ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине "Системный анализ"

Авторы:
Димитров Валерий Петрович
Борисова Людмила Викторовна

Ростов-на-Дону, 2014

Аннотация

Методические указания предназначены для бакалавров по направлению подготовки 221700 Стандартизация и метрология.

Печатается по решению методической комиссии факультета «Приборостроение и техническое регулирование».

Авторы

Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

Профессор кафедры «Управление качеством» д.т.н. Борисова Людмила Викторовна

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.. 4

1 ЗАДАЧА 1. ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 6

2 ЗАДАЧА 2. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ ПОСТАВОК..... 7

3 ЗАДАЧА 3. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ 9

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ...........................11

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 14

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ...14

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы состоит в приобретении навыков решения задач методом имитационного моделирования.

Задачи:

- ознакомиться с сущностью метода статистических испытаний;
- ознакомиться с кругом задач, решаемых с помощью данного метода;
- изучить способы генерирования случайных чисел;
- развить навыки работы на компьютере (например, с пакетом Exsel).

В практической деятельности часто встречаются задачи, когда необходимо получить значения характеристик какого-либо процесса. Если проведение натурного эксперимента сопряжено со значительными затратами ресурсов, или с невозможностью наблюдения явлений в реальных условиях, то целесообразно применение имитационного моделирования. Особенностью имитационного моделирования, в отличие от классического лабораторного эксперимента, является возможность его реализации на компьютере.

Суть имитационного моделирования заключается в том, что с помощью математических соотношений описывается зависимость между составными частями исследуемой системы. Затем рассчитывают характеристики системы с шагом времени t, причем на каждом новом шаге учитываются изменения, произошедшие в системе на предыдущем шаге. Таким образом, как бы воспроизводится (имитируется) поведение системы. В большинстве случаев для выявления всех свойств системы и изучения ее поведения требуется многократное имитационное моделирование, для чего используют случайные выборки начальных исходных условий из их допустимого множества. По полученным выборкам рассчитывают оценки характеристик системы.

В этом случае имитационное моделирование следует рассматривать как статистический эксперимент. Результаты, полученные в имитационной модели, представляют собой наблюдения, подверженные экспериментальным ошибкам. Поэтому любое утверждение, касающееся характеристик исследуемой системы, должно основываться на результатах статистических проверок.

В основе имитационного моделирования лежит метод Монте-Карло, центральная идея которого заключается в использовании выборок для получения искомых оценок.

Сущность рассматриваемого подхода (его называют также методом статистических испытаний) состоит в следующем: требуется найти значение А некоторой изучаемой величины, для чего выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно А: M(X)=A. Практически поступают так: вычисляют (разыгрывают) n возможных значений X_i случайной величины X и находят их среднее арифметическое

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}.$$

Принимают $\overline{X}$ в качестве оценки (приближенного значения) искомого числа А:

$$A \approx A^* = \overline{X}.$$

Первая особенность рассматриваемого метода – простая структура вычислительного алгоритма. Как правило, составляется программа для осуществления одного случайного испытания. Затем это испытание повторяется N раз, причем каждый опыт не зависит от остальных. Результаты всех опытов усредняют.

Вторая особенность метода – погрешность вычислений, как правило, пропорциональна $\sqrt{D/N}$, где D – некоторая постоянная; N – число испытаний. Отсюда видно, что для того, чтобы уменьшить погрешность в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N (то есть объем работы) в 100 раз. Добиться высокой точности таким путем практически невозможно. Поэтому обычно считается, что метод Монте-Карло эффективен при решении тех задач, в которых устраивает результат со сравнительно небольшой точностью (5 – 20 %). При решении многих задач удается значительно увеличить точность решения задачи, выбрав способ расчета, которому соответствует малое значение D.

Эффективность применения метода статистических испытаний зависит от умения разыгрывать случайную величину. На практике используются различные варианты получения случайных чисел: таблицы случайных чисел (приложение 1); применение генераторов случайных чисел; использование методов генерации псевдослучайных чисел.

Числа, получаемые по какой-либо формуле и имитирующие значения случайной величины X, называются псевдослучайными числами. На получение каждого числа затрачивается всего несколько операций. Поэтому скорость генерирования случайных чисел имеет тот же порядок, что и скорость работы ЭВМ. Кроме того, нужно лишь один раз проверить "качество" такого генератора, затем его можно много раз безбоязненно использовать при решении однотипных задач.

