ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Системный анализ»

Авторы:
Зубрилина Е.М.
Пастухов А.Г.
Димитров В.П.

Ростов-на-Дону, 2014

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика моделирования по схеме марковских случайных процессов, однородных и неоднородных марковских цепей. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н , Зубрилина Елена Михайловна;
Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич;
Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – приобрести компетенции моделирования процессов на основе расчета однородных и неоднородных марковских цепей.

1 МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1.1 ОДНОРОДНАЯ МАРКОВСКАЯ ЦЕПЬ

Пусть система S имеет n возможных состояний $S_1, S_2, \dots, S_n$. Обозначив P_{ij} вероятность перехода системы S за один шаг из состояния S_i в состояние S_j, можем составить матрицу переходных вероятностей. Некоторые из переходных вероятностей P_{ij} могут быть, равны нулю. Это означает, что за один шаг переход системы из ***i-го*** состояния в ***j-е*** невозможен. Сумма членов, стоящих в каждой строке матрицы, должна быть равна единице.

Для однородной марковской цепи вероятности перехода от шага к шагу не меняются, т.е. однозначно заданы матрицей (1).

$$\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{matrix} \right\|. \tag{1}$$

Матрица переходных состояний может быть заменена размеченным графом состояний (рис.1). На размеченном графе состояний проставляются только те переходные вероятности, которые не равны нулю и меняют состояние системы, т.е. P_{ij} при $i \neq j$. Вероятности $P_{11}, P_{22}, \dots$ на графе состояний не проставляются, так как каждая из них дополняет до единицы сумму переходных вероятностей, соответствующих всем стрелкам, исходящим из данного состояния.

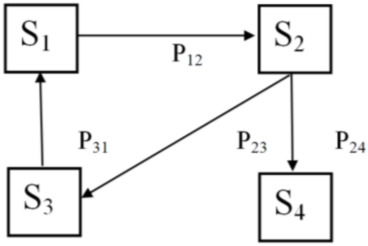

Рис. 1 – Размеченный граф состояний

Вероятности состояний, в которых окажется система после ***k-го*** шага, определяются формулой

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) P_{ij}, (i = 1,2,\ldots,n), \qquad (2)$$

где ***$p_j(k-1)$*** - вероятность состояния системы после ***(k-1)****-го* шага.

Например, после первого шага вероятности состояний будут:

$$p_1(1) = P_{m1}; p_2(1) = P_{m2}; \ldots; p_m(1) = P_{mm}; \ldots; p_n(1) = P_{mn}, \qquad (3)$$

где P_{m1}, P_{T2}, ... — вероятности перехода системы из начального состояния в 1-е состояние.

Пример 1. Для графа на рисунке 2 получим: ***$P_{11}=1-P_{12}$; $P_{22}=1-(P_{23}+P_{24})$; $P_{33}=1-P_{31}$; $P_{44}=1$,*** т.к. переход в другое состояние невозможен.

Пример 2. Группа из четырех автомобилей в процессе эксплуатации подвергается последовательным воздействиям (ТО, ТР, КР, СО, ДТП и т.п.). Возможные состояния группы автомобилей (системы *S*): S_1 — все автомобили работоспособны; S_2 — вышел из строя один автомобиль; S_3 — вышли из строя два автомобиля; S_4 — вышло из строя три автомобиля; S_5 — вышли из строя все автомобили. Размеченный граф состояний системы показан на рис. 2.

Найти вероятности состояний группы автомобилей после трех воздействий.

Решение.

До первого воздействия все автомобили работоспособны.

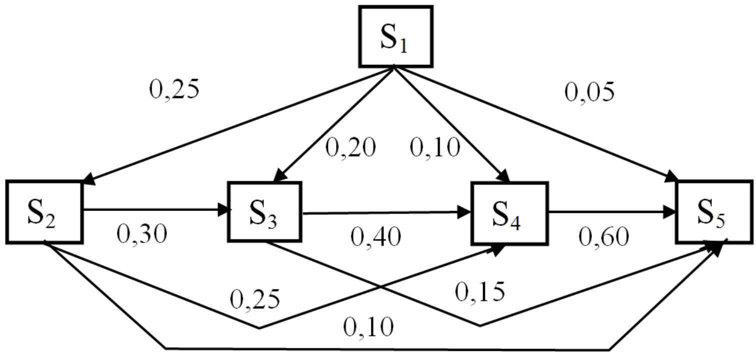

Рис. 2 – Размеченный граф состояния системы
(группа автомобилей)

