ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

Практикум
по дисциплине
«Статистическое управление»

«Точечная оценка и доверительный интервал для среднего»

Автор
Сорочкина О.Ю.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Методические указания предназначены для бакалавров очного и заочного отделения направления подготовки 27.03.02 «Управление качеством».

Автор

к.т.н., доцент Сорочкина О.Ю.

Оглавление

Общие положения

Оценка - статистика, используемая для оценивания параметра совокупности.

Точечное оценивание параметра - получение оценки параметра в виде одного численного значения.

Доверительный интервал - интервал, границы которого являются функциями от выборочных данных и который накрывает истинное значение оцениваемого параметра с вероятностью не менее 1-α (где 1-α – доверительная вероятность). Доверительный интервал может быть двусторонним или односторонним.

Данный метод обработки результатов испытаний применим для непрерывных величин и не охватывает обработку результатов испытаний дискретных величин (например, наличие или отсутствие свойства, количество дефектов).

1. Точечная оценка среднего

Случай не сгруппированных результатов

После отбрасывания сомнительных результатов серии включают в себя результаты *n* измерений x_i (где $i = 1, 2, 3, \ldots n$), некоторые из которых могут быть одинаковыми.

Среднее *т* основного нормального распределения оценивают как среднее арифметическое $\bar{x}$ *n* результатов:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Случай сгруппированных в классы результатов

Когда число результатов достаточно велико (например, более 50), может быть выгодно сгруппировать их в классы одинаковой ширины. Частоту в каждом классе, то есть число результатов в классе, обозначают n_i. Обозначая число классов *к*, имеют

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{2}$$

Среднюю точку класса обозначают y_i. Тогда среднее *т* оценивают как взвешенное среднее всех средних точек классов

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i \tag{3}$$

2. Доверительный интервал для среднего

Доверительный интервал для среднего совокупности вычисляют на основе оценок среднего и стандартного отклонения.

Оценка стандартного отклонения

Не сгруппированные результаты:

Оценку *s* стандартного отклонения σ, вычисляемую на основе квадратов отклонений от среднего арифметического, задают формулой

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{4}$$

где x_i - значение i-го измерения (i = 1, 2, 3,... n);
n- общее число измерений;

$\bar{x}$ - среднее арифметическое n измерений, вычисленное по формуле (1).

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]} \tag{5}$$

Сгруппированные результаты

В случае группирования в классы формула для оценки стандартного отклонения имеет вид

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(y_i - \bar{y})^2} \tag{6}$$

где y_i - средняя точка в i-м классе (i = 1, 2, 3, ... k);
k - число классов;
n - общее число измерений;

$\bar{y}$ - взвешенное среднее всех средних точек классов, вычисленное по формуле (3).

Для простоты вычислений рекомендуется использовать формулу

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k}n_i y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}n_i y_i\right)^2\right]} \tag{7}$$

В случае сгруппированных данных вычисленное значение s может быть скорректировано (поправка Шеппарда). Поскольку эта поправка при правильно выбранной ширине класса невелика, ее вводят не всегда.

Примечание. При вычислении дисперсии следует вносить поправку Шеппарда, т.е. вычитать эту величину (1/12 λ^2) из S_x^2. Ее обычно применяют или при высокой точности расчетов, или при наличии большого числа наблюдений ($n \geq 500$), распределяемых в интервальный вариационный ряд. Для получения обобщающих числовых характеристик небольших и средних по объему ($n < 500$) совокупностей поправку Шеппарда не вносят.

Доверительный интервал для среднего

Доверительный интервал определяется тем, какая выбрана доверительная вероятность (1 – α) (0,95 или 0,99), и тем, какой будет построен интервал (односторонний или двусторонний).

Двусторонний доверительный интервал

Двусторонний доверительный интервал для среднего m совокупности определяют по следующим формулам:

а) для доверительной вероятности 0,95:

$$\bar{x} - \frac{t_{0{,}975}}{\sqrt{n}}s < m < \bar{x} + \frac{t_{0{,}975}}{\sqrt{n}}s$$

(8)

б) для доверительной вероятности 0,99:

$$\bar{x} - \frac{t_{0.995}}{\sqrt{n}} s < m < \bar{x} + \frac{t_{0.995}}{\sqrt{n}} s$$

(9)

Односторонний доверительный интервал

Односторонний доверительный интервал для среднего *т* совокупности определяют по одной из следующих формул:

а) для доверительной вероятности 0,95:

$$m < \bar{x} + \frac{t_{0.95}}{\sqrt{n}} s \qquad (10)$$

или

$$m > \bar{x} - \frac{t_{0.95}}{\sqrt{n}} s$$

(11)

б) для доверительной вероятности 0,99:

$$m < \bar{x} + \frac{t_{0.99}}{\sqrt{n}} s \qquad (12)$$

или

$$m > \bar{x} - \frac{t_{0.99}}{\sqrt{n}} s \qquad (13)$$

При этом *x*, если необходимо, может быть заменен на $\bar{y}$ в случае сгруппированных в классы результатов.

