ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

ПРОЦЕСС «ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ» И ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "Системный анализ"

Авторы:
Димитров Валерий Петрович
Пастухов Александр Геннадьевич
Зубрилина Елена Михайловна

Ростов-на-Дону 2014

Аннотация

Методические указания предназначены для бакалавров по направлению подготовки 221700 Стандартизация и метрология.
Печатается по решению методической комиссии факультета «Приборостроение и техническое регулирование».

Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н, Зубрилина Елена Михайловна;
Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич;
Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - приобрести компетенции моделирования марковских случайных процессов на основе расчета процесса «гибели и размножения» и циклических процессов.

2 Процесс «гибели и размножения»

Схема «гибели и размножения» связана с решением задач биологии, в которых рассматривается процесс изменения численности популяции. Однако модель подобного процесса применима во многих других областях.

Граф состояний системы, описываемой схемой гибели и размножения, представлен на рис. 1. Каждое из средних состояний ***(S_2, ..., S_{n-1})*** связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния ***S_1*** и ***S_n*** — только с одним соседним состоянием.

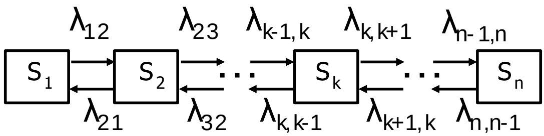

Рис. 1 – Схема графа процесса «гибели и размножения»

Для такой системы, решив алгебраические уравнения для вероятностей состояния, можно получить справедливые при любом числе состояний формулы для определения предельных вероятностей состояния:

$$p_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23} \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} + \ldots + \frac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\ldots\lambda_{21}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}}\right)}$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1$$

...

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\ldots\lambda_{21}} p_1$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \ldots \lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}} p_1. \qquad (1)$$

Как видно из выражений (1), значение $\boldsymbol{p_1}$ полученное из первой формулы, используется во всех остальных.

Пример 1.

Три автомобиля в сложных дорожных условиях перевозят грузы. Каждый из них может выйти из строя. Поток отказов простейший, среднее время безотказной работы каждого автомобиля $\bar{t}_0$ =10 суток. Вышедший из строя автомобиль сразу же начинают ремонтировать, среднее время ремонта t=2 суток. Закон распределения времени ремонта показательный (поток восстановлений простейший).

Найти среднее время пребывания системы из трех автомобилей в каждом из возможных состояний.

Решение.

Возможные состояния системы:

S_1 — все три автомобиля исправны;
S_2 — один автомобиль ремонтируется, два исправны;
S_3 — два автомобиля ремонтируются, один исправен;
S_4 — все три автомобиля ремонтируются.

Граф состояний показан на рис. 2. Разметим этот граф. Стрелками вправо покажем интенсивности потока отказов, влево — восстановления.

$$\begin{array}{ccccccc} & \lambda_{12} & & \lambda_{23} & & \lambda_{34} & \\ \boxed{S_1} & \rightleftarrows & \boxed{S_2} & \rightleftarrows & \boxed{S_3} & \rightleftarrows & \boxed{S_4} \\ & \lambda_{21} & & \lambda_{32} & & \lambda_{43} & \end{array}$$

Рис. 2 – Граф системы «три автомобиля на перевозках»

Так как поток отказов простейший, то промежутки времени между отказами в этом потоке распределены по показательному закону с параметром $\lambda_0=1/\bar{t}_0$. Следовательно, интенсивность отказов равна - $\lambda_0=l/\bar{t}_0=1/10$ сут$^{-1}$.

Интенсивность потока восстановлений будет - $\lambda_В=l/\bar{t}_В=1/2$ сут$^{-1}$.

Если система находится в состоянии S_1, то работают три автомобиля, каждый из них подвергается потоку отказов с интенсивностью $\lambda_о$. Следовательно, на всю систему (три работающих автомобиля) поток отказов действует, с интенсивностью в три раза большей: $\lambda_{12}=3\lambda_0=3/10$ сут$^{-1}$.

Соответственно, если система находится в состоянии S_2 (два исправных автомобиля), то $\lambda_{23}=2\lambda_0=2/10$ сут$^{-1}$,

и если в состоянии S_3, то $\lambda_{34}=\lambda_0==1/10$ сут$^{-1}$.

Аналогично рассуждая, получим интенсивность потоков восстановлений:

$\lambda_{43}=3\lambda_В==3/2$ сут$^{-1}$,

$\lambda_{32}=2\lambda_В==2/2$ сут$^{-1}$,

$\lambda_{21}=\lambda_В==1/2$ сут$^{-1}$.