Из графа состояний имеем вероятности перехода из 1-го состояния в остальные:

$P_{12}=0{,}25;\ P_{13}=0{,}20;\ P_{14}=0{,}10;\ P_{l5}=0{,}05;$

$P_{11}=1-(P_{12}+P_{13}+P_{14}+P_{15})=1-(0{,}25+0{,}20+0{,}10+0{,}05)=0{,}40.$

Аналогично из 2-го и последующих состояний:

$P_{21}=0;\ P_{23}=0{,}30;\ P_{24}=0{,}25;\ P_{25}=0{,}10;\ P_{22}=0{,}35;$

$P_{31}=0;\ P_{32}=0;\ P_{34}=0{,}40;\ P_{35}=0{,}15;\ P_{33}=0{,}45;$

$P_{41}=0;\ P_{42}=0;\ P_{43}=0;\ P_{45}=0{,}60;\ P_{44}=0{,}40;$

$P_{51}=0;\ P_{52}=0;\ P_{53}=0;\ P_{54}=0;\ P_{55}=1.$

Матрица переходных состояний имеет вид:

$$\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0{,}45 & 0{,}40 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Так как до первого воздействия все автомобили работоспособны, то $p_1(0)=1$ и поэтому после первого воздействия вероятности состояний будут равны значениям, взятым из первой строки матрицы: $p_1(1)=0{,}40;$ $p_2(1)=0{,}25;$ $p_3(1)=0{,}20;$ $p_4(1)=0{,}10;$ $p_5(1)=0{,}05.$

Используя формулу (2), найдем вероятности состояний после второго воздействия:

$p_1(2)=p_1(1)P_{11}=0{,}40\cdot 0{,}40=0{,}160;$

$p_2(2)=p_1(1)P_{12}+p_2(1)P_{22}=0{,}40\cdot 0{,}25+0{,}25\cdot 0{,}35=0{,}188;$

$p_3(2)=p_1(1)P_{13}+p_2(1)P_{23}+p_3(1)P_{33}=0{,}40\cdot 0{,}20+0{,}25\cdot 0{,}30+0{,}20\cdot 0{,}45=0{,}245;$

$p_4(2)=p_1(1)P_{14}+p_2(1)P_{24}+p_3(1)P_{34}+p_4(1)P_{44}=$
$=0{,}40\cdot 0{,}10+0{,}25\cdot 0{,}25+0{,}20\cdot 0{,}40+0{,}10\cdot 0{,}40=0{,}222;$
$p_5(2)=p_1(1)P_{15}+p_2(1)P_{25}+p_3(1)P_{35}+p_4(1)P_{45}+p_5(1)P_{55}=$
$=0{,}40\cdot 0{,}05+0{,}25\cdot 0{,}10+0{,}20\cdot 0{,}15+0{,}10\cdot 0{,}40+0{,}05\cdot 1=0{,}185.$

Вероятности состояний после третьего воздействия по формуле (2) будут:

$p_1(3)=p_1(2)P_{11}=0{,}160\cdot 0{,}40=0{,}0640;$
$p_2(3)=p_1(2)P_{12}+p_2(2)P_{22}=0{,}160\cdot 0{,}25+0{,}188\cdot 0{,}35=0{,}1058;$
$p_3(3)=p_1(2)P_{13}+p_2(2)P_{23}+p_3(2)P_{33}=$
$=0{,}160\cdot 0{,}20+0{,}188\cdot 0{,}30+0{,}245\cdot 0{,}45=0{,}1986;$
$p_4(3)=p_1(2)P_{14}+p_2(2)P_{24}+p_3(2)P_{34}+p_4(2)P_{44}=$
$=0{,}160\cdot 0{,}10+0{,}188\cdot 0{,}25+0{,}245\cdot 0{,}40+0{,}222\cdot 0{,}40=0{,}2498;$
$p_5(3)=p_1(2)P_{15}+p_2(2)P_{25}+p_3(2)P_{35}+p_4(2)P_{45}+p_5(2)P_{55}=$
$=0{,}160\cdot 0{,}05+0{,}188\cdot 0{,}10+0{,}245\cdot 0{,}15+0{,}222\cdot 0{,}60+0{,}185\cdot 1=0{,}3818.$

Таким образом, после трех воздействий вероятности исходов:

— все автомобили работоспособны $p_1(3)\approx 0{,}06$;
— один автомобиль выйдет из строя $p_2(3)\approx 0{,}11$;
— два автомобиля выйдут из строя $p_3(3)\approx 0{,}20$;
— три автомобиля выйдут из строя $p_4(3)\approx 0{,}25$;
— все четыре автомобиля выйдут из строя $p_5(3)\approx 0{,}38$.

