



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

Практикум
по дисциплине
«Статистическое управление»

«Оценка медианы»

Автор
Сорочкина О.Ю.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Методические указания предназначены для бакалавров очного и заочного отделения направления подготовки 27.03.02 «Управление качеством».

Автор

к.т.н., доцент Сорочкина О.Ю.



Оглавление

Общие положения	4
1. Точечная оценка медианы	4
2. Доверительный интервал для медианы	5
Примеры решения задач	7
Задачи	9
Используемая литература.....	11

Общие положения

Оценка - статистика, используемая для оценивания параметра совокупности.

Точечное оценивание параметра - получение оценки параметра в виде одного численного значения.

Доверительный интервал - интервал, границы которого являются функциями от выборочных данных и который покрывает истинное значение оцениваемого параметра с вероятностью не менее $1-\alpha$ (где $1-\alpha$ – доверительная вероятность). Доверительный интервал может быть двусторонним или односторонним.

k -я порядковая статистика в выборке объема: k -е значение $x_{[k]}$ в выборке из n значений, расположенных в неубывающем по величине порядке.

$$x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq \dots \leq x_{[n]} \quad (1)$$

медиана непрерывного распределения вероятностей M ($x_{[k]}$): Значение M , удовлетворяющее соотношению

$$F(M) = 0,5 \quad (2)$$

Где $F(M)$ - функция распределения генеральной совокупности.

выборочная медиана – Если n случайных значений упорядочены по возрастанию и пронумерованы от 1 до n , то, если n нечетно, выборочная медиана принимает значение с номером $\left(\frac{n+1}{2}\right)$; если n четно, медиана лежит между $\frac{n}{2}$ -м и $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -м значениями и не может быть однозначно определена.

Данный метод обработки результатов испытаний применим для любых непрерывных распределений при условии, что выборка является случайной.

1. Точечная оценка медианы

Точечной оценкой медианы генеральной совокупности является выборочная медиана. Выборочную медиану находят путем нумерации элементов выборки, расположенной в порядке не убывания, и выбора значения:

- $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -й порядковой статистики, если n - нечетное;
- среднего арифметического $\frac{n}{2}$ -й и $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -й порядковой статистики, если n -четное.

Эта оценка обычно смещенная; в общем случае произвольной генеральной совокупности несмещенной оценки не существует.

2. Доверительный интервал для медианы

Двусторонний доверительный интервал для медианы генеральной совокупности является закрытым интервалом вида $[T_1, T_2]$

где $T_1 < T_2$;

T_1 и T_2 называются нижней и верхней доверительными границами соответственно.

Односторонние доверительные интервалы могут быть двух видов:

$[T_1, \infty)$ или $(-\infty, T_2]$

где T_1 и T_2 называются нижней и верхней доверительными границами соответственно.

Стандартный метод

Верхнюю и нижнюю границы двустороннего доверительного интервала с доверительной вероятностью $1 - \alpha/2$ определяют с помощью двух порядковых статистик $[x_{[k]}, x_{[n-k+1]}]$, где целочисловое k находят из условий:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \leq 2^{n-1} \alpha/2 \text{ и } \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} > 2^{n-1} \alpha/2 \quad (3)$$

В случае одностороннего доверительного интервала $\alpha/2$ необходимо заменить на α .

Таблица 1 - Точные значения k для объема выборки n

n	Односторонний доверительный интервал	Двусторонний доверительный интервал	Доверительная вероятность	
	0,95	0,99	0,95	0,99
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	1	0
8	2	1	1	1
9	2	1	2	1
10	2	1	2	1
11	3	2	2	1
12	3	2	3	2
13	4	2	3	2
14	4	3	3	2
15	4	3	4	3
16	5	3	4	3
17	5	4	5	3
18	6	4	5	4
19	6	5	5	4
20	6	5	6	4
21	7	5	6	5
22	7	6	6	5
23	8	6	7	5
24	8	6	7	6
25	8	7	8	6
26	9	7	8	7
27	9	8	8	7
28	10	8	9	7
29	10	8	9	8
30	11	9	10	8

Примечание - Знак "0" показывает, что доверительный интервал и доверительные границы для данного объема выборки и данной доверительной вероятности не могут быть определены.