Здесь $t_{0,975}$, $t_{0,995}$, $t_{0,95}$, $t_{0,99}$ - квантили распределения Стьюдента с $v = n + 1$ степенями свободы. (см. таблицу 1 и 2).

Т а б л и ц а 1 - Значения $t_{1-\alpha}$ и отношения $\frac{t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$ для одностороннего доверительного интервала и значения $t_{1-\alpha/2}$ и отношения $\frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$ (для двустороннего доверительного интервала.

п	Доверительная вероятность для двустороннего доверительного интервала		Доверительная вероятность для одностороннего доверительного интервала		n	Доверительная вероятность для двустороннего доверительного интервала		Доверительная вероятность для одностороннего доверительного интервала	
	0,95	0,99	0,95	0,99		0,95	0,99	0,95	0,99
	$t_{0,975}$	$t_{0,995}$	$t_{0,95}$	$t_{0,99}$		$\frac{t_{0,975}}{\sqrt{n}}$	$\frac{t_{0,995}}{\sqrt{n}}$	$\frac{t_{0,95}}{\sqrt{n}}$	$\frac{t_{0,99}}{\sqrt{n}}$
2	12,71	63,66	6,314	31,82	2	8,985	45,013	4,465	22,501
3	4,303	9,925	2,920	6,965	3	2,484	5,730	1,686	4,021
4	3,182	5,841	2,353	4,541	4	1,591	2,920	1,177	2,270
5	2,776	4,604	2,132	3,747	5	1,242	2,059	0,953	1,676
6	2,571	4,032	2,015	3,365	6	1,049	1,646	0,823	1,374
7	2,447	3,707	1,943	3,143	7	0,925	1,401	0,734	1,188
8	2,365	3,499	1,895	2,998	8	0,836	1,237	0,670	1,060
9	2,306	3,355	1,860	2,896	9	0,769	1,118	0,620	0,966
10	2,262	3,250	1,833	2,821	10	0,715	1,028	0,580	0,892
11	2,228	3,169	1,812	2,764	11	0,672	0,956	0,546	0,833
12	2,201	3,106	1,796	2,718	12	0,635	0,897	0,518	0,785
13	2,179	3,055	1,782	2,681	13	0,604	0,847	0,494	0,744

n	Доверительная вероятность для двустороннего доверительного интервала		Доверительная вероятность для одностороннего доверительного интервала		n	Доверительная вероятность для двустороннего доверительного интервала		Доверительная вероятность для одностороннего доверительного интервала	
	0,95	0,99	0,95	0,99		0,95	0,99	0,95	0,99
	$t_{0,975}$	$t_{0,995}$	$t_{0,95}$	$t_{0,99}$		$\frac{t_{0,975}}{\sqrt{n}}$	$\frac{t_{0,995}}{\sqrt{n}}$	$\frac{t_{0,95}}{\sqrt{n}}$	$\frac{t_{0,99}}{\sqrt{n}}$
14	2,160	3,012	1,771	2,650	14	0,577	0,805	0,473	0,708
15	2,145	2,977	1,761	2,624	15	0,554	0,769	0,455	0,668
16	2,131	2,947	1,753	2,602	16	0,533	0,737	0,438	0,651
17	2,120	2,921	1,746	2,583	17	0,514	0,708	0,423	0,627
18	2,110	2,898	1,740	2,567	18	0,497	0,683	0,410	0,605
19	2,101	2,878	1,734	2,552	19	0,482	0,660	0,398	0,586
20	2,093	2,861	1,729	2,539	20	0,468	0,640	0,387	0,568
21	2,086	2,845	1,725	2,528	21	0,455	0,621	0,376	0,552
22	2,080	2,831	1,721	2,518	22	0,443	0,604	0,367	0,537
23	2,074	2,819	1,717	2,508	23	0,432	0,588	0,358	0,523
24	2,069	2,807	1,714	2,500	24	0,422	0,573	0,350	0,510
25	2,064	2,797	1,711	2,492	25	0,413	0,559	0,342	0,498
26	2,060	2,787	1,708	2,485	26	0,404	0,547	0,335	0,487
27	2,056	2,779	1,706	2,479	27	0,396	0,535	0,328	0,477
28	2,052	2,771	1,703	2,473	28	0,388	0,524	0,322	0,467
29	2,048	2,763	1,701	2,467	29	0,380	0,513	0,316	0,658
30	2,045	2,756	1,699	2,462	30	0,373	0,503	0,310	0,449
40	2,024	2,707	1,682	2,430	40	0,320	0,428	0,266	0,384
50	2,008	2,680	1,676	2,404	50	0,284	0,379	0,237	0,340
60	2,000	2,664	1,673	2,393	60	0,258	0,344	0,216	0,309

