависит от напряженности электрического поля

$$P = 4\pi\chi E ,$$

где  $\chi$  - восприимчивость среды, которая в общем случае зависит от напряженности электрического поля.

Диэлектрическая постоянная  $\varepsilon$  связана с восприимчивостью соотношением

$$\varepsilon = 1 + \chi . \quad (13.86)$$

Таким образом, из (3.2) следует, что

$$D = E + 4\pi E . \quad (13.87)$$

Дифференцируя (13.82) по времени, считая, что токи конвекции отсутствуют, а также используя (13.85) при  $E_{стоп} = 0$ , (13.87) и второе из (13.82), приходим к уравнению

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = \frac{4\pi\gamma}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} .$$

При расчете лазеров данным методом обычно считают, что



## Машиностроение

магнитная восприимчивость вещества весьма мала и, следовательно, его намагниченностью можно пренебречь. Тогда с учетом (13.84), (13.86), используя известное соотношение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} E - \Delta E, \quad (13.88)$$

можно получить уравнение

$$\Delta E = \frac{4\pi\gamma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (13.89)$$

В большинстве случаев при расчетах можно учитывать изменения  $E$  и  $P$  только вдоль оси резонатора, т.е. по оси  $Z$ , при этом уравнение (13.89) принимает следующий вид

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{4\pi\gamma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (13.90)$$

Полученное уравнение является одним из исходных, позволяющих определить  $E$ , если  $P$  задано.

В лазерах взаимодействие излучения с активным веществом происходит внутри резонатора. Если резонатор обладает высокой добротностью, то с достаточно высокой точностью частота продольных мод электромагнитного поля определяется формулой

$$\Omega = \pi q c / L,$$

где  $\Omega$  - невозмущенная частота резонатора;  $c$  - скорость света;  $L$  - длина резонатора;  $q$  - целое число, определяющее моду.

В дальнейшем будем учитывать, что определяющий потери член в уравнении (3.9) достаточно мал и его можно рассматривать как возмущение по отношению к собственным колебаниям





резонатора. Незатухающие нормальные моды резонатора могут быть выражены через функции

$$E_n = e^{j\Omega_n t} U_n(z),$$

где  $U_n(z) = \sin(n\pi z/d)$ .

При наличии поляризации среды  $P(z, t)$  электрическое поле квазистационарных вынужденных колебаний может быть представлено в виде разложения по этим собственным функциям

$$E(z, t) = \sum_n A_n(t) U_n(z). \quad (13.91)$$

После подстановки данного выражения в уравнение (13.90), умножения обеих частей на  $U_n(z)$  и интегрирования по  $z$ , учитывая ортогональности собственных функций, получим уравнение

$$\Omega_n^2 A_n(t) + \frac{4\pi\gamma}{c^2} \frac{dA_n(t)}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 A_n(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{d^2 P_n(t)}{dt^2}, \quad (13.92)$$

где  $P_n(t)$  - пространственная Фурье-компонента;  $P(z, t)$  - поляризация, определяемая формулой

$$P_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L P(z, t) U_n(z) dz.$$

Микроскопическая поляризация  $P(z, t)$  создается всеми возбужденными модами, а  $P_n(t)$  - есть Фурье-компонента поля-



ризации  $P(z, t)$ , которая воздействует на  $n$ -ю моду.

Член, содержащий проводимость в уравнении (13.92), может быть выражен через добротность резонатора  $\theta_n$  резонатора для моды  $N$ -го порядка:

$$\gamma = \nu / \theta_n ,$$

где  $\nu$  - частота колебаний системы с учетом затухания. Тогда уравнение (13.92) принимает следующий вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 A_n}{dt^2} + \frac{4\pi\nu}{c^2 \theta_n} \frac{dA_n}{dt} + \Omega^2 A_n = \frac{4\pi\nu^2}{c} P_n . \quad (13.93)$$

При этом преобразовании допускалось, что Фурье-компонента  $P_n(t)$  квазимонохроматична и соответствующая ей частота  $\nu$  близка к  $\Omega_n$ , что позволяет, член относящийся к поляризации, представить в виде  $\nu^2 P_n$ .

Заметим, что уравнение (13.93) совпадает с известным уравнением вынужденных колебаний гармонического осциллятора. Величины  $A_n$  и  $P_n$  можно представить в виде

$$A_n(t) = E_n(t) \cos[\nu_n t + \varphi_n(t)] ;$$

$$P_n(t) = C_n(t) \cos[\nu_n t + \varphi_n(t)] + S_n(t) \sin[\nu_n t + \varphi_n(t)] ,$$

где  $E_n, C_n, S_n$  и  $\varphi_n$  - медленно меняющиеся функции  $t$ .



## Машиностроение

Подставим значение  $A_n(t)$  и  $P_n(t)$  в уравнение (13.93) и сравним коэффициенты при  $\cos[v_n t + \varphi_n]$  и  $\sin[v_n t + \varphi_n]$ . Допуская, что члены с  $\partial E_n / \partial t$  и  $\partial \varphi_n / \partial t$  малы, получим

$$\left[ v_n + \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_n) - \Omega_n \right] E_n = -\frac{1}{2} \frac{v}{\varepsilon_0} C_n ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_n) + \frac{1}{2} \frac{v}{\theta_n} E_n = -\frac{1}{2} v S_n .$$

Эти уравнения и являются уравнениями самосогласованности.

Перейдем к следующему этапу расчета полуклассическим методом - квантово-механическому расчету зависимости поляризации  $P$  от электрического поля. Предварительно сделаем следующие замечания.

Поляризация  $\vec{P}$  зависит от  $\vec{E}$  и в общем случае является функционалом. При этом вектор  $\vec{P}$  удобно представить в виде линейной и нелинейной частей

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{ли}} + \vec{P}_{\text{нл}} . \quad (13.94)$$

Принимая во внимание данную запись представим волновое уравнение (13.90) в следующем виде

$$\Delta \vec{E} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma E - \text{grad} \frac{E \vec{\nabla} \varepsilon}{\varepsilon} , \quad (13.95)$$



где  $v^2 = c^2/n_{лн}^2$ ;  $n_{лн}$  - линейная часть показателя преломления.

Уравнение представляет собой одну из наиболее общих форм записи волнового уравнения. Оно в принципе может быть использовано для описания различных задач, связанных с распространением интенсивности электромагнитного поля в среде.

Обычно нелинейная поляризация среды задается в виде разложения по степеням поля. Возможности описания нелинейных явлений определяются теми членами ряда разложения, которые входят в нелинейную часть поляризации  $\vec{P}_{нл}$ .

Перейдем к выводу уравнения, описывающего зависимость поляризации вещества  $\vec{P}$  от электрического поля, которое должно затем решаться совместно с волновым уравнением (13.95).

Одной из наиболее общих форм описания процессов в веществе на основе квантовой теории является уравнение для матрицы плотности следующего вида

$$ih \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] - ih \hat{\Gamma} \hat{\rho}. \quad (13.96)$$

Здесь  $\hat{\rho}$  и  $\hat{H}$  - операторы матрицы плотности и гамильтониана для вещества с учетом его взаимодействия с электромагнитным излучением;  $\hat{\Gamma}$  - феноменологически вводимый оператор, описывающий релаксационные процессы в веществе. В зависимости от того, как представлять члены, описывающие взаимодействие излучения с веществом, в гамильтониане  $\hat{H}$ , последнее уравнение может быть использовано для описания нелинейных явлений.

Для решения уравнения (13.96) необходимо явным образом представить гамильтониан вещества с учетом взаимодействия. Определив оператор плотности, можно найти поляризацию вещества, входящую в волновое уравнение, используя обычное представление среднего значения физической величины с помощью



## матрицы плотности

$$\vec{P} = S_p(\hat{p}\hat{\rho}). \quad (13.97)$$

Данное соотношение связывает два последних уравнения (13.95) и (13.96) в единую систему. Решение этой системы в общем виде представляет сложную задачу, поэтому по возможности упрощают систему, получая из нее упрощенные отдельные варианты, пригодные для описания отдельных явлений взаимодействия.

Наиболее типичным способом упрощения уравнения (13.97) является его замена уравнениями для поляризации и инверсии населенности рабочих уровней усиливающей среды путем введения времен продольной  $T_1$  и поперечной  $T_2$  релаксации, определяемых соотношениями

$$(\hat{\Gamma}\hat{\rho})_{nn} = (\rho_{nn} - \rho_{nn}^0)/T_1; \quad (13.98)$$

$$(\hat{\Gamma}\hat{\rho})_{mn} = \rho_{mn}/T_2. \quad (13.99)$$

Если рассматривать только два рабочих уровня в активной среде, то для их описания необходимо использовать систему четырех уравнений для матричных элементов матрицы плотности:

$$ih\partial\rho_{11}/\partial t = H_{\text{вз}12}\rho_{21} - \rho_{12}H_{\text{вз}21} - ih(\rho_{11} - \rho_{11}^0)/T_1; \quad (13.100)$$

$$ih\partial\rho_{12}/\partial t = -h\omega_{21}\rho_{12} + H_{\text{вз}12}\rho_{22} - \rho_{11}H_{\text{вз}12} - ih\rho_{12}/T_2; \quad (13.101)$$



## Машиностроение

$$i\hbar \partial \rho_{21} / \partial t = \hbar \omega_{21} \rho_{21} + H_{\text{вз}21} \rho_{11} - \rho_{22} H_{\text{вз}21} - i\hbar \rho_{21} / T_2 ; \quad (13.102)$$

$$i\hbar \partial \rho_{22} / \partial t = H_{\text{вз}21} \rho_{12} - \rho_{21} H_{\text{вз}12} - i\hbar (\rho_{22} - \rho_{22}^0) / T_1 . \quad (13.103)$$

При составлении данной системы уравнений использованы следующие предположения:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}_{\text{вз}} + \hat{H}_{\text{рел}} = \hat{H}^0 + \hat{H}_{\text{вз}} - i\hbar \hat{\Gamma} ;$$

$$H_{11}^0 = E_1^0 ; \quad H_{22}^0 = E_2^0 ; \quad H_{11} = H_{21} = 0 ; \quad E_2^0 - E_1 = \hbar \omega_{21} ;$$

$$H_{\text{вз}11} = H_{\text{вз}22} = 0 ,$$

где  $\hat{H}^0$  - гамильтониан активной среды в отсутствие взаимодействия с электромагнитным излучением (невозмущенный);  $\hat{H}_{\text{вз}}$  - гамильтониан, описывающий взаимодействие электромагнитного излучения с активной средой;  $\hat{H}_{\text{рел}}$  - гамильтониан, описывающий релаксационные процессы в среде, задаваемой феноменологическими соотношениями (13.98) и (13.99).

Если предположить, что резонансное взаимодействие электромагнитного излучения с веществом на частоте перехода между рабочими уровнями является дипольным и его можно представить в виде

$$H_{\text{вз}} = -d\vec{E} ,$$



то от системы уравнений (13.100)-(13.103) можно перейти к системе уравнений для инверсии населенностей рабочих уровней и поляризации активной среды:

$$\frac{du}{dt} = \frac{u - u_0}{T_1} + \frac{2\vec{E}}{h\omega_0} \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{T_2} \right); \quad (13.104)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{T_2^2} + \omega_0^2 \vec{P} = -\frac{2\omega_0 u \vec{E}}{\hbar} |d_{12}|^2. \quad (13.105)$$

Здесь  $u = N(\rho_{22} - \rho_{11})$  - инверсия населенностей уровней ( $N$  - концентрация активных центров);  $\vec{P}$  - поляризация среды, определяемая соотношением  $\vec{P} = Np$ , где  $p = d_{21}\rho_{12} - d_{12}\rho_{21}$  - поляризация отдельного активного центра;  $\omega_0 \equiv \omega_{21}$  - частота рабочего (резонансного) перехода между уровнями.

Как следует из уравнений приведенных систем (13.100)-(13.105) продольное время релаксации связано с изменением энергии системы активных центров, поперечное время релаксации связано с перераспределением в самой системе активных центров. Поперечное время релаксации определяется шириной спектральной линии рабочего перехода при однородном уширении

$$T_2 = 1/\Delta\omega.$$

Продольное время релаксации зависит от времени жизни возбужденного состояния или постоянной времени люминесценции, связанной с переходами между рабочими уровнями, и может быть найдено как обратная величина вероятности спонтанных переходов между рабочими уровнями:



$$T_1 = 1/A_{21} .$$

Для нестационарных процессов в зависимости от соотношений между длительностями импульсов и временами продольной релаксации из системы уравнений (3.14), (3.17) и (3.18) могут быть получены более упрощенные системы уравнений, описывающие процесс распространения импульсов излучения в нелинейной резонансно-поглощающей среде.





## ГЛАВА 14. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЛАЗЕРОВ

Динамика работы лазеров и, как следствие, его основные параметры (энергия и длительность импульса, средняя и пиковая мощность, частота следования импульсов и т.п.) в значительной мере определяют области его применения. Знание динамики процессов в лазере является необходимым условием решения практической проблемы управления параметрами лазерного излучения. В существующих лазерах реализованы как импульсные, так и непрерывные режимы работы. Они позволяют получать импульсы длительностью до долей пикосекунд; дают возможность работать как в режиме одиночных импульсов, так и их последовательностей. Каждый из режимов работы имеет свои особенности. В режиме свободной генерации обеспечиваются наиболее высокие уровни энергии излучения при наибольших значениях КПД, в режиме модулированной добротности – наиболее высокие уровни импульсной мощности излучения при несколько более низких КПД и т.д.

### 14.1. Стационарный режим генерации

*Основным критерием для классификации режимов является соотношение между длительностью стационарной генерации  $\tau_{\text{стац}}$ , когда мощность излучения практически неизменна, и длительностью развития генерации и гашения, которые в первом приближении определяются постоянной времени резонатора  $\tau_{\text{рез}}$ , характеризующей переходный процесс в резонаторе. Очевидно, это то время, за которое плотность энергии в резонаторе уменьшается до уровня  $1/e$  от исходного при «отключении» поля:*

$$\tau_{\text{рез}} = Q/(2\pi\nu) = 2L\ln/(c\sum\alpha_{\text{рез}}),$$



где  $\sum \alpha_{рез}$  - суммарные потери резонатора за один проход.

Режим работы лазера считается стационарным, если выполняется условие  $\tau_{стац} \gg \tau_{рез}$ . Теоретически стационарный режим работы может быть исследован, если в балансных уравнениях принять, что накачка является стационарной и действует неограниченное время. В системе также отсутствуют другие факторы, приводящие к изменению населенности энергетических уровней, т.е. нужно положить  $dN/dt = 0$ . Таким образом, стационарная генерация есть не более как идеализация, пригодная для описания отдельных реальных ситуаций лишь в некотором приближении.

Реализуемые на практике режимы работы лазеров, по существу, являются нестационарными, что приводит к флуктуациям энергетических и пространственных характеристик излучения. Причин нестационарности лазерной генерации довольно много. Их условно можно разделить на два типа: имеющие техническую природу и физическую.

К факторам, имеющим техническую природу, относятся нестабильность геометрических параметров резонаторов, активной среды, системы накачки и т.п. Все источники технических флуктуаций лазерного излучения оказывают свое влияние на генерацию через два основных параметра лазера: коэффициент усиления активной среды и коэффициент потерь излучения в резонаторе. Оба эти параметра под воздействием источников нестабильностей изменяются во времени, и эти флуктуации приводят к нестабильности процесса генерации.

Основными причинами, приводящими к нестабильности излучения, являются механические вибрации зеркал резонатора, активного элемента и других внутренних элементов резонатора. К появлению вибрации приводят различного рода механические колебания помещения, работа системы охлаждения и элементов управления излучением. Источником технических нестабильностей лазерного излучения является также неравномерность нагрева активного элемента в процессе накачки, что вызывает флуктуации температуры активного элемента, приводящие к изменению его плотности, показателя преломления и влияющие на населен-



ность нижнего рабочего уровня. Тепловые эффекты приводят также к перестройке мод, смещению и изменению ширины линии флюоресценции.

К факторам, имеющим физическую природу, прежде всего следует отнести многомодовость излучения лазера. Разным модам соответствует разное распределение параметров поля в резонаторе, разное значение коэффициентов усиления и потерь. Стабильность кинетики генерации сильно зависит от количества одновременно возбуждаемых мод. Изменение числа или индекса генерируемых одновременно мод сразу вызывает нестабильность генерируемого излучения.

Кроме того, нужно иметь ввиду, что первопричиной лазерного излучения являются случайные процессы спонтанного испускания. И хотя в конечном итоге эти процессы упорядочиваются в пространстве и во времени в результате специфических процессов, происходящих в резонаторе лазера, этот процесс не является полным.

Расчеты энергетических параметров генерации обычно проводят для усредненной вдоль длины резонатора плотности энергии. Такое приближение позволяет существенно упростить решение задачи о стационарной генерации. Для описания потоков энергии в этом случае используют уравнения переноса (базирующиеся на законах лучевой оптики). Для двух потоков (распространяющихся в противоположных направлениях) они имеют вид:

$$\begin{aligned} dP_1/dz &= (\chi - \chi_{nom})P_1; \\ dP_2/dz &= -(\chi - \chi_{nom})P_2 \end{aligned} \quad (14.1)$$

Здесь  $P_1$  и  $P_2$  - потоки энергии через единицу поверхности поперечного сечения активной среды в единицу времени (Рис. 14.1,а);  $\chi$  - средний по длине коэффициент усиления активной среды;  $\chi_{nom}$  -средний по длине коэффициент вредных потерь.



Машиностроение

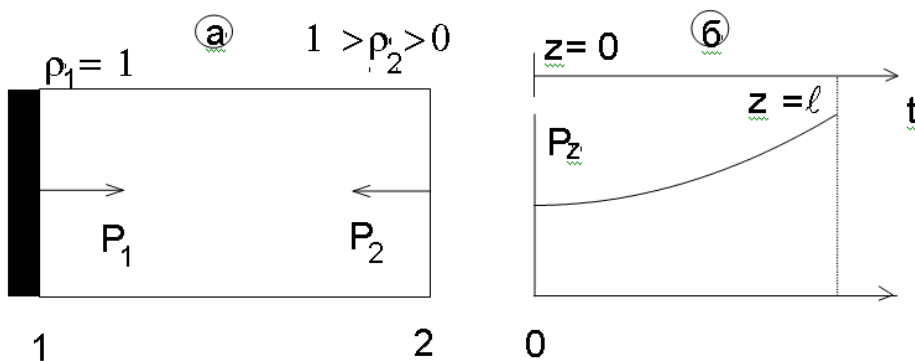


Рис. 12.4. Усиление световой волны, испущенной атомом активной среды (а), и нарастание вынужденного излучения преимущественно вдоль оси рабочего тела (б)

Дополним уравнения переноса граничными условиями ( на торцах активной среды ), предполагая, что активная среда занимает весь объем резонатора:

$$P_1|_{z=0} = \rho_1 P_2; \quad P_2|_{z=l} = \rho_2 P_1,$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - коэффициенты отражения зеркал резонатора;  $l$  - длина активной среды.

Можно показать, что в режиме генерации коэффициент усиления не зависит от параметров дифференциальных уравнений (14.1) и однозначно определяется граничными условиями.

В стационарном режиме среднее значение коэффициента усиления зависит только от среднего значения коэффициента вредных потерь  $\chi_{пот}$ , длины стержня  $l$  и коэффициентов отражения  $\rho_1$  и  $\rho_2$ :

$$\chi = \chi_{пот} + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}. \tag{14.2}$$



По физическому смыслу второе слагаемое в (1.2) определяет полезные потери, связанные с выводом излучения. Поэтому его обычно называют коэффициентом полезных потерь  $\chi_{п.л.}$ .

Зная коэффициент полезных потерь и среднее значение коэффициента вредных потерь можно найти количество энергии, выходящей из резонатора в единицу времени

$$P = \frac{vls}{\alpha} [\chi_0 - \chi_{пот} - \chi_{п.п.}] \frac{\chi_{п.п.}}{\chi_{пот} + \chi_{п.п.}},$$

где  $ls = V$  - объем активного элемента;  $v$  - скорость распространения излучения;  $\chi_0$  - начальный коэффициент усиления;  $\alpha$  - параметр нелинейности (который характеризует нелинейность взаимодействия частиц с внешним излучением, обусловленную насыщением распределения частиц по уровням).

## 14.2. Работа лазеров в режиме модуляции добротности

На практике свободное излучение лазера представляет собой, как правило, последовательность относительно коротких импульсов - «пичков». В условиях свободной генерации лазер испускает световые импульсы длительностью порядка 100 мкс. Однако этого недостаточно для ряда применений. Требуются моноимпульсы более короткой длительности и более высокой мощности.

Задача генерации коротких одиночных импульсов обычно решается путем использования резонаторов с управляемой добротностью. Этот режим еще называют режимом генерации гигантских импульсов. Мощность получаемых импульсов достигает



несколько гигаватт, а длительность имеет порядок 10-100 нс (может быть понижена до 1-3 нс).

Принцип действия лазеров с управляемой добротностью основан на сокращении времени излучения посредством накопления активных центров на метастабильном уровне. Этого достигают, помещая в резонатор лазера модулятор, управляемый внешним сигналом.

Управляя добротностью резонатора, обеспечивают высокий уровень вредных потерь. Это приводит к увеличению порога генерации и позволяет создать большую инверсионную населенность в активной среде (что возможно в случае большого времени жизни верхнего уровня). В этих условиях формируется единый короткий световой импульс большой мощности.

Режим модуляции добротности лазера характеризуется следующими основными параметрами: временем задержки генерации  $t_{зад}$ , длительностью гигантского импульса  $\tau_u$ , пиковой мощностью  $P^{max}$  и энергией  $W$  излучения импульса.

В общем виде балансные уравнения для нестационарного процесса были сформулированы Статцем и де Марсом. Искомые функциями в них являются плотность инверсионной заселенности  $N(t)$  и плотность числа фотонов на частоте генерации  $M(t)$ .

Система балансных уравнений имеет вид

$$dM(t)/dt = B^1 M(t)N(t) - M(t)f(t)/\tau_{рез};$$

$$dN(t)/dt = -\beta B^1 M(t)n(t),$$

где  $B^1 = B\hbar\omega$  - коэффициент Эйнштейна для вынужденных переходов в канале генерации, помноженной на энергию фотона;  $\tau_{рез}$  - время жизни фотона в резонаторе, определяемое совокупностью вредных и полезных потерь  $Q = \omega/\tau_{рез}$ ;  $\beta$  - целое число, описывающее изменение разности заселенностей рабочих уров-



## Машиностроение

ней при излучении одного фотона;  $f(t)$  - некоторая функция от времени, изменяющаяся от значений  $f(0) = Q/Q_{\min}$  до 1. Плотность числа фотонов на частоте генерации легко выражается через плотность светового потока  $S(t)$ , скорость распространения излучения и энергию фотона

$$M(t) = S(t)/(v\hbar\omega).$$

Развитие гигантского импульса рассматривают, выделяя три основных временных этапа, которые обычно характеризуют изменением во времени мощности генерируемого излучения  $P(t)$ , добротности резонатора  $Q(t)$ , плотности инверсионной заселенности  $N(t)$  и пороговой плотности инверсионной заселенности  $N(t)_{\text{пор}}$ , которые представлены на Рис. 14.2.

Под действием импульса накачки в активном элементе возрастает плотность инверсионной заселенности  $N(t)$ . В какой-то момент происходит включение добротности, которая начинает быстро расти, что приводит к понижению порога генерации. В момент времени, когда пороговое значение  $N(t)_{\text{пор}}$  сравнивается с плотностью инверсионной заселенности  $N(t)$ , начнется процесс генерации, Это время обычно выбирают в качестве начального момента.

На следующем этапе наблюдается медленное развитие генерации. Для него характерно практически постоянное значение плотности инверсионной заселенности. На линейном этапе мощность генерируемого излучения увеличивается незначительно, и быстрое ее возрастание наблюдается лишь в конце этапа.

Этап формирования гигантского импульса существенно меньше этапа линейного развития. В течение короткого промежутка времени плотность инверсионной заселенности  $N(t)$  падает до минимального значения  $N_{\min}$  (которое оказывается меньше конечного порогового значения  $N_{\text{пор}}$ ). Практически вся энергия, сосредоточенная в гигантском импульсе, высвечивается на



данном этапе.

Для увеличения энергии гигантского импульса необходимо увеличивать превышение начального значения плотности инверсионной заселенности (к моменту генерации) по отношению к пороговому значению плотности инверсионной заселенности, т.е. увеличивать разность  $\Delta N = N_1 - N_{пор}$ . Для этого обеспечивают глубокую модуляцию добротности, высокую интенсивность накачки и согласовывают момент времени включения добротности с импульсом накачки. Добротность должна включаться в тот момент времени, когда плотность инверсионной заселенности приблизится к своему предельному значению.

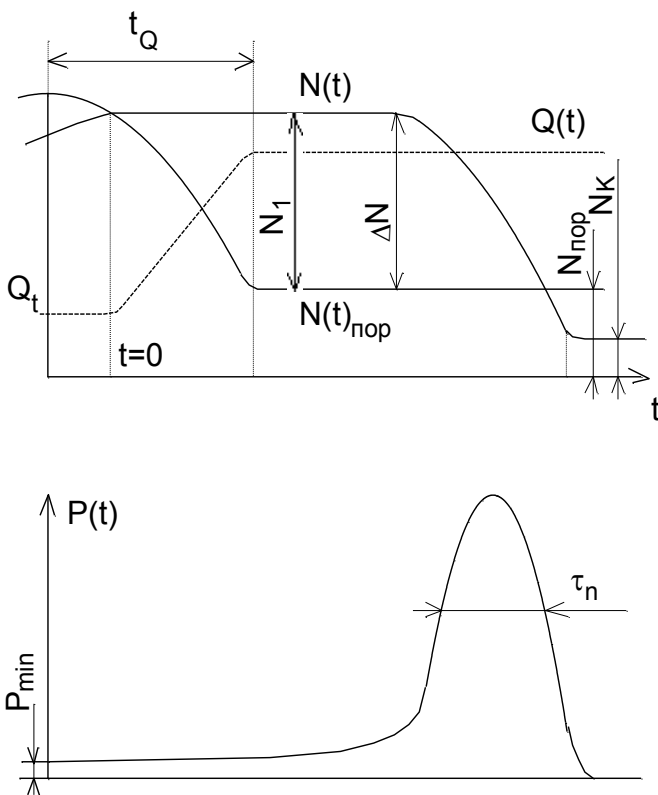


Рис. 12.6. Энергетическая диаграмма трехуровневой системы





Мощность  $P$  генерируемого излучения можно представить в виде

$$P = \hbar\omega\nu\chi_{n.n.}MV,$$

где  $V$  - объем, участвующий в генерации;  $\nu$  - скорость распространения излучения;  $\chi_{n.n.}$  - коэффициент полезных потерь. Оптимальное значение добротности резонатора (которое позволяет получить максимальную пиковую выходную мощность при фиксированном  $N_1$ ) соответствует случаю  $N_1/N_{nop} = 3.5$ .

Оценим энергию гигантского импульса. В процессе излучения импульса плотность инверсионной заселенности изменяется от  $N_1$  до  $N_k$ . Это соответствует рождению в единице объема активной среды  $(1/\beta)(N_1 - N_k)$  фотонов. Умножив это число на энергию фотона, генерирующей объем активной среды  $V$  и отношение  $\chi_{n.n.}/(\chi_{nom} + \chi_{n.n.})$ , описывающее долю генерируемой световой энергии, выходящей через зеркало резонатора в виде полезного излучения, получим

$$W = (\hbar\omega/\beta)V(N_1 - N_k)\chi_{n.n.}/(\chi_{nom} + \chi_{n.n.}).$$

Длительность импульса можно получить на основе следующего выражения

$$\tau_{n.n.} \approx W/P_{\max}.$$



### 14.3. Модуляция добротности резонаторов

Все известные методы модуляции добротности резонаторов подразделяются на активные и пассивные. К активным относятся методы, в которых модулирующие устройства меняют значение потерь по заданному закону. Пассивные модулирующие элементы управляются непосредственно полем излучения, имеющимся в резонаторе лазера.

Модулирующие устройства можно разделить по характеру физических эффектов (на которых основано их действие) на следующие: оптико-механические, электрооптические и акустические. При оптико-механической модуляции добротности модулирующее устройство, как правило, представляет собой вращающуюся призму-крышу, выполняющую функции одного из зеркал резонатора (Рис.14.3,а). Время включения добротности в этом случае зависит от частоты вращения призмы. При частотах вращения призмы 20000-30000 об/мин время переключения добротности имеет порядок  $10^{-7}$  с. Время коммутации в этом случае достаточно велико. Для увеличения скорости переключения в резонатор можно ввести дополнительные неподвижные отражатели (Рис.14.3,б).

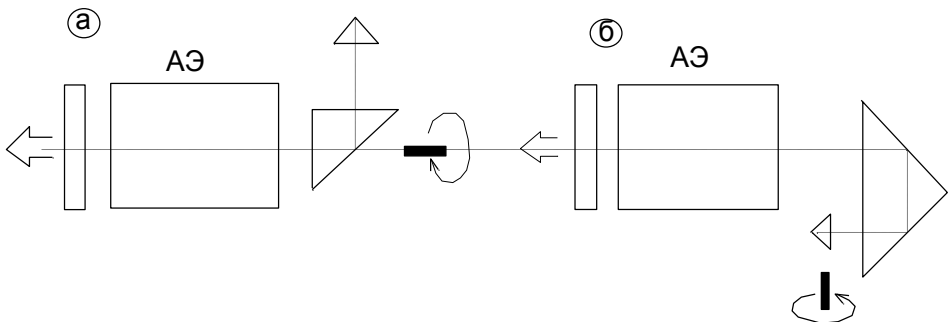


Рис. 12.8. Интерферометр Майкельсона (схема)



Оптико-механические затворы с вращающей призмой, несмотря на колебания оси излучателя, низкий КПД, значительные шумы и вибрацию двигателя, нашли широкое применение в лазерах с управляемой генерацией благодаря простоте конструкции, надежности, а также возможности работы в широком температурном и спектральном диапазонах.

#### 14.4. Режим синхронизации мод

В условиях свободной генерации зависимость интенсивности выходного излучения лазера от времени, как правило, имеет вид нерегулярных пиков, одной из причин этого является генерирование большого числа различных поперечных и продольных мод. Наличие внутри резонатора лазера различных оптических элементов обычно приводит к возникновению локальных резонаторов, препятствующих возбуждению некоторых типов колебаний за счет интерференционной селекции мод. Каждый такой резонатор обладает определенной полосой пропускания, поэтому совместное действие всех резонаторов может существенно ограничить число мод, возбуждаемых в системе. Для устранения этого явления используют так называемые неселективные резонаторы, в которых зеркальные покрытия наносят на клиновидные подложки 1 и 2, а торцы активного элемента (АЭ) срезают под углом Брюстера (Рис.14.4).

