ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

ПОИСК НАИЛУЧШЕГО РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Теория принятие решений»

Авторы:
Димитров Валерий Петрович
Борисова Людмила Викторовна
Зубрилина Елена Михайловна

Ростов-на-Дону, 2014

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов направления 221700 «Стандартизация и метрология», изучающих дисциплину «Теория принятия решений». Приводится методика поиска наилучшего решения с помощью линейного программирования. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

Авторы

Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

Профессор кафедры «Управление качеством» д.т.н. Борисова Людмила Викторовна

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н, Зубрилина Елена Михайловна

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДИКА ПОИСКА НАИЛУЧШЕГО РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**Ошибка! Закладка не определена.**

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 11

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ 11

Методика поиска наилучшего решения с помощью линейного программирования

Задача линейного программирования относится к числу наиболее простых и хорошо изученных задач математического программирования. Основная их особенность состоит в том, что скалярный критерий оптимальности $y = f(x)$ является линейной функцией *n* переменных $x_1,...x_n$, составляющих в совокупности вариант $\mathbf{x} = (x_1,...x_n)$ решения задачи оптимального выбора, а все ограничения $g_q(x) \le b_q, \quad q = 1,..., p$ представляют собой систему линейных уравнений и неравенств.

Любая задача линейного программирования может быть приведена к следующей стандартной или канонической форме. Требуется максимизировать значение линейной функции

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

на множестве всех неотрицательных решений системы линейных алгебраических уравнений $x_i \ge 0 \quad (i = 1,..., n, p < n)$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n &= b_p, \end{aligned}$$

которое определяет множество допустимых значений X^a.

Для записи задачи линейного программирования в стандартной форме могут понадобиться дополнительные преобразования. Нередко из содержательных соображений может потребоваться минимизация критерия оптимальности. Например, в задаче оптимального планирования производства необходимо минимизировать расходы на выпуск определенных видов продукции. В таком случае достаточно заменить критерий оптимальности $f(x)$ на противоположный по знаку критерий $-f(x)$. Очевидно, что при этом будет выполняться равенство $\min\limits_{x \in X^a} f_k(x) = \max\limits_{x \in X^a}(-f_k(x))$. Отметим, что подобное сведение задачи минимизации к задаче максимизации справедливо для произвольной (необязательно линейной) целевой функции и произвольного допустимого множества X^a.

Если среди ограничений задачи присутствуют ограничения в виде неравенств $\sum_{i=1}^{n} a_{qi}x_i \le b_q$, то в этом случае, вводя дополнительные неотрицательные переменные $v_q \ge 0$, ограничения можно записать как равенства $\sum_{i=1}^{n} a_{qi}x_i + v_q = b_q$. Аналогичным образом неравенства вида $\sum_{i=1}^{n} a_{qi}x_i \ge b_q$ приводятся к равенствам $\sum_{i=1}^{n} a_{qi}x_i - v_q = b_q$. Заметим, что ограничения, заданные в стандартной форме задачи как равенства, всегда можно превратить в ограничения-неравенства.

В качестве примера рассмотри постановку так называемой транспортной задачи. Цель задачи – минимизация затрат транспортировки товаров со складов потребителям. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Входные параметры модели: n – количество пунктов отправления; m – количество пунктов назначения; a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i = \overline{1,n}$) [ед. тов.]; b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j = \overline{1,m}$) [ед. тов.]. c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед. тов.].

Выходные параметры модели: x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. тов.]; C_Σ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели транспортной задачи:

– определение переменных;

– проверка сбалансированности задачи;
– построение сбалансированной транспортной матрицы;
– задание целевой функции;
– задание ограничений.

Модель транспортной задачи задается в следующем виде:

$$C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right). \end{cases} \qquad (1)$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл. 1).

Таблица 1 – Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, ед. прод.
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность, ед. прод.	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \qquad (2)$$

Если условие (2) выполняется, то задача называется сбалансированной, в противном случае – несбалансированной. Поскольку ограничения модели (1) могут быть выполнены только при сбалансированной задаче, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса (2). В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_{ф} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный фиктивный пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_{ф} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания фиктивных тарифов

$c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных реальных перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) фиктивные перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки.

Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых запрещающих тарифов $c_{ij}^{з}$. Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c_{ij}^{з} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,m}\right).$$

Решение транспортной задачи графическим методом

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам перевозки продукции с двух складов к трем потребителям. Ежемесячные запасы продукции на складах равны 120 и 180 т, а ежемесячные потребности покупателей составляют 70, 140 и 90 т соответственно. Транспортные расходы по доставке продукции представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Транспортные расходы по доставке 1 т продукции (тыс. руб.)

Склады	Потребители		
	B_1	B_2	B_3

A_1	8	5	6
A_2	4	9	7

Обозначим через x_{ij} количество тонн, которое будет перевезено с i-го склада к j-му потребителю.