Таблица 2 - Значения $t_{0,975}$, $t_{0,995}$, $t_{0,95}$, $t_{0,99}$ при n > 60

n	$\frac{120}{n}$	$t_{0,975}$	$t_{0,995}$	$t_{0,95}$	$t_{0,99}$
60	2	2,00	2,66 4	1,67 3	2,39 3
120	1	1,98 0	2,61 7	1,65 8	2,35 8
∞	0	1,96 0	2,57 6	1,64 5	2,32 6

Пример:

$n = 250;\ \frac{120}{n} = 0{,}48$

$t_{0,995} = 2{,}576 + 0{,}48\cdot(2{,}617 - 2{,}576) = 2{,}596.$

Доверительный интервал для среднего на основе размахов

Условия применения метода

Если результаты ранжированы в соответствии с их значениями так, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, то $W = x_n - x_1$ - является размахом выборки. Доверительный интервал для среднего совокупности может быть определен на основе размаха выборки, когда количество измерений мало, например 12 или менее.

Двусторонний доверительный интервал

Двусторонний доверительный интервал для среднего m совокупности определяют по следующим формулам:

а) при доверительной вероятности 1 - α = 0,95:

$$\bar{x} - q_{0.975}W < m < \bar{x} + q_{0.975}W \tag{14}$$

б) при доверительной вероятности 1 - α = 0,99:

$$\bar{x} - q_{0.995}W < m < \bar{x} + q_{0.995}W \tag{15}$$

Значения коэффициентов $q_{0,75}$, $q_{0,995}$, $q_{0,95}$, $q_{0,99}$ даны в таблице 3.

Односторонний доверительный интервал

Односторонний доверительный интервал для среднего m совокупности определяют по одной из следующих формул:

а) при доверительной вероятности 1 - α = 0,95:

$m < \bar{x} + q_{0.95}W$ или $m > \bar{x} - q_{0.95}W$ (16)

б) при доверительной 1 - α = 0,99:

$m < \bar{x} + q_{0.99}W$ или $m > \bar{x} - q_{0.99}W$ (17)

Значения коэффициентов $q_{1-\alpha}$ ($q_{0,95}$, $q_{0,99}$) даны в таблице 3.

Таблица 3 - Значения $q_{1-\alpha}$ для одностороннего доверительного интервала и значения $q_{1-\alpha/2}$ для двустороннего доверительного интервала

n	Доверительная вероятность для двустороннего доверительного интервала		Доверительная вероятность для одностороннего доверительного интервала	
	0,95	0,99	0,95	0,99
	$q_{0,975}$	$q_{0,995}$	$q_{0,95}$	$q_{0,99}$
2	6,353	31,828	3,157	15,910
3	1,304	3,008	0,885	2,111
4	0,717	1,316	0,529	1,023
5	0,507	0,843	0,388	0,685
6	0,399	0,628	0,312	0,523
7	0,333	0,507	0,263	0,429
8	0,288	0,429	0,230	0,366
9	0,255	0,374	0,205	0,322
10	0,230	0,333	0,186	0,288
11	0,210	0,302	0,170	0,262
12	0,194	0,277	0,158	0,241

ЗАДАЧИ

Задача 1. При испытании были получены следующие результаты (таблица). Определить точечную оценку для среднего и доверительный интервал (двусторонний) для 1-α=0,99 (результаты не сгруппированы).

Оператор / №	1	2	3	4	5	6	7
1.	0,22	0,3	0,28	0,23	0,29	0,29	0,29
2.	0,26	0,29	0,19	0,34	0,19	0,28	0,19
3.	0,3	0,35	0,22	0,19	0,24	0,35	0,24
4.	0,29	0,13	0,26	0,26	0,29	0,16	0,29
5.	0,35	0,23	0,3	0,29	0,27	0,27	0,27
6.	0,13	0,34	0,29	0,28	0,18	0,2	0,34
7.	0,23	0,19	0,35	0,35	0,21	0,18	0,29
8.	0,34	0,35	0,29	0,16	0,31	0,29	0,28
9.	0,19	0,13	0,28	0,22	0,35	0,19	0,19
10.	0,26	0,23	0,35	0,26	0,13	0,24	0,29
11.	0,29	0,34	0,16	0,3	0,23	0,29	0,28
12.	0,28	0,19	0,27	0,29	0,34	0,27	0,35
13.	0,35	0,2	0,34	0,35	0,29	0,26	0,16
14.	0,16	0,18	0,29	0,35	0,28	0,29	0,27
15.	0,27	0,21	0,28	0,13	0,19	0,28	0,2
16.	0,2	0,31	0,19	0,23	0,29	0,35	0,18
17.	0,18	0,29	0,27	0,34	0,35	0,16	0,29
18.	0,21	0,28	0,2	0,19	0,13	0,3	0,35
19.	0,31	0,35	0,18	0,27	0,23	0,29	0,13
20.	0,35	0,16	0,21	0,2	0,34	0,35	0,23
21.	0,29	0,27	0,31	0,18	0,29	0,23	0,29
22.	0,19	0,2	0,23	0,21	0,28	0,34	0,19
23.	0,24	0,18	0,34	0,31	0,35	0,19	0,24
24.	0,29	0,3	0,19	0,29	0,16	0,26	0,29
25.	0,27	0,29	0,26	0,28	0,27	0,29	0,27
26.	0,34	0,35	0,29	0,35	0,2	0,28	0,34
27.	0,29	0,13	0,28	0,16	0,18	0,35	0,29