Отсюда можно найти, например, вероятность того, что выйдет из строя не менее двух автомобилей: $R_{4,2}=p_3(3)+p_4(3)+p_5(3)=0{,}20+0{,}25+0{,}38=0{,}83$;не менее трех автомобилей: $R_{4,3}=p_4(3)+p_5(3)=0{,}25+0{,}38=0{,}63$.

1.2 НЕОДНОРОДНАЯ МАРКОВСКАЯ ЦЕПЬ

В неоднородной марковской цепи вероятности перехода $\boldsymbol{P_{ij}}$ меняются от шага к шагу. Для такой цепи вероятности состояний системы после $\boldsymbol{k}$ шагов находятся по формуле

$$p_i(k)=\sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)P_{ij}^{(k)};(i=1,2,...,n), \qquad (4)$$

где $P_{ij}^{(k)}=P\left(S_j^{(k)}/S_i^{(k-1)}\right)$ - условная вероятность перехода системы из состояния $\boldsymbol{S_i}$ в состояние $\boldsymbol{S_j}$ на *k-м* шаге.

Пример 3. Принимаются условия, заданные в примере 2, но вероятности перехода для трех последовательных воздействий различны и заданы тремя матрицами:

$$\left\|P_{ij}^{(1)}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0{,}45 & 0{,}40 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|P_{ij}^{(2)}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0{,}10 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}30 & 0{,}70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|P_{ij}^{(3)}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}40 & 0{,}25 & 0{,}20 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}45 & 0{,}30 & 0{,}20 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}55 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}20 & 0{,}80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Найти вероятности состояний группы автомобилей после трех воздействий.

Решение.

Вероятности состояний после первого воздействия берем из первой строки матрицы: $p_1(1)=0{,}40;$ $p_2(1)=0{,}25;$ $p_3(1)=0{,}20;$ $p_4(1)=0{,}10;$ $p_5(1)=0{,}05.$

Вероятности состояний после второго воздействия находим по формуле (4):

$$p_1(2)=p_1(1)P_{11}^{(2)}=0{,}40\cdot 0{,}20=0{,}080;$$
$$p_2(2)=p_1(1)P_{12}^{(2)}+p_2(1)P_{22}^{(2)}=0{,}40\cdot 0{,}25+0{,}25\cdot 0{,}20=0{,}150;$$
$$p_3(2)=p_1(1)P_{13}^{(2)}+p_2(1)P_{23}^{(2)}+p_3(1)P_{33}^{(2)}=$$
$$=0{,}40\cdot 0{,}30+0{,}25\cdot 0{,}40+0{,}20\cdot 0{,}10=0{,}240;$$
$$p_4(2)=p_1(1)P_{14}^{(2)}+p_2(1)P_{24}^{(2)}+p_3(1)P_{34}^{(2)}+p_4(1)P_{44}^{(2)}=$$
$$=0{,}40\cdot 0{,}15+0{,}25\cdot 0{,}25+0{,}20\cdot 0{,}50+0{,}10\cdot 0{,}30=0{,}252;$$
$$p_5(2)=p_1(1)P_{15}^{(2)}+p_2(1)P_{25}^{(2)}+p_3(1)P_{35}^{(2)}+p_4(1)P_{45}^{(2)}+p_5(1)P_{55}^{(2)}=$$
$$=0{,}40\cdot 0{,}10+0{,}25\cdot 0{,}15+0{,}20\cdot 0{,}40+0{,}10\cdot 0{,}70+0{,}05\cdot 1=0{,}278.$$

Аналогично по формуле (4) находим вероятности состояний после трех воздействий:

$p_1(3)=p_1(2)P_{11}^{(3)}=0{,}080\cdot 0{,}05=0{,}004;$

$p_2(3)=p_1(2)P_{12}^{(3)}+p_2(2)P_{22}^{(3)}=0{,}080\cdot 0{,}10+0{,}150\cdot 0{,}05=0{,}0155;$