Недостаток метода – ограниченность количества псевдослучайных чисел, так как последовательность чисел, вычисляемых на ЭВМ по формуле вида $X_{i+1} = F(X_i)$, обязательно периодическая.

1 ЗАДАЧА 1. ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1 Равномерный закон распределения

В состав большинства языков программирования высокого уровня входят функции, позволяющие получать случайные числа с заданным законом распределения. Например, для случайных чисел, распределенных по равномерному закону

$$p(x) = \begin{cases} 1 \;\; при \;\; 0 \le x \le 1 \\ 0 \;\; при \;\; x < 0 \;\; или \;\; x > 1 \end{cases}$$

предложено несколько алгоритмов генерации.

Алгоритм №1.

$$V_{i+1} = F\{11V_i + \pi\},$$

где F{} – символ взятия дробной части числа; V_0=0,5. Алгоритм обеспечивает генерацию примерно 8000 неповторяющихся чисел.

Алгоритм №2

$$V_{i+1} = F\{V_i/Z + \pi\},$$

где F{} – символ взятия дробной части числа; V_0=0; $Z_{i+1}=Z_i+1\times10^{-8}$; Z_0=0,011. Алгоритм обеспечивает генерацию примерно 8900 неповторяющихся чисел.

В зависимости от условий решаемых задач может оказаться необходимым формирование случайных чисел V_{i+1} с равномерным законом распределения в интервале [A, B]. В этом случае алгоритм генерации имеет вид:

$$V_{i+1} = A + (B - A)\times V_i.$$

1.2. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Сначала генерируются псевдослучайные числа V_i, распределенные равномерно на интервале (0; 1). Затем из V_i получаем η_i функциональным преобразованием:

$$\eta_i = [sign(V_i - 1)] \times \sqrt{-(\pi/2) \times Ln[4 \times V_i (1 - V_i)]},$$

Где $sign = \begin{cases} 1 \ \ при \ \ x > 0 \\ 0 \ \ при \ \ x = 0 \\ -1 \ \ при \ \ x < 0 \end{cases}$

Случайные числа, соответствующие нормальной случайной величине
N: 0;1, можно получить из равномерной случайной величины R (на интервале [0,1]) с помощью аппроксимации:

$$N:0{,}1 \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}.$$

С ростом k, точность аппроксимации растет.

Плотность вероятности нормального распределения определяется как

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

2 ЗАДАЧА 2. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ ПОСТАВОК

Рассмотрим систему поставщиков продукции условного производства, которая состоит из двух подсистем А+В и С (рис. 1), связанных последовательно в производственном цикле, и не функционирует при нарушении работы (отказе) хотя бы одного поставщика (одной подсистемы).

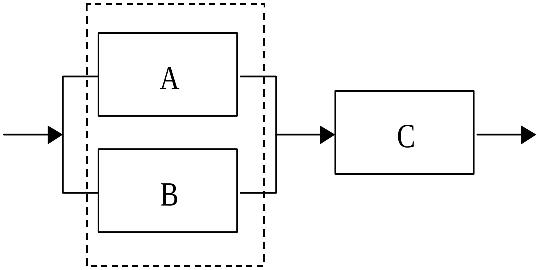

Рис. 1. Структурная схема системы поставок

Первая подсистема содержит два подразделения (поставщика) А и В (соединены параллельно) и не функционирует при одновременном сбое в работе обоих поставщиков. Вторая подсистема состоит из одного поставщика С и не функционирует при сбое в его работе.

Требуется оценить надежность системы поставок Р, зная вероятности безотказной работы отдельных поставщиков: Р(А)=0,80; Р(В)=0,85; Р(С)=0,60. Для наглядности в таблице 1 приведен пример первых трех испытаний.

Таблица 1 – Расчетные данные для оценки надежности системы поставок

№ исп.	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе				
		A	B	C	элементов			бло-ков	систе сте- мы
					A	B	C		
1	Первый Второй	0,10	0,09	0,79	+	+	 –	+ –	–
2	Первый Второй	0,25	0,33	0,76	+	+	 –	+ –	–
3	Первый Второй	0,52	0,01	0,35	+	+	 +	+ +	+
…									

Из таблицы случайных чисел либо с помощью алгоритма генерации псевдослучайных чисел выберем три случайных числа: например: 0,10; 0,09; 0,73. Если случайное число меньше вероятности события, то считаем, что событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило. В соответствии с этим правилом разыграем события А, В и С, состоящие в безотказной работе соответственно поставщиков А, В, С.

