ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Авторы:
Зубрилина Е.М.
Пастухов А.Г.
Димитров В.П.

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика моделирования по схеме марковских случайных процессов, однородных и неоднородных марковских цепей. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н, Зубрилина Елена Михайловна
Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич
Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - приобрести компетенции моделирования процессов на основе моделировании систем массового обслуживания.

1 МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системы массового обслуживания могут быть двух типов — с отказами и с ожиданием (с очередью).

В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, покидает систему и в дальнейшем процессе не участвует. В системах с ожиданием заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и принимается к обслуживанию, как только освободится один из каналов.

Основными параметрами системы массового обслуживания являются:

n — число каналов;

λ — интенсивность потока заявок (среднее число заявок, поступающих в единицу времени);

μ — производительность каждого канала (среднее число заявок, обслуживаемых каналом в единицу времени), а также ограничения (длина очереди, время пребывания заявки в очереди и др.).

Сведения данного раздела относятся только к системам массового обслуживания, в которых все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются пуассоновскими (потоками без последствий). Для математического описания таких процессов применяется аппарат марковских случайных процессов.

Составление дифференциальных уравнений Колмогорова для марковских систем массового обслуживания производится по правилам, изложенным ранее.

Пример 1.

Рассматривается трехканальная система массового обслуживания с отказами. Интенсивность потока заявок ***λ***, интенсивность потока обслуживания ***μ***. Составить дифференциальные уравнения состояний системы.

Решение.

Возможные состояния системы:

S_0 — все каналы свободны;

S_1 — занят один канал, два свободных;

S_2 — заняты дна канала, один свободен;

S_3 — заняты все три канала.

Граф состояний показан на рис. 1.

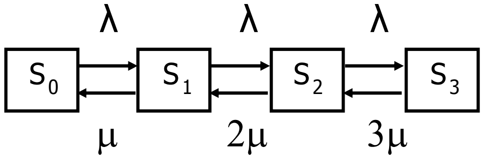

Рис. 1. Граф состояния для примера 1

Разметим граф. Если система находится в состоянии S_0, то поступившая заявка, переводит ее в S_1 с интенсивностью λ. Если система находится в состоянии S_1, то поступившая заявка переводит ее в S_2 с интенсивностью λ и т.д. Переход системы в обратном направлении будет при следующих условиях. Из S_1 (занят один канал) система перейдет в S_0 тогда, когда закончится обслуживание заявки, занимающей этот канал. Интенсивность этого потока событий μ. Если обслуживанием занято два канала, то поток событий, переводящий систему из S_2 в S_1, будет вдвое интенсивнее, т.е. равным 2μ. Аналогично поток событий, переводящий систему из S_3 в S_2, будет равен 3μ.

Разметив граф состояний (рис. 1) и пользуясь общим правилом, составим уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_0}{dt} &= -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1; \\
\frac{dp_1}{dt} &= -(\lambda + \mu) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_2; \\
\frac{dp_2}{dt} &= -(\lambda + 2\mu) \cdot p_2 + \lambda \cdot p_1 + 3\mu \cdot p_3; \\
\frac{dp_3}{dt} &= -3\mu \cdot p_3 + \lambda \cdot p_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Начальные условия (при t=0): $p_0=1;\ p_1=p_2=p_3=0$.

Решение уравнений типа (1) обычно выполняется на ЭВМ. При этом будут получены вероятности состояний как функции времени. В большинстве случаев бывает достаточным знание предельных вероятностей состояний, характеризующих установившийся режим работы системы массового обслуживания (при $t\to\infty$). Для этого согласно правилу следует левые части уравнений (производные) положить равными нулю и решить полученную таким образом систему линейных алгебраических уравнений.

В табл. 1 приведены размеченные графы состояний некоторых типов систем массового обслуживания и предельные вероятности состояний этих систем. Составление дифференциальных уравнений состояний системы при наличии размеченного графа рассмотрены нами ранее.

Для оценки эффективности систем массового обслуживания (при $t\to\infty$) можно воспользоваться данными табл. 2, в которой для различных показателей эффективности даны расчетные формулы. Предельные вероятности состояний систем массового обслуживания, используемые в расчетных формулах табл. 2, находятся из соотношений (15) — (20) табл. 1. Для краткости записи в табл. 1 и 2 обозначены: $\rho=\lambda/\mu$; $\chi=\rho/n$.