$p_3(3)=p_1(2)P_{13}^{(3)}+p_2(2)P_{23}^{(3)}+p_3(2)P_{33}^{(3)}=$
$=0{,}080\cdot 0{,}40+0{,}150\cdot 0{,}45+0{,}240\cdot 0{,}05=0{,}1115;$

$p_4(3)=p_1(2)P_{14}^{(3)}+p_2(2)P_{24}^{(3)}+p_3(2)P_{34}^{(3)}+p_4(2)P_{44}^{(3)}=$
$=0{,}080\cdot 0{,}25+0{,}150\cdot 0{,}30+0{,}240\cdot 0{,}55+0{,}252\cdot 0{,}20=0{,}2474;$

$p_5(3)=p_1(2)P_{15}^{(3)}+p_2(2)P_{22}^{(3)}+p_3(2)P_{35}^{(3)}+p_4(2)P_{45}^{(3)}+p_5(2)P_{22}^{(3)}=$
$=0{,}080\cdot 0{,}20+0{,}150\cdot 0{,}20+0{,}240\cdot 0{,}40+0{,}252\cdot 0{,}80+0{,}278\cdot 1=0{,}6216.$

После трех воздействий вероятности исходов:

— все автомобили останутся работоспособными **$p_1(3)\approx 0$**;

— один автомобиль выйдет из строя **$p_2(3)=0{,}02$**;

— два автомобиля выйдут из строя **$p_3(3)=0{,}11$**;

— три автомобиля выйдут из строя **$p_4(3)=0{,}25$**;

— все четыре автомобиля выйдут из строя **$p_5(3)=0{,}62$**.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Три автомобиля в сложных дорожных условиях совершают перевозки грузов. Каждый из них может выйти из строя. Вышедший из строя автомобиль сразу же начинает ремонтироваться. В процессе эксплуатации были проведены три обслуживающих воздействия (текущий или капитальный ремонты). Данная система (система *S)* может находиться последовательно в нескольких состояниях*:* S_1 – все три автомобиля неисправны и ремонтируются; S_2 – один автомобиль исправен, два ремонтируются; S_3 – два автомобиля исправны, один ремонтируется; S_4 – все три автомобиля исправны.

Требуется:

1) сформировать матрицу переходных вероятностей состояний системы;

2) вычислить вероятности состояний системы – «три автомобиля»;

3) определить вероятность того, что исправными являются не менее двух автомобилей и ремонтируется не более одно-

го автомобиля.

Размеченный граф состояний системы показан на рис. 3.

Варианты исходных вероятностей состояний представлены в табл. 1.

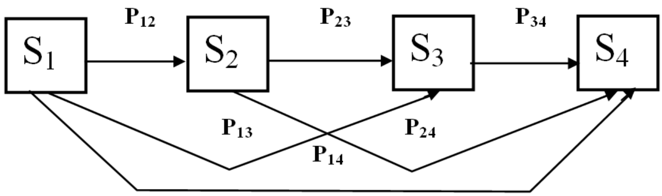

Рис. 3 – Размеченный граф состояния системы «три автомобиля»

Таблица 1 – Варианты исходных данных *

Значения αβγ	Переходные вероятности состояний					
	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{22}	P_{23}	P_{33}
0	0,37	0,10	0,15	0,10	0,40	0,40
1	0,34	0,12	0,16	0,15	0,36	0,45
2	0,31	0,14	0,17	0,20	0,32	0,50
3	0,28	0,16	0,18	0,25	0,28	0,55
4	0,25	0,18	0,19	0,30	0,24	0,60
5	0,22	0,20	0,20	0,35	0,20	0,65
6	0,19	0,22	0,21	0,40	0,16	0,70
7	0,16	0,24	0,22	0,45	0,12	0,75
8	0,13	0,26	0,23	0,50	0,08	0,80
9	0,10	0,28	0,24	0,55	0,04	0,85
	α		β		γ	

* - Вероятности P_{14}, P_{24}, P_{34} – дополнить до 1 при построении матрицы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте математическое определение плотности вероятно-

сти события.

2. Сформулируйте правило для составления дифференциальных уравнений Колмогорова.

3. Дайте определение и графическую трактовку простейшего (Пуассоновского) потока событий.

4. Приведите объяснение понятию «предельные вероятности состояний».

5. Запишите нормировочное уравнение для вычисления предельных вероятностей состояний.

6. Сформулируйте правило для вычисления предельных вероятностей состояний системы.