28.	0,28	0,23	0,35	0,27	0,23	0,16	0,28
29.	0,19	0,35	0,16	0,2	0,34	0,35	0,19
30.	0,22	0,13	0,13	0,18	0,19	0,13	0,28
31.	0,26	0,23	0,23	0,2	0,26	0,23	0,19
32.	0,3	0,34	0,34	0,18	0,29	0,34	0,22
33.	0,29	0,19	0,19	0,21	0,28	0,19	0,26
34.	0,35	0,25	0,27	0,31	0,35	0,31	0,3

Задача 2. При испытании продукции были получены следующие результаты: 952, 956, 955, 969, 953, 965, 958, 961, 960, 959, 952. Определить точечную оценку для среднего и доверительный интервал для среднего на основе размахов для 1-α=0,95.

Задача 3. Получены следующие результаты (таблица). Определить точечную оценку для среднего и доверительный интервал (односторонний) для каждого оператора (результаты группировать).

Оператор / №	1	2	3	4	5	6	7
1.	25,6	25,8	26,1	25,3	25,1	26,1	25,3
2.	25,7	24,9	25,9	25,4	25,3	25,9	24,9
3.	25,1	24,6	26,1	25,8	25,9	26,1	24,6
4.	25,9	25,9	24,8	24,6	24,9	24,8	25,6
5.	25,3	25,6	24,9	25,9	25,1	24,9	25,3
6.	25,4	25,7	25,3	25,6	25,6	25,3	25,4
7.	25,8	25,1	24,9	26,5	25,9	24,9	25,8
8.	24,9	25,1	24,6	25,1	26,1	24,6	25,8
9.	24,6	25,3	25,8	25,7	25,9	25,3	24,9
10.	25,9	25,9	24,9	25,1	26,1	25,4	24,6
11.	25,1	24,9	24,6	25,4	24,8	25,8	25,9
12.	26,1	25,1	25,9	25,1	24,9	25,7	25,3
13.	25,9	25,6	25	25,3	25,3	25,1	24,9
14.	26,1	25,1	25,6	25,9	24,9	25,3	24,6
15.	24,8	25,3	25,7	24,9	25,3	24,9	25,3
16.	24,9	25,9	25,1	25,1	24,9	24,6	25,4
17.	25,3	24,9	25,6	25,6	24,6	25,8	25,8

18.	24,9	25,3	26,5	25,3	25,6	24,9	24,9
19.	24,6	24,9	25,1	24,9	25,3	24,6	24,6
20.	26,1	24,6	25,6	24,6	25,4	25,9	25,9
21.	26,5	25,8	25,7	25,3	25,8	25,3	26,1
22.	25,1	24,9	25,1	24,9	25,6	25,4	25,9
23.	25,3	24,6	26,1	24,6	26,5	25,8	26,1
24.	25,9	25,9	25,1	24,9	25,1	25,9	24,8
25.	24,9	25,3	25,3	25,8	24,6	24,9	24,9
26.	25,1	24,9	25,9	24,9	25,9	25,1	25,3
27.	25,6	25,3	24,9	24,6	25,3	25,6	24,9
28.	26,5	25,4	25,1	25,9	24,9	26,5	24,6
29.	25,1	25,8	25,6	25,8	24,6	25,1	25,7

Используемая литература

1. ГОСТ Р 50779.0-95 Статистические методы. Основные положения
2. ГОСТ Р 50779.10-2000 Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения
3. ГОСТ Р 50779.11-2000 (ИСО 3534.2-93) Статистические методы. Статистическое управление качеством. Термины и определения.
4. ГОСТ Р 50779.21-2004 Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. Часть 1. Нормальное распределение
5. ГОСТ Р 50779.22-2004 (ИСО 2602:1980) Статистические методы. Статистическое представление данных. Точечная оценка и доверительный интервал для среднего.