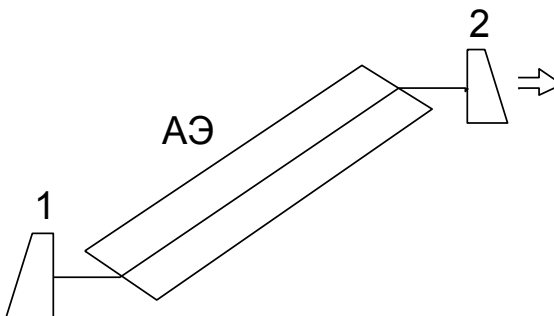


Рис. 2.1. Отражение электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектрических



В такой системе возникает многочастотная генерация со спектральной шириной, близкой к действительной ширине эмиссионной линии данного лазерного перехода. Это удобно для синхронизации мод, так как эффективность данного режима возрастает с увеличением числа генерируемых продольных мод. Под синхронизацией мод понимают процесс, в результате которого разности фаз между соседними модами остаются постоянными. В результате интерференции продольных мод появляются флуктуации интенсивности и происходит генерация весьма коротких световых импульсов очень большой мощности.

Синхронизация фаз продольных мод лазера позволяет получать импульсы лазерного излучения длительностью  $10^{-10}$ - $10^{-12}$  с пиковой мощностью до  $10^{12}$  Вт.

Идею синхронизации продольных мод с точки зрения их интерференции можно объяснить следующим образом. Пусть в резонаторе все моды генерируют одновременно, амплитуды их одинаковы, а фазы синхронизированы. Пусть число таких мод равно  $2N + 1$ , амплитуды мод равны  $E_0$ , а разность фаз  $\Phi_K - \Phi_{K-1} = \alpha = const$ .

Тогда результирующее электрическое поле  $E(t)$  электромагнитной волны можно представить в виде

$$E(t) = \sum_{l=-N}^N E_0 e^{i[(\omega_0 + l\Delta\omega)t + l\alpha]}, \quad (14.3)$$

где  $\omega_0$  - центральная частота моды;  $\Delta\omega = \pi c/L$  - расстояние между соседними модами. Для простоты предполагаем, что фаза центральной моды равна нулю. Выполняя суммирование в выражении (14.3), найдем

$$E(t) = A(t) e^{i\omega_0 t},$$



где

$$A(t) = \frac{\sin [(2N + 1)(\Delta\omega t + \alpha)/2]}{\sin [(\Delta\omega t + \alpha)/2]} E_0. \quad (14.4)$$

Таким образом,  $E(t)$  представляет собой несущую синусоидальную волну с центральной частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A(t)$ . Выходная мощность излучения пропорциональна  $A^2(t)$ . Временная зависимость интенсивности излучения при генерации  $2N + 1 = 7$  и  $2N + 1 = 15$  модам приведена на Рис.14.5.

Таким образом, поле в резонаторе оказывается промодулированным по амплитуде функцией  $A(t)$ . Выполнение условий синхронизации мод приводит к их взаимной интерференции, и генерация излучения принимает вид последовательности коротких световых импульсов. Максимумы амплитуды огибающей последовательности импульсов соответствуют тем моментам времени, когда знаменатель выражения (14.4) обращается в ноль. Следовательно, временной интервал между соседними импульсами равен

$$\tau = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c.$$

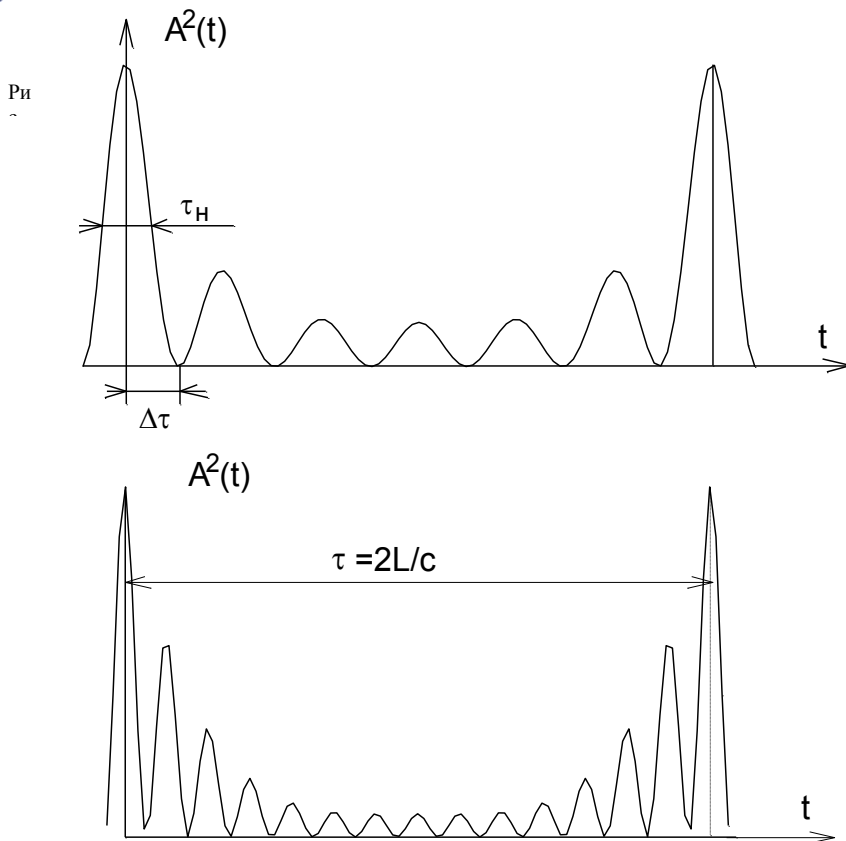
Это время есть так называемый период модуляции и соответствует полному проходу резонатора. Следовательно, генерацию можно представить как импульс излучения, распространяющийся в резонаторе туда и обратно. Временной интервал  $\Delta\tau$  между пиком импульса и первым нулевым уровнем дается выражением



$$\Delta \tau = 1 / \Delta \nu_{ген},$$

где  $\Delta \nu_{ген} = (2T + 1)\Delta\omega / 2\pi$  - полная ширина спектра генерируемого излучения. Длительность импульса  $\tau_u$ , измеренная на полувысоте, также приблизительно равна  $\Delta \tau$ .

Таким образом, для получения коротких световых импульсов требуются активные материалы с большой шириной контура линии усиления лазера. Пиковая мощность излучения в режиме синхронизации мод пропорциональна  $(2N + 1)^2 A^2 t$ , тогда как, если фазы мод случайны, мощность излучения пропорциональна сумме мощностей отдельных мод. Отсюда следует, что благодаря синхронизации мод пиковая мощность увеличивается пропорционально числу синхронизированных мод, в то время как средняя мощность практически не зависит от синхронизации мод.



Ри

Рис. 13.2. Полное внутреннее отражение электромагнитных волн на границе двух диэлектрических сред (при угле  $\vartheta$  большем критического значения)

## 14.5. Синхронизация мод в лазерах

В методах синхронизации мод различают активную и пассивную синхронизацию. Первая осуществляется под действием внешнего сигнала, управляющего работой модулятора, вторая - под влиянием поля излучения спонтанно с помощью нелинейной



оптической среды.

Для иллюстрации активной синхронизации мод предположим, что осуществляется периодическая модуляция параметров резонатора с частотой  $\Omega$ , равной или кратной разности частот соседних мод. Модуляция амплитуды центральной моды имеет вид

$$E(t) = E_0 [1 + \beta \cos(\Omega t)] e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)},$$

где  $\beta$  - глубина модуляции ( $0 \leq \beta \leq 1$ ). Используя формулу Эйлера для представления  $\cos$ , получим

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + (\beta E_0 / 2) e^{i(\omega_0 + \Omega)t + i\varphi_0} + (\beta E_0 / 2) e^{i(\omega_0 - \Omega)t + i\varphi_0}.$$

Таким образом, периодическая амплитудная модуляция с частотой  $\Omega$  приводит к превращению моды на несущей частоте  $\omega_0$  в три синфазные моды на частотах

$$\omega_0, \omega_0 + \Omega, \omega_0 - \Omega,$$

что вызовет обмен энергией с двумя соседними модами. Поля боковых составляющих соответствуют собственным частотам резонатора и лежат в пределах контура линии усиления лазерного перехода, что приводит к их усилению. Они тоже подвергаются модуляции с частотой  $\Omega$ , в результате чего возникают боковые составляющие с частотой





$$\omega_0 \pm 2\Omega.$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока все аксиальные моды внутри области генерации не окажутся синхронизированными.

Лазер с активной синхронизацией мод содержит амплитудный или фазовый модулятор, размещаемый вблизи одного из зеркал резонатора. Амплитудная модуляция осуществляется акустооптическим или электрооптическим модулятором, применяемым совместно со скрещенными поляризаторами.

Пассивная синхронизация мод технически осуществляется гораздо проще. В этом случае периодическая модуляция параметров резонатора может быть выполнена с помощью находящегося внутри резонатора нелинейного оптического элемента, например, просветляющего фильтра.

С точки зрения интерференционных представлений каждая пара продольных мод, возбуждаемых в лазере с просветляющимся фильтром, будет периодически модулировать коэффициент резонансного поглощения фильтра с частотой, равной разности частот рассматриваемых мод. В результате этого может реализоваться процесс синхронизации между фазами различных мод.

Синхронизация продольных мод в лазере с просветляющимся фильтром может быть рассмотрена на основе использования флуктуационных представлений. Под действием импульса накачки происходит возбуждение активной среды и начинается спонтанное излучение на частоте рабочего перехода. Спонтанное излучение является по своей природе флуктуационным процессом и его интенсивность флуктуирует с характерным временем корреляции

$$\tau_{кор} \approx 1/\Delta\omega_{люм}.$$

К тому моменту, когда вклад усиленных спонтанных шумов начинает превышать вклад прямого спонтанного излучения, появляется периодическая корреляция поля в моменты  $t$  и  $t + T$ , где  $T$  - полное время прохода излучения по резона-



тору. На спектральном языке наличие периодической корреляции означает формирование отдельных дискретных мод, составляющих эквидистантный набор частот

$$\omega_k = \omega_0 + k(2\pi/T).$$

Важно, что образование квазипериодической флуктуационной картины происходит еще до достижения лазером порога. Эти исходные флуктуации оказываются существенными для формирования окончательной временной картины излучения.

Коэффициент усиления активной среды на некоторой частоте пропорционален произведению разности заселенностей рабочих уровней на функцию  $G(\omega_k)$ , описывающую спектральный профиль линии люминесценции. Поэтому в процессе роста инверсии под действием накачки пороговое условие выполняется сначала для центральной частоты, затем постепенно входят в генерацию и другие частоты, причем процесс регенеративного усиления шумов непрерывно переходит в процесс генерации.

Таким образом, к моменту, когда начинается просветление фильтра. Излучение представляет собой квазипериодическую шумовую картину с шириной спектра  $\Delta\omega_0$ , много меньшей исходной ширины линии  $\Delta\omega_{\text{люм}}$ .

В процессе просветления фильтра происходит преобразование профиля поля, установившегося к началу просветления. Преобразование поля состоит в преимущественном росте тех точек профиля, где интенсивность максимальна. В результате многократных проходов излучения через просветляющий фильтр каждый отдельный выброс интенсивности сокращается под длительности. Одновременно с этим происходит подчеркивание наиболее интенсивных выбросов: их рост происходит быстрее, чем рост менее интенсивных выбросов.

Сужение импульсов и выделение наиболее интенсивных импульсов происходит одновременно, в едином процессе взаимодействия поля с фильтром. Однако лишь второй эффект равнозначен фазировке мод исходного спектра. Именно этот эффект



## Машиностроение

может приводить к формированию регулярной временной картины излучения из первоначально хаотической временной структуры. Эффект же сужения импульсов означает появление новых дополнительных спектральных компонент, а к фазировке исходных компонент прямого отношения не имеет.

Условия и характер фазового согласования зависят от оптической схемы и параметров лазера. Большое значение имеет положение фототропного затвора относительно зеркал резонатора, которое влияет на расстояние между максимумами импульсов и их интенсивностями. Размещение затвора в положениях

$$x = L/m$$

(где  $L$  - база резонатора;  $m$  - целое число;  $x$  - расстояние затвора от 100% - го зеркала) приводит к увеличению частоты следования импульсов. Расположение затвора вплотную к глухому зеркалу наиболее удобно с точки зрения практического использования, так как позволяет получить цуг импульсов с максимальной с максимальной пиковой мощностью и наибольшей скважностью.

### Контрольные вопросы

1. Что служит основным критерием при классификации режимов работы лазеров?
2. Основными причинами, приводящими к нестабильности генерации лазерного излучения являются ?
3. Чем определяется коэффициент усиления в стационарном режиме генерации?
4. Чем определяется эффективность режима синхронизации мод?



## ГЛАВА 15. ТВЕРДОТЕЛЬНЫЕ ЛАЗЕРЫ

*Исторически твердотельные лазеры стали первыми генераторами когерентного оптического излучения. Они получили широкое распространение благодаря тому, что позволяют получать мощное когерентное излучение от ультрафиолетовой до ближней инфракрасной (ИК) области спектра, работать как в импульсном, так и в непрерывном режиме. Наибольшее распространение получили лазеры на рубине ( $\lambda = 0,69 \text{ мкм}$ ), иттрий-алюминиевом гранате ( $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ ) и стекле ( $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ ).*

Характерной особенностью твердых активных сред является высокая концентрация активных центров, что позволяет получать большие мощности при относительно небольших объемах активных сред. Возбуждение твердотельных лазеров осуществляется с помощью оптической накачки. КПД твердотельных лазеров ( для отдельных видов лазерных материалов ) достигает значений более 5 %.

### 15.1. Системы оптической накачки

Конструктивно твердотельный лазер представляет собой излучатель, включающий в себя активный элемент, зеркала резонатора и систему оптической накачки.

Оптической накачкой называется способ создания инверсии при облучении активного вещества излучением специального внешнего источника. Система оптической накачки содержит в общем случае лампу накачки, излучающую лучистый поток, и светооптическую арматуру, концентрирующую поток накачки на активном элементе (Рис. 15.1).

Различают некогерентную и когерентную накачку. При когерентной накачке источником излучения служит вспомогательный лазер.



## Машиностроение

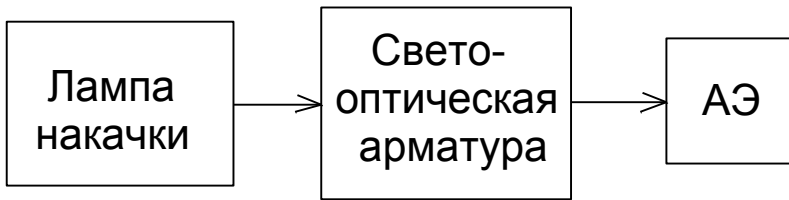


Рис. 13.4. Зависимость коэффициента отражения проводящего слоя от  $d/\lambda$ .

При накачке твердотельных лазеров наибольшее распространение получила некогерентная накачка. Источником может служить излучение естественных источников, например солнца и искусственных источников. К последним относятся газоразрядные импульсные лампы, лампы непрерывного горения (газоразрядные и накаливания), искровые разрядники, пламя, взрывающиеся проволоки, полупроводниковые люминесцентные светодиоды и т.д. Наиболее широко применяются газоразрядные лампы.

Эффективность системы накачки можно определить как отношение поглощаемого в активном материале лучистого потока к мощности, потребляемой всеми лампами накачки. Таким образом, эффективность системы накачки зависит от КПД лампы накачки, светооптической арматуры и эффективности использования излучения накачки.

К числу наиболее важных параметров газоразрядных ламп (с точки зрения использования их для накачки лазеров) относятся: эффективность преобразования электрической энергии в световое излучение, спектральный состав излучения, предельная мощность, при которой не нарушается нормальная работоспособность лампы.

В качестве источников накачки наибольшее распространение получили ксеноновые и криптоновые лампы прямой трубчатой конструкции, являющиеся наиболее экономичными преобразователями электрической энергии в энергию оптического излучения. Их спектр излучения близок к спектру абсолютно черного тела с температурой 8000-12000 К.

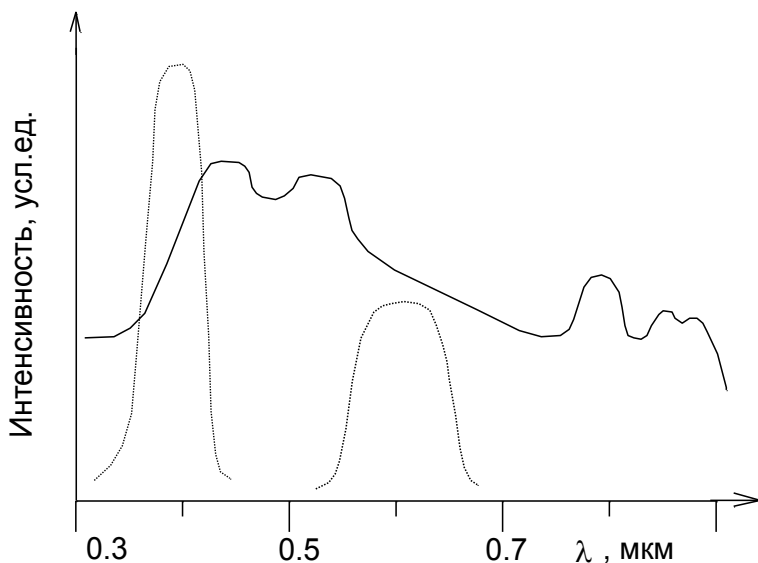


Рис. 13.5. Призма-крыша, играющая роль глухого зеркала

Спектр излучения импульсной ксеноновой лампы представляет собой наложение линий и сплошного фона (Рис. 15.2). Фон наиболее сильно выражен в видимой и ультрафиолетовой частях спектра. Если его сравнить со спектром поглощения рубина, то можно отметить, что на спектр поглощения рубина приходится менее 30% полной световой энергии излучения лампы накачки. Остальная часть энергии является бесполезной и даже вредной, так как она затрачивается на нагревание активного элемента, оболочки лампы накачки и отражателя.

Основной недостаток газоразрядных ламп заключается в сравнительно низкой эффективности преобразования электрической энергии в световое излучение, соответствующее полосам поглощения активного материала.

Перспективным видом накачки является использование излучения полупроводниковых люминесцентных светодиодов, например на  $\text{CaAs}_x\text{P}_{1-x}$ . Люминесцентный полупроводниковый диод допускает температурную пе-

рестройку, так что максимум



его излучения можно совместить, например, с максимальным поглощением АЭ  $\text{YAG} : \text{Nd}^{3+}$ . В этом случае КПД источник накачки максимален.

Для повышения эффективности накачки лампы и активное вещество помещают в осветитель. Эффективность светопередачи осветителя очень сильно влияет на КПД всего лазера в целом. Потери в осветителе составляют от 20% до 70%, что в основном и обуславливает низкий КПД твердотельных лазеров. Покрытия осветителей могут быть диффузные или зеркальные. Отражатели с диффузными покрытиями обеспечивают более равномерное распределение энергии излучения лампы накачки по поверхности активного элемента, отличаются стойкостью к воздействию агрессивных сред и мощного оптического излучения. Их изготавливают из четыреххлористого кремния или керамики на основе аморфного диоксида кремния, которые в области 0.5-1 мкм имеют коэффициент отражения 0.92-0.97.

Зеркальные отражатели обладают большим коэффициентом отражения, позволяют осуществлять селективное отражение той части спектра излучения лампы накачки, которая приходится на полосы поглощения активного элемента. Однако они менее стойки к воздействию излучения ламп накачки, не обеспечивают равномерности распределения отраженной энергии на поверхности АЭ, особенно при повышенных энергиях накачки. Зеркальные отражатели выполняют в виде многослойных структур, которые состоят из подложки. Отражающих и защищающих слоев. В качестве отражающих используют слои золота, серебра или многослойные диэлектрические покрытия. Материалы защитных слоев  $\text{Cu}$ ,  $\text{Ni}$ ,  $\text{Al}$  и другие выбирают с учетом их коррозионной стойкости, адгезии. Устойчивости к механическим и климатическим воздействиям.

Для накачки мощных лазеров используют осветители с фокусировкой излучения накачки на активный элемент. Их конструктивные особенности обычно обусловлены конкретным видом АЭ.

В большинстве лазеров накачка АЭ осуществляется через боковую поверхность, что приводит к заметной неравномерности распределения энергии накачки в поперечном сечении элемента. Следствием этого является неравномерность распределения инверсии в поперечном сечении АЭ, что оказывает существенное



влияние на энергетические и пространственные характеристики излучения. Изменяются типы колебаний резонатора. Расходимость излучения лазера.

## 15.2 Активные среды твердотельных лазеров

Основу активной среды твердотельных лазеров составляет матрица. Генерирующими центрами являются частицы, введенные в матрицу. В качестве таких центров используются ионы переходных металлов, редкоземельных элементов или актинидов, энергетические уровни которых используются для создания инверсионной населенности. Относительная концентрация таких активных частиц - активаторов – обычно невелика и составляет единицы или доли процентов от полного числа атомов в среде. Матрица непосредственно не участвует в физических процессах, приводящих к генерации, но ее вещество определяет основные технические свойства активной среды.

Вещество матрицы должно удовлетворять следующим требованиям: допускать введение и равномерное распределение активных ионов, на переходах которых осуществляется генерация; быть химически стойким, оптически и механически прочным; прозрачным для излучения накачки и генерации; выдерживать значительный нагрев (возникающий в процессе создания инверсии и генерации излучения); обладать хорошей проводимостью и высокой фотохимической стойкостью; быть технологичным.

В настоящее время в качестве матриц применяются диэлектрические кристаллы с упорядоченной структурой, твердые растворы в виде смешанных разупорядоченных систем и стекла. В качестве кристаллических активных сред широко используются оксидные лазерные кристаллы: рубин  $\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Cr}^{3+}$ , иттриво-алюминиевый гранат (ИФГ)  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12} : \text{Nd}^{3+}$ , alexандрит  $\text{BeAl}_2\text{O}_4 : \text{Cr}^{3+}$ , гадолиний-скандий-галлиевый гранат (ГСГГ)  $\text{Gd}_3\text{Sc}_2\text{Ga}_3\text{O}_{12} : \text{Nd}^{3+}$  и др. – фтористые кристаллы:  $\text{CaF}_2$ ,  $\text{BaF}_2$ ,  $\text{KZnF}_3$  и др. В качестве активаторов используются главным образом ионы группы железа (  $\text{Cr}^{3+}$ ,  $\text{V}^{2+}$ ,  $\text{Ni}^{2+}$ ,  $\text{Co}^{2+}$  и др.), а также ионы редкозе-





мельных элементов ( $\text{Nd}^{3+}$ ,  $\text{Pr}^{3+}$ ,  $\text{Eu}^{3+}$  и др.).

В кристаллах с разупорядоченной структурой типа  $\text{CaF}_2 - \text{SrF}_2$ ,  $\text{BaF}_2 - \text{YF}_3$ ,  $\text{LiCd}(\text{MoO}_4)_2$ ,  $(\text{Nd, Sc})\text{P}_5\text{O}_{14}$  приместные ионы (в основном неодима) входят в состав многих отличающихся по структуре активных центров, в результате чего спектры поглощения этих веществ состоят из широких полос, что позволяет увеличить эффективность накачки.

В качестве аморфных диэлектриков применяют стекла различных составов. В качестве активаторов в стеклянных матрицах обычно используется двух- и трехзарядные ионы редкоземельных элементов неодима, иттербия, гадолиния и др. В отличие от кристаллов ионы активатора входят в стекло как компоненты стекла. При производстве лазерных стекол к ним предъявляются повышенные требования к чистоте исходных материалов, однородности и спектральным свойствам.

Основным достоинством стеклянных активных сред является простота изготовления АЭ любой формы и размеров, высокая оптическая однородность, изотропность свойств, возможность введения активатора в необходимых концентрациях (с равномерным распределением его по АЭ). Однако, по ряду параметров стекло уступает кристаллам. Спектральные линии излучения в стекле расширены, что является следствием отсутствия определенной кристаллической структуры. Стекла имеют более низкий квантовый выход излучения, худшие теплофизические свойства (малую теплопроводность и высокий коэффициент термического расширения); ограниченную область прозрачности.

### 15.3. Трехуровневые лазеры

В первом твердотельном лазере в качестве матрицы АЭ использовался искусственный кристалл лейкосапфира. Это кристаллический минерал, который при добавлении ионов хрома принимает окраску от бледно розового до ярко-красного. Он называется рубином. Структура рубина – кристаллическая решетка  $\text{Al}_2\text{O}_3$  с внедренными в нее трехзарядными ионами хрома  $\text{Cr}^{3+}$ . Содержание хрома колеблется в пределах от 0.05 до 0.5%. В кристалле часть атомов алюминия изоморфно замещена



ионами хрома, что и вызывает окраску кристалла. Показатель преломления рубина  $n = 1,76$ .

В лазерах обычно используется бледно-розовый рубин с содержанием хрома около 0.05%, что соответствует примерно  $1.6 \cdot 10^{19}$  ионов хрома в  $1 \text{ см}^3$ . Поскольку число ионов алюминия  $\text{Al}^{3+}$  составляет  $4.7 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , то в среднем каждый ион хрома замещает один из нескольких тысяч ионов алюминия. Кристалл рубина имеет ромбоэдрическую решетку. В решетке  $\text{Al}_2\text{O}_3$  при замене ионов возникают напряжения, так как радиус иона хрома (0.065 нм) несколько больше радиуса иона алюминия (0.057 нм). Следует отметить высокую механическую прочность и теплопроводность рубина, которые в значительной мере способствовали широкому распространению его лазерной технике. Его твердость (по Моосу = 9) уступает только алмазу, а теплопроводность при комнатной температуре только на порядок меньше, чем у металлов.

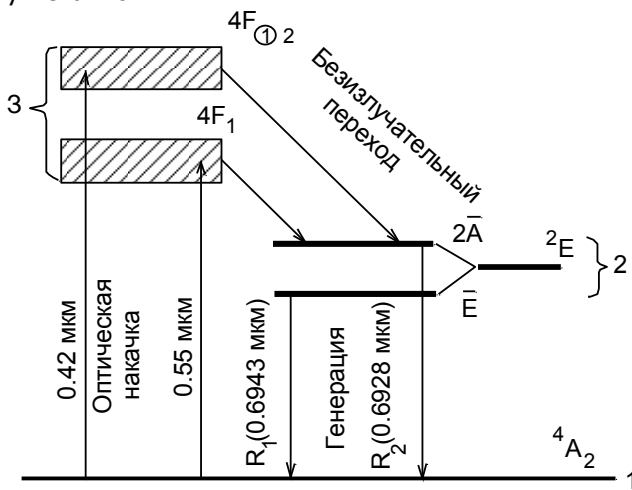


Рис. 13.6. Ход лучей в окне Брюстера

Диаграмма энергетических уровней ионов хрома в решетке представлена на рис. 15.3. Эти уровни существенно отличаются от уровней энергии в свободных ионах хрома  $\text{Cr}^{3+}$ . Их происхождение определяется взаимодействием электронной

3d-оболочки хрома с кристаллическим полем решетки, под воздействием которого происходит преобразование дискретных уровней хрома в энергетические полосы. При этом наибольшее



уширение испытывают уровни  ${}^4F_1$  и  ${}^4F_2$ . Глубоко расположенные электроны экранируются внешними электронными оболочками, поэтому воздействие на них кристаллического поля проявляется значительно слабее, и связанными с ними уровни практически не претерпевают уширения. Например, уровень  ${}^2E$ , состоящий из двух близких подуровней  $\bar{E}$  и  $2\bar{A}$ .

Создание инверсионной населенности в рубине происходит по трехуровневой схеме с использованием метода оптической накачки. Энергия оптической накачки поглощается за счет переходов  $1-3$ . Спектр поглощения рубина соответствует двум широким линиям поглощения, центральные длины волн которых равны  $0.41$  и  $0.56$  мкм соответственно, а ширина каждой из них составляет около  $0.1$  мкм. Энергетическое расстояние между уровнями  $1$  и  $3$  много больше  $kT$ , и следовательно, вероятность  $P_{13} = \nu u_{\text{нак}}$ . Коэффициент поглощения зависит от направления распространения света по отношению к оптической оси кристалла (рис. 15.4).

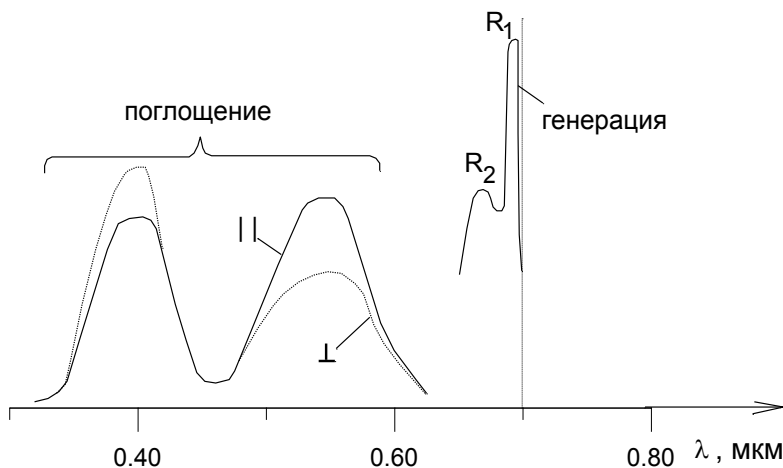


Рис. 13.7. Интерференция падающей и отраженной волн при наклонном падении ЭМВ на границу раздела



За счет спонтанного безызлучательного распада верхних энергетических уровней ионы оказываются в метастабильных состояниях, соответствующих второму уровню. Разница энергий  $E_3 - E_2$  передается кристаллической решетке и приводит к разогреву всей активной среды. Вероятность этих переходов  $(2 - 5) \cdot 10^7 \text{ с}^{-3}$ . Уровень 2 рубина является метастабильным и при комнатной температуре имеет время жизни  $\tau = 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . Для энергетической диаграммы рубинового лазера выполняется условие:

$$h\nu_{21} \gg kT; \quad h\nu_{32} \gg kT.$$

$$\text{Следовательно } P_{12} = P_{23} = 0 \quad \text{и} \quad u = 0.$$

Таким образом, для населенностей уровней в трехуровневой схеме получим

$$N_1 = N \frac{P_{21}}{P_{21} + \eta B u_{\text{нак}} (1 + P_{21}/P_{32})};$$

$$N_2 = N \frac{\eta B u_{\text{нак}}}{P_{21} + \eta B u_{\text{нак}} (1 + P_{21}/P_{32})};$$

$$N_3 = N \frac{\eta B u_{\text{нак}}}{P_{21} + \eta B u_{\text{нак}} (1 + P_{21}/P_{32})} \frac{P_{21}}{P_{32}},$$

$$\text{где } \eta = P_{32}/(P_{32} + P_{31}).$$

Величина  $\eta B u_{\text{нак}}$  называется скоростью накачки и определяется вероятностью двухактового процесса  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ . Переход  $1 \rightarrow 3$  происходит под действием излучения накачки, переход  $3 \rightarrow 2$  - неоптический. Из предыдущих уравнений получим:

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{B u_{\text{нак}}}{P_{31} + P_{32}} = \frac{\eta B u_{\text{нак}}}{P_{32}} \ll 1;$$



## Машиностроение

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\eta \text{Bu}_{\text{нак}}}{P_{21}}; \quad \frac{N_3}{N_2} = \frac{P_{21}}{P_{32}}.$$

Таким образом, населенность третьего уровня всегда значительно меньше населенности первого уровня. Практически все частицы распределены по уровням 1 и 2, т.е.  $N_1 + N_2 \approx N$ .