Проверим задачу на сбалансированность:
суммарное наличие на складах = 120 + 180 = 300 т;
суммарная потребность в продукции = 70 + 140 + 90 = 300 т.

Из этого следует, что данная задача сбалансирована. Сбалансированная транспортная матрица представлена в таблице 3.
Таблица.3 – Транспортная матрица задачи

Целевая функция задается выражением:

$$C_\Sigma = 8x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 9x_{22} + 7x_{23} \to \min \text{ (тыс. руб./мес.)}.$$

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 180 \\ x_{11} + x_{21} = 70 \\ x_{12} + x_{22} = 140 \\ x_{13} + x_{23} = 90 \\ x_{ij} \geq 0 \left(\forall i = \overline{1,2}; \forall j = \overline{1,3}\right) \end{cases}$$

Положим, что $x_{11} = u$, $x_{12} = v$. Тогда можно выразить все остальные неизвестные через переменные u и v:

$$x_{13} = 120 - u - v;$$

$$x_{21} = 70 - u;$$

$$x_{22} = 140 - v;$$

$$x_{23} = 90 - x_{13} = 90 - (120 - u - v) = u + v - 30.$$

Выразим через u и v целевую функцию:

$$F = 8u + 5v + 6(120 - u - v) + 4(70 - u) + 9(140 - v) + 7(u + v - 30).$$

$$F = 5u - 3v + 2050 \to \min .$$

Учитывая, что все x_{ij} неотрицательные, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 120 - u - v \ge 0 \\ 70 - u \ge 0 \\ 140 - v \ge 0 \\ u + v - 30 \ge 0 \\ u \ge 0 \\ v \ge 0 \end{cases}$$

Для того чтобы найти в первой четверти плоскости *Ouv* множество точек, координаты которых удовлетворяют указанным выше неравенствам, необходимо сначала построить следующие прямые:

$$120 - u - v = 0,$$

$$70 - u = 0,$$

$$140 - v = 0,$$

$$u + v - 30 = 0.$$

Неравенства (8) определяют на плоскости (*v, u*) пятиугольник с вершинами: (0, 30), (0, 70), (50, 70), (120, 0), (30, 0) (см. рис. 2.1).

Линейная функция $F = f(u, v)$ достигает наименьшего значения в одной из вершин этого пятиугольника. Нетрудно убедиться в том, что $F = F_{min} = 1690$ при $u = 0$, $v = 120$. Следовательно, мы нашли оптимальный план перевозок:

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 120, \quad x_{13} = 0,$$

$$x_{21} = 70, \quad x_{22} = 20, \quad x_{23} = 90.$$

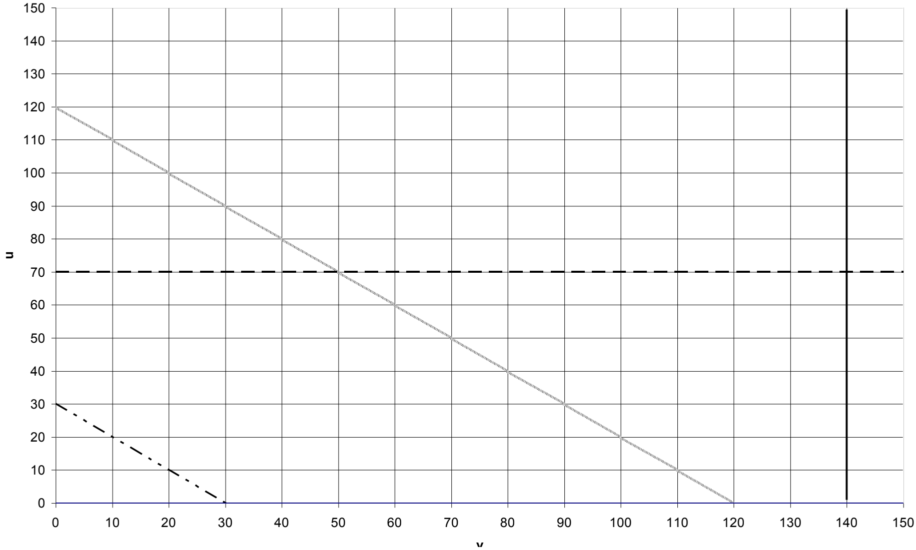

Рис. 1 – Графический метод решения транспортной задачи

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Димитров В.П., Борисова Л.В. Введение в теорию принятия решений / В.П. Димитров, Л.В. Борисова. : Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2013 – 85 с.

2. Петровский А.Б. Теория принятия решений / А.Б. Петровский. М.: ИД «Академия», 2009 – 250 с.

3. Системный анализ и принятие решений: учебное пособие / С.А. Баркалов, И.С. Суровцев, А.И. Половинкина ; науч.ред. В.Н. Бурков. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 652 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Задача линейного программирования.
2. Дополнительные преобразования при решении задачи линейного программирования.
3. Алгоритм решения транспортной задачи с применением линейного программирования.