Пользуясь формулами (1), находим предельные вероятности состояний:

$$p_1=\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}+\frac{\lambda_{23}\cdot\lambda_{12}}{\lambda_{32}\cdot\lambda_{21}}+\frac{\lambda_{34}\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{43}\lambda_{32}\lambda_{21}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{3\cdot 2}{10\cdot 1}+\frac{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 1\cdot 1}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 3\cdot 1\cdot 1}\right)}=0{,}579;$$

$$p_2=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}p_1=\frac{3\cdot 2}{10\cdot 1}\cdot 0{,}579=0{,}347$$

$$p_3=\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}}p_1=\frac{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 1\cdot 1}\cdot 0{,}579=0{,}069$$

$$p_4=\frac{\lambda_{34}\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{43}\lambda_{32}\lambda_{21}}p_1=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 3\cdot 1\cdot 1}\cdot 0{,}579=0{,}005.$$

Вывод:

S_1 — исправны все три автомобиля – 57,9% времени;

S_2 — один автомобиль ремонтируется, два исправны – 34,7% времени;

S_3 — два автомобиля ремонтируются, один исправен – 6,9% времени;

S_4 — все три автомобиля ремонтируются, все неисправны – 0,5% времени.

3 Циклический процесс

Если состояния системы связаны в кольцо (цикл) с односторонними переходами (рис. 3), процесс, протекающий в такой системе, называется ***циклическим***.

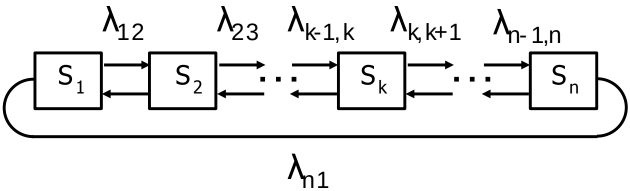

Рис. 3 – Граф циклического процесса

Вероятности состояний системы для циклического процесса находятся по формулам (2).

$$p_1 = \frac{1}{1 + \lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-1,n}} + \frac{1}{\lambda_{n,1}}\right)} \qquad (2)$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1$$

$$\ldots$$

$$p_k = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k,k+1}} p_1$$

$$\ldots$$

$$p_n = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n,1}} p_1.$$

Если заданы средние $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, ..., $\bar{t}_n$ пребывания системы S в состояниях S1, S2, ..., S_n, то предельные вероятности состояний в циклической схеме определяются по формулам (3):

$$p_1 = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_n};$$

$$p_2 = \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_n}; \qquad (3)$$

$$\ldots$$

$$p_n = \frac{\bar{t}_n}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_n}.$$

Или в общем случае:

$$p_k = \frac{\bar{t}_k}{\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i}, (k = 1,2,\ldots,n). \qquad (4)$$

Пример 2.

Частный предприниматель-автомобилист, занимаясь грузовыми перевозками, производит поиск заказчика для транспортировки груза, погрузку груза и его перевозку в заданный пункт со сдачей груза предприятию, затем цикл повторяется. Интенсивности потоков событий λ_{12}, λ_{23}, λ_{31}.

Найти предельные вероятности состояний системы.

Решение.

Размеченный граф состояний показан на рис. 4, где:

S_1 — поиск груза и заключение договора на перевозку;

S_2 — погрузка груза;

S_3 — перевозка груза и сдача на предприятии.

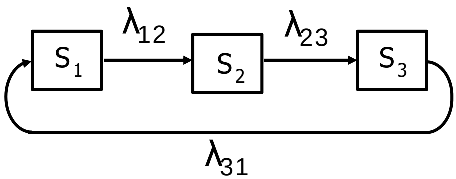

Рис. 4. Граф состояний системы S

Используя формулы (2), получим предельные вероятности состояний:

$$p_1 = \frac{1}{1+\lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}}+\frac{1}{\lambda_{31}}\right)};$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1;$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} p_1;$$

Тот же результат можно получить, руководствуясь общим правилом определения предельных вероятностей состояний.

Для этого вначале составляем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{31} \cdot p_3; \quad \frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23} \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31} \cdot p_3 + \lambda_{23} \cdot p_2.$$

Приравняв нулю левые части уравнений, получим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний:

$$\lambda_{12} \cdot p_1 = \lambda_{31} \cdot p_3;$$

$$\lambda_{23} \cdot p_2 = \lambda_{12} \cdot p_1;$$

$$\lambda_{31} \cdot p_3 = \lambda_{23} \cdot p_2,$$

решение которых, при нормировочном условии $\boldsymbol{p_1+p_2+p_3=1}$, даст тот же результат, что и решение по формулам (2).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение процессу «гибели и размножения».
2. В каких областях науки применяют понятие процессов «гибели и размножения»?
3. К определению каких величин сводят расчет систем с процес-

сами «гибели и размножения»?
4. Дайте определение циклического процесса.
5. Каковы отличия систем с процессом «гибели и размножения» и циклического процесса?
6. Изобразите пример графа для системы с тремя состояниями и процессом «гибели и размножения».
7. Покажите схематически граф системы с циклическим процессом.
8. Возможно ли применение для расчета вероятностей состояний системы в циклических процессах и процессах «гибели и размножения» уравнений Колмогорова?
9. В чем заключается физический смысл значений вероятностей нахождения системы в определенных состояниях по отношению ко времени?