При малых  $\eta \text{Bu}_{\text{нак}}$  населенность второго уровня зависит от плотности излучения накачки линейно. При  $\eta \text{Bu}_{\text{нак}} \approx P_{21}$  проявляется тенденция к насыщению, а при  $\eta \text{Bu}_{\text{нак}} \gg P_{21}$  подавляющее число частиц переходит на уровень 2.

Таким образом, основное условие накопления большинства частиц на уровне 2 формулируется в виде соотношения

$$\eta \text{Bu}_{\text{нак}} = \text{Bu}_{\text{нак}} \frac{P_{32}}{P_{31} + P_{32}} \gg P_{21}. \quad (2.1)$$

Оно выполняется, если одновременно имеют место неравенства:

$$\text{Bu}_{\text{нак}} \gg P_{21}; \quad \text{Bu}_{\text{нак}} \gg \frac{P_{31}}{P_{32}} P_{21}. \quad (2.2)$$

Так как при реальных накачках  $P_{31} \gg V_{31} u_{\text{нак}}$ , то следует:

$$P_{31} \gg P_{21}; \quad P_{32} \gg P_{21}. \quad (2.3)$$

Практически все лазеры на рубине работают на линии  $R_1$ , что связано с более высокой вероятностью перехода для линии  $R_1$ . При уменьшении температуры кристалла линии  $R_1$  и  $R_2$  сужаются и перемещаются в более коротковолновую область спектра (рис. 15.5). Ширина линии  $R_1$  на уровне 0.5 равна  $\Delta \nu \approx 330$  ГГц ( $T = 300\text{K}$ ).

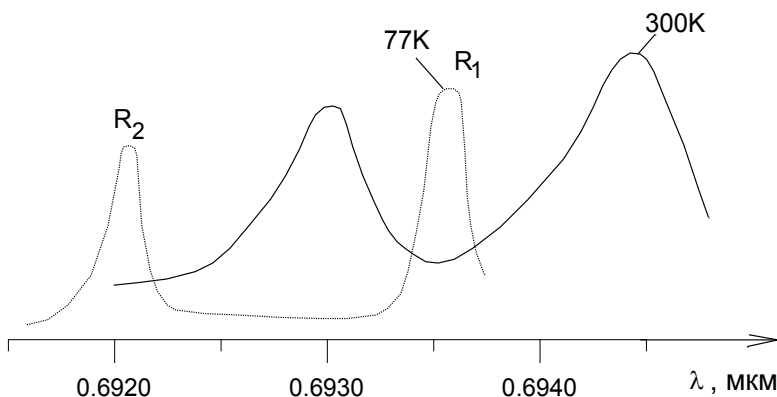


Рис. 13.8. Электромагнитное поле волны в прямоугольном

Обычно в лазерах используются кристаллы рубина, изготовленные в виде стержней длиной 250-350 мм и диаметром 12-25 мм, ось которых ориентирована по отношению к оптической оси под углом 60 или 90 градусов. В этом случае генерируемое излучение имеет линейную поляризацию.

Мощность, выделяемую внутри рабочего тела за одну секунду, определяется формулой

$$P_{\text{ген}} = \frac{lsN\hbar\nu_{\text{ген}}}{1 + g_2/g_1} (1 - \delta) \left[ \eta B\nu_{\text{нак}} - \eta B\nu_{\text{нак}}^{\text{пор}} \right].$$

Здесь  $l$  - длина АЭ;  $S$  - площадь сечения АЭ. Отсюда следует, что мощность генерации линейно зависит от плотности излучения накачки.

Наиболее предпочтительным для рубинового лазера является импульсный режим работы. В режиме свободной генерации энергия импульсов достигает сотен джоулей при КПД до 1 %.

Работа лазера по трехуровневой схеме может наблюдаться и в других материалах, но, как правило, в большинстве случаев лазеры работают по четырехуровневой схеме.



## 15.4 Четырехуровневые лазеры

Среди твердотельных лазеров, работающих по четырехуровневой схеме, широкое распространение получили лазеры, у которых в качестве матрицы используется стекло и кристалл АИГ с добавками неодима.

Спектр атомов редкоземельных элементов, включенных в монокристалл, очень близок к спектру изолированных атомов. Это объясняется тем, что незаполненная оболочка 4f у редкоземельных элементов расположена ближе к ядру, чем оболочка 3d элементов группы железа, и в значительной степени экранируется от электрического поля решетки. Поэтому положение энергетических уровней редкоземельных ионов слабо зависит от типа кристалла, и для всех них характерно наличие узких линий флюоресценции.

Упрощенная схема энергетических уровней иона неодима в кристалле граната представлена на рис.15.6. Спектр поглощения иона неодима состоит из большого числа сравнительно узких полос. Однако основной энергетически вклад в поглощение света накачки дают пять полос, расположенных в области 520, 580, 740, 800 и 900 нм. Наиболее интенсивная люминисценция соответствует длине волны 1.06 мкм. Время перехода иона из состояний, соответствующих уровням накачки, на метастабильный уровень существенно меньше, чем время жизни метастабильного уровня. Поэтому можно считать, что существует не множество уровней накачки, а лишь один условный уровень. Время жизни на уровне накачки менее  $10^{-8}$  с. Метастабильный уровень также состоит из большого числа подуровней, но, поскольку время теплового равновесия между ними значительно меньше времени основного перехода, его также можно считать одиночным. Время жизни метастабильного уровня лежит в пределах  $10^{-3} \div 10^{-4}$  с. Энергетических уровней (условно соответствующих второму по схеме четырехуровневому лазеру) также несколько, но каждый из них можно считать единственным, полагая, что его населенность задается по закону Больцмана. Нижний лазерный уровень  ${}^4I_{11/2}$  достаточно далеко отстоит от основного состояния  ${}^4I_{9/2}$  и (вследствие быстрой безызлучательной релаксации) имеет малое время жизни, порядка  $6 \cdot 10^{-8}$  с. Поэтому он практически не



заселен при комнатной температуре, и это состояние сохраняется даже при очень больших уровнях накачки. Четырехуровневая схема возбуждения в сочетании с высоким коэффициентом усиления обеспечивает низкий порог генерации лазерных сред, активированных неодимом.

С учетом такого приближения возможно описание кинетики населенностей этих эффективных лазерных уровней.

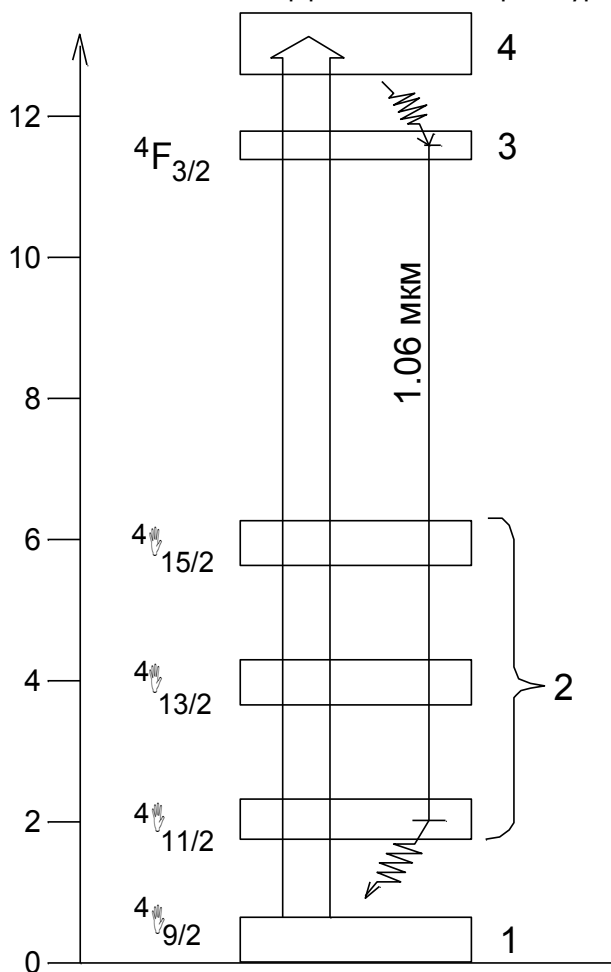


Рис. 13.9. Световод в виде диэлектрического слоя

Основными упрощающими приближениями (вытекающими из соотношения вероятностей излучательных переходов между уровнями) являются следующие:

1. Все ионы, возбужденные под действием накачки. Быстро переходят безызлучательным образом на метастабильный уровень 3.
2. Вероятность безызлучательных переходов с метастабильного уровня вниз пренебрежимо мала по сравнению с излучательными.





3. Время безызлучательных переходов ионов между уровнями  $4 \rightarrow 3$  и  $2 \rightarrow 1$  пренебрежимо мало по сравнению с временем излучательного перехода между уровнями  $3 \rightarrow 2$ .

Таким образом мощность генерации для лазеров описывается формулой:

$$P_{\text{ген}} = I_s N h \nu_{\text{ген}} [\eta B u_{\text{нак}} (1 - \delta) - (P_{31} + P_{32}) \delta].$$

Если выполняются условия

$$P_{12} \ll P_{21}; \quad \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu_{21}/kT} \ll 1,$$

то практически все частицы сосредоточиваются на уровнях 1 и 3.

Пороговую скорость накачки находят из формулы

$$\eta B u_{\text{нак}}^{\text{пор}} = (P_{31} + P_{32}) \frac{\delta}{1 - \delta}$$

при выполнении условия

$$\frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu_{21}/(kT)} \ll \delta.$$

При  $h\nu_{21} \gg kT$ , небольших  $\delta$  и прочих равных условиях пороговая скорость накачки четырехуровневого генератора значительно ниже, чем в трехуровневом генераторе.

Лазерные кристаллы АИГ- $\text{Nd}^{3+}$  получают на основе чистого кристалла АИГ, в который в процессе его выращивания вводят в качестве примеси положительные ионы неодима. Чистый кристалл АИГ является бесцветным прозрачным кристаллом. По своим оптическим свойствам – изотропным. Показатель преломления  $n = 1.82$ . Кристалл оптически прозрачен в диапазоне 240-6000 нм, имеет высокую твердость (около 8.5 ед. по Моосу) и хорошие теплопроводящие свойства, которые на порядок выше, чем у неодимового стекла, и уступают лишь рубину.



Современная технология позволяет выращивать достаточно большие и совершенные кристаллические АЭ АИГ-  $\text{Nd}^{3+}$  длиной 50-250 мм и диаметром 4-15 мм, что позволяет получать в режиме свободной модуляции до десятков джоулей при КПД > 1%, а в непрерывном режиме до сотен ватт при КПД около 2.5-3 %.

Лазеры на АИГ:  $\text{Nd}^{3+}$  применяются в технологических установках для сварки, сверления, резки, скрайбирования, лазерного отжига и др.

Другим веществом, широко используемым в качестве матрицы АЭ, является стекло. Ионы активатора аморфной матрицы не внедряются в узлы решетки, а входят в стекло в качестве его компонента, что допускает большое введение активных центров (до 6%, что соответствует  $N \approx 10^{21} \text{ см}^{-3}$ ). Структура энергетических уровней иона  $\text{Nd}^{3+}$  в стекле примерно такая же, как и в кристалле, но полосы поглощения и люминесценции шире.

Наибольшее время жизни метастабильного состояния и наибольший квантовый выход люминесценции имеют силикатные стекла. Неодимовое стекло в отличие от кристаллов в силу больших объемов и более высокой концентрации активатора хорошо накапливает энергию. Поэтому его наиболее целесообразно применять в качестве активной среды импульсных лазеров высокой энергии. Достигнуты значения импульсной энергии излучения в десятки килоджоулей при КПД до единиц процентов. Стекло является отличным оптическим материалом. Главным достоинством стекла является его высокая оптическая однородность. Градиент показателя преломления хорошего лазерного стекла составляет  $dn/d\lambda = \pm(0,5 \div 2) \times 10^{-8} \text{ см}^{-1}$ . По этой причине расходимость излучения лазеров на стекле меньше, чем у рубиновых и АИГ-  $\text{Nd}^{3+}$  лазеров.

К сожалению, стекло имеет и ряд недостатков. Оно не обладает высокой термостойкостью и хорошей проводимостью. Излучение накачки неравномерно нагревает АЭ, и это (в силу низкой теплопроводности) приводит к неоднородности температурного поля, что является причиной термоупругих искажений, вызывающих оптические искажения. Другим недостатком является фотохимическая неустойчивость стекла, приводящая к постепенному



снижению характеристик генерации.

Существует и ряд факторов, ограничивающих мощность генерируемого излучения. Это процессы поглощения собственного излучения на микропримесях и эффекты самофокусировки.

Наибольшей лучевой стойкостью обладают неодимовые стекла, не содержащие примесей металлов (платины, железа), имеющих технологическое происхождение. В режиме свободной генерации порог разрушения составляет  $10^3 \div 10^4$  Дж/см<sup>2</sup>. В режиме модулированной добротности лучшие стекла имеют пороговые плотности энергии излучения (разрушающей торцы АЭ) в несколько сотен джоулей на квадратный сантиметр. Для сравнения, рубины и гранаты в режиме модулированной добротности разрушаются при  $10 \div 30$  Дж/см<sup>2</sup>.

В режиме модуляции добротности импульсные мощности лазеров на стекле могут достигать значений  $10^{14}$  Вт при наносекундной длительности импульсов. В режиме синхронизации мод возможно получение импульсов длительностью менее  $10^{-14}$  с.

### Контрольные вопросы

5. Назовите активные среды в твердотельных лазерах?
6. Какими параметрами определяется мощность генерации лазера?
7. Какова схема создания инверсионной населённости в рубине?
8. Какова схема создания инверсионной населённости в четырёхуровневых лазерах?
9. Какие факторы ограничивают мощность генерации твердотельных лазеров?



## ГЛАВА 16. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ЛАЗЕРЫ

### 16.1. Физические основы полупроводниковых лазеров

Полупроводниковые лазеры представляют собой лазер на основе полупроводниковой активной среды, в которой используются разрешённые квантовые переходы. Полупроводниковые слои, способные к генерации лазерного излучения, реализуются в разных формах: как гомоструктура; как гетероструктура; в виде квантовых барьеров (квантовых ям) и квантовых точек.

При поглощении фотона с энергией  $h\nu \geq E_g$  происходит переход электрона из валентной зоны в зону проводимости. При этом в валентной зоне образуется дырка.

Одновременно с генерацией электронно-дырочных пар в полупроводнике происходит процесс спонтанного излучения и вынужденная рекомбинация. Для создания условий усиления света необходимо создать вырожденный полупроводник, в котором нарушено тепловое равновесие. Однако, в чистых полупроводниках создать состояние с одновременным вырождением электронов и дырок трудно. Обычно используют два полупроводника *n*- и *p*-типов, в каждом из которых электроны и дырки вырождены. Работа лазера основана на возникновении инверсии населённостей в области *p-n* перехода при инжекции носителей заряда.

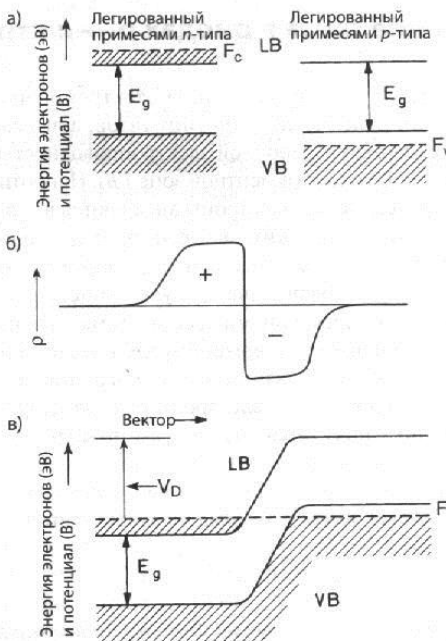
Энергетические зоны полупроводникового лазера приведены на рис. 16.1 для изолированных (а) и контактируемых (в) полупроводников. В *p-n*-переходе может возникнуть условие инверсии населённостей только при условии прямого напряжения. Через *p-n*-переход текут токи, состоящие из электронов и дырок. В тонком слое *p-n*-перехода они рекомбинируют, излучая фотоны. Встречные потоки электронов и дырок будут поддерживать в *p-n*-переходе концентрацию, достаточную для их вырождения.

Энергетические уровни непрерывных зон почти до уровня Ферми  $F_c$  и  $F_v$  заняты электронами и дырками соответственно. Положительные дырки «*p*» и подвижные электроны «*e*» формируются акцепторными и, соответственно, донорными атомами с концентрацией  $n \sim 10^{18}$  см<sup>-3</sup>.

При контакте проводников *p*- и *n*-типа получается диод – основной элемент полупроводникового диодного лазера.



Электроны до тех пор диффундируют в зону с дырочной электропроводностью, а дырки – в зону с электронной электропроводностью, пока образующийся объёмный заряд  $V_D$  не достигнут уровня совпадения энергий Ферми в проводниках р- и n-типа.



$$V_D = \frac{kT}{e} \ln \left( \frac{N_A N_D}{n_1^2} \right)$$

где  $N_A, N_D$  - плотность акцепторов и доноров в проводнике с дырочной и электронной проводимостью соответственно;  $n_1$  - относительно низкая, термически генерируемая плотность электронов в нелегированном полупроводнике при температуре  $T$ ;  $k$  - постоянная Больцмана,  $e$  - элементарный заряд.

Пространственная зависимость потенциала  $V$  и плотность заряда  $\rho$  вытекают

Рис. 13.10. Диаграмма типов колебаний диэлектрического световода

из уравнения Пуассона

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

На рис. 16.1 представлены:

а) Энергетические уровни полупроводников n- и р-типа с сильным легированием:  $E_g$  - ширина запрещённой зоны,  $F_c$  и  $F_v$  -



энергии Ферми полупроводника n- и р-типа,  $LV, VD$  – зоны валентности и проводимости.

б) если n- и р-зоны находятся в контакте, то электроны диффундируют в зону с дырочной проводимостью, а дырки – в зону с электронной проводимостью.

В результате возникает объёмная плотность заряда  $\rho$  и происходит повышение энергии электронов в зоне р-типа с разностью потенциалов  $V_D$ , ограничивающей диффузию (F- полная энергия Ферми).

В результате дрейфа электронов в зону с дырочной электропроводностью и положительных дырок в валентной зоне – в зону с электронной электропроводностью образуется узкая зона с **инверсией населённости**. Толщина  $d$  определяется через постоянную диффузии  $D$  электронов в слое, легированном примесями р-типа, и временем рекомбинации  $\tau$ . Например, для полу-

проводника GaAs (при  $D = 10 \frac{cm^2}{c}$  и  $\tau = 10^{-9} c$ ) получают тол-

щину  $d = 1$  мкм. В этой узкой полосе возможны усиление света и генерация лазерного излучения.

Чем выше электрическое поле в р-n переходе, тем больший ток через него протекает. Минимальный ток, при котором вынужденное излучение превышает поглощение, называется **пороговым**. На пороге генерации должно выполняться условие  $kR \geq 1$ , где  $k$  - коэффициент усиления на длине активной среды между зеркалами,  $R$  - коэффициент отражения зеркал резонатора. При токе выше порогового р-n переход является усиливающей средой. Если ввести положительную обратную связь в виде резонатора, то из усилителя света можно получить генератор. В качестве резонатора используют гладкие грани полупроводникового кристалла.

**Базовая структура лазера с р-n переходом** представлена на рис. 16.2. Две боковые грани структуры скальваются или полируются перпендикулярно плоскости перехода. Две другие грани делаются шероховатыми для того, чтобы исключить излучение в направлениях, не совпадающих с главным. Такая структура называется резонатором Фабри-Перо.

Смещение лазерного диода в прямом направлении вызывает протекание тока. Вначале, при низких значениях тока, возникает спонтанное излучение, распространяющееся во всех направлениях. При увеличении смещения ток достигает порогового зна-



чения, при котором создаются условия для стимулированного излучения, и р-п переход испускает монохроматичный строго направленный луч света.

Принцип действия светодиода основан на излучательной рекомбинации инжектированных носителей в прямосмещенном р-п переходе, где  $L_p$  – диффузионная длина ( $\sim 250$  мкм).

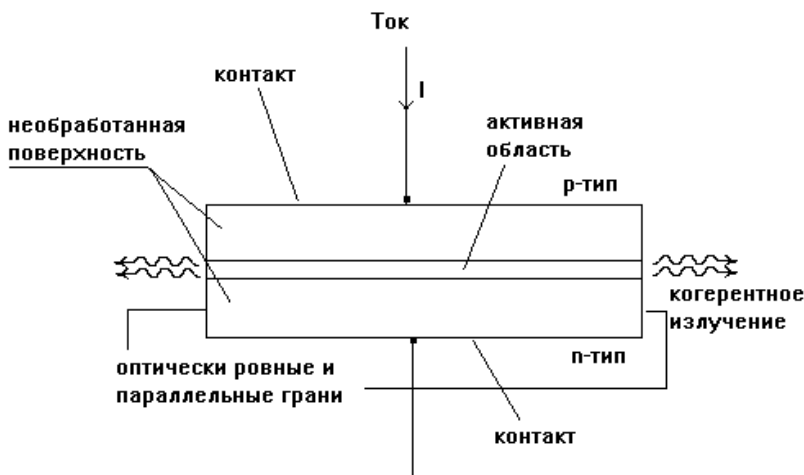
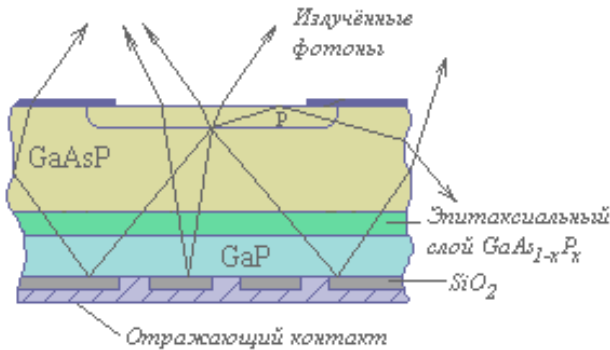


Рис. 13.11. Прямоугольный объемный закрытый резонатор

Конструкции светодиодов представлены на рис. 16.3. Среди светодиодных структур основной является структура с плоской геометрией. Обычно прямозонные светодиоды (красное излучение) формируются на подложках GaAs (а), тогда как непрямозонные (оранжевое, жёлтое и зелёное излучения) - на подложках GaP (б). При использовании подложки GaAs на неё наращивается переходный слой  $\text{GaAs}_{1-x}\text{P}_x$  переменного состава с  $x$ , изменяющимся в пределах  $0 \div 0.4$ , а затем слой  $\text{GaAs}_{1-x}\text{P}_x$  с постоянным составом.



б

Рис. 13.12. Резонансная кривая резонатора

## 16.2. Лазеры на основе гетероструктур

Гетероструктурой называется полупроводниковая структура с несколькими гетеропереходами.

Гетеропереходом называется контакт двух различных по химическому составу полупроводников (типа А и В).

В 1963 году Ж.И. Алфёров и Г. Кремер сформулировали концепцию полупроводниковых лазеров на основе двойной гетероструктуры.

Уменьшение толщины слоя В приводит к появлению уровней размерного квантования:

$E_c$  и  $E_v$  – края зоны проводимости и валентной зоны;  $E_e$  и  $E_h$  – уровни размерного квантования для электронов и дырок.

Энергия испускаемого при рекомбинации электрона и дырки фотона ( $E_1$  и  $E_2$ ) определяется не только ширинами запрещённых зон материалов, но и шириной слоя (потенциальной ямы). Поэтому  $E_2 > E_1$ .





## Машиностроение

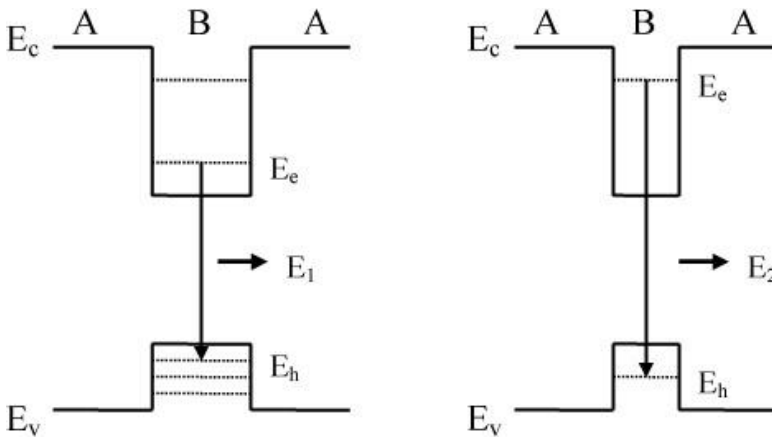


Рис. 16.4. Зонная диаграмма (энергетическая схема) двойной гетероструктуры

Узкозонный полупроводник, помещённый между широкозонными, представляет собой потенциальную яму.

В соответствии с квантовой теорией энергия попавшей в эту яму частицы (например, электрона или дырки) квантуется, т.е. принимает набор дискретных значений в зависимости от ширины потенциальной ямы, высоты потенциального барьера и массы частицы. Это определяет и свойства излучения: длину волны, ширину линии, число линий.

В обычной гетероструктуре активный слой имеет толщину 300–500 нм, и в нём наблюдаются эффекты, присущие объёмному кристаллу.

Формируя узкую потенциальную яму (тонкий, в один-два десятка нанометров, слой узкозонного полупроводника, сопоставимый с дебройлевской длиной волны электрона или дырки), обеспечивают довольно узкую линию излучения и низкий пороговый ток.

Действительно, число разрешённых состояний в активной области квантово-размерной структуры значительно меньше, чем в обычной, и при этом облегчается создание инверсной заселённости.



### 16.3. Низкоразмерные полупроводниковые гетероструктуры

Были выращены структуры с ультратонкими (десятые доли нанометра) слоями (а это означает, кроме всего прочего, ещё более узкую линию излучения). Как это ни удивительно, следы присутствия такого слоя можно увидеть... невооружённым глазом: в спектре излучения доминирует линия квантовой ямы, и, скажем, вместо прежнего зелёного света структура светит жёлтым или красным (в зависимости от толщины).

Созданы также *квантовые проволоки* (или *квантовые нити* – квазиодномерные структуры, в которых носители заряда могут свободно перемещаться только в одном направлении, вдоль нити) и, наконец, *квантовые точки* (или *квантовые ящики* – квазинульмерные структуры, т.е. трёхмерные потенциальные ямы, где квазичастицы локализованы во всех трёх направлениях).

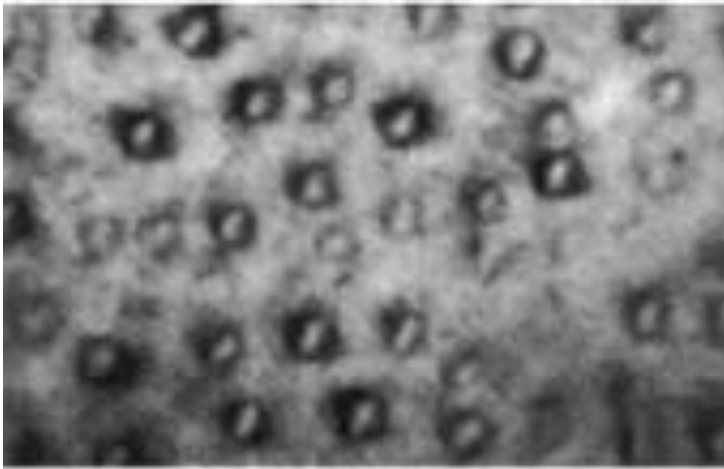


Рис. 13.13. Резонатор с двумя плос-

На фото (рис. 16.5), полученном с помощью просвечивающего электронного микроскопа, показаны квантовые точки InAs в матрице GaAs. Характерные размеры такого объекта – можно



назвать его *точкой* (с точки зрения человека) или *ящиком* (с точки зрения электрона) – те же несколько нанометров. Полная – во всех направлениях – локализация приводит к тому, что энергетический спектр подобной структуры по-настоящему дискретен, поэтому квантовые точки иногда называют *искусственными атомами*.

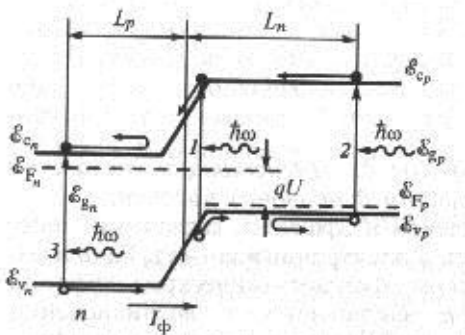
## 16.4. Лазерные светодиоды большой мощности излучения

**Фотогальванический эффект** возникает при поглощении света полупроводником при одновременной генерации подвижных носителей – электронов и дырок.

Эти носители разделяются в пространстве. Причиной разделения носителей может быть электрическое поле приэлектродного барьера Шоттки на контакте металл-полупроводник, поле  $p-n$ -перехода или гетероперехода.

Схема процессов, происходящих в  $p-n$ -переходе, на который падает излучение с энергией фотонов  $\hbar\omega > E_g$  (где  $E_g$

- ширина запрещённой зоны) приведена на рис. 16.6.



L

Основная часть носителей генерируется в областях, примыкающих к  $p-n$ -переходу (области 2 и 3 на рис.10.3). Если генерация происходит на расстояниях меньше диффузионной длины электронов  $L_n$  и дырок  $L_p$ , то возникшие носители достигают до  $p-n$ -перехода, не рекомбинируя с основными



## Машиностроение

носителями этих областей. В области объёмного заряда избыточные носители накапливаются в разных областях, что приводит к возникновению фотоЭДС и фототока при наличии внешней цепи.

Фототок через  $p-n$ -переход протекает независимо от приложенного напряжения и определяется уравнением

$$I = I_s \exp\left(\frac{qU}{kT} - 1\right) - I_F,$$

где  $I_s$  - ток насыщения, создаваемый свободными носителями заряда;  $I_F$  - фототок, пропорциональный скорости генерации избыточных электронно-дырочных пар в области диффузионных длин неосновных носителей;

$qU = E_{Fn} - E_{Fp}$ . Вольт-амперная характеристика фотодиода представлена на рис. 16.7.