Для $5 \leq n \leq 30$ и для обычно используемых значений $1 - \alpha$ (и для односторонних и для двусторонних доверительных интервалов) значение k определяют из условий:

$$T_1 = x_{[k]} \text{ и } T_2 = x_{[n-k+1]} \quad (4)$$

где $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$ - упорядоченная выборка.

Приближенный метод

Для тех значений n , которые не приведены в таблице 1, приближенное значение k можно получить, используя формулу

$$y = (0,5(n + 1 - u\sqrt{n - 0,5})) \quad (5)$$

тогда k - целая часть y , а u - квантиль стандартного нормального распределения (распределение Стьюдента), который определяют как

$u = u_{1-\alpha}$ - для одностороннего интервала;

$u = u_{1-\alpha/2}$ - для двустороннего интервала.

Это приближение является весьма точным для обычно используемых значений n .

Примеры решения задач

1. Электрический шнур небольшого электрического прибора испытывают на испытательной машине на многократный изгиб до отказа. Испытания моделируют реальную эксплуатацию шнура. Испытания являются ускоренными. Ниже представлена выборка, состоящая из 24 наработок до отказа в часах; семь значений выборки, отмеченных звездочками, являются цензурированными:

57,5; 77,8; 88,0; 96,9; 98,4; 100,3; 100,8; 102,1; 103,3;
 103,4; 105,3; 105,4; 122,6; 139,3; 143,9; 148,0; 151,3;
 161,1*; 161,2*; 161,2*; 162,4*; 162,7*; 163,1*; 176,8*.

На основании представленной выборки получают точечную оценку медианы распределения наработки до отказа

$$\frac{x_{[12]} + x_{[13]}}{2} = \frac{105,4 + 122,6}{2} = 144$$

Нижнюю доверительную границу одностороннего доверительно-го интервала для доверительной вероятности 0,95 находят следующим образом: сначала из таблицы 1 для $n=24$ определяют значение $k=8$, а затем в представленной выше упорядоченной выборке находят значение $x_{[8]} = 102,1$, которое принимают в качестве искомой нижней доверительной границы.

2. Нарботки до отказа 34 транзисторов, полученные по результатам ускоренных испытаний и измеренные в неделях, представлены ниже. Три значения, отмеченные звездочками, являются цензурированными:

3; 4; 5; 6; 6; 7; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 11; 11; 11; 13; 13; 13; 13; 17; 17; 19; 19; 25; 29; 33; 42; 42; 52; 52*; 52*; 52*.

На основании представленной выборки вычисляют точечную оценку медианы распределения наработки до отказа.

$$\frac{x_{[17]} + x_{[18]}}{2} = \frac{13 + 13}{2} = 13$$

Начиная с $n > 30$ для получения нижней границы одностороннего доверительного интервала для медианы вынужденно используют приближенный метод; для доверительной вероятности 0,95 получают $y = \left(0,5(n + 1 - u\sqrt{n - 0,5})\right) = 0,5(34 + 1 - 1,645\sqrt{34 - 0,5}) = 12,74$.

k - целая часть y , следовательно,

$$k=12$$

и искомая доверительная граница $x_{[10]} = 10$

Для двусторонних доверительных границ:

$$y = \left(0,5(n + 1 - u\sqrt{n - 0,5})\right) = 0,5(34 + 1 - 1,960\sqrt{34 - 0,5}) = 11,83$$

тогда $k=11$, $n - k + 1 = 24$

и получают доверительный интервал $[x_{[11]}, x_{[24]}] = [9, 19]$

ЗАДАЧИ

Задача 1. При испытании образцов бетона на плотность по ГОСТ 12730.1-78 были получены следующие результаты (кг/м³): 2341, 2351, 2333, 2349, 2350, 2345, 2340, 2349. Рассчитать точечную оценку и доверительный интервал для медианы.