Поскольку Р(А) =0,8 и 0,10 < 0,8, то событие А наступило; то есть поставщик А в этом испытании работает безотказно. Так как Р(В)=0,85 и 0,09 < 0,85, то событие В наступило (поставщик В работает безотказно). Таким образом, оба поставщика первой подсистемы работают, следовательно, работает и сама первая подсистема. (В соответствующих клетках таблицы стоят знаки "+").

Так как Р(С)=0,60 и 0,73 > 0,60, то событие С не наступило, то есть поставщик С не функционирует. Не функционирует подсистема С, а значит и вся система поставок сбоит. В соответствующих клетках таблицы стоят знаки "–".

Аналогичным образом разыгрывают N испытаний. В качестве искомой оценки надежности Р принимают относительную частоту Р*=n/N, где n – число испытаний, в которых система поставок работает эффективно.

3 ЗАДАЧА 3. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

Метод статистических испытаний применяется и для решения оптимизационных задач. При этом следует учитывать, что в имитационной модели значения управляемых переменных рассматриваются как часть входных данных модели и в результате прогона модели получается оценка результата работы системы, а не оптимальные значения переменных.

Иллюстрация использования метода для нахождения экстремального значения одномерной унимодальной функции приведена на рис. 2.

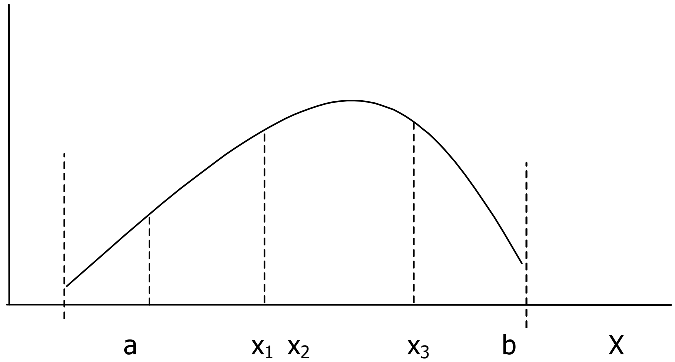

Рис. 2. Нахождение максимального значения функции:
a...b – интервал допустимых значений аргумента; N – число испытаний; результат решения задачи: x_1 – при N = 5; x_2 – при N = 10; x_3 – при N = 40.

Последовательность решения оптимизационной задачи с применением метода Монте-Карло заключается в многократном моделировании независимых случайных вариантов решений из области допустимых (то есть в заданном интервале), вычислении в каждом из них критерия оптимизации и запоминании ближайшего к экстремуму.

Данный метод относится к числу универсальных, поскольку позволяет решать многоэкстремальные задачи общего вида с отысканием глобального экстремума. Основной недостаток метода заключается в необходимости проведения большого числа испытаний для получения решения, достаточно близкого к оптимальному.

Вместе с тем не следует забывать о присущих данному подходу недостатках. Так как результаты моделирования подвержены статистическим ошибкам, их надежность должна обосновываться. Кроме того, длительность процесса получения выборок и их анализ могут значительно снизить эффективность применения имитационного моделирования.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАЧА 1.1

Получить 10 случайных чисел, подчиняющихся равномерному закону распределения. Интервал (A – B) изменения параметра X задан в таблице.

Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A - B	1 - 10	3 - 11	1 - 8	3 - 9	4 - 8	5 - 11	6 - 12	7 - 10	8 - 20

ЗАДАЧА 1.2

Получить 10 случайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения, для $\mu=0$ и $\sigma=1$. Интервал изменения параметра $X \in 0 - 6$.

Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	10	11	12	13	14	15	16	17	18

ЗАДАЧА 2

Оценить надежность системы поставок P. Вероятности безотказной работы поставщиков представлены в таблице. Число испытаний N=20

Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(A)	0,80	0,90	0,85	0,95	0,60	0,65	0,95	0,85	0,75	0,80
P(B)	0,95	0,85	0,75	0,80	0,80	0,87	0,78	0,86	0,68	0,90
P(C)	0,82	0,78	0,86	0,68	0,90	0,80	0,85	0,95	0,60	0,65

ЗАДАЧА 3.1

Найти равновесную точку цены изделия на основе экспериментальных данных. В таблице используются обозначения: P – цена изделия, у.е.; Q_D – объем спроса, тыс. шт.; Q_S - объем предложения, тыс. шт.