Значения фотоЭДС можно определить, положив  $I = 0$ . Тогда

$$E_F = \frac{kT}{q} \ln\left(1 + \frac{I_F}{I_s}\right).$$

Если к  $p-n$ -переходу приложить обратное напряжение превышающее величину пробоя, то возможно усиление фотоЭДС за счёт лавинного умножения генерированных светом носителей. Лавинные фотодиоды перспективны при обнаружении слабых оптических сигналов.

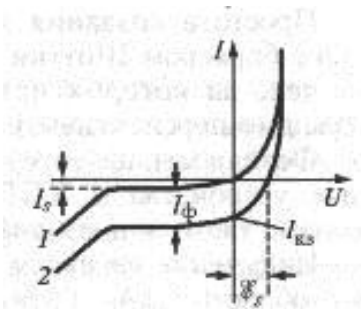


Рис. 13.14.



Большое распространение получили  $p-i-n$ -диоды, в которых  $i$ -область состоит из слабо легированного полупроводника. Электрическое поле в  $i$ -области ускоряет транспорт носителей и снижает барьерную емкость фотодиода. Последнее обстоятельство позволяет снизить величину ёмкости на входе предусилителя и уменьшить время переходных процессов. Малые рабочие напряжения в фотодиодном режиме позволяют обеспечить совместимость  $p-i-n$ -диодов с интегральными схемами.

Фотодиоды Шоттки со структурой металл-полупроводник позволяют повысить быстродействие приёмников излучения до  $10^{-10}$  с. В таких структурах граница спектральной характеристики сдвигается в сторону более длинных волн. Фотодиоды Шоттки имеют малое сопротивление базы фотодиода. Инерционность таких приборов определяется временем пролёта фотоносителей через область объёмного заряда ( $10^{-10} - 10^{-11}$  с). Простота создания выпрямляющих фоточувствительных структур с барьером Шоттки на различного типа полупроводниках открывает большие перспективы их использования.

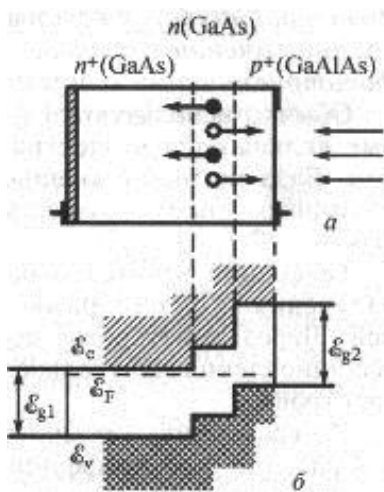


Рис. 13.15. Волновая поверхность Кирхгофа

Фотодиоды на гетероструктурах позволяют создать фотоприёмные устройства с КПД, близким к 100%. На рис. 16.8



показано устройство и зонная диаграмма гетерофотодиода.

Излучение вводится через слой GaAlAs. Поглощение происходит в  $n$ -области GaAs. Разница в ширине запрещённой зоны по обе стороны от гетероперехода составляет около 0,4 эВ. Генерируемые в  $n$ -области дырки переносятся в  $p^+$ -область. Ширина активной  $n$ -области выбирается такой, что происходило полное поглощение излучения. Структура работает при небольших напряжениях. Выбирая соответствующие пары полупроводников, можно создать фотодиоды для любой части оптического спектра. Отметим, что в гетероструктурах длина волны определяется разницей ширины запрещённых зон и не связана со спектральной характеристикой поглощаемого излучения.



## ГЛАВА 17. ГАЗОРАЗРЯДНЫЕ СПОСОБЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЛАЗЕРОВ

### 17.1. Основные процессы в газоразрядной плазме

Рабочим телом газоразрядных лазеров является плазма газового разряда. Под плазмой принято понимать частично или полностью ионизированное квазинейтральное газообразное вещество, размеры которого существенно превышают радиус Дебая, на котором происходит экранировка внесенного электрического заряда и где электрическая нейтральность плазмы может нарушаться. Радиус Дебая  $r_D$  определяется температурой  $T_e$  и концентрацией  $n_e$  электронов плазмы на основе соотношения

$$r_D = \left( \frac{kT_e}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2} \approx 7,5 \cdot 10^2 \sqrt{\frac{T_e}{n_e}}, \quad (17.1)$$

где  $T_e$  - в эВ;  $n_e$  -  $\text{см}^{-3}$ ;  $r_D$  - в см.

Наиболее распространенным способом получения плазмы является газовый разряд, под которым понимается совокупность физических явлений, сопровождающих протекание электрического тока через вещество в газообразном состоянии. Принципиальная электрическая схема газового разряда представлена на рис. 17.1.

В газоразрядных лазерах расходуемая на возбуждение энергия выделяется в рабочем теле при протекании тока. Мощность этого энерговыделения в единице объема составляет  $jE$ , где  $j$  и  $E$  - плотность тока и напряженность электрического поля в газоразрядном промежутке.

Диапазон изменений параметров плазмы газового разряда чрезвычайно велик. В плазме лазеров концентрация электронов изменяется от  $10^8$  до  $10^{15} \dots 10^{16} \text{см}^{-3}$ , температура нейтральных атомов от сотен до тысяч К и, наконец, средняя энергия электронов – от долей до десятков эВ.

Необходимо разделять два вида столкновений – упругие и неупругие. В первом случае суммарная энергия поступательного



движения частиц не изменяется, а происходит лишь ее перераспределение. Во втором случае столкновение сопровождается изменением внутренней энергии частиц. При упругих столкновениях двух частиц с приблизительно одинаковыми массами  $m_1 \approx m_2$  происходит эффективный обмен энергиями сталкивающихся частиц. При центральном столкновении движущейся и неподвижной частиц вся энергия движущейся частицы передается неподвижной.

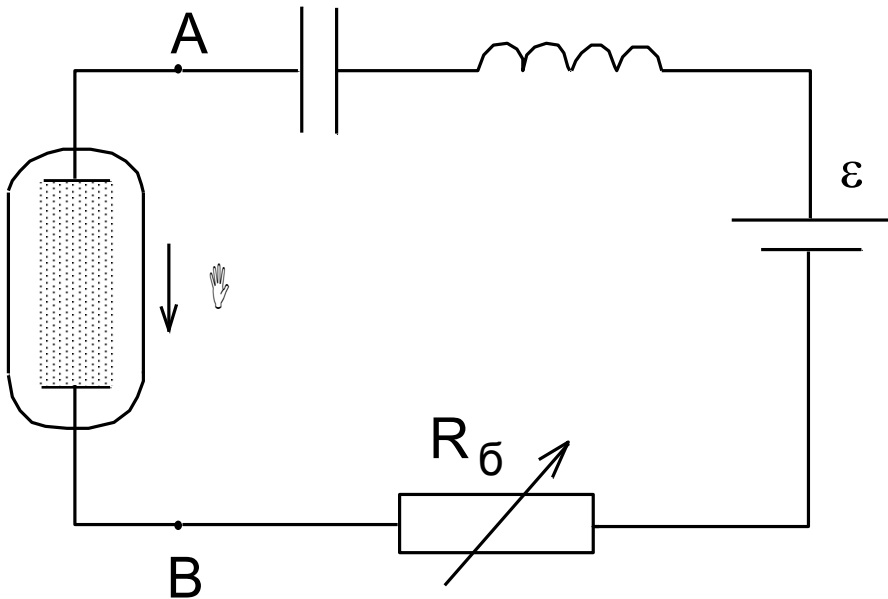


Рис. 2.16. Геометрия резонатора с круглыми плоскими зеркалами

Если массы частиц сильно отличаются, т.е.  $m_1 \ll m_2$ , легкая частица рассеивается на тяжелой, теряя лишь часть своей кинетической энергии

$$\Delta U \approx (2m_1/m_2)U. \quad (17.2)$$

В плазме газового разряда первый случай ( $m_1 \approx m_2$ ) имеет место при столкновении ионов и нейтральных молекул и атомов между собой. Второй случай ( $m_1 \ll m_2$ ) - при столкно-



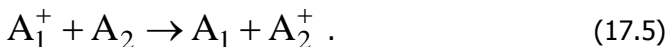


## Машиностроение

вании электронов с ионами и нейтральными частицами. В газовом разряде упругое взаимодействие имеет место при столкновении медленных электронов и ионов с атомами



а также при перезарядке



Спектр неупругих столкновений значительно разнообразнее. Рассмотрим лишь процессы, играющие важную роль в физике лазеров. Возбуждение активных частиц в электрическом разряде осуществляется в основном при их столкновении с электронами (электронным ударом)



В этом процессе могут принять участие лишь электроны с энергией  $U_e$ , превышающей энергию возбуждения  $E^*$ . Обратный процесс – тушение – осуществляется при спонтанном излучении и в результате столкновения с тяжелыми частицами

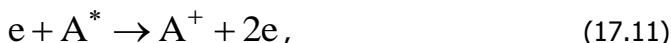


Передача энергии возбуждения от одной частицы к другой может происходить при их столкновении



Этот процесс носит резонансный характер и идет с максимальной вероятностью при совпадении энергии возбуждения частиц  $A^*$  и  $B^*$ .

Проводимость рабочего тела в газоразрядных лазерах обеспечивается рождением электронов за счет прямой и ступенчатой ионизации электронным ударом



или фотоионизации

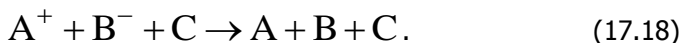
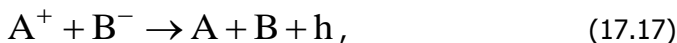


Для процессов (17.10) и (17.12) энергия электронов или фотонов должна превышать потенциал ионизации  $E_i$ , а процесс ионизации с возбужденного уровня требует, чтобы  $U_e \geq E_i - E^*$ .

Гибель заряженных частиц в газовом разряде происходит при рекомбинации электронов с ионами в процессах



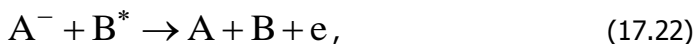
и ионов с ионами в процессах



Важную роль в газоразрядных лазерах с содержанием электроотрицательных примесей ( $O_2, CO_2, H, H_2O$ ) в рабочих смесях могут играть процессы прилипания электронов



а также процессы их отлипания при столкновениях с возбужденным атомом



электроном



или фотоном



Помимо перечисленных элементарных процессов, идущих в объеме плазмы, необходимо учитывать целый ряд поверхностных явлений на электродах и ограничивающих плазму по-



верхностях. Прежде всего к ним следует отнести: эмиссию электронов под действием положительных ионов ( $\gamma$  - процесс), фотоэффект, термо- и автоэлектронную эмиссию электронов на катоде, нейтрализацию положительных и отрицательных ионов, а также тушение частиц на ограничивающих плазму поверхностях.

## 17.2. Энергия и концентрация электронов в газовом разряде

Для описания процессов в газовых лазерах необходимо иметь данные об энергиях нейтральных и заряженных частиц и в первую очередь об электронах. В газовом разряде электроны могут получать энергию, ускоряясь в электрическом поле, и от возбужденных молекул. Эта энергия расходуется при упругих и неупругих столкновениях с атомами и молекулами. В зависимости от соотношения между направленным действием электрического поля и процессами упругого взаимодействия могут устанавливаться различные распределения скоростей электронов: от строго направленного до совершенно хаотического.

В реальных ситуациях при наличии большого числа неупругих процессов со сложным характером зависимостей сечений от энергии электронов точное решение кинетических уравнений становится невозможным и поэтому прибегают к приближенным методам расчета средней энергии электронов путем анализа баланса их энергии. Основные представления о характере взаимосвязи средней энергии электрона с условиями поддержания газового разряда можно получить рассмотрев упрощенный баланс энергии электрона для однокомпонентной газовой смеси. Если энергия электрона существенно превышает тепловую энергию нейтральных частиц, то уравнение имеет вид

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} \approx e E u_e - 2 \frac{m_e}{m_a} U_e v_{ea} \delta_H = 0, \quad (17.25)$$

где



$$\delta_{\text{н}} = 1 + \frac{\text{неупругие потери}}{\text{упругие потери}} = 1 + \frac{\sum_i k_{\text{нi}} n_{\text{ai}} \Delta U_{\text{нi}}}{2 \frac{m_e}{m_a} U_e v_{\text{ea}}} \quad -$$

коэффициент неупругих потерь;  $u_e$  - средняя скорость направленного движения электронов в электрическом поле;  $k_{\text{нi}}$  - константа неупругого процесса;  $n_{\text{ai}}$  - концентрация нейтральных частиц в основном состоянии;  $\Delta U_{\text{нi}}$  - потери энергии электрона при неупругих столкновениях;  $v_{\text{ea}}$  - частота упругих столкновений электронов с нейтральными атомами. Решая это уравнение относительно  $U_e$ , можно получить выражение для средней энергии электронов

$$U_e = e \frac{E}{n_a} \lambda_{\text{e1}} \sqrt{\frac{1}{2 \frac{m_e}{m_a} \delta_{\text{н}}}} = 0,63 \frac{E}{p_0} \lambda_{\text{e1}} \sqrt{\frac{1}{2 \frac{m_e}{m_a} \delta_{\text{н}}}} \quad (17.26)$$

где  $E/p_0$  - в В/(см·торр);  $\lambda_{\text{e1}}$  - в см;  $U_e$  - в эВ.

Как видно из уравнения (17.26), средняя энергия электрона в разряде определяется не только характеристиками газа, но и величинами электрического поля и концентрацией нейтральных частиц, входящими в виде соотношения  $E/n_a$  (называемого приведенной напряженностью электрического поля).

В литературе по газовому разряду приведенное значение электрического поля чаще встречается в виде  $E/p_0$ , где  $p_0$  - давление нейтрального газа в нормальных условиях. Величины  $E/p_0$  и  $E/n_a$  связаны между собой соотношением

$$E/p_0 = 3,5 \cdot 10^{16} E/n_a, \quad (17.27)$$

где  $E/p_0$  - в В/(см·торр);  $E/n_a$  - в В/см<sup>2</sup>.

Ионы и нейтральные атомы получают энергию от элект-



тронов в результате упругих столкновений и от возбужденных частиц в процессах безызлучательной релаксации, а теряют ее за счет процессов теплопроводности (к охлаждаемым стенкам газоразрядных камер) и конвективного выноса (при поддержании разряда в потоке газа). Уравнение баланса энергии для тяжелой компоненты плазмы имеет вид

$$c\rho\left(\frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial t} + v_{\Gamma} \frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial x}\right) = \eta_{\tau} jE - \nabla \chi \nabla T_{\Gamma} , \quad (17.28)$$

где  $c$ ,  $\chi$ ,  $\rho$  - теплоемкость, теплопроводность и плотность газа;  $v_{\Gamma}$  - скорость газового потока;  $\eta_{\tau}$  - коэффициент. Учитывающий долю выделившейся при протекании тока энергии (затраченной на нагрев атомов и ионов).

Интенсивность протекающих в газовых лазерах процессов определяется не только энергией электронов, но и их концентрацией. Найти ее можно, рассмотрев уравнение баланса. В простейшем случае баланс числа электронов можно представить в виде

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}_e n_e) = z_0 + k_i n_e n_a - k_r n_e n_i + \nabla[D_a \nabla n_e] , \quad (17.29)$$

где член  $\nabla(\mathbf{u}_e n_e)$  описывает изменение концентрации электронов неоднородной плазмы за счет дрейфа в электрическом поле,  $Z_0$  - ионизацию газа внешними источниками, второе слагаемое – ионизацию газа электронами, третье – рекомбинацию электронов в объеме газа ( $k_i$  и  $k_r$  - константы процессов), последнее слагаемое описывает гибель электронов в результате диффузии (к стенкам газоразрядных камер).

В пространственно неоднородной плазме различие в тепловых скоростях электронов и ионов приводит к разделению зарядов и возникновению электрического поля, ориентированного в направлении диффузии частиц. Это поле ускоряет диффузное движение ионов и замедляет диффузию электронов. В результате этого ионы и электроны диффундируют с одинаковой скоростью, определяемой коэффициентом амбиполярной диффу-



ЗИИ

$$D_a = \frac{D_i b_e + D_e b_i}{b_e + b_i}, \quad (17.31)$$

где  $D_i, D_e$  и  $b_i, b_e$  - коэффициенты диффузии и подвижности ионов и электронов. В условиях газового разряда обычно выполняются неравенства  $b_i \ll b_e$  и  $D_i \ll D_e$ . Поэтому выражение для амбиполярной диффузии можно упростить

$$D_a \approx D_e \frac{b_i}{b_e} + D_i \approx \frac{kT_e}{e} b_i. \quad (17.32)$$

Таким образом, при наличии неоднородностей плазма диффундирует как целое с подвижностью, определяемой подвижностью ионов и температурой электронов.

### 17.3. Электрический ток в газовом разряде

Движение заряженных частиц в газовом лазере при наложении электрического поля на частично ионизированную газовую среду перестает быть изотропным (т.е. равновероятным по всем направлениям), что приводит к появлению направленного перемещения всей массы частиц данного сорта, называемого дрейфом.

Электроны в электрическом поле набирают энергию в интервале между столкновениями и отдают ее при упругих и неупругих столкновениях (с атомами и молекулами газа). Рассматривая изменение импульса электрона в направлении электрического поля

$m_e u_e$  за время между столкновениями  $\nu_{ea}^{-1}$  (в отсутствие неупругих столкновений) можно получить выражение для скорости дрейфа электронов

$$u_e \approx \frac{e}{m_e \nu_{ea}} E \approx \frac{e \lambda_e}{m_e \nu_e} E = b_e E, \quad (17.33)$$



где  $b_e$  - коэффициент пропорциональности, называемый подвижностью электронов.

В случае слабого электрического поля функция распределения электронов не зависит от его величины. Скорость дрейфа в этом случае выражается точной формулой Ланжевена

$$u_e = a_1 \frac{e\lambda_{e1}}{m_e v_e} (E/p_0), \quad (17.34)$$

где  $a_1 = 0,85$ .

Ионы при столкновении с тяжелыми частицами очень эффективно теряют свою энергию. Если считать, что ионы останавливаются после каждого столкновения с нейтральными атомами, то среднюю скорость их дрейфа в направлении электрического поля можно выразить как

$$u_i \approx \frac{z_i e E}{2m_i v_{ia}} \approx b_i E, \quad (17.35)$$

где  $b_i$  - подвижность ионов;  $Z_i$  - их заряд. Подвижность ионов может быть выражена как

$$b_i = a_i \frac{z_i e \lambda_i}{m_i v_i} \left( 1 + \frac{m_i}{m_a} \right)^{1/2}, \quad (17.36)$$

где  $a_i$  - коэффициент ( $0,5 < a_i < 1$ ).

Плотность тока заряженных частиц в плазме определяется их плотностью, зарядом и скоростью дрейфа

$$j = \sum n_y z_y e u_y, \quad (17.37)$$

где  $n_y$  - концентрация заряженных частиц сорта  $y$ ;  $Z_y$  - их заряд (в единицах электронного заряда  $e$ ). В простейшем случае, когда плазма состоит из электронов, ионов и нейтральных частиц,



плотность тока в плазме определяется формулой

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_i = en_e \mathbf{u}_e + z_i en_i \mathbf{u}_i \mathbf{E}. \quad (17.38)$$

Так как  $m_e \ll m_i$ , то  $b_i \ll b_e$  и при равенстве  $n_e \approx n_i$  плотности электронных и ионных токов удовлетворяют неравенству  $j_e \gg j_i$ , т.е. ток в плазме переносится в основном электронами.

## 17.4 Представление об устойчивости газового разряда

Одним из основных требований, предъявляемых к любому методу накачки лазеров, является однородное и стабильное (во времени) возбуждение рабочего тела. Это означает, что используемая в качестве активной среды плазма газового разряда должна быть не только по возможности однородна, но и устойчива относительно всегда присутствующих флуктуаций различных параметров. В определенных ситуациях эти вначале малые, случайные флуктуации могут нарастать необратимым образом, в результате чего плазма переходит в неустойчивую фазу (характеризующуюся неоднородным распределением в пространстве концентраций частиц, плотности тока, электрических полей, плотности выделяемой энергии и др. параметров).

Устойчивость плазмы очень часто определяет предельные энергетические и пространственные характеристики лазеров и поэтому является одним из основных критериев пригодности конкретного разряда для возбуждения среды. Теория вопроса еще далека от завершенности. Ограничимся лишь качественным рассмотрением основных понятий о причинах неустойчивости, с тем, чтобы иметь возможность оценивать предельные характеристики технологических газоразрядных лазеров.

Проанализируем устойчивость некоторой области разряда с помощью уравнения баланса электронов, записанного в самом общем виде





$$\frac{dn_e}{dt} = Z_+ - Z_-, \quad (17.39)$$

где  $Z_+$  и  $Z_-$  - скорости рождения и гибели электронов. Пусть качественный характер зависимости  $Z_+$  и  $Z_-$  от концентрации электронов имеет вид кривых, представленных на рис. 17.2.

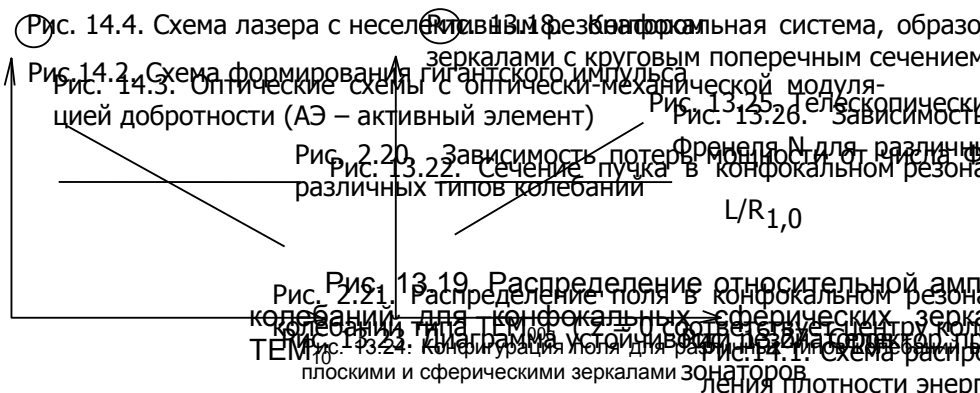


Рис. 13.17. Зависимости потерь мощности на один проход от величины числа Френеля для мод  $TEM_{00q}$

Стационарному состоянию отвечает равенство  $Z_+ = Z_-$ , т.е. точка пересечения указанных кривых. В первом случае (рис. 17.2,а) стационарное состояние устойчиво, так как любое случайное отклонение  $n_e$  от него приведет к преобладанию процессов, стремящихся это отклонение ликвидировать. Так, если флуктуация  $\delta n_e > 0$ , то  $Z_- > Z_+$  и  $dn_e/dt < 0$ , т.е.  $n_e$  в данной точке будет падать и положительная флуктуация исчезнет. Иная ситуация изображена на рис. 17.2,б, когда любое отклонение  $n_e$  от равновесия будет увеличивать преобладание дестабилизирующих процессов, а разряд будет неустойчивым.

Высказанные соображения позволяют качественно понять роль различных элементарных процессов в стабилизации лазера. Например, объемная электрон-ионная рекомбинация служит



## Машиностроение

стабилизирующим фактором, так как определяемая ею скорость гибели электронов  $Z_- = k_1 n_e n_i \approx n^2$ , в то время как скорость

ионизации атомов из основного состояния  $Z_+ = k_i n_e n_a \approx n_e$ .

Стабилизирует разряд и балластное сопротивление  $R_\delta$  во внешней электрической цепи. Например, в случае роста концентрации электронов ток, а следовательно, и падение напряжения на сопротивлении растут, а напряжение на разряде (при постоянной ЭДС источника питания) падает. Уменьшение электрического поля, как следует из (17.26), приводит к уменьшению величин  $T_e \propto E/p_0$  и  $v_i(T_e)$ . Таким образом, из-за балластного сопротивления  $Z_+$  растет медленнее, чем  $n_e$ , а при больших  $R_\delta$  даже падает. Благодаря этому однородный разряд, контролируемый амбиполярной диффузией, при которой

$Z_- \approx D_a n_e / \Lambda^2 \propto n_e$ , оказывается устойчивым ( $\Lambda$  - характерный диффузный размер).

Как правило, в условиях газоразрядных лазеров неоднородности плазмы ориентированы поперек тока и вдоль него. Первые из них, называемые стратами, развиваются в условиях постоянства плотности тока вдоль разрядного промежутка. Вторые – шнуры – развиваются в условиях постоянства электрического поля поперек разрядного промежутка.

Рассмотрим некоторые неустойчивости, наиболее часто встречающиеся в плазме газовых лазеров. Из-за активного прилипания электронов к молекулам  $\text{CO}_2$  в  $\text{CO}_2$ -лазере при определенных условиях могут развиваться страты. Их появление связано с возрастанием константы процесса прилипания  $k_a$  при росте  $E/p_0$  и происходит по следующей схеме

$$\delta n_e \downarrow \rightarrow \delta E \uparrow \rightarrow k_a \uparrow \rightarrow \delta n_e \downarrow. \quad (17.40)$$

Случайное уменьшение  $n_e$  в ориентированном поперек тока слое из-за постоянства плотности тока вдоль разряда приведет к



## Машиностроение

росту поля в этом слое. Это в свою очередь увеличит вероятность процессов прилипания, а следовательно, более интенсивную гибель электронов и дальнейшее уменьшение  $n_e$ .

Весьма опасным является разбиение разряда на один или несколько вытянутых вдоль тока шнуров повышенной проводимости. В этом случае основной ток разряда протекает в сравнительно узких зонах, перегревая находящийся в них газ, а в остальной части разрядного промежутка ток практически отсутствует. Это приводит и к появлению сильных оптических неоднородностей (отрицательно сказывающихся на расходимости лазерного излучения), а затем и к исчезновению инверсии в среде. Примером образования неоднородной структуры разряда поперек тока может служить перегревная неустойчивость, развивающаяся по схеме

$$\delta T_a \uparrow \rightarrow \delta n_a \downarrow \rightarrow c_p \downarrow \rightarrow \delta T_a \uparrow \quad (17.41)$$

при неизменных  $p, j, E$  ( $c_p$  - теплоемкость) и приводящая к образованию области с пониженной концентрацией перегретого газа.

Во многих газовых лазерах может иметь ионизационно-тепловая неустойчивость, развивающаяся при  $p = \text{const}$  и  $E = \text{const}$  по схеме

$$\delta n_e \uparrow \rightarrow \delta j \uparrow \rightarrow \delta(jE) \uparrow \rightarrow \delta T_a \uparrow \rightarrow \delta n_a \downarrow \rightarrow E/p_0 \uparrow \rightarrow k_i \uparrow \rightarrow \delta n_e \uparrow \quad (17.42)$$

В этом случае в цепочку положительной обратной связи включены процессы нагрева и ионизации газа. Приведенные примеры характерны для плазмы газоразрядных лазеров, но не исчерпывают огромного количества других механизмов развития неустойчивости.

Для решения вопроса о границе устойчивости разряда необходимо сравнить влияние стабилизирующих и дестабилизирующих его факторов количе- ственно. Наиболее просто ана-



лиз «склонности» разряда к развитию неустойчивости проводить в линейном приближении, т.е. рассматривать процесс развития случайных малых флуктуаций (нарастающих или затухающих) по закону  $\delta \propto \delta_0 \exp \Gamma t$ . Этот анализ (справедливый лишь при малых значениях  $\delta$ ) не дает полной картины перехода разряда из однородного состояния в неоднородное, но позволяет оценить характерное время  $\tau = \Gamma^{-1}$  изменения амплитуды малых возмущений.

Инкремент развития перегретой неустойчивости можно оценить из общих соображений. Так как внутренняя энергия газа  $\propto n_a k T_a$ , а скорость энерговыделения  $jE$ , то характерное время нагрева газа составляет  $\propto n_a k T_a / (jE) \approx p / (jE)$ , а инкремент развития тепловой неустойчивости

$$(\Gamma_+)_m \approx jE/p. \quad (17.43)$$

Инкремент развития ионизационно-тепловой неустойчивости в силу экспоненциального роста скорости ионизации от  $E/p_0$  будет в  $E_i/U_e$  больше и составит

$$(\Gamma_+)_{u-m} \approx \left( \frac{E_i}{U_e} \right) \frac{jE}{p}. \quad (17.44)$$

Среди наиболее эффективных процессов, приводящих к распаду случайно возникших флуктуаций, необходимо выделить теплопроводность, диффузию, а также конвективный вынос при осуществлении разряда в потоке газа. Теплопроводность уменьшает флуктуации температуры газа с характерным размером  $\Lambda$  за время  $\Lambda^2 \text{ср} / \chi \approx \Lambda^2 / D$ , т.е. характеризуется отрицательным инкрементом (декрементом)

$$(\Gamma_-)_m \approx D/\Lambda^2, \quad (17.45)$$



где  $D$  - коэффициент диффузии нейтральных частиц газа. Флуктуации электронной концентрации в плазме распадаются за счет амбиполярной диффузии с характерным инкрементом

$$(\Gamma_-)_a \approx D_a / \Lambda^2. \quad (17.46)$$

Стабилизация разряда потоком газа (конвективный вынос) со скоростью  $v_2$  количественно описывается декрементом

$$(\Gamma_-)_k \approx v_r / l, \quad (17.47)$$

где  $l$  - длина разряда вдоль потока.

Конкретная неустойчивость будет развиваться, если между ее инкрементом  $\Gamma_+$  и декрементом наиболее эффективно стабилизирующего ее процесса  $\Gamma_-$  удовлетворится неравенство

$\Gamma_+ > \Gamma_-$ . Пороговые условия развития неустойчивости при этом можно найти из равенства

$$\Gamma_+ = \sum_i (\Gamma_-)_i. \quad (17.48)$$

Например, если причиной развития неоднородностей является ионизационно-тепловая неустойчивость, а стабилизация разряда осуществляется диффузией и конвекцией, то предельные значения  $jE$ , при которых удастся сохранить разряд однородным, составят

$$\langle jE \rangle_{уст} \leq p \frac{U_e}{E_i} \left( \frac{v_r}{l} + \frac{D_a}{\Lambda^2} \right). \quad (17.49)$$

Необходимо отметить, что приведенные соотношения удовле-



творительно согласуются с экспериментом лишь при малых давлениях газа ( $p \leq 30$  торр). При повышении давления и росте удельных энергокладов происходит смена механизмов образования неоднородностей. Большую роль при этом начинает играть развитие неоднородностей, зародившихся в приэлектродных зонах.

### 17.5. Описание разряда с помощью вольт-амперных характеристик (ВАХ)

Процесс протекания тока в системе в целом можно характеризовать, описав измеренную экспериментальную связь силы протекающего через разрядный промежуток тока с напряжением на его концах. Такой метод описания разряда, называемый методом вольт-амперных характеристик (ВАХ), широко используется в физике и технике газового разряда.