Задача 2. При испытании образцов бетона на прочность по ГОСТ 10180-2012 были получены следующие результаты (МПа):

25.1 24.9 26.4 25.4 25.9 26.1 25.3 25.8

Рассчитать точечную оценку и доверительный интервал для медианы.

Задача 3. При испытании образцов бетона на истираемость (г,см³) по ГОСТ 13087-81 были получены результаты (таблица 2). Рассчитать точечную оценку и доверительный интервал для медианы. (Предварительно определить промахи).

Таблица 2.

	1	2	3	4	5
1.	0,204	0,225	0,268	0,326	0,316
2.	0,312	0,204	0,256	0,301	0,289
3.	0,289	0,206	0,263	0,208	0,243
4.	0,236	0,309	0,308	0,294	0,239
5.	0,295	0,243	0,234	0,276	0,326

Задача 4. При испытании строительных материалов на паропроницаемость по ГОСТ 25898-2012 следующие результаты (мг/м·ч·Па):

0.18 0.19 0.21 0.18 0.17 0.21 0.20 0.19

Определить точечную оценку для медианы и доверительный интервал для $1-\alpha=0,99$.

Задача 5. При сертификационных испытаниях топлива дизельного ЕВРО класс 2 с добавлением катализатора получены следующие результаты (таблица 3). Определить точечную оценку для медианы и доверительный интервал для $1-\alpha=0,99$.

Таблица 3.

Показатель	Результаты			НД на методы испытаний
Предельная температура фильтрации, °С	-34	-36	-38	ГОСТ 22254
	-35	-35	-36	
	-33	-33	-35	
	-34	-32	-32	
Температура помутнения, °С	-22	-25	-29	ГОСТ 5065
	-26	-32	-25	
Плотность при 15°С, кг/м ³	810, 820, 810, 839, 829, 825, 805, 835, 825, 812, 823, 801, 806, 840, 826, 825, 830, 837, 825, 822, 820, 801, 810, 811, 821, 824, 835.			ГОСТ Р 51069
Кинематическая вязкость при 40°С	1,56	2,46	2,85	ГОСТ 33
	2,62	3,95	3,56	
	3,46	4,00	2,13	
	1,90	2,36	3,65	

Задача 5. При проведении экспертных испытаний Раствора для роста волос «Платинус В» получены следующие результаты (таблица 4). Определить точечную оценку для медианы и доверительный интервал для $1-\alpha=0,99$.

Таблица 4.

Показатель	Результаты			НД на методы испытаний
Водородный показатель, рН	6,1	6,9	7,1	ГОСТ 29188ю2-91
	6,9	5,7	6,5	
	7,0	7,0	6,3	
Содержание мышьяка, мг/кг	1,2	1,9	1,0	ГОСТ Р 51766-200
	1,6	2,3	2,8	
	1,9	1,7	2,6	
	1,5	2,4	1,9	
	2,0	1,2	1,8	
Содержание ртути, мг/кг	0,8	0,5	0,7	ГОСТ 26927-86
	0,9	0,6	1,0	

Используемая литература

1. ГОСТ Р 50779.0-95 Статистические методы. Основные положения
2. ГОСТ Р 50779.10-2000 Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения
3. ГОСТ Р 50779.11-2000 (ИСО 3534.2-93) Статистические методы. Статистическое управление качеством. Термины и определения.
4. ГОСТ Р 50779.21-2004 Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. Часть 1. Нормальное распределение
5. ГОСТ Р 50779.24-2005 (ИСО 8595:1990) Статистические методы. Статистическое представление данных. Оценка медианы.

Статистическое управление

Таблица 2 - Значения квантилей распределения Стьюдента

v	Значения квантилей распределения Стьюдента при уровне доверия α												
	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,97 5	0,99	0,995	0,999 5
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,543	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,173
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965



Статистическое управление

v	Значения квантилей распределения Стьюдента при уровне доверия α												
	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291