Варианты заданий

Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3	Вариант №4

P	Q_D	Q_S	P	Q_D	Q_S	P	Q_D	Q_S	P	Q_D	Q_S
25	24	4	2	8,8	3,7	4	12,0	5,2	10	100	25
27	16	8	3	8,1	5,4	5	11,5	7,0	20	80	30
31	12	11	4	7,2	6,7	6	9,3	9,0	30	60	45
37	7	17	5	6,4	7,9	7	7,0	11,1	40	40	55
42	3	23	6	5,7	8,3	8	3,2	13,2	50	20	70

Примечание. При выполнении данной задачи необходимо построить эмпирические уравнения для Q_D и Q_S. Затем, на интервале изменения аргумента сгенерировать 10 случайных чисел (равномерно распределенных). Для каждого значения аргумента найти значения функций Q_D , Q_S и сравнить их. Если разность значений функций в данной точке не превышает заранее заданное значение ε, то считать, что найденное значение аргумента и есть искомое решение.

ЗАДАЧА 3.2

Зависимость Y=F(X) имеет вид: $Y = 2{,}88 + 0{,}005X_1 - 0{,}132X_2 - 0{,}262X_3$,

где $X_1 \in (800 - 1000)$; $X_2 \in (16 - 24)$; $X_3 \in (6 - 10)$.

Найти минимальное значение функции на заданном интервале варьирования аргументов за К итераций:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
К	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ВАРИАНТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

№ варианта	№ задачи	№ варианта задачи	№ задачи	№ варианта задачи	№ задачи	№ варианта задачи
1	1.1	1	2	1	3.2	1
2	1.1	2	2	2	3.2	2
3	1.1	3	2	3	3.2	3
4	1.1	4	2	4	3.2	4
5	1.1	5	2	5	3.2	5
6	1.1	6	2	6	3.2	6
7	1.1	7	2	7	3.2	7
8	1.1	8	2	8	3.2	8
9	1.1	9	2	9	3.2	9

10	1.2	1	2	10	3.1	2
11	1.2	2	2	1	3.1	3
12	1.2	3	2	2	3.2	1
13	1.2	4	2	3	3.2	2
14	1.2	5	2	4	3.2	3
15	1.2	6	2	5	3.2	4
16	1.2	7	2	6	3.2	5
17	1.2	8	2	7	3.2	6
18	1.2	9	2	8	3.2	7
19	1.1	2	2	9	3.2	8
20	1.1	3	2	10	3.2	9
21	1.1	4	2	1	3.1	1
22	1.1	5	2	2	3.1	2
23	1.1	6	2	3	3.1	3
24	1.1	7	2	4	3.1	4
25	1.1	8	2	5	3.2	3

Приложение 1

Значения случайных чисел, равномерно распределенных
на интервале (0; 1)

0,86515	0,46156	0,56558	0,94377
0,69186	0,42502	0,88955	0,91641
0,41686	0,85181	0,33181	0,53807
0,86522	0,88059	0,67248	0,12311
0,72587	0,89688	0,27689	0,14480
0,52452	0,33346	0,79130	0,45420
0,76773	0,27256	0,25731	0,16287
0,04826	0,80317	0,45904	0,70492
0,87113	0,45863	0,19976	0,07824
0,84754	0,38132	0,15218	0,89571
0,90795	0,66434	0,12332	0,57802
0,03393	0,99224	0,53758	0,18867
0,42163	0,38967	0,72664	0,00607
0,47171	0,89342	0,09082	0,90316
0,93000	0,78416	0,99628	0,50961

0,42499	0,83935	0,90410	0,77757
0,97526	0,66447	0,37625	0,66181
0,82134	0,75120	0,75601	0,10274
0,84778	0,24620	0,49250	0,76044
0,57616	0,64294	0,49286	0,42903

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в системный анализ: учеб.пособие / В.П. Димитров, Л.В. Борисова, Б.Б. Жмайлов – 2-е изд., испр. и доп. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2013. – 77 с.
2. Системный анализ и принятие решений: учебное пособие / С.А. Баркалов, И.С. Суровцев, А.И. Половинкина ; науч.ред. В.Н. Бурков. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 652 с.
3. Мирошников В.П. «Имитационное моделирование систем с обратной связью». Методические указания к практическому занятию по дисциплине «Теория систем». ДГТУ, 2008.-
4. Свами, Тхуласираман. Графы, сети, алгоритмы. М., «Мир», 1975.
5. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Ростов - на - Дону, изд - во РГУ, 1998 г.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сущностью метода статистических испытаний.
2. Задачи, решаемые с помощью данного метода.
3. Способы генерирования случайных чисел.
4. Особенности метода имитационного моделирования.