Газоразрядный объем можно рассматривать как двуполюсник, характеризуемый определенной зависимостью между протекающим по нему током  $I$  и напряжением на его концах  $U$ , т.е.  $U = F_1(I)$ . Если к электродам в точках А и В (см рис.17.1) присоединена внешняя цепь (содержащая источник ЭДС  $\varepsilon_0$  и другие активные и реактивные элементы), то всю внешнюю цепь можно рассматривать как некий генератор, обладающей своей вольт-амперной (нагрузочной) характеристикой  $U = F_2(I, \varepsilon_0, R_0, L, C)$ , зависящей от источника ЭДС и элементов внешней цепи. Ток в такой цепи можно найти, приравняв  $F_1$  и  $F_2$  (рис.17.3). ВАХ газового разряда устанавливает связь между  $U$  и  $I$ , но не указывает конкретных значений этих величин. Они зависят не только от вида ВАХ, но и параметров внешней цепи и определяются пересечением ВАХ разряда  $F_1$  и нагрузочной характеристики  $F_2$ , выражаемой для цепи с ЭДС и активным сопротивлением в виде

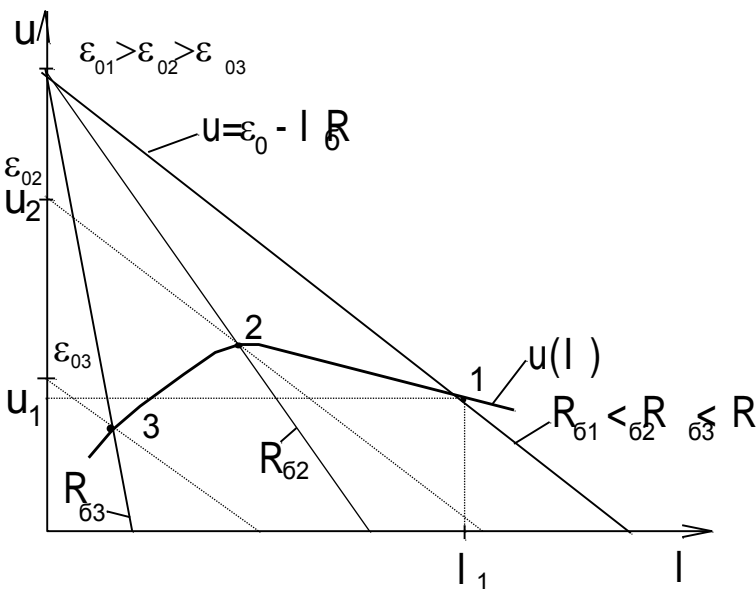
$$U = \varepsilon_0 - IR_0. \quad (17.50)$$



Изменять ток и напряжение на разрядном промежутке можно при этом, изменяя сопротивление (сплошные нагрузочные характеристики на рис.17.3) или ЭДС (пунктирные нагрузочные характеристики) во внешней цепи.

ВАХ является отражением электропроводности газового промежутка в целом. Отношение  $U/I = R_{\text{пл}}$  представляет собой сопротивление этого промежутка. Величина  $R_{\text{пл}}$  в газовом промежутке не остается постоянной, а меняется в зависимости от  $I$ . Из-за нелинейности зависимости  $U(I)$  наряду с  $R_{\text{пл}}$  часто рассматривают дифференциальное сопротивление  $R_{\text{пл}}^* = \partial U / \partial I$ .

Одним из важных понятий при описании свойств разряда методом ВАХ является устойчивость рабочей точки, т.е. возможность длительного поддержания разряда в ней. Из общих соображений ясно, что совокупность рабочих точек на возрастающих участках ВАХ ( $R_{\text{пл}}^* > 0$ ) всегда устойчива. Действительно, случайная положительная флуктуация тока вызовет возрастание напряжения на балластном сопротивлении и, так  $\varepsilon_0 = \text{const}$  согласно уравнения (17.50), уменьшение  $U$ . При  $R_{\text{пл}}^* > 0$  это приведет к падению  $I$ , т.е. возврату тока в исходное состояние.



а)

Аналогичным образом существующая отрицательная обратная связь погасит и случайную отрицательную флуктуацию тока.

На падающих участках ВАХ ( $R_{\text{пл}}^* < 0$ ) ситуация иная – рост тока приводит не только к росту падения напряжения (на внешнем сопротивлении), но и падению напряжения на разряде. Поэтому для стабилизации положения рабочей точки необходимо, чтобы вызванное случайной флуктуацией тока изменение напряжения (на балластном сопротивлении) превышало по величине соответствующее падение на разрядном промежутке. Это возможно, если сопротивление внешней цепи удовлетворяет неравенству

$$R_{\bar{\sigma}} > (-R_{\text{пл}}^*). \quad (17.51)$$

Простейшим предельным видом ВАХ является статическая или стационарная характеристика, отражающая установившееся состояние тока в данном газовом промежутке. Типичный вид статической ВАХ газового разряда представлен на рис. 17.4.





Поддержание разряда, соответствующего участку характеристики ОАВСД, может осуществляться только при наличии внешней ионизации газа в разрядном промежутке, не зависящей от приложенного к нему напряжения. Электрическое поле в этом случае обеспечивает дрейф заряженных частиц. Выключение внешнего ионизатора приводит к прекращению тока разряда. Такой разряд (осуществляемый только при наличии внешней ионизации) называется *несамостоятельным*.

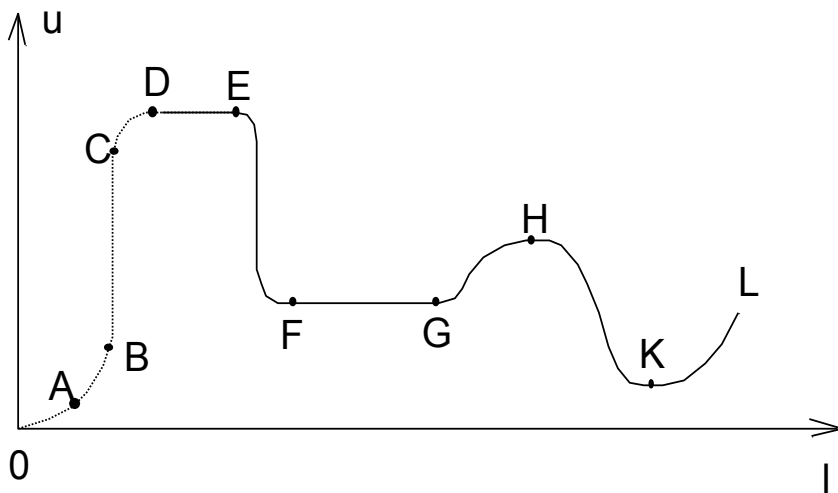


Рис. 14.5. Временная зависимость мощности излучения в случае генерации семи (а) и 15-ти (б) продольных мод

Для поддержания разряда, описываемого ВАХ правее точки *D*, достаточно приложить необходимое напряжение к электродам системы. Этот типа разряда не требует внешнего ионизатора и называется *самостоятельным*. Напряженности электрического поля в нем достаточно, чтобы обеспечить не только дрейф, но и необходимую скорость рождения электронов.

Как видно из рис. 17.4, зависимость  $U(I)$  на различных участках ВАХ носит совершенно разный характер. Каждый из них характеризуется своей структурой разряда, своими особенностями в распределении электрических полей и плотности зарядов, преобладанием тех или иных элементарных процессов. Область



ОА соответствует линейному участку, ВС - режиму насыщения несамостоятельного разряда, CD - несамостоятельному разряду в режиме усиления тока, DE - темному (таунсендовскому) разряду, FG - нормальному тлеющему разряду, GH - аномальному тлеющему разряду, НКЛ - дуговому разряду, а области АВ, ЕF - переходным режимам этих разрядов.

### 17.6. ВАХ и способы получения несамостоятельных разрядов в технологических лазерах

Получим аналитическое выражение для ВАХ установившегося несамостоятельного разряда в простейшем одномерном случае. Пусть разрядный промежуток заключен между плоскими электродами, размеры которых превышают расстояние  $H$  между ними. Пусть газ ионизируется только под действием внешнего ионизатора, обеспечивающего объемную скорость ионизации  $z_0$  ( $\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ ), а гибель электронов и ионов происходит в результате электрон-ионной рекомбинации и дрейфа частиц к электродам. Пусть эмиссия на электродах отсутствует, концентрация заряженных частиц (электронов и положительных ионов) мала и электрическим полем объемного заряда в силу этого можно пренебречь, т.е.

$$\nabla \vec{E} = 0. \quad (17.52)$$

Пусть также направленное движение заряженных частиц  $u_{e,i}$  вызывается только электрическим полем.

**Уравнение баланса заряженных частиц при этом имеет вид**

$$\begin{aligned} \nabla(\bar{u}_e n_e) &= z_0 - k_r n_e n_i \\ \nabla(\bar{u}_i n_i) &= z_0 - k_r n_e n_i \end{aligned} \quad (17.53)$$

Для нахождения зависимости  $j(U)$  систему уравнений (17.33), (17.35), (17.38), (17.52) и (17.53) необходимо решать с



## Машиностроение

учетом краевых условий:

$$\begin{aligned} \text{на аноде } (y = H) \quad j_i &= 0, \\ \text{на катоде } (y = 0) \quad j_e &= 0. \end{aligned} \quad (17.54)$$

В общем случае систему удается свести к трансцендентному уравнению, мало удобному для вычислений, поэтому рассмотрим предельные случаи. Если электрическое поле отсутствует ( $E = 0$ ), то  $j = 0$  и уравнение (17.53) сводится к  $z_0 = k_r n_e n_i$ , откуда  $n_e = n_i = (z_0/k_r)^{1/2}$ .

В случае слабого электрического поля (когда рекомбинационные потери заряженных частиц в объеме существенно превышают дрейфовый уход заряженных частиц на электроды) имеем

$$\begin{aligned} j_e &= e\sqrt{z_0/k_r} b_e U/H, \\ j_i &= e\sqrt{z_0/k_r} b_i U/H, \end{aligned}$$

и полный ток через разрядный промежуток

$$J = S_p(j_e + j_i) = S_p e\sqrt{z_0/k_r} (b_e + b_i) U/H, \quad (17.55)$$

где  $S_p$  - площадь поперечного сечения разрядного промежутка. Отсюда следует, что ток самостоятельного разряда при малых  $E$  растет линейно с  $U$  и разрядный промежуток характеризуется постоянным сопротивлением

$$R_{\text{пл}} = \sqrt{k_r/z_0} \frac{H}{S_p(b_e + b_i)}.$$

Рекомбинационные потери не зависят от напряженности электрического поля, а потери из-за дрейфа растут пропорционально  $E$ . Поэтому в случае сильного поля (с учетом краевых условий (17.54)) зависимости для плотности токов заряженных частиц имеют вид

$$j_i = ez_0 y, \quad j_e = ez_0 (H - y)$$

и полного тока

$$J = ez_0 H S_p. \quad (17.56)$$



Как видно из этих уравнений, при больших полях плотности токов заряженных частиц изменяются в пространстве между электродами линейно, а полный электрический ток, называемый *током насыщения*, остается постоянным и не зависит от напряженности поля. Физически насыщение тока означает, что все родившиеся (под действием внешнего ионизатора) электроны и ионы достигают электродов.

Полученные уравнения (17.55) и (17.56) описывают оба характерных участка ВАХ: линейный -  $OA$  и тока насыщения -  $BC$ .

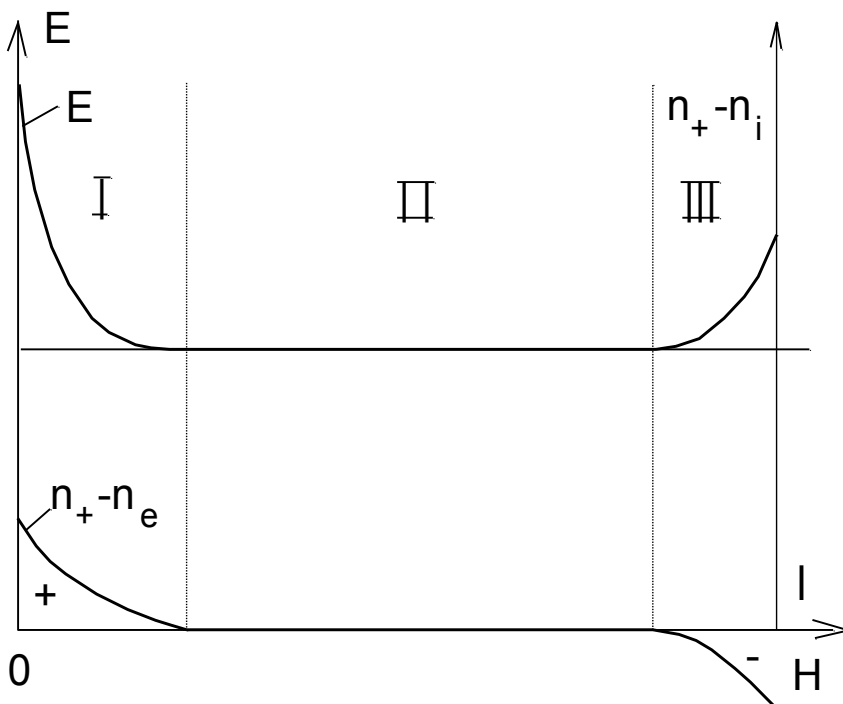
До сих пор мы пренебрегали электрическими полями, связанными с пространственными зарядами, и поэтому распределение электрического поля в разрядном промежутке полагалось постоянным (пунктир на рис. 17.5). Пространственные заряды проявляются вблизи электродов на линейном участке ВАХ и существуют почти во всем объеме в режиме насыщения. Величину создаваемых ими электрических полей  $E_q$  можно оценить с помощью уравнения Пуассона для электрического поля

$$\nabla \varepsilon_0 \vec{E}_a = (n_i - n_e) e, \quad (17.57)$$

где  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная. Полагая  $n_i - n_e \approx n_e$ , а область существования этих зарядов  $H$ , получаем  $E_q \approx H n_e e / \varepsilon_0$ . Учитывать эти поля необходимо, если  $E_q \geq E = U/H$ , т.е. при достаточно больших концентрациях заряженных частиц, определяемых условием

$$n_e \geq \frac{U}{H^2} \frac{\varepsilon_0}{e}. \quad (17.58)$$

Необходимо отметить, что в большинстве газоразрядных лазеров это неравенство выполняется.



б)

При учете электрических полей объемных зарядов весь разрядный промежуток можно разбить на три зоны. Две крайние – характеризуются наличием объемных зарядов и заметным искажением полей. Центральная зона заполнена квазинейтральной плазмой с постоянным электрическим полем. В случае слабых полей размеры зон I и III и  $E_q$  невелики и для линейного участка ВАХ несамостоятельного разряда применимо уравнение для тока (17.56).

С ростом электрических полей происходит расширение зон I и III и сужение зоны II. В пределе зона II исчезает и через разряд течет несамостоятельный ток, равный току насыщения (17.56).

Наблюдаемое на участке ВС ВАХ отсутствие зависимости тока несамостоятельного разряда от напряжения сохраняется до тех пор пока ионизация частиц обусловлена только внешними



## Машиностроение

причинами и не зависит от условий в разряде. С ростом напряженности электрического поля энергия электронов возрастает и становится заметной вероятность процесса ударной ионизации газа. Мерой интенсивности этого процесса служит коэффициент Таундсена  $\alpha$ , равный среднему числу вторичных электронов, образуемых каждым электроном при ионизации газа на 1 см пути в направлении вектора  $\vec{E}$ . Коэффициент  $\alpha$ , по определению, можно представить в виде  $\alpha = k_i n_a / u_e$ . Значения  $k_i$  и  $u_e$  зависят только от параметра  $E/p_0$ . Поэтому для каждого газа отношение  $\alpha/p_0 \approx \alpha/n_a$  должно быть функцией одного параметра  $E/p_0$ . Аналитический вид зависимости  $\alpha/p_0 = f(E/p_0)$  был представлен Таунсендом

$$\frac{\alpha}{p_0} = \frac{1}{\lambda_{e1}} \exp\left(-\frac{U}{\lambda_{e1}(E/p_0)}\right) = A \exp\left(-B \frac{p_0}{E}\right), \quad (17.59)$$

где свойства конкретного газа характеризуются коэффициентами  $A$  и  $B$ , определяемыми длиной свободного пробега электрона  $\lambda_{e1}$  при давлении в 1 торр и потенциалом ионизации  $U_i$ . Для некоторых газов значения коэффициентов  $A$  и  $B$  приведены в табл. 17.1.

Таблица 17.1. Коэффициенты Таунсенда

| Газ            | Диапазон значений $E/p_0$ , В/(см · торр) | К о э ф ф и ц и е н т ы |     |
|----------------|---|-------------------------|-----|
|                |   | A                       | B   |
| H <sub>2</sub> | 45...154                                  | 2.8                     | 127 |
| N <sub>2</sub> | 27...200                                  | 8.8                     | 275 |
| Воздух         | 36...180                                  | 8.6                     | 254 |
| Ar             | 100...600                                 | 12                      | 180 |
| He             | 3...10                                    | 3                       | 25  |
|                | 20...150                                  | 3                       | 34  |

Другим важным процессом (приводящим к появлению дополнительных электронов в разрядном промежутке) является так называемый  $\gamma$ -процесс – образование электронов на като-



де под действием ускоренных в электрическом поле положительных ионов. Интенсивность этого процесса характеризуется коэффициентом  $\gamma$  - средним числом эмиттированных вторичных электронов, приходящихся на один достигший катода положительный ион.

Именно  $\alpha$  - и  $\gamma$  - процессы являются ответственными за возрастание тока несамостоятельного разряда на участке CD ВАХ при повышении электрического поля.

Рассмотрим особенности использования несамостоятельных разрядов для возбуждения лазеров. Во-первых, процесс возбуждения имеет резонансный характер, т.е. идет с максимальной интенсивностью в определенном (весьма узком) диапазоне энергий электронов. Несамостоятельный разряд позволяет непрерывно изменять значение электрического поля от нуля до  $E_3 = U_3/H$  (определяемого напряжением зажигания самостоятельного разряда  $U_3$ ) и изменять значение тока, варьируя скорость ионизации  $Z_0$ . Благодаря этому несамостоятельные разряды позволяют управлять энергией электронов и обеспечивать оптимальные условия возбуждения активных частиц.

Во-вторых, положительным свойством несамостоятельных разрядов является их повышенная устойчивость. Так как скорость ионизации в них не связана с напряженностью поля, то развитие наиболее опасных ионизационно-тепловых неустойчивостей в объеме несамостоятельного разряда невозможно. Инкремент развития тепловых неоднородностей (17.43) в  $E_i/T_e \geq 10$  раз меньше и поэтому предельные значения вкладываемой в такой разряд электрической мощности существенно выше. Помимо тепловой неустойчивости концентрация несамостоятельных разрядов может вызываться и развитием пространственных неоднородностей (характеризующихся более высокими значениями поля) в приэлектродных областях. Благодаря своей повышенной устойчивости несамостоятельные разряды позволяют обеспечить высокие значения удельных объемных энерговыделений и создавать однородную инверсию в больших объемах активной среды.

Следующее положительное свойство несамостоятельных разрядов связано с возрастающим во всем диапазоне токов характером их ВАХ. Благодаря этому рабочую точку ВАХ удастся стационарно поддерживать без внешнего балластного сопротивления ( $R_6 = 0$ ), а следовательно, и без потерь энергии в



нем. Таким образом, несамостоятельные разряды позволяют использовать энергию источников питания с максимальной интенсивностью.

Благодаря этим особенностям несамостоятельные разряды находят применение в молекулярных и эксимерных лазерах повышенной мощности. Рассмотрим возможные способы создания несамостоятельных разрядов в лазерных системах. Однородную ионизацию газа в объеме можно осуществлять потоком быстрых электронов или достаточно энергичных фотонов, а также с помощью периодически зажигаемых импульсных вспомогательных ионизирующих разрядов. В технологических лазерах для ионизации обычно используют пучки быстрых электронов или вспомогательные разряды, эффективность которых может достигать 0,1...0,3.

Схема лазера с несамостоятельным разрядом, поддерживаемым электронным пучком, представлена на рис. 17.6.

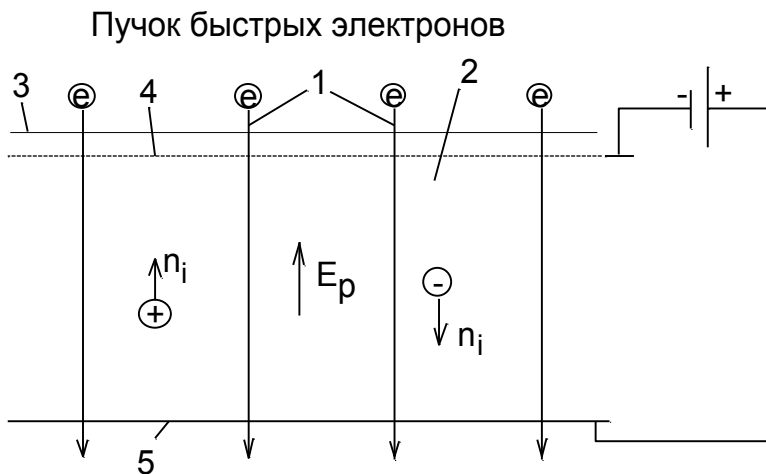


Рис. 15.1. Схема оптической накачки

Пучок эмиттированных катодом ускорителя электронов 1 вводится в заполненный активной средой лазера объем 2 через тонкую, герметичную для газа фольгу 3 в одном из электродов разрядного промежутка и, пронизывая его, обеспечивает однородную ионизацию рабочей смеси. Созданные этим пучком





вторичные, медленные электроны дрейфуют между катодом 4 и анодом 5 разрядного промежутка под действием электрического поля разряда  $E_p$ , ускоряются в нем до определяемой параметром  $E_p/p_0$  энергии и возбуждают активные частицы лазерной смеси. Генерация излучения осуществляется в совмещенном с разрядом резонаторе. В режиме стационарной генерации охлаждение рабочей смеси осуществляется прокачкой газа в перпендикулярном плоскости рисунка направлении. Производительность ионизации пучком быстрых электронов с энергией  $(U_e)_y$  (после прохождения фольги) и плотностью тока  $(j_e)_y$  составляет

$$z_0 = (j_e)_y \frac{\sigma_i n_a}{e}, \quad (17.60)$$

где  $\sigma_i$  - сечения ионизации быстрыми электронами. Для обеспечения однородности активной среды расстояние торможения быстрого электрона (на котором он теряет свою энергию), равное  $l \approx (n_a \sigma_i)^{-1} \frac{(U_e)_y}{E_i}$ , должно быть существенно больше

межэлектродного зазора  $H$ . Энергия ионизирующих электронов должна удовлетворять неравенству, определяющему минимальные напряжения на ускорителе

$$(U_e)_y \gg H n_a \sigma_i E_i. \quad (17.61)$$

Принципиальная схема несамостоятельного разряда с ионизацией вспомогательным разрядом показана на рис. 17.7,а.



Машиностроение

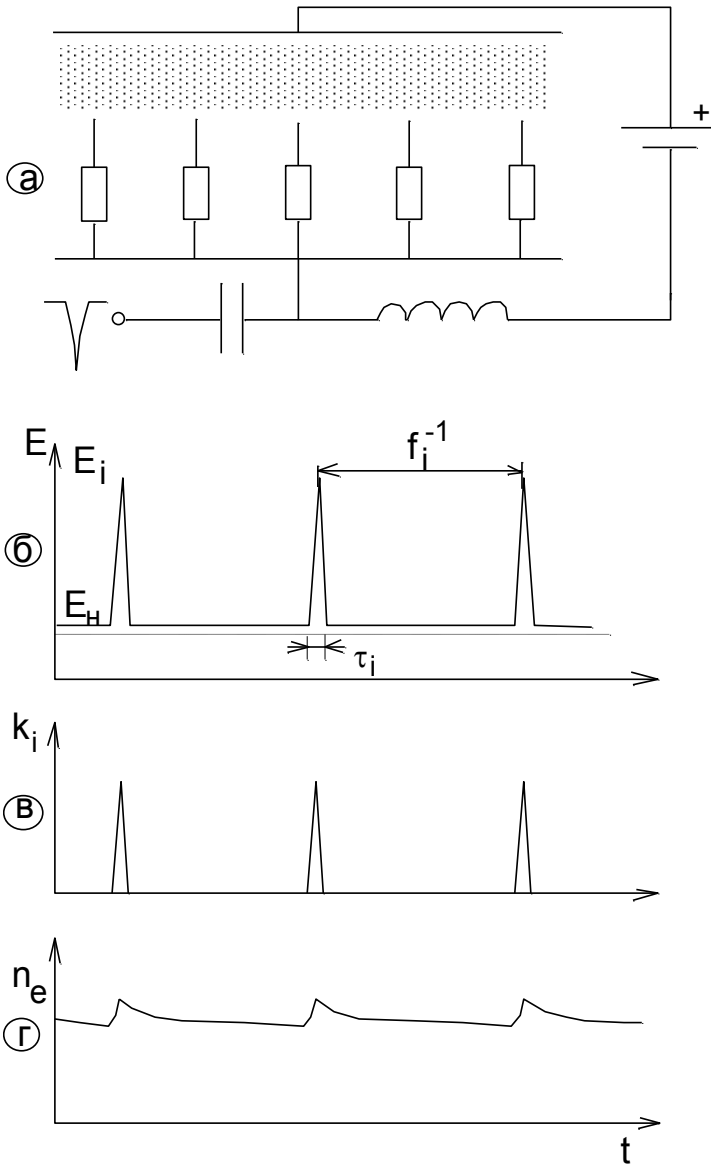


Рис. 15.2 Спектр излучения импульсной ксеноновой лампы накачки (---); спектр поглощения рубина (- - -)



Суммарное напряжение на разрядном промежутке в этом случае имеет вид периодических импульсов на фоне постоянного поля  $E_H$ , величина которого, недостаточная для поддержания самостоятельного разряда, обеспечивает лишь оптимальную для возбуждения активной среды энергию вторичных электронов (рис. 17.7, б). Рождение этих электронов осуществляется на стадии самостоятельного разряда при повышенных значениях поля (рис. 17.7, в). В промежутках между импульсами в разрядном зазоре протекает несамостоятельный ток в распадающейся плазме (рис. 17.7, г). Для обеспечения почти постоянных условий протекания несамостоятельного тока и возбуждения среды частота следования импульсов ионизации должна удовлетворять условию

$$f_i \gg f_r, \quad (17.62)$$

где частота распада плазмы  $f_r$  является максимальной частотой различных процессов, приводящих к гибели электронов (рекомбинации с частотой  $k_r n_e$ , амбиполярной диффузии с частотой  $D_a / \Lambda^2$ , прилипания с частотой  $k_a n_{at}$ , где  $n_{at}$  - концентрация электроотрицательных примесей и т.д.). Если предположить, что это условие выполняется, то для наиболее распространенного в лазере рекомбинационного механизма гибели концентрацию электронов в разряде можно оценить как

$$n_e \approx \alpha (E_i / p_0)^2 u_e \tau_i f_i / k_r, \quad (17.63)$$

откуда видно, что ее величиной можно управлять, варьируя амплитуду, частоту следования либо длительность импульса ионизации.

## 17.7. Самостоятельные разряды для возбуждения технологических лазеров

Самостоятельные разряды не требуют для своего поддержания дополнительных источников ионизации газовой среды. Необходимым и достаточным условием их существования является



наличие напряжения на электродах. Общий характер изменения ВАХ этих разрядов с током на рис. 17.4.

Рассмотрим условия возникновения самостоятельного разряда, т.е. найдем такую величину напряжения на разрядном промежутке, называемую потенциалом зажигания (или напряжением пробоя), при которой в разрядной цепи возникает заметный ток. В отсутствие внешних источников заметной ионизации электроны могут появиться в достаточном количестве лишь путем размножения зарядов, всегда существующих в разрядном промежутке из-за ионизации космическими лучами, в результате электронных ударов и в результате эмиссии на электродах. «Случайный» электрон, появившийся вблизи поверхности катода, дрейфуя по направлению к аноду, ионизирует нейтральные частицы на своем пути. Родившиеся при этом электроны будут в свою очередь уско-ряться и размножаться в электрическом поле. Этот процесс размножения электронов, называемый *электронной лавиной*, в отсутствие рекомбинационных и диффузионных потерь описываются уравнением  $d(u_e n_e)/dy = \alpha u_e n_e$ , решение которого

$$n_e(y) = n_e(0) \exp(\alpha y) \quad (17.64)$$

соответствует распределению электронов по длине разрядного промежутка.

Для поддержания самостоятельного разряда необходимо рождение электронов на катоде. Таким процессом может служить вторичная эмиссия под действием ионов. Рожденные каждым появившимся у катода электроном положительные ионы в количестве  $[(\exp(\alpha H) - 1)]$  дрейфуют в электрическом поле к катоду и, попадая на него, рождают с вероятностью  $\gamma$  новые электроны. Для поддержания тока разряда на постоянном уровне каждый эмиттированный катодом электрон должен произвести столько актов ионизации, чтобы все образовавшиеся при этом положительные ионы (придя на катод) создали вновь один свободный электрон. Таким образом, критическое условие начала воспроизводства вылетающих с катода электронов можно представить в виде

$$\gamma(\exp(\alpha H) - 1) = 1$$



или

$$\alpha H = \ln(1 + 1/\gamma). \quad (17.65)$$

Потенциал зажигания разряда  $U_3$  можно найти, подставив в (17.65) выражение (17.59) для  $\alpha$  и выразив его через  $E$  :

$$U_3 = E_3 H = \frac{B p_0 H}{\ln \left[ \frac{A p_0 H}{\ln(1 + 1/\gamma)} \right]}. \quad (17.66)$$

Из данного уравнения следует, что  $U_3$  зависит от  $p_0 H$ , а также от сорта газа (через коэффициенты  $A$  и  $B$  в формуле Таунсенда) и материала электрода (через  $\gamma$ ). Зависимости  $U_3(p_0 H)$ , называемые *кривыми Пашена*, для некоторых газов приведены на рис.17.8.

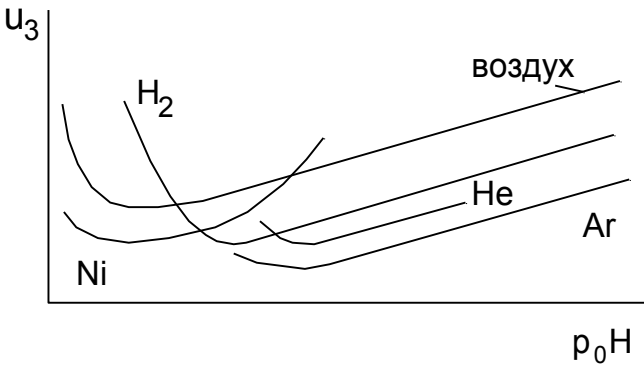


Рис. 15.3. Диаграмма энергетических уровней ионов хрома в рубине



Минимальное напряжение пробоя разрядного промежутка (согласно (3.66))

$$(U_3)_{\min} = \frac{eB}{A} \ln(1 + 1/\gamma)$$

имеет место при

$$(p_0H)_{\min} = \frac{e}{A}(1 + 1/\gamma) \quad \text{и} \quad (E/p_0)_{\min} = B.$$

Типичные значения  $(p_0H)_{\min} \approx 0,5..5$  см-торр, а  $(U_3)_{\min} \approx 200..400$  В.

Учет процессов гибели электронов из-за диффузии приведет, естественно, к росту  $U_3$ . Это особенно заметно сказывается на левой ветви кривых Пашена (при  $p_0H < (p_0H)_{\min}$ ).

Самостоятельный разряд, поддерживаемый при  $U = U_3$ , называется *таунсендовским*. Так как  $U_3$  не зависит от концентрации электронов, ВАХ такого разряда имеет вид горизонтальной прямой, соответствующей интервалу DE (см. рис. 17.4).

При выводе формулы (17.66) не учитывались электрические поля объемных зарядов. Поэтому поддержание разряда при  $U = U_3$  возможно лишь при очень малом электрическом токе, т.е. при большом балластном сопротивлении в электрической цепи.

С ростом плотности тока и концентрации электронов влияние объемных зарядов становится существенным. Прежде всего с ростом тока происходит рост электрического поля в прикатодной области. Возрастание поля (в соответствии с (17.59)) приводит к экспоненциальному росту скорости ионизации. Необходимая для поддержания разряда скорость размножения электронов эмиссии достигается уже в достаточно узком прикатодном слое толщиной  $d_k$ , и условие самоподдержания разряда (вместо (17.65)) примет



ВИД

$$\gamma \left( \exp \left( \int_0^{d_k} \alpha dy \right) - 1 \right) = 1. \quad (17.67)$$

В результате выполнения условий самоподдержания в катодном слое отпадает необходимость поддержания больших электрических полей во всем межэлектродном зазоре. Поэтому поле в основной части разрядного промежутка падает до величины  $E_{н.с} < E_3$ , обусловленной необходимостью поддержания проводимости для замыкания прикатодной области с анодом. Таким образом, возрастание тока в таунсендовском разряде приводит к резкому переходу разряда в новую форму, называемую *тлеющим разрядом*. Он состоит из обеспечивающей самоподдержание тока узкой прикатодной области повышенного поля, узкой и слабо влияющей на протекание тока области отрицательного объемного заряда вблизи анода и замыкающей основную часть разрядного промежутка области однородной ( в направлении тока ) квазинейтральной плазмы ( называемой положительным столбом ). Изменение длины разрядного промежутка при сохранении тока разряда сопровождается изменением длины положительного столба и сохранением структуры и значения полей в приэлектродных зонах. Область тлеющего разряда находится правее точки  $F$  (см. рис. 17.4).

Отметим еще одну присущую только тлеющему разряду особенность. При сравнительно небольших токах в тлеющем разряде электрический ток занимает на катоде лишь его часть. При этом занятая разрядом площадь катода растет пропорционально полному току разряда, сохраняя неизменной так называемую *нормальную плотность тока* на катоде. Эта форма разряда сохраняется до тех пор, пока он не займет всю площадь катода, и называется *нормальным тлеющим разрядом*. Из общих соображений ясно, что увеличение тока в нормальном тлеющем разряде, происходящее при сохранении плотности тока на катоде, не должно сопровождаться изменением свойств катодного слоя, т.е. величина электрических полей и толщина слоя, так же как и нормальная плотность тока  $j_n$  в нормальном тлеющем разряде, должны сохраняться.

Толщину слоя и прикатодное падение потенциала



$U_k = \int_0^{d_k} E(y) dy$  электрического поля в нем можно найти, решая

уравнение (17.67) совместно с уравнением Пуассона и уравнением баланса частиц (17.29) при граничных условиях  $u_i n_i \gamma = u_e n_e$  на поверхности катода. Полученные решения для сохраняющихся в тлеющем разряде величин имеют вид

$$U_k \approx 3 \frac{B}{A} \ln(1 + 1/\gamma), \quad (17.68)$$

$$d_k p \approx 0,82 \frac{\ln(1 + 1/\gamma)}{A}, \quad (17.69)$$

$$\frac{j_n}{p^2} = \frac{5,35 \cdot 10^{-2} AB^2 (b_i p)(1 + \gamma)}{\ln(1 + 1/\gamma)} \quad (17.70)$$

и зависят от сорта газа и материала электрода. Экспериментальные значения некоторых параметров этих величин приведены в табл. 17.2.

Для определения напряженности электрического поля в положительном столбе тлеющего разряда необходимо рассмотреть баланс числа электронов (17.29). Откуда следует, что необходимое для пропускания заданного тока приведенное электрическое поле в положительном столбе разряда либо совсем не зависит от тока ( в случае гибели электронов из-за диффузии ), либо зависит от него очень слабо ( при объемной гибели электронов ). Поэтому ВАХ нормального тлеющего разряда обычно имеет горизонтальный или слабо возрастающий с ростом тока характер.





Таблица 17.2. Экспериментальные значения параметров

| Газ    | Катод | $U_k$ ,<br>В | $j_n/p^2$ ,<br>мкА/(см <sup>2</sup> ·торр) | $d_k p$ ,<br>см·торр |
|--------|-------|--------------|--|----------------------|
| Воздух | Al    | 229          | 330  | 0,25                 |
|        | Cu    | 370          | 240  | 0,23                 |
|        | Fe    | 269          | -  | 0,52                 |
| Гелий  | Fe    | 130...200    | 2,2  | 1,3                  |
| Азот   | Fe    | 215          | 400  | 0,42                 |

Изложенные выше классические представления о самостоятельном тлеющем разряде имеют место лишь при малых концентрациях отрицательных ионов, т.е. при условии  $n_{i-} \ll n_{i+} \approx n_e$ . Во многих газовых лазерах в рабочей смеси присутствуют электроотрицательные примеси, приводящие к образованию большого числа отрицательных ионов. В этом случае, как показали недавние исследования, структура и механизмы поддержания положительного столба меняются. В присутствии заметного  $n_{i-} \approx n_{i+}$  числа отрицательных ионов положительный столб становится неоднородным вдоль тока, а значения  $E/p_0$  снижаются до значений, недостаточных для поддержания проводимости за счет ионизации электронным ударом. Баланс частиц в этом случае поддерживается за счет прихода электронов из катодного слоя, положительных ионов – из прианодной области. При этом отрицательные ионы рождаются в самом положительном столбе. Изменение баланса частиц не сказывается, однако, на характере зависимости  $E_{н.с}(j)$ , т.е. характер ВАХ положительного столба тлеющего разряда в смесях с электроотрицательными добавками изменяется незначительно.

После заполнения всего катода катодным свечением рост тока в разряде начинает сопровождаться ростом плотности тока на катоде и разряд переходит в *аномальную форму тлеющего разряда*, характеризующуюся ростом  $U_k$ , а следовательно, и воз-



растающей ВАХ (участок  $ЕН$  на рис. 17.4).

Разряд с ВАХ, расположенный правее точки  $H$ , называется дуговым. Возрастание плотности тока на катоде в аномальном тлеющем разряде приводит к повышению потока тепла на катод и росту его температуры. С увеличением температуры катода становится заметным процесс термоэмиссии электронов. Плотность тока в местах с максимальной температурой возрастает, что приводит в дальнейшем к росту температуры катода в этом месте. Из-за положительного характера связи этот процесс неустойчив и приводит к образованию раскаленного катодного пятна, обладающего высокой эмиссией электронов. В этой ситуации необходимость в  $\gamma$ -процессах на катоде пропадает, а следовательно, пропадает и необходимость в наличии сильных электрических полей в прикатодной области. Поэтому прикатодное падение напряжения снижается до величины потенциала ионизации или возбуждения. Уменьшение падения напряжения на разряде обусловлено еще и резким увеличением температуры газа в разрядном промежутке. Так как в условиях стационарного разряда давление газа по объему постоянно, то рост температуры газа приводит к падению концентрации газа, а следовательно, и величины  $p_0$ . Скорость рождения частиц в положительном столбе определяется величиной  $E/p_0$ , поэтому падение  $p_0$  сопровождается падением  $E$  в положительном столбе. Возрастание напряжения на разряде с ростом тока наблюдается вновь лишь при очень больших токах разряда и температурах газа и обусловлено необходимым возрастанием поля в столбе для компенсации роста рекомбинационных потерь.

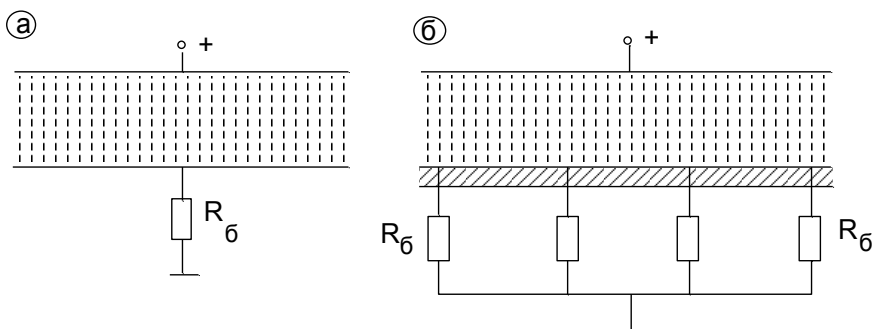
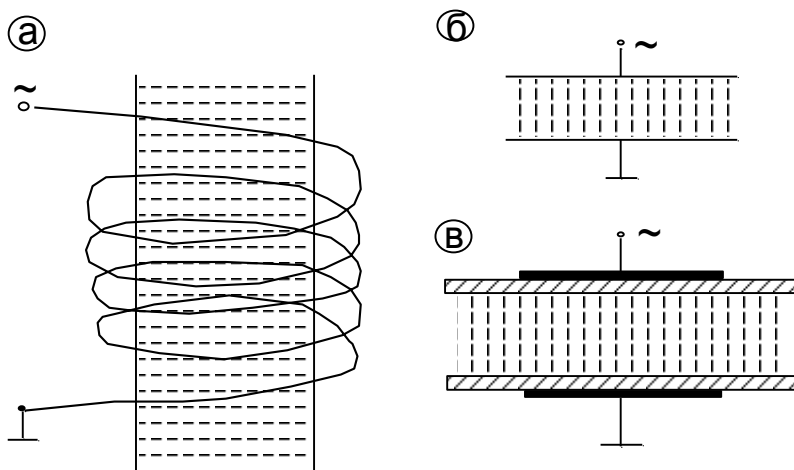




Рис. 15.4. Спектр поглощения рубина для излучения, падающего параллельно (II) и перпендикулярно оптической оси кристалла

Все рассмотренные типы самостоятельных разрядов постоянного тока характеризуются вполне определенными значениями необходимых для их поддержания электрических полей и взаимосвязью величины этих полей с током. Это обстоятельство ограничивает эффективность использования отдельных форм разряда для возбуждения конкретных лазеров. Определенные ограничения на использование самостоятельных разрядов в лазерах накладывает и их худшая по сравнению с несамостоятельными разрядами устойчивость. Однако, благодаря своей технической простоте, возможности осуществления в большом числе газовых смесей и отсутствию специальных устройств ионизации, самостоятельные разряды находят очень широкое применение в газовых лазерах.

Отметим некоторые особенности конструкции и питания самостоятельных разрядов, обусловленных их физическими свойствами. Очень часто газоразрядные камеры технологических лазеров имеют прямоугольную геометрию и для однородного возбуждения среды необходимо обеспечивать равномерное протекание тока через катодные поверхности большой площади. Даже в отсутствие потока газа это можно сделать, если плотность тока в объеме равна или немного выше нормальной плотности тока для данной газоразрядной камеры, т.е. при низких давлениях (рис. 17.9,а). С ростом давления  $j_n$  растет пропорционально  $p^2$ . Поэтому эмиттирующую электроны поверхность катодных плат приходится сокращать, используя секционированные катодные элементы в виде полосок, кружков, штырей и т.п. (рис. 17.9,б). В этом случае каждый катодный элемент приходится подсоединять к общему источнику через индивидуальное балластное сопротивление, необходимое не только для стабилизации рабочей точки ВАХ, но и для обеспечения поджигания всех отдельных разрядов и поддержания в них приблизительно равных токов.

Рис. 15.5. Линии люминесценции рубина  $R_1$  и  $R_2$ 

В случае общего для всех элементов балластного сопротивления приложенное к катодам напряжение питания снизится до рабочей величины  $U < U_3$  после зажигания разряда и появления тока на одном или нескольких катодах, и осуществить протекание тока в остальных разрядных промежутках при  $U = \text{const}$  не удастся. При наличии потока газа и большой длине зоны разряда вдоль него секционирование и балластирование электродных элементов необходимы и при низких давлениях газа.

### 17.8. Возбуждение газовых лазеров с помощью переменных электромагнитных полей

Газоразрядную плазму можно с успехом создавать не только в постоянных, но и переменных электромагнитных полях. Различные способы их поддержания в разрядном объеме представлены на рис. 17.10,а,б. В так называемом *индукционном* разряде  $H$ -типа (рис. 17.10,а) азимутальное электрическое поле с замкнутыми силовыми линиями создается за счет индукции при пропуска-



нии переменного тока на катушке. Разряды (рис. 17.10,б,в), ток в которых возникает при подаче переменного напряжения на открытые (б) или изолированные от газа (в) проводящие пластины, принято называть соответственно электродными и безэлектродными емкостными разрядами (Е - типа). В газовых лазерах для получения неравновесной активной среды используются емкостные разряды. Принципиальная электрическая схема такого разряда показана на рис. 17.11.

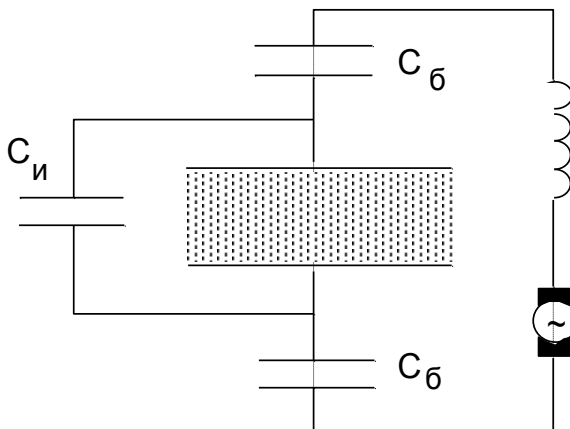


Рис. 15.6. Диаграмма энергетических уровней 1- 4 ионов

Эффективность возбуждения активной среды во многом зависит от соотношений между частотой изменения поля (рис. 17.12,а) и частотой столкновения электронов с атомами, а точнее говоря, от того, успевает ли энергия электронов отлеживать изменение электрического поля в течение периода колебания. Так как характерная скорость изменения энергии электрона при изменении поля составляет  $f_U \approx k_{ea} n_a m_e / m_a$ , то при высоких частотах  $f \gg f_U$  энергия электронов будет слабо меняться во времени, а электроны будут производить необходимые для поддержания разряда процессы ионизации, а также нужные для создания инверсии процессы возбуждения частиц с почти постоянной скоростью в течение всего времени существования разряда (рис. 17.12,б). Энергия электрона при этом обеспечивает такую же частоту ионизации, какую имеют электроны в так называемом постоянном эффективном электрическом поле



$$E_{\text{эф}} = \frac{E_a}{\sqrt{2}} \frac{v_{ea}}{(\omega^2 + v_{ea}^2)^{1/2}},$$

где  $E_a$  - амплитудное значение поля;  $\omega$  - его циклическая частота.

В случае низких частот  $f \leq f_U$ , энергия электронов «следит» за электрическим полем (см. рис. 17.12,в). В этом случае разряд в переменном поле напоминает несамостоятельный разряд с периодической ионизацией. В силу экспоненциального характера зависимости скорости ионизации от энергии электрона ионизация газа будет осуществляться лишь в области максимальных значений напряженности электрического поля (см. рис. 17.12,г), а в промежутке между ними несамостоятельный ток будет протекать в распадающейся плазме (см. рис. 17.12, д). Из-за резонансной зависимости возбуждения от энергии электронов периодический характер будет носить и возбуждение верхних лазерных уровней активных частиц.

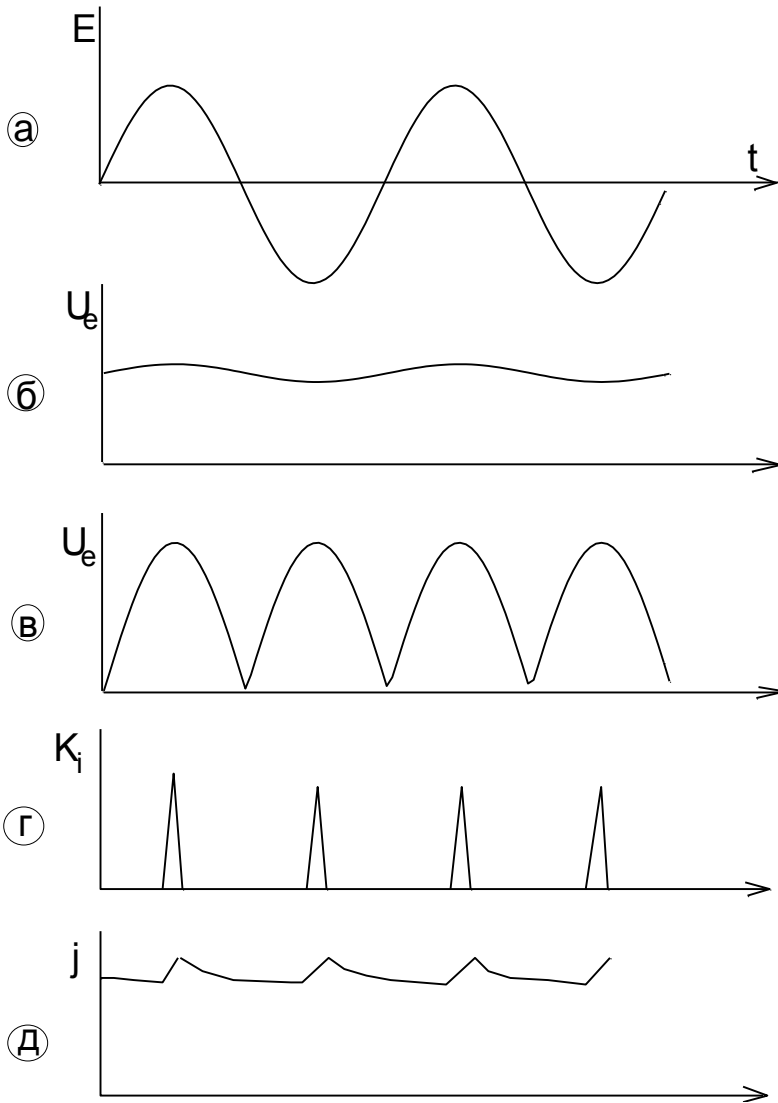


Рис. 16.1. Энергетические диаграммы р-п-перехода для изолированных (а) и контактируемых (в) полупроводников, и объёмная плотность заряда (б).



Типичные значения  $f_U$  в условиях газовых лазеров ( $k_{ea} \approx 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $n_a \approx 10^{18} \text{ см}^{-3}$  и  $m_e/m_a \approx 10^{-5}$ ) составляют  $10^6 \dots 10^7$  Гц, что соответствует так называемому ВЧ-диапазону длин волн. Необходимая для поддержания ВЧ-разряда амплитуда поля определяется из условий баланса рождения и гибели электронов и в типичных условиях газовых лазеров близка к электрическим полям в разряде постоянного тока.

Процессы на электродах ВЧ-разрядах играют существенно меньшую роль, чем в разрядах постоянного тока (в индукционном разряде электродов вообще нет). В емкостных ВЧ-разрядах приэлектродные явления важны лишь для замыкания тока в разрядной цепи.

При малых плотностях токов проводимость приэлектродных слоев невелика и замыкание тока на электродах осуществляется токами смещения, текущими через слой как через конденсатор. Такая форма ВЧ-разряда называется *слаботочной*. С ростом тока падение напряжения на емкостном сопротивлении слоя возрастает пропорционально  $\omega C_c j$ , где  $C_c$  (удельная емкость слоя) возрастает настолько, что в слое происходит электрический пробой и ток в нем протекает как за счет тока смещения, так и за счет тока проводимости. Такая форма ВЧ-разряда называется *сильноточной*. Необходимо отметить, что в случае слаботочной формы разряда наличие изолирующего покрытия на токоподводящих пластинах практически не сказывается на протекании тока.

В последнее время большой интерес в лазерной технике вызывает разряд переменного тока. Он осуществляется при  $f \ll f_U$  и, так же как и ВЧ-разряд, характеризуется импульсным характером ионизации и возбуждения газа в объеме. Отличие разряда переменного тока от ВЧ-разряда заключается в характере приэлектродных процессов. Если в ВЧ-разряде электродные слои существуют постоянно, то в разряде переменного тока приэлектродные слои успевают распадаться за время прохождения тока разряда через нулевое значение. В каждый полупериод при смене полярности поля электродные слои рождаются заново, меняясь при этом местами.

Диапазон пригодных для возбуждения лазеров частот разряда переменного тока ограничен снизу необходимостью поддержа-





ния концентрации плазмы и мощности генерации лазера на почти постоянном уровне. При гибели электронов за счет рекомбинации и диффузии это возможно, если частота изменения поля удовлетворяет условиям

$$f \gg \max \{k_r n_e^2, D_a / \Lambda^2, \tau_2^{-1}\}, \quad (17.71)$$

где  $\tau_2$  - время релаксации верхнего лазерного уровня.

Практический интерес в ВЧ-разряде и разряде переменного тока обусловлен рядом причин. Во-первых, благодаря периодическому во времени характеру ионизации эти разряды обличаются более высокой устойчивостью (по сравнению с разрядами постоянного тока). Во-вторых, использование переменных полей позволяет использовать в качестве балластной нагрузки реактивные, например емкостные, элементы и сократить таким образом бесполезные потери энергии в разрядной цепи. Важным техническим преимуществом ВЧ-разрядов и разрядов переменного тока является возможность создания газоразрядных камер с диэлектрическим покрытием электродов. И наконец, использование переменных полей обеспечивает симметричное выделение энергии, а следовательно и распределение температур по зазору разряда, что существенно уменьшает отклонение излучения лазера от оптической оси из-за неоднородной рефракции в среде.



### Контрольные вопросы

1. Назовите процессы, протекающие в газоразрядной плазме?
2. Какими параметрами определяется энергия электронов?
3. Что такое амбиполярная диффузия и какими параметрами она определяется?
4. Записать формулу плотности тока в плазме.
5. Какие существуют основные причины развития неустойчивости газового разряда?
6. Назовите способы возбуждения технологических лазеров.
7. Запишите условие, определяющее необходимость учета распределения электрического поля в разрядном промежутке.
8. Что определяет коэффициент Таундсена?
9. Каковы условия возникновения самостоятельного разряда?
10. Что определяют кривые Пашена?



## ГЛАВА 18. ГАЗОВЫЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЛАЗЕРЫ

### 18.1 Классификация газовых лазеров

Газовые лазеры имеют наибольшее распространение. Рабочим телом газовых лазеров является газовая среда. Число ионов и нейтральных атомов и молекул, на которых получена генерация, уже превысило 100 и продолжает расти. Диапазон волн, в котором работают газовые лазеры, занимает область от вакуумного ультрафиолета до инфракрасного диапазона спектра.

Высокая оптическая однородность газовых активных сред позволяет достигать незначительного уровня расходимости (близкого дифракционному) и обеспечивать локальность воздействия и высокие значения плотности мощности излучения в фокальном пятне. Сравнительно невысокие плотности среды в газовых лазерах определяют низкие значения ширины линии усиления. Поэтому им свойственна высокая монохроматичность излучения.

Таблица 18.1. Краткие сведения о газовых лазерах

| Тип лазера   | Способ возбуждения                          |                  |  |
|--|---|------------------|--|
|  | Газоразрядный, включающий электронный пучок | Газодинамический | Химический                             |
| Молекулярные лазеры (на колебательно - вращательных переходах) | CO <sub>2</sub> , CO                        | CO <sub>2</sub>  | CO <sub>2</sub> , CO, HF, DF, HCl, NBr |
| Атомные лазеры (на электродных переходах)                      | He - He, He - Xe                            | -                | -                                      |



|                                      |   |   |   |
|--------------------------------------|---|---|---|
| Ионные лазеры                        | Ar , Kr, He -<br>Cd   | - | - |
| Лазеры на самоограниченных переходах | Cu, Au, Pb,<br>Ba, N <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> и<br>др. | - | - |
| Эксимерные лазеры                    | ArF, KrF,<br>KrCl, XeF и<br>др.                             | - | - |

Таким образом, высокие мощности излучения и способность работать в импульсном, импульсно-периодическом и непрерывном режимах генерации делают возможным использование этих лазеров в качестве эффективного инструмента в промышленном производстве.

Разнообразие свойств активных веществ в газовых лазерах, отличающихся зарядом, составом, структурой уровней и т.д., естественно приводит к большому числу возможных механизмов получения инверсионной заселенности и требует различных способов возбуждения активной среды. Все это делает невозможным введение достаточно простой, но в то же время всеобъемлющей системы классификации газовых лазеров. Упрощенный вариант классификации технологических лазеров представим в табл. 18.1.

Место лазера в этой таблице определяется особенностью рабочих уровней и способом возбуждения активной среды. В настоящее время наибольшее распространение нашли газоразрядный, газодинамический и химический методы накачки.

## 18.2. Принцип действия газоразрядных CO<sub>2</sub> - лазеров

В газоразрядных CO<sub>2</sub> - лазерах инверсионная заселенность создается между колебательными уровнями молекул. Генерация на молекуле CO<sub>2</sub> впервые была получена С. Пателом, который и предложил объяснение механизма получения инверсионной заселенности.

Молекула CO<sub>2</sub> состоит из атома углерода и двух симметрично расположенных атомов кислорода, т.е. имеет линейную струк-



туру  $O-C-O$ . Как видно из схемы (рис. 18.1), атомы кислорода могут совершать симметричные (мода  $\nu_1 OO$ ) и несимметричные (мода  $OO\nu_3$ ) колебания относительно атома углерода вдоль направления  $O-C-O$ , а также поперечные этому направлению так называемые деформационные колебания (мода  $O\nu_2^1 O$ ). Из-за наличия двух возможных (взаимно перпендикулярных) направлений последний тип колебаний является дважды вырожденным. Употребляемые для описания состояния колебательно-возбужденной молекулы квантовые числа  $\nu_1, \nu_2^1, \nu_3$  характеризуют число квантов, соответствующих колебанию данного типа;  $1$  указывает поляризацию деформационного колебания. Структуры колебательных уровней молекулы  $CO_2$ , а также важной для получения инверсии молекулы азота приведены на рис. 18.1.

Генерация излучения с длинами волн 10.6 и 9.4 мкм осуществляется в  $CO_2$ -лазере в результате вынужденных переходов между верхним лазерным уровнем  $00^1 1$  и нижними уровнями  $10^0 0$  и  $02^0 0$ . Для получения оптимальных условий генерации в рабочую смесь  $CO_2$ -лазера помимо углекислого газа добавляют азот и гелий.

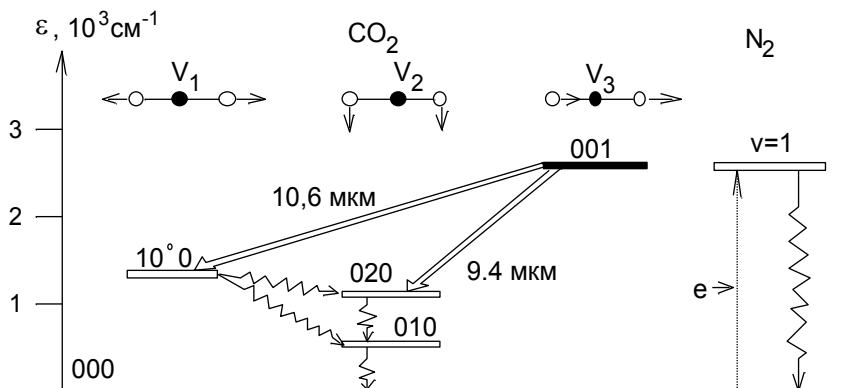
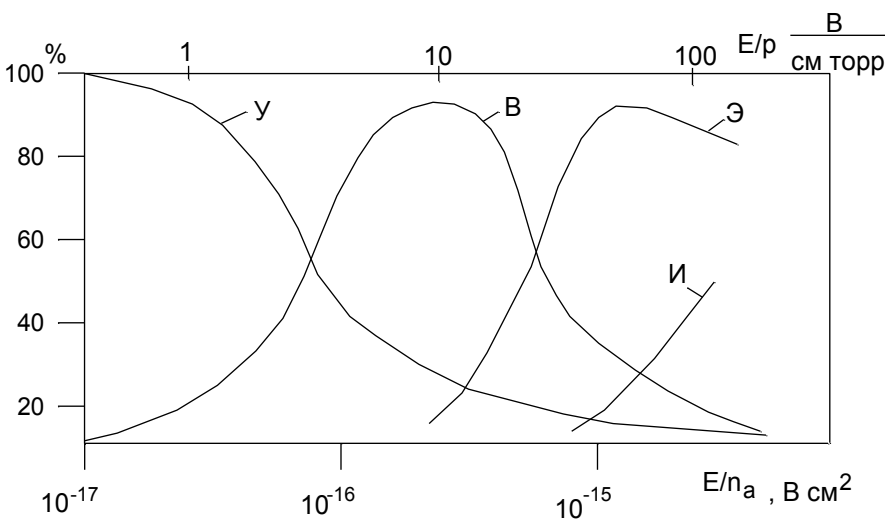


Рис. 16.2. Структура лазера с р-п-переходом



Высокая эффективность получения инверсной заселенности в  $\text{CO}_2$ - лазерах обусловлена рядом причин. Во-первых, вероятность возбуждения уровня  $00^{\circ}1$  молекулы  $\text{CO}_2$  и  $\nu = 1$  молекулы азота электронным ударом имеет резонансный характер и энергии, соответствующие максимумам сечений этих процессов, близки энергиям электронов, необходимым для поддержания самостоятельного тлеющего разряда в смесях  $\text{CO}_2, \text{N}_2, \text{He}$ .

Покажем на рис. 18.2 относительные затраты энергии электронов на упругие столкновения (У), возбуждение верхнего лазерного уровня (В) и электронных состояний (Э), а также ионизацию (И) типичной для  $\text{CO}_2$ - лазера смеси. Как видно из рисунка, доля выделяемой в разряде электрической энергии, затрачиваемая на возбуждение верхнего лазерного уровня и характеризующаяся колебательным КПД разряда  $\eta_k$  (для смесей  $\text{CO}_2 - \text{N}_2 - \text{He}$  может составлять 80%. Вторым важным для работы  $\text{CO}_2$ -лазера обстоятельством является близкое (почти совпадающее положение уровней  $00^{\circ}1 \text{CO}_2$  и  $\nu = 1$  молекулы азота. Поэтому имеет место эффективный обмен возбуждением между этими уровнями, т.е. молекулы азота могут принимать активное участие в накачке верхнего лазерного уровня.

Рис. 16.3. Конструкция светодиода на подложке  $GaP$ 

Помимо этого, колебательные уровни азота эффективно заселяются электронным ударом и имеют очень большое время столкновительной релаксации. Наиболее эффективно азот рассеивается при столкновении с молекулами воды и со стенками. Поэтому при малом содержании воды в смеси и больших размерах газоразрядной камеры азот может играть роль накопителя колебательного возбуждения с большим временем жизни. При наличии азота в смеси время релаксации запасенной верхним лазерным уровнем энергии  $\tau_E$  увеличивается и становится равным

$$\tau_E = \tau_{CO_2} \frac{(p_{CO_2} + p_{N_2})}{P_{CO_2}} > \tau_{CO_2}. \quad (18.1)$$

При средней плотности выделяемой в положительном столбе мощности  $\langle jE \rangle$  скорость заселения верхнего лазерного уровня составит  $M_2 = \langle jE \rangle \eta_k / E_{001}$  и заселенность верхнего лазер-



ного уровня в отсутствие генерации будет

$$N_{001} = \langle jE \rangle \eta_k \tau_{CO_2} / E_{001} \cdot \quad (18.2)$$

Создание инверсии требует малой заселенности нижнего лазерного уровня. Их относительная заселенность при типичных условиях (температура газа  $T_g \approx 500K$ ) составляет всего лишь  $\approx 3 \cdot 10^{-2}$ . Для поддержания стационарной генерации нижние уровни  $CO_2$  нужно расселять. Этот процесс обеспечивается добавлением в лазерную смесь расселяющих компонент. Наиболее эффективно расселение уровней 100 и 020 осуществляется гелием и водой. Помимо эффективного расселения уровня 100 гелий обеспечивает хороший теплоотвод от рабочей смеси (за счет теплопроводности) и оказывает стабилизирующее действие на разряд. Поэтому в большинстве существующих технологических лазеров предпочтение отдается ему.

Таким образом, эффективная работа  $CO_2$ - лазера требует трехкомпонентной смеси. Относительная концентрация этих компонент определяется режимом генерации, а также способом возбуждения и охлаждения рабочей смеси. Определение её является сложной оптимизационной задачей, решение которой необходимо проводить для каждого конкретного случая.

Частотный спектр генерации  $CO_2$ - лазера имеет сложный вид. Причиной этого является наличие тонкой структуры колебательных уровней, обусловленной существованием вращательной степени свободы молекулы  $CO_2$ . Из-за вращения молекулы каждый колебательный уровень распадается на большое число вращательных уровней, характеризуемых квантовым числом  $j$  и отстоящих друг от друга на величину энергии  $\Delta E_{вр}, E_{001}, E_{100}, kT_r$ . В результате интенсивного обмена энергией (между вращательными и поступательными степенями свободы молекул) в  $CO_2$  устанавливается больцмановское распределение частиц по вращательным состояниям, описываемое уравнением





$$N_{v,j} = N_v (2j+1) \frac{B_{CO_2}}{kT_r} \exp\left[-\frac{B_{CO_2} j(j+1)}{kT_r}\right], \quad (18.3)$$

где  $N_v$  и  $N_{v,j}$  - концентрации возбужденных частиц на колебательном уровне  $v$  и его вращательных подуровней  $j$ ;  $B_{CO_2} = 0,39 \text{ см}^{-1}$  - вращательная константа. Функция распределения частиц (18.3) имеет максимум при

$$j_{\max} = \sqrt{\frac{kT_r}{2B_{CO_2}}} - \frac{1}{2} \approx \sqrt{\frac{kT_r}{2B_{CO_2}}}. \quad (18.4)$$

Согласно правилам отбора в молекуле  $CO_2$  возможны лишь переходы при изменении вращательного квантового числа на  $\Delta j = -1$  ( $R$  - ветвь генерации) или  $\Delta j = +1$  ( $P$  - ветвь генерации).

Таким образом, линия усиления рабочей среды лазера состоит из большого числа (соответствующих разным)  $j$  линий. Каждая из них уширена за счет столкновений на величину

$$\Delta v_L = 7.6 \cdot 10^6 (p_{CO_2} + 0,73p_{N_2} + 0,6p_{He}) \sqrt{\frac{300}{T_r}}, \quad (18.5)$$

где  $p_i$  - парциальные давления компонент смеси, торр.



## Машиностроение

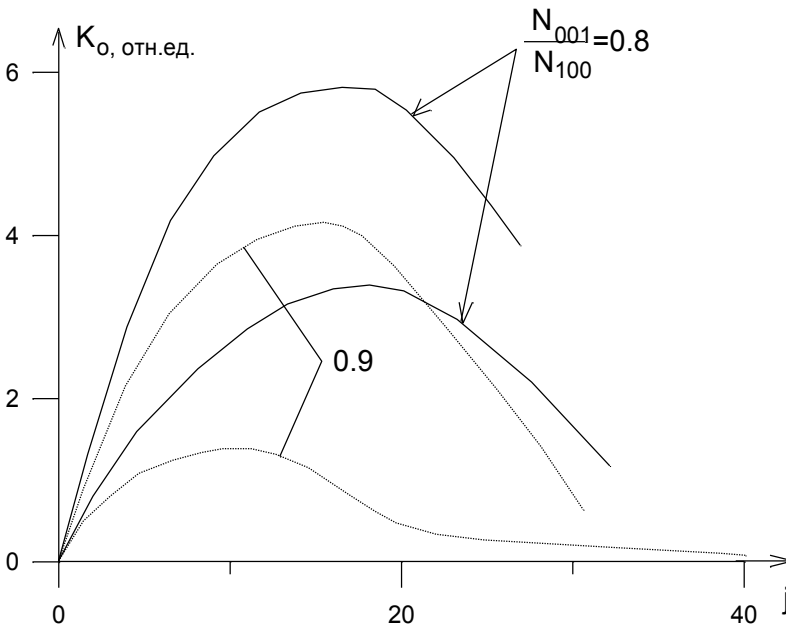


Рис. 16.5

Сечение вынужденных переходов для  $\text{CO}_2$ - лазера зависит от величины  $j$ , состава смеси, давления, температуры газа и составляет  $\approx (2..5) \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$ . Для максимально заселенных вращательных подуровней ( $j_{\text{max}} \approx 20$ ) сечение вычисляется из соотношения

$$\sigma_0 = \frac{8,9 \cdot 10^{-16} \exp(-215/T_r)}{\sqrt{T_r} (p_{\text{CO}_2} + 0,73p_{\text{N}_2} + 0,6p_{\text{He}})} \quad (18.6)$$

Зависимость коэффициента усиления  $K_0$  для P- и R- переходов представим на рис. 18.3. Как видно из рисунка макси-



мальные коэффициенты усиления имеют  $P$ - ветви. Конкретные значения коэффициента усиления могут вычислены из уравнения

$$K_0 = \frac{A_{21} \lambda^2 h c B_{CO_2} j}{2 \pi^2 \Delta \nu_L k T_r} \exp \left( - \frac{h c B_{CO_2}}{k T_r} j(j-1) \right) \left( N_{001} - \frac{2j+1}{2j-1} N_{100} \right) \quad (18.7)$$

Коэффициент усиления активной среды  $CO_2$ - лазера существенно зависит от температуры рабочей смеси  $T_r$  (как это следует из (18.7)).

Процессы накачки лазерной смеси и генерации сопровождаются нагревом газа. Из-за прямого нагрева лазерной смеси электронами и ионами ( в  $CO_2$ - лазерах это составляет 10...20% от энергии разряда ) ее температура  $T_r$  ( в установившемся состоянии ) пропорциональна мощности энерговыделения в разряде, т.е.  $T_r \rightarrow jE$ . В отсутствие генерации заселенность верхнего уровня также пропорциональна  $jE$ . Поэтому, если время столкновительной релаксации  $\tau_{CO_2}$  не зависит от температуры газа,  $N_{001} \rightarrow T_r$  (прямая на рис. 18.4). Учет возрастания  $\tau_{CO_2}$  с ростом  $T_r$  ( пунктирная линия) лишь ослабит зависимость  $N_{001}(T_r)$ .

Заселённость нижнего уровня находится в равновесии с основным и описывается законом Больцмана, т.е возрастает с ростом  $T_r$  экспоненциально ( кривая 2 на рис. 18.4). При достижении некоторой критической температуры  $T_{max}$  инверсная заселенность лазерной смеси исчезает. Максимальная инверсия достигается при оптимальных температурах смеси  $T_{opt}$ . Типичные значения для  $CO_2$ - лазеров:  $T_{max} \approx 700...800K$  и



$$T_{\text{opt}} \approx 400 \dots 500 \text{K}.$$

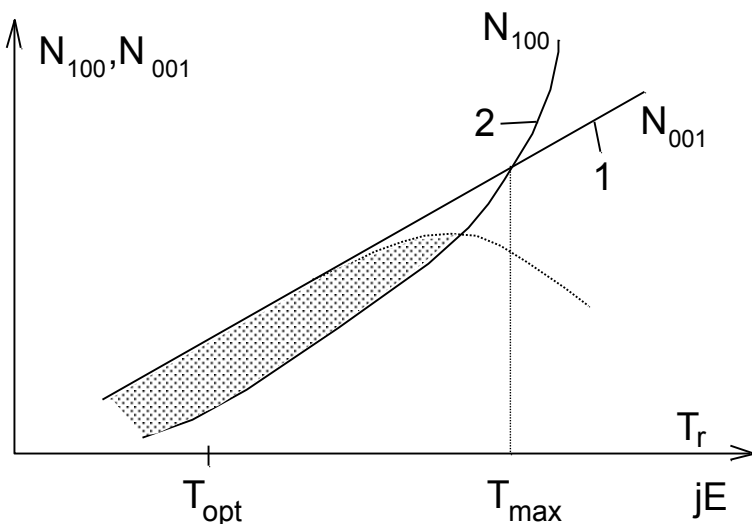


Рис. 16.6. Схема процессов, происходящих в  $p-n$ -переходе под воздействием света

Таким образом, одним из основных условий работы  $\text{CO}_2$ -лазера является недопустимость перегрева лазерной смеси выше  $T_{\text{opt}}$ , а следовательно, необходимость ее эффективного охлаждения. Отвод теплоты от рабочей смеси может осуществляться либо за счет теплопроводности к охлаждающей стенке разрядной трубки, либо путем замены нагретой порции газа новой. Поэтому по способу охлаждения рабочей смеси все газоразрядные  $\text{CO}_2$ -лазеры подразделяются на лазеры с диффузионным и конвективным охлаждением ( иногда их называют соответственно лазерами с медленной и быстрой прокачкой ).

В зависимости от взаимной ориентации скорости потока газовой смеси  $v_r$  и оптической оси  $\vec{O}$  быстропоточные ла-



зеры подразделяют на лазеры с продольной и поперечной прокачкой, схемы которых представлены на рис. 18.5. В лазерах с диффузионным охлаждением проток газа не является обязательным и при наличии схем регенерации лазерной смеси скорость газа может быть равной нулю. Стабилизация разряда в диффузионных лазерах осуществляется за счет процессов амбиполярной диффузии заряженных частиц. Поэтому потоки теплоты  $\vec{Q}$  и заряженных частиц  $\vec{q}$  направлены перпендикулярно оптической оси резонатора  $\vec{O}$ . В конвективных лазерах с продольной прокачкой стабилизация заряда, как правило, также осуществляется диффузией заряженных частиц к стенке. Однако поток выделяющейся в разряде теплоты уносится газом, т.е.  $\vec{Q} \parallel \vec{v}_r \parallel \vec{O}$ .

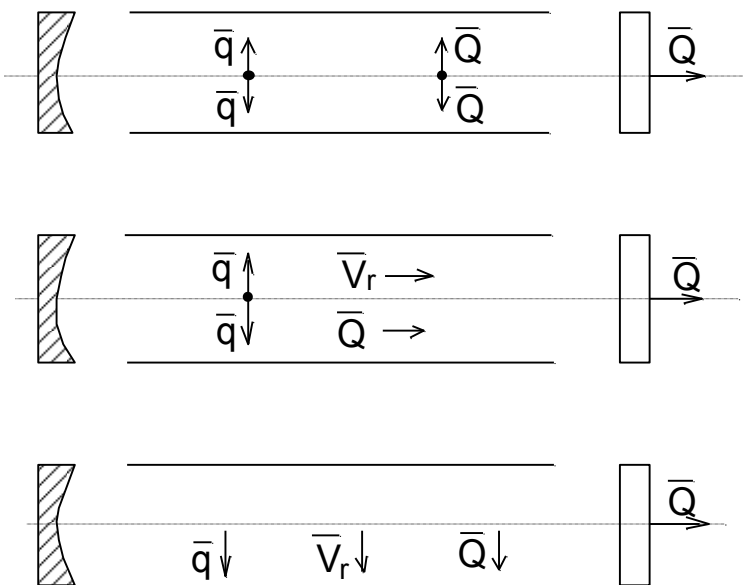


Рис.16.7. Вольт-амперная характеристика фотодиода:  $I_s$  - ток насыщения;



В лазерах с поперечной прокачкой (  $\vec{v}_r \perp \vec{0}$  ) стабилизация разряда (так же как и охлаждение рабочей смеси ) обеспечивается выносом газа из рабочей зоны лазера (  $\vec{Q} \parallel \vec{v}_r, \vec{q} \parallel \vec{v}_r$  ), т.е. неустойчивость плазмы не должна успевать развиваться за время пролета газа через разрядную камеру и резонатор.

Остановимся на вопросах эффективности преобразования в  $\text{CO}_2$ - лазерах электрической энергии в энергию лазерного излучения. КПД способа возбуждения  $\eta_{\text{в}}$  газоразрядных  $\text{CO}_2$ -лазеров можно представить в виде

$$\eta_{\text{в}} = \eta_{\text{к}} \eta_{\text{разр}}, \quad (18.8)$$

где  $\eta_{\text{к}}$  - колебательный КПД метода накачки, т.е. доля выделяющейся в положительном столбе разряда мощности, затраченная на возбуждение колебательных уровней  $00^{\circ}1$  молекулы  $\text{CO}_2$  и  $v = 1$  молекулы азота;  $\eta_{\text{разр}}$  - КПД схемы разряда, равный отношению электрической мощности ( выделяющейся в положительном столбе ) к мощности источников питания разряда. Полный КПД лазера  $\eta$  можно представить в виде

$$\eta = \eta_{\text{кв}} \eta_{\text{к}} \eta_{\text{разр}} \eta_{\text{р}} \eta_{\text{с.о}}. \quad (18.9)$$

Иногда для характеристики эффективности лазерных систем используют так называемый электрооптический КПД

$$\eta_{\text{эо}} = \eta_{\text{кв}} \eta_{\text{к}} \eta_{\text{р}}, \quad (18.10)$$

определяемый как соотношение мощности излучения лазера к



электрической мощности, выделившейся в положительном столбе разряда. Как следует из схемы уровней молекулы  $\text{CO}_2$  (см. Рис. 18.1), квантовый КПД  $\eta_{\text{кв}}$  составляет около 0.41. Учитывая также высокий колебательный КПД  $\eta_{\text{к}} \approx 0,6..0,9$ , и реальный КПД резонатора  $\eta_{\text{р}} \approx 0,5..0,8$ , типичные значения  $\eta_{\text{эо}}$  можно оценить как 0,1...0,3.

### 18.3. $\text{CO}_2$ – лазеры с диффузионным охлаждением рабочей смеси

$\text{CO}_2$ -лазеры с диффузионным охлаждением рабочей смеси обычно состоят из охлаждаемой водой разрядной трубки 1 (рис. 18.6), внутри которой с помощью системы электродов 2 создается газоразрядная плазма 3. По торцам разрядной трубки размещаются зеркала резонатора: глухое зеркало 4 и полупрозрачное (или с отверстием) зеркало 5. Стабильность усилительных свойств среды в течение длительного времени поддерживается слабой прокачкой лазерной смеси (или размещением внутри отпаянного лазера регенерирующего элемента). В диффузионных лазерах используется, как правило, смесь  $\text{CO}_2 : \text{N}_2 : \text{He}$  в соотношениях 1 : 1 : 3 или 1 : 1 : 6 при полном давлении до 20...40 торр.

Оценим предельную мощность излучения, достижимую в рассматриваемых лазерах. Процессами, ограничивающими ее величину, могут быть перегрев рабочей смеси или устойчивость разряда.



## Машиностроение

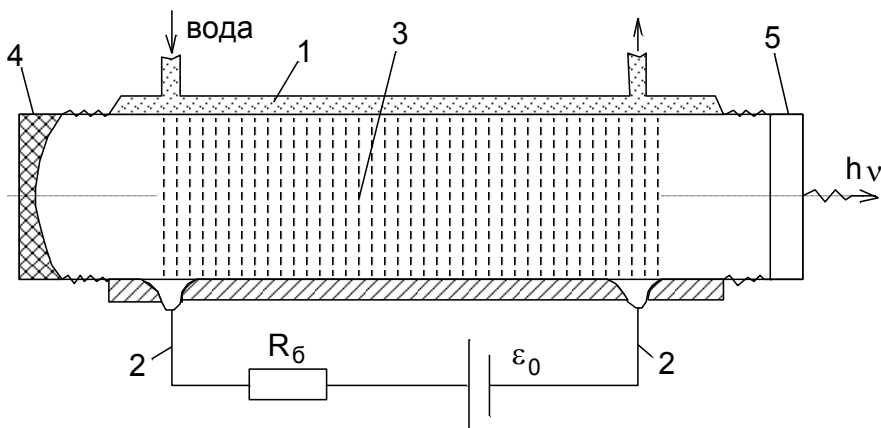


Рис.16.8. Схема фотодиода с гетероструктурой (а) и его

Максимальные значения среднего объемного энерговклада  $jE$ , обусловленные скоростью охлаждения смеси  $\langle jE \rangle_{\text{охл}}$ , можно оценить из стационарного уравнения баланса теплоты в разряде

$$\langle jE \rangle (1 - \eta_{\text{эо}}) \approx \chi_{\text{г}} \frac{\Delta T_{\text{г}}}{\Lambda^2}, \quad (18.11)$$

где  $\chi_{\text{г}} = c_{\text{г}} \rho_{\text{г}} D_{\text{г}}$  - теплопроводность газовой смеси ( $c_{\text{г}}, \rho_{\text{г}}, D_{\text{г}}$  - удельная теплоемкость, плотность и диффузия);  $\Delta T_{\text{г}} = T_{\text{опт}} - T_{\text{ст}}$  - допустимый перепад температур между осью газоразрядной трубки и ее стенкой, охлаждаемой до температуры  $T_{\text{ст}}$ ;  $\Lambda = R_{\text{т}}/2,4$  - характерный размер, определяющий теплоотвод в цилиндрической трубке радиусом  $R_{\text{т}}$ . Полагая  $(1 - \eta_{\text{эо}}) \approx 1$ , нетрудно получить, что

$$\langle jE \rangle_{\text{охл}} \leq \chi_{\text{г}} (T_{\text{опт}} - T_{\text{ст}}) / \Lambda^2. \quad (18.12)$$





Шнурование разряда в трубке имеет, как правило, ионизационно-термическую природу. Предельные значения  $jE$ , определяемые устойчивостью разряда, можно оценить, приравнявая инкремент этой неустойчивости к характерной частоте стабилизирующего ее процесса. В диффузионных лазерах таким процессом является амбиполярная диффузия заряженных частиц к стенкам трубки. Таким образом, получим

$$\langle jE \rangle_{уст} \leq \frac{pD_a U_e}{\Lambda^2 U_i} = \frac{U_e}{U_i} \frac{D_{a0} p_0}{\Lambda^2}, \quad (18.13)$$

где  $D_{a0}$  - значение коэффициента амбиполярной диффузии при нормальном атмосферном давлении.

Из уравнений (18.12) и (18.13) следует, что

$$\frac{\langle jE \rangle_{охл}}{\langle jE \rangle_{уст}} \approx \frac{D_{r0}}{D_{i0}} \frac{kT_r}{U_e} \frac{(T_{opt} - T_{ст}) U_i}{T_{opt} U_e}, \quad (18.14)$$

где  $U_e$  - энергия электронов;  $D_{i0}$  - коэффициент диффузии ионов при  $p = 760$  торр. Подставим типичные для  $CO_2$ -лазеров значения  $U_i/U_e \approx 10$ ,  $U_e \approx 1..2$  эВ,  $T_r \approx T_{opt} \approx 500K$ ,  $D_{r0} \approx D_{i0}$  и  $(T_{opt} - T_{ст}) \approx 200K$ , получим

$$\langle jE \rangle_{охл} / \langle jE \rangle_{уст} \approx (1..2) \cdot 10^{-1}.$$

Таким образом, основным процессом, ограничивающим объемный энерговклад в диффузионных  $CO_2$ -лазерах, является скорость охлаждения рабочей смеси. В этом случае предельную мощность излучения лазера можно оценить из соотношения

$$P_D \approx \langle jE \rangle_{охл} V_a \eta_{э0} \approx 5,6\pi L_a \chi (T_{opt} - T_{ст}) \eta_{э0}, \quad (18.15)$$

где  $V_a$  - объем активной среды;  $L_a$  - ее длина в направле-



нии оптической оси. Анализ полученной формулы показывает, что удельная мощность лазера, снимаемая с единицы разрядной трубки ( $P/L_a$ ), не зависит от давления смеси и радиуса трубки. Подставляя в (18.15) значения теплопроводности  $\chi = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт / (см} \cdot \text{град)}$  для He и обычные для  $\text{CO}_2$ -лазера значения  $\eta_{\text{эо}} \approx (0,1..0,2)$  оценим максимальную мощность, как  $(P/L_a)_D \leq 50...100 \text{ Вт/м}$ .

Проведенные оценки показывают необходимость высокой относительной концентрации He в рабочей смеси  $\text{CO}_2$ -лазера с диффузионным охлаждением. Так как теплопроводность азота в 6 раз ниже теплопроводности гелия, то исключение гелия из рабочей смеси приведет к падению мощности до уровня  $(P/L_a) \approx 10...20 \text{ Вт/м}$ .

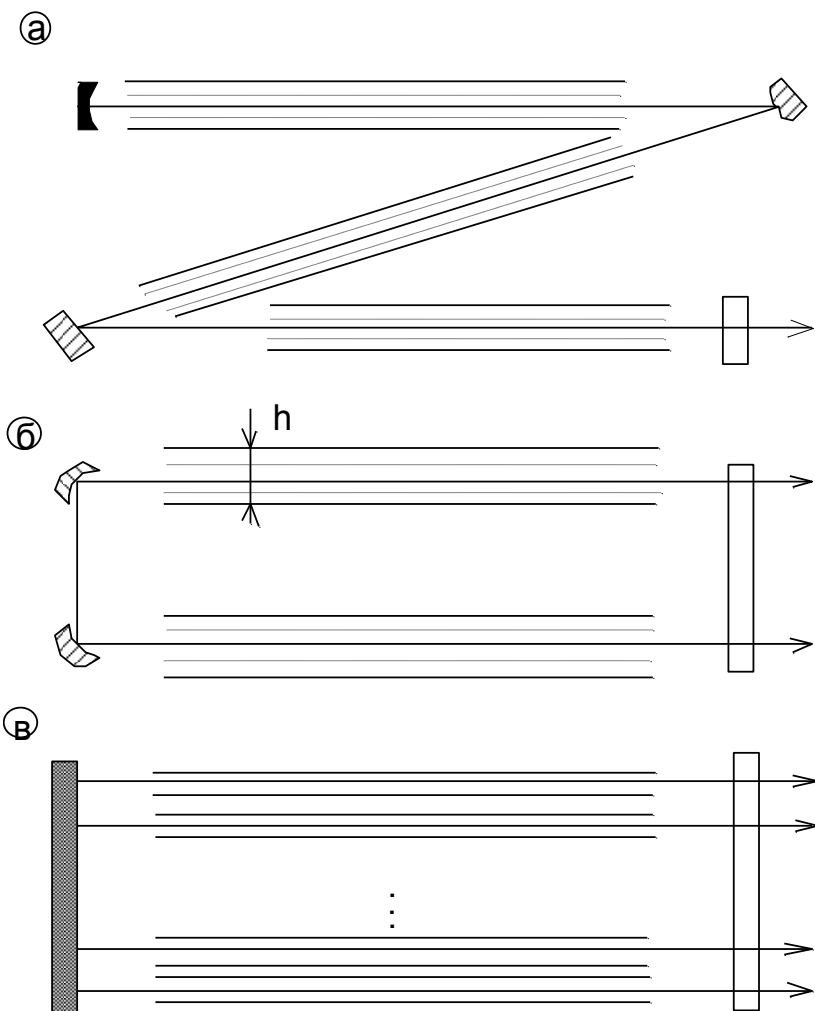


Рис. 17.1. Схема электрической цепи с газоразрядным промежутком

Длина лазера ограничивается дифракционными явлениями, а также потерями при отражении излучения от стенок трубок и на их торцах. В качестве предельного значения (в случае отсутствия отражения от стенок) можно взять длину, на которой луч расширится из-за дифракции на величину, равную радиусу трубки. Она



находится из условия  $\Theta_d L_a \leq R_t$  и составляет

$$L_a \leq 2R_t^2 / \lambda. \quad (18.16)$$

Для типичных  $R_t \approx (1..3)$  см получаем  $L_a \approx 20..200$  м.

Из конструктивных соображений диффузионные лазеры с большой длиной активной среды целесообразно изготавливать в виде ряда более коротких трубок (рис.18.7,а). Излучение проходит через эти трубки последовательно с помощью системы поворотных зеркал, объединяющих их в общий резонатор. Длина активной среды в промышленных технологических лазерах, как правило, не превышает 20...40 м. Поэтому мощность однолучевых CO<sub>2</sub>-лазеров с диффузионным охлаждением составляет обычно 0,1...1 кВт.

Технологические возможности лазера прежде всего определяются предельной плотностью энергии в фокальном пятне, достигаемой обычно величины  $10^5...10^6$  Вт/см<sup>2</sup> (для типичных параметров CO<sub>2</sub>-лазеров).

*Ограничение предельной мощности однолучевых трубчатых CO<sub>2</sub>-лазеров с диффузионным охлаждением обусловлено тем, что предельная мощность накачки и объем рабочего тела (при фиксированной длине) зависят от радиуса трубки противоположным образом:  $V_a \rightarrow R_t^2$ , а  $\langle jE \rangle_{\text{охл}} \rightarrow R^{-2}$ . Рост объема  $V_a$*

*при этом полностью компенсируется уменьшением  $\langle jE \rangle_{\text{охл}}$ . Рост удельной мощности возможен лишь в том случае, если увеличение объема не сопровождается падением скорости теплоотвода. Такая ситуация возможна в газоразрядном зазоре щелевой геометрии (см. рис. 18.7, б). В этом случае рабочий объем активной среды пропорционален  $L_{\text{щ}} h$  (где  $h$  - ширина щели;  $L_{\text{щ}}$  - ее длина в направлении, перпендикулярном оптической оси), а скорость теплоотвода пропорциональна  $h^{-2}$ . Поэтому мощность лазера с щелевым зазором пропорциональна отношению  $L_{\text{щ}}/h$  и таким образом возможно увеличение  $P/L_a$  с ростом  $L_{\text{щ}}$ . Мощность излучения лазера с щелевым зазором составит*



$$(P/L_a)_{\text{щ}} \cong \chi_r \frac{(T_{\text{opt}} - T_{\text{ст}})}{h^2} \cdot 1,96hL_{\text{щ}}\eta_{\text{эо}}. \quad (18.17)$$

В случае кольцевого зазора диаметром 10 см ( $L_{\text{щ}} \approx 30$  см) и типичных значениях  $h \approx 1$  см удельный съем излучения с единицы длины такого лазера (при  $\eta_{\text{эо}} \approx (0,1 \dots 0,2)$ ) составит  $(3 \dots 6) \cdot 10^2$  Вт/м. Активная среда в щелевом зазоре, например лазера марки «Юпитер-0,3», создаются с помощью несамоостоятельного разряда с периодической ионизацией. Резонатор состоит из двух зеркал – плоского выходного (изготовленного из германия) и кольцевого с отражающей поверхностью.

Увеличение мощности и снижение габаритов  $\text{CO}_2$ -лазера с диффузионным охлаждением возможно при использовании многолучевых (или многоканальных) лазерных систем, состоящих из большого числа газоразрядных элементов с малым поперечным размером и помещенных в общий (для всех этих элементов) резонатор. Малый поперечный размер каждого элемента обеспечивает при этом эффективный теплоотвод, а физических ограничений в количестве элементов нет, что может быть использовано для увеличения общей мощности лазера. Простейшим вариантом многолучевого лазера является система (см. рис. 18.7,в) из набора параллельных оптической оси охлаждаемых газоразрядных трубок, помещенных между двумя плоскими зеркалами резонатора. Предельная мощность такого лазера составит

$$P_{\text{мл}} \cong (P/L_a)_D L_t N_t \cong (P/L_a)_D L_t \left( \frac{D_{\text{сб}}}{d_t} \right)^2 \Pi_3, \quad (18.18)$$

где  $N_t$  - число трубок;  $D_{\text{сб}}$  и  $d_t$  - диаметры всей сборки и каждой трубки отдельно;  $\Pi_3$  - коэффициент заполнения (зависящий от конструктивного решения и способа возбуждения среды). Подставляя в (4.18) значения  $d_t \approx 1$  см,  $D_{\text{сб}} \approx 10$  см и  $\Pi_3 \approx 0,5$ , получим предельную мощность такого лазера порядка 2...3 кВт/м, что существенно превышает аналогичный параметр рассмотренных ранее схем.

Для возбуждения активной среды в многоканальных



лазерах успешно используются самостоятельные разряды постоянного и переменного тока.

Необходимо отметить некоторые особенности пространственных характеристик многолучевых лазерных систем. Достижение одновременной генерации большого числа газоразрядных трубок в общем плоском резонаторе возможно лишь при высокой степени параллельности этих трубок. Конструирование и эксплуатация лазера существенно облегчается при волноводном режиме работы резонатора, т.е. при выполнении условия

$d_t^2 / (2\lambda L_t) < 1$ . Если не принять мер, то каждая газоразрядная трубка работает как независимый лазер и излучение всей сборки представляет собой набор некогерентных между собой лазерных пучков. Предельная расходимость каждого из них составляет  $\lambda/d_t$ .

При сложении некогерентных пучков происходит сложение интенсивностей этих пучков. Суммарная интенсивность фокального пятна многолучевого лазера составит  $S \approx S_1 \cdot N$ , где  $S_1$  - интенсивность пятна каждой трубки. Максимальное значение  $S_1$  достигается при оптимальном фокусном расстоянии линзы (которое в случае многолучевого лазера составит  $F_{opt} \approx 5D_{cb}$ ). Проведем оценку  $S$ , полагая, что  $S_1 \approx P_1 \cdot F^{-2} (\lambda/d_t)^{-2}$  (где  $P_1$  - мощность генерации одной трубки), а  $N \approx (D_{cb}/d_t)^2$ :

$$S \approx D_{cb}^{-2} (\lambda/d_t)^{-2} \cdot (D_{cb}/d_t)^2.$$

Таким образом, суммарная интенсивность не зависит от диаметров  $D_{cb}$  и  $d_t$ , а ее предельная величина определяется как

$$S \approx \frac{(P/L_a)_D L_t}{\pi r_F^2} \leq \frac{P_1}{(10\lambda)^2}. \quad (18.19)$$



## Машиностроение

В случае, если все лазерные пучки (в сборке) будут когерентными, в фокальной плоскости происходит сложение амплитуд электромагнитного поля, т.е. возникает дифракционная картина. Основной пик интенсивности содержит энергию порядка  $\Pi_3 P$ , сосредоточенную в пятне с размером  $S \approx \lambda F_{\text{opt}} / D_{\text{cb}} \cong 5\lambda$ . Рост числа трубок сопровождается пропорциональным ростом мощности и плотности мощности в фокальном пятне, размер которого ограничен величиной

$$S \approx 4 \cdot 10^{-2} \frac{(P/L_a)_D L_t N_t \Pi_3}{\lambda^2}.$$

При следующих параметрах

$L_t \approx 1$  м,  $N_t \approx 10^2$  и  $\Pi_3 \approx 0.5$  плотность мощности в пятне составит  $10^2$  Вт/см<sup>2</sup>. Такая плотность мощности позволяет решать практически все задачи термической лазерной технологии. В настоящее время экспериментально показана возможность когерентного режима работы большого числа газоразрядных трубок в общем резонаторе.



## Контрольные вопросы

1. Перечислите известные вам типы газовых лазеров.
2. Какова схема создания инверсионной населённости в  $\text{CO}_2$ -лазере?
3. Как определяется заселенность верхнего лазерного уровня?
4. Какие факторы определяют коэффициент усиления активной среды  $\text{CO}_2$ -лазера?
5. Какова схема определения оптимальной температуры рабочей смеси  $\text{CO}_2$ -лазера?
6. Каким образом определяется эффективность лазерных систем?
7. Как можно оценить величину объёмного энерговклада, обусловленную скоростью охлаждения смеси?
8. Каким образом определяется предельная мощность излучения  $\text{CO}_2$ -лазера?
9. Какие существуют схемы увеличения мощности и уменьшения габаритов  $\text{CO}_2$ -лазеров?
10. Каким образом определяется суммарная интенсивность лазерного пучка в  $\text{CO}_2$ -лазере?





## ГЛАВА 19. ОПТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ

Информационные системы, в основе которых лежат квантовые структуры, включают в себя следующие основные элементы:

- волноводы для передачи световой информации к приёмнику излучения;
- устройства управления световыми потоками, с помощью которых в световой луч может быть внесена необходимая информация;
- приёмники излучения, позволяющие детектировать сигнал и расшифровывать записанную в световом пучке информацию.

### 19.1. Плоские волноводы

*Волноводы представляют канал, способный поддерживать распространяющиеся вдоль него волны, поля которых сосредоточены внутри канала или примыкающей его области.*

Основным свойством волноводов является существование в них дискретного набора мод, распространяющихся со своими фазовыми и групповыми скоростями. Под *фазовой скоростью* будем понимать скорость перемещения фазы волны в определённом направлении. *Групповая скорость волн* представляет собой скорость движения группы (или цуга) волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет. Групповая скорость определяет скорость переноса энергии волнами.

В линейных средах соблюдается принцип суперпозиции, и потому волновой пакет представляет собой набор гармонических волн. Длина пакета  $\Delta l$  и ширина спектра  $\Delta\omega$  ограничены снизу соотношением

$$\Delta l \cdot \Delta\omega \geq 1,$$

где волновое число  $k$  связано с частотой  $\omega$  дисперсионным соотношением  $\omega = \omega(k)$ .

*Механизм канализации электромагнитных волн в волново-*



*даж* основывается на явлении полного внутреннего отражения. Если на границу двух прозрачных сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  из среды с большим показателем преломления под углом  $\varphi \geq \varphi_{cr}$  падает свет, то происходит полное внутреннее отражение. При этом величина критического угла  $\varphi_{cr}$  определяется соотношением

$$\sin \varphi_{cr} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{при } n_1 > n_2).$$

Обычно волновод реализуется между подложкой и покровным материалом. Такая структура представлена на рис. 19.1 и характеризуется показателем преломления канала  $n_k$ , подложки  $n_n$  и покровного материала  $n_0$ . Необходимо, чтобы выполнялось условие

$$n_k > n_n > n_0.$$

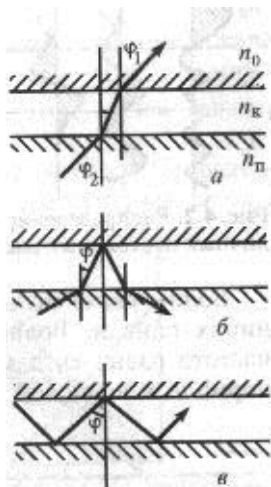


Рис. 4.1. Распространение волн в плоском волноводе: *а* — излучательные моды; *б* — излучательные моды подложки; *в* — волноводные моды

Существует два критических угла, благодаря которым свет может канализоваться: угол полного внутреннего отражения  $\varphi_n$  на границе раздела канал-подложка и аналогичный угол  $\varphi_0$  на границе канал-покровный слой. Иначе имеют место потери света в подложке и покровном материале (рис. 19.1а,б). При выполнении условия полного внутреннего отражения от подложки и покровного материала, световая волна в канале будет распространяться в нём по зиззагообразному пути. Такая мода называется волноводной (рис. 19.1в).

Итак, волна света испытывает полное внутреннее отражение на границах канала.



Волны монохроматичны и когерентны, их угловая частота равна  $\omega$ , длина волны  $\lambda$ , а волновой вектор в направлении нормали к волновой поверхности равен  $kn_k$ , так что

$$k = 2\frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

где  $c$  - скорость света в вакууме. **Постоянная распространения**  $\beta$  для волновой моды в плоском волноводе определяется как

$$\beta = \frac{\omega}{V_f} = kn_k \sin \varphi,$$

где  $V_f$  - фазовая скорость. Значение  $\beta$  лежит в пределах  $kn_n < \beta < kn_k$ .

Введем понятие эффективного волноводного показателя преломления как величину  $N = \beta/k = n_k \sin \varphi$ , которая лежит в пределах

$$n_n < N < n_k.$$

Различные режимы распространения мод в волноводном канале и соответствующее распределение полей мод  $E(x)$  приведена на рис. 19.2.

При  $\beta > kn_k$  распространение моды имеет экспоненциальный характер. Такой тип колебаний не имеет практического применения и поле неограниченно растёт в подложке и в покровном слое (рис.4.2а).

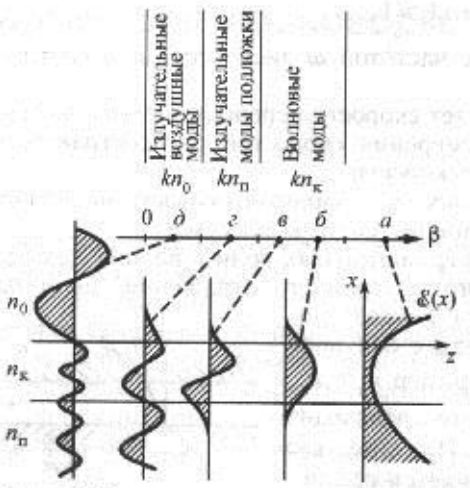


Рис. 4.2. Распределение полей мод при различных постоянных распространения  $\beta$

При условии  $kn_n < \beta < kn_k$  мода имеет поля, представленные на рис.4.2б,в. Это гармоническая колебательная функция с максимумом распространения по оси канала или с образованием в поперечном сечении волновода стоячей волны. Это **волноводные моды**.

**Излучательная мода подложки** реализуется

при условии  $kn_0 < \beta < kn_n$ . Они могут существовать в волноводной структуре, однако быстро затухают из-за перекачки из канала в подложку (рис.4.2г).

Если постоянная распространения лежит в интервале  $0 < \beta < kn_n$ , то мода колебаний характерна для всех областей (рис.4.2д). Это соответствует излучательным воздушным модам, которые быстро затухают.

Проведенный анализ показывает, как важно правильно ввести пучок света в планарный волновод через элемент связи. Различают **поперечные и продольные элемента связи**. В **поперечных элементах связи** пучок фокусируется на открытое поперечное сечение волновода (рис.4.3). Приведенная схема отражает ввод излучения в волновод и преобразование светового пучка в поверхностную волну. Это преобразование происходит путем согласо-

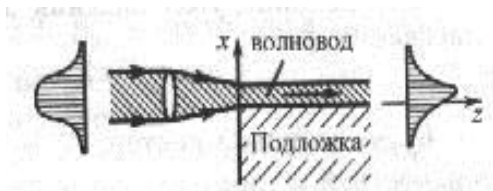


Рис. 4.3. Схема поперечного элемента связи

образования светового пучка в поверхностную волну. Это преобразование происходит путем согласо-



вания электромагнитного пучка с полем поверхностной волны. Распределение интенсивности по сечению волновода соответствует моде  $TE_{m0}$ . Очевидны потери световой энергии на границах планарного волновода, поэтому схемы поперечного элемента связи не нашли широкого применения.

В оптических системах волновод принято называть *световодом*, который предназначен для направленной передачи света.

В *продольных элементах связи* пучок света падает наклонно по отношению к световоду. К этим элементам связи относят призмы и решётчатые элементы. В случае использования *призменного элемента* для ввода излучения пучок света падает на призму, показатель преломления которой  $n_p$  (рис.4.4). Угол падения выбирается таким, чтобы он удовлетворял условию полного отражения

$$\theta > \theta_{tot} = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_p}\right).$$

Одновременно угол падения должен удовлетворять условию согласования фаз

$$k_p \sin \theta = \beta_n,$$

где  $k_p$  - волновой вектор,  $\beta_n$  - постоянная распространения поверхностной волны.

Полный обмен энергией может быть осуществлён при реализации условия

$$\zeta L = \frac{\pi}{2},$$

где  $\zeta$  - коэффициент связи между излучательной модой и модой поверхностной волны.

Если высота воздушного промежутка  $h_0$  велика, то между модами света в призме и волноводе существует слабая связь. При малых промежутках  $h_0$  энергия пучка локализованно в призме передаётся в канал благодаря эффекту оптического

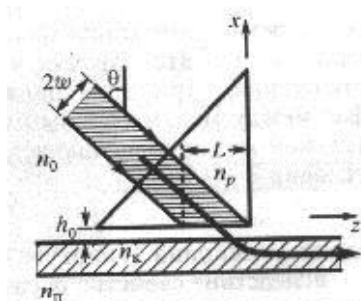


Рис. 4.4. Схема призменного элемента связи



туннелирования света. Этот эффект вызван нарушением полного внутреннего отражения. При этом должно выполняться условие согласования фаз между модами призмы и канала. Перекачка энергии из излучательной моды, совпадающей с почем пучка, может происходить при условии

$$L \cos \theta = 2\omega,$$

где  $\omega$  - ширина (апертура) пучка падающего излучения.

Вследствие свойства обратимости световых пучков можно вывести излучение из волновода через призму.

Недостатком призмных элементов связи является требование высокого значения показателя преломления  $n_p > n_n$  материала призмы. Например, для волноводов из GaAs с высоким показателем преломления ( $n = 3,6$ ) трудно подобрать призму с более высоким показателем преломления.

Другая трудность заключается в настройке воздушного зазора  $h_0$ , толщина которого обычно меньше половины длины световой волны. К тому же в зазоре возможно скопление частиц пыли, что резко увеличивает потери световой энергии.

*Решётчатый элемент связи* работает аналогично призмному элементу. Однако в этом случае отсутствует воздушный зазор. Решётчатый элемент связи обладает периодической структурой (рис.4.5). При падении на решётку волны рождаются гармоники, локализованные в области решётки. Продольные постоянные распространения этих гармоник равны

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{2n\pi}{d},$$

где  $n$  - индекс, равный  $0, \pm 1, \pm 2$ ;  $\beta_0$  - постоянная распространения поверхностной волны,  $\beta_0 \approx k_0 = 2\pi/\lambda_0$ , где  $\lambda_0$  - длина волны падающего излучения,  $d$  - период решётки.

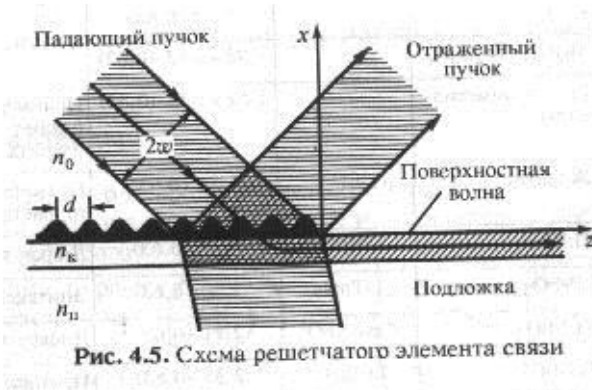


Рис. 4.5. Схема решетчатого элемента связи

Благодаря отрицательным значениям  $n$  возможны значения  $\beta_n \leq \beta_0$ , при которых при соответствующих значениях  $n, d, \lambda, \theta$  будет удовлетворяться уровень согласования фаз  $k_0 \sin \theta = \beta_n$ .

Поле поверхностной волны состоит из гармоник, поэтому энергия, передаваемая одной из гармоник, связана с энергией соответствующей гармоники, распространяющейся в канале.

*Основной недостаток решётчатого элемента связи* состоит в том, что значительная часть световой волны гасится в подложке вследствие многократного прохождения через решётку. Это ограничивает их эффективность, которая меньше, чем у призматических элементов связи.

*Волноводы* могут быть выполнены на *пассивных* и *активных подложках*. Для выполнения *пассивных функций* используются волноводы на стеклянных подложках. Одним из методов получения волноводных структур является легирование стекла путём ионного обмена в электрическом поле между ионами стекла и ионами легирующей примеси. Таким образом создаются волновые структуры различной конфигурации. Возможно использование методов ионной имплантации, с использованием которых удаётся изменить коэффициент преломления на 10-15% и снизить оптические потери до 0,1 дБ/см. Для пассивных волноводных структур используются тонкие плёнки, полимерные плёнки.

*Активные волноводные структуры* формируются на основе активных диэлектриков, приведенных в табл. 19.1.

Таблица 19.1. Сравнительные характеристики волноводных



## структур

| Материал волноводного слоя | Материал по дложки | Показатель преломления волноводного слоя на длине волны $\lambda$ (мкм) | Способ получения волноводного слоя | Средний уровень потерь на длине волны (мкм) |
|----------------------------|--------------------|---|------------------------------------|---|
| Стёкла ТК8-ТК21            | стекло             | 1,56÷1,66 (0,63)  | ВЧ-распыление                      | 1 (0,63)                                    |
| GaAs                       | $Al_xGa_{1-x}As$   | 3,60 (0,82)   | Эпитаксия из молекулярного пучка   | 0,2 (1,30)                                  |
| $Al_xGa_{1-x}As$           | $Al_yGa_{1-y}As$   | 3,10÷3,37 (1,15)  | Эпитаксия                          | 4,0 (1,15)                                  |
| $Al_xGa_{1-x}As$           | GaAs               | 3,20 (1,15)   | Эпитаксия                          | 1,7 (1,15)                                  |
| $Ga_xIn_{1-x}As_yP_{1-y}$  | InP                | 3,37 (1,32)   | Эпитаксия                          | 5,0 (1,32)                                  |
| GaAs                       | GaAs               | 3,60 (1,15)   | Эпитаксия                          | 1,3 (1,15)                                  |
| $Al_xGa_{1-x}N$            | GaN                |   |                                    |   |
| $Al_xIn_{1-x}N$            | GaN                |   |                                    |   |

Важно, что оптическими свойствами активных диэлектриков и соответствующих волноводных структур можно управлять с помощью внешних электромагнитных полей. Волноводные каналы в активных диэлектриках формируются с помощью процессов диффузии ионов, имплантации, эпитаксии.

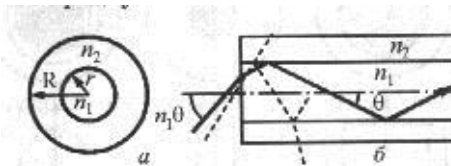


Рис. 4.6. Конструкция волоконного световода (а) и траектория распространения лучей (б)





К *активным волноводам* относятся также структуры, полученные на полупроводниковой основе, например на *соединениях типа  $A^{III}B^V$ ,  $A^{II}B^IV$* . Необходимый перепад показателя преломления в таких структурах достигается за счёт многослойных структур с плавным или ступенчатым изменением состава при переходе от слоя к слою. Одновременно можно менять концентрацию свободных носителей в полупроводнике и создавать области с различными показателями преломления.

Полупроводниковые волноводы, как правило, изготавливают из тех же материалов, что и интегрируемые с ними инжекционные лазеры.

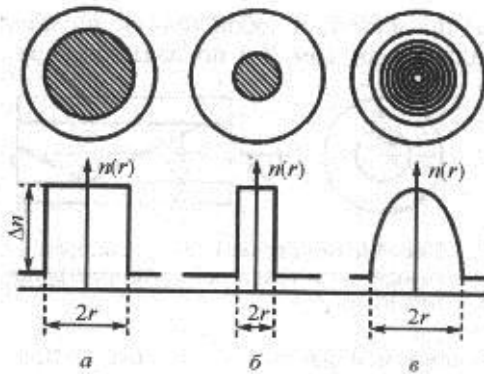
## 19.2 Волоконные световоды

Волоконный световод (рис.4.6а) представляет собой тонкую нить из оптически прозрачного материала с радиусом  $R$  и показателем преломления  $n_2$ , внутри которого расположена сердцевина с радиусом  $r$  и показателем преломления  $n_1 > n_2$ . В отличие от прямолинейного распространения света в открытом пространстве, волноводы позволяют передать световую энергию на большие расстояния по криволинейным трассам. Наибольшее распространение получили гибкие диэлектрические световоды с низкими оптическими потерями.

В приближении геометрической оптики лучи, входящие на границу оболочка-сердцевина волокна под углами  $\theta < \theta_{cr}$  испытывают полное внутреннее отражение на поверхности раздела двух оптических сред (рис.4.6б). Величина критического угла  $\theta_{cr}$  определяется из соотношения

$$\sin \theta_{cr} = \frac{1}{n_1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} .$$

Свет распространяется по световоду по зизагообразной траектории. Величина угла  $\theta_{cr}$  является мерой способности захватить световую энергию. Синус угла  $\theta_{cr}$  называется числовой апертурой световолокна.



**Рис. 4.7.** Сечение и профиль показателя преломления по сечению многомодового ступенчатого (*а*), одномодового (*б*) и многомодового градиентного (*в*) световодов

Характер распространения оптического излучения по световолкну зависит от его поперечных размеров и профиля показателя преломления по сечению. Число мод, которые могут распространяться по световолкну, зависят от квадрата диаметра сердцевины и разности показателей преломления  $\Delta n = n_1 - n_2$ . Число мод  $N$ , которое можно передать по световолкну, в первом приближении определяется из соотношения

$$N \approx \frac{2\pi^2 r^2}{\lambda^2} (n_1^2 - n_2^2).$$

Типичные поперечные сечения и профиль распределения показателя преломления по сечению приведены на рис.4.7. Материалом для оптических световодов обычно служит кварцевое стекло. Различные показатели преломления достигаются путём легирования стекла фтором, германием, фосфором и др. Для кварцевого стекла полоса пропускания световодов имеет максимальное значение на длине волн 1,3 мкм и составляет около  $10^{11} \text{ Гц} \cdot \text{мкм}$ . Изменением профиля показателя преломления можно сместить нуль дисперсии в область длин волн 1,55 мкм, где расположен минимум оптических потерь.

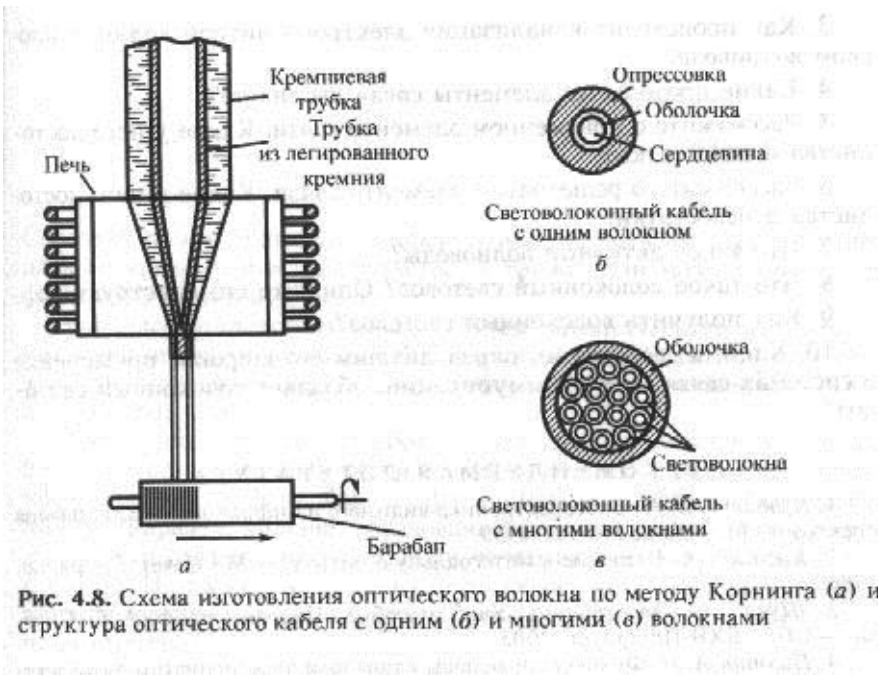


Рис. 4.8. Схема изготовления оптического волокна по методу Корнинга (а) и структура оптического кабеля с одним (б) и многими (в) волокнами

Схема изготовления оптических волокон приведена на рис.4.8а. Стекло плавят в кремниевых тиглях с отверстиями в нижней части. В каждом тигле находится стекло с соответствующим показателем преломления. Волокно вытягивается из тигля и наматывается на барабан. На основе оптических волокон изготавливают кабели для оптоволоконной связи (рис.4.8б, в).

При производстве светового волокна используются также материалы, прозрачные в видимой и ИК-области спектра: безкислородные стекла и полимеры. Однако они уступают кварцевому стеклу по прочностным характеристикам. В современных волоконных лазерах, например производства фирмы «Полюс», используются эрбиевые волоконные стекла. Они работают в спектральной области вблизи 1,55 мкм, т.е. в области минимальных оптических потерь.

Потери при передаче информации по световому волокну незначительны и составляют доли дБ/км в области длин волн 1÷1,5 мкм.



## ГЛАВА 20. ДИСКОВЫЕ И ВОЛОКОННЫЕ ЛАЗЕРЫ С ДИОДНОЙ НАКАЧКОЙ

Способы накачки твердотельных лазеров с помощью диодных лазеров позволяют получать компактные источники лазерного излучения. Лазеры с диодной накачкой имеют высокую стабильность и долгий срок службы. Кроме того, излучение диодных лазеров хорошо вводится в стекловолокна, что открывает новые возможности.

### 20.1 Лазеры с диодной накачкой

Излучение диодных лазеров с помощью линз вводится в активный элемент в продольном (рис. 20.1а) либо в поперечном (рис.20.1б) направлениях. В первом случае, излучение накачки фокусируется оптической системой на выходной торец стержня из Nd:ИАГ. Типовой диаметр пятна составляет от 50 мкм до сотен мкм. С этой величиной согласуется диаметр  $TEM_{00}$ -моды резонатора. Излучение накачки глубоко проникает в лазерный стержень и почти полностью поглощается. Лазерное зеркало, через которое проходит излучение накачки длиной волны  $\lambda = 0,81$  мкм обладает 100%-й отражательной способностью излучения Nd:ИАГ (с длиной волны  $\lambda = 1,06$  мкм).

Типовые системы на Nd:ИАГ с лазерной накачкой используют диодные матрицы или решетки и достигают лазерной мощности излучения в несколько ватт при КПД около 50 %. Лазерный стержень имеет длину 1 см и диаметр 0,5 мм. В эффективных системах почти каждый фотон излучения накачки создает фотон лазерного излучения. Общий коэффициент полезного действия составляет 10 %.

Непрерывный режим генерации с выходной мощностью в несколько ватт возможен на  $TEM_{00}$ -моду. Излучение обладает очень высокой стабильностью: срок службы превышает 10000 рабочих часов. Более значительные мощности получают при поперечной



накачке. Существуют и другие схемы накачки. При обработке материалов получили широкое распространение неодимовые лазеры с диодной накачкой, имеющие выходную мощность излучения несколько киловатт.



Рис. 20.1. Схемы накачки диодным лазером

## 20.2 Дискový лазер

Высокомощные лазеры создаются на легированных иттербием ИАГ-кристаллах. Принципиальная схем дискového лазера приведена на рис. 20.2. В целях дальнейшего снижения действия



нагрева лазерный материал монтируется в виде тонкой пластины (диска) на теплоотводящем элементе. Такой дисковый лазер накачивается с другой стороны. Диск лазерного вещества (АЭ) имеет диаметр около 10 мм и высоту 0,2 мм. Одна сторона диска снабжена смонтированным на теплоотводящем элементе зеркалом с высокой отражательной способностью. Накачка осуществляется излучением диодного лазера со свободной стороны. В процессе накачки возникает одномерный перепад температуры в направлении оси лазерного пучка. Это снижает тепловое влияние на процесс генерации и соответствует повышению качества лазерного пучка. На тонких дисках поглощение излучения накачки невелико, поэтому с помощью отражающих зеркал добиваются полного поглощения за счет многократных проходов излучения накачки.



Рис. 20.2. Дисковый лазер



Однако, генерация коротких импульсов высокой энергии затруднительна, так как объем активной среды мал и, следовательно, в нем запасается не столь много электронной энергии возбуждения, преобразуемый в лазерный импульс генерации.

### 20.3 Волоконные лазеры

Главная особенность волоконного лазера заключается в том, что излучение здесь рождается в тонком, диаметром всего в 6-8 мкм, волокне (сердцевине – напиме, активная среда иттербий), которое фактически находится внутри кварцевого волокна диаметром 400-600 мкм. Излучение лазерных диодов накачки вводится в кварцевое волокно и распространяется вдоль всего сложного составного волокна (1а), имеющего длину несколько десятков метров. Принципиальная схема волоконного лазера приведена на рис. 20.3.

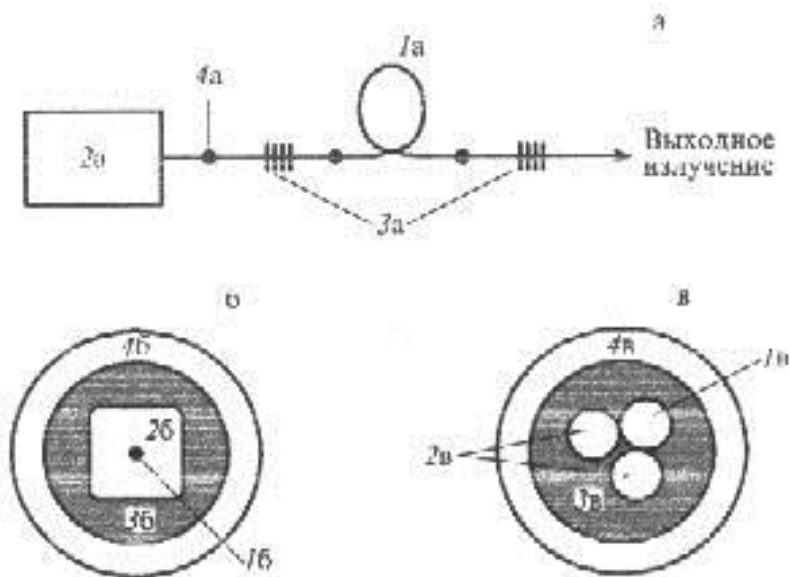


Рис. 20.3. Принципиальная схема волоконного лазера: 1а – актив-



ный волноводный световод, 2а – модуль накачки, 3а – внутриволоконные брэгговские решетки, 4а – точки сварки волоконных световодов

Это излучение оптически накачивает сердцевину, имею в ней на атомах иттербия происходят те физические превращения, приводящие в возникновению лазерного излучения. Вблизи концов волокна на сердцевине делают два так называемых дифракционных зеркала – в виде набора «насечек» на цилиндрической поверхности сердцевины (дифракционной решетки). Таким образом, создается резонатор волоконного лазера. Общую длину волокна и количество лазерных диодов выбирают, исходя из требуемой мощности и эффективности. На выходе получается идеальный одномодовый лазерный пучок с весьма равномерным распределением мощности, что позволяет сфокусировать излучение в пятно малого размера и иметь большую, чем в случае мощных твердотельных Nd:ИАГ лазеров, глубину резкости. Последнее является чрезвычайно важным для лазерных систем свойством, особенно для многолучевых оптических систем.

В нижней части рис. 20.3 приведены примеры различных сечений волоконного световода: 1б – сердцевина волоконного световода, содержащая иттербий; 2б – первая оболочка, 3б – вторая оболочка, 4б – защитная оболочка; 1в – активный световод, 2в – пассивные световоды, 3в – общая вторая оболочка, 4в – защитная оболочка.

Также следует отметить, что ряд свойств излучения волоконных лазеров, например, характер поляризации пучка, делает более удобным и надежным управление этим излучением с помощью акусто-оптических компонентов.

В целом повышается надежность всего оптического тракта лазерной системы. Так как оптическая накачка идет по всей длине волокна, то отсутствуют, например, такие эффекты: термолинза в кристалле, искажения волнового фронта вследствие дефектов самого кристалла, девиация луча и др. Эти эффекты всегда были препятствием для достижения максимальных возможностей твердотельных систем. В волоконном же лазер сам принцип его устройства и работы гарантирует высокие характеристики излучения и делает такие лазеры практически идеальными преобразователями светового излучения в лазерное.





Образно говоря, лазерные стекла вытягиваются в тонкие стекловолокна, накачка которых осуществляется через выходной торец. Такие волоконные лазеры генерируют дифракционно-ограниченное излучение основной моды, если используется одномодовое волокно. Благодаря большой площади поверхности волокна имеет место эффективный отвод тепла, что позволяет обходиться без дополнительного охлаждения волоконных лазеров. В режиме непрерывной генерации волоконные одномодовые лазеры на активной среде с неодимом генерируют выходные мощности до 1 Вт при высоком качестве пучка.

Более высокие мощности достигаются волоконными лазерами с двойной сердцевинной. Активная сердцевина, определяющая качество пучка лазерной системы, находится в окружении второй сердцевины. Эта так называемая сердцевина накачки выводит излучение из диодного лазера. Мощность волоконного лазера с двойной сердцевиной, в режиме непрерывной генерации, составляет сотни ватт и ограничена нелинейными эффектами.