Дополнить табл. 1 и 2 для различных графов.

Пример 2.

Вычислительная станция имеет три ЭВМ ($n=3$). Средняя интенсивность потока на выполнение расчетов — четыре заявки в час ($\lambda=4$). Среднее время решения одной задачи $t_{об}=0{,}5$ ч. Станция принимает и ставит в очередь на решение не более $\tau=3$ заявок. Заявки, прибывшие, когда в очередь поставлено 3 заявки, не принимаются (получают отказ). Найти основные характеристики системы массового обслуживания: вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число занятых ЭВМ, среднее число заявок в очереди, среднее время ожидания и пребывания заявки на станции.

Решение.

Имеем многоканальную систему массового обслуживания с ожиданием при ограниченном τ числе мест в очереди

Предварительно вычислим:

$\mu=1/\bar{t}_{об}=1/0.5=2$ ч$^{-1}$; $\rho=\lambda/\mu=4/2=2$; $\chi=\rho/n=2/3$.

Используя формулы (19), находим:

- вероятность того, что все ЭВМ свободны

$$p_0=\frac{1}{1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^3}{3!}\cdot\frac{\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}}=\frac{1}{1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\frac{2}{3}}}=\frac{81}{665}=0.122,$$

- вероятность того, что все три ЭВМ заняты и три заявки стоят в очереди

$$p_{m+n}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}p_0=p_6=\frac{2^6}{3^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{81}{665}=\frac{32}{665}=0.048.$$

Последующие расчеты выполняем с помощью формул табл. 2:

Относительная пропускная способность:

Q=1-p$_{m+n}$=1-p$_6$=1-0.048=0.952.

Абсолютная пропускная способность:

A=λq=4·0.952=3.808 заявок в час.

Вероятность отказа:

P$_{отк}$=p$_{m+n}$=p$_6$=0.048.

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$\bar r=\frac{\rho^{n+1}p_0}{nn!}\cdot\frac{1-(m+1)\chi+m\chi}{(1-\chi)^2}=\frac{2^4\cdot 81}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 665}\cdot\frac{1-4\frac{2}{3}+3\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2}=\frac{216}{665}=0.325.$$

Среднее число занятых ЭВМ: *z¯=A/μ=3.808/2=1,904.*

Среднее число заявок, находящихся в вычислительной станции:

k=r¯+z¯=0,325+1,904=2,229.

Среднее время ожидания заявки в очереди:

t¯$_{ож}$=r¯/λ=216·4/665=0,081 ч.

Среднее время пребывания заявки в вычислительной станции:

t¯$_{сист}$=t¯$_{ож}$+q/μ=0.081+0.952/2=0.557 ч.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Моделирование систем массового обслуживания

Задача 1.

Техническая система S состоит из двух узлов. В случайные моменты времени каждый из узлов поочередно может выйти из строя (отказать), после чего сразу же начинается ремонт узла.

Возможны следующие состояния системы: S_0 - оба узла исправны; S_1 – первый узел ремонтируется, второй исправен; S_2 – второй узел ремонтируется, первый – исправен; S_3 – оба узла ремонтируются.

Поток отказов интенсивностью λ_1 переводит систему из состояния S_0 в S_1. Обратный перевод осуществляется потоком восстановления интенсивностью μ_1.

Потоки отказов и восстановления считаем простейшими, а интервалы времени между событиями имеют экспоненциальное распределение с параметром, равным интенсивности соответствующего потока. Аналогично осуществляются другие переходы.

Требуется:

1) определить вероятности состояний системы $\boldsymbol{p_0, p_1, p_2, p_3}$ с использованием уравнений Колмогорова и нормировочного уравнения;

2) трудоемкость ремонта каждого узла;

3) трудоемкость ремонта обоих узлов.

Размеченный граф состояний системы S показан на рис. 1.

Таблица 1 – Варианты исходных данных

Значения αβγ	Интенсивность потока отказов		Интенсивность потока восстановления	
	λ_1, ч$^{-1}$	λ_2, ч$^{-1}$	μ_1, ч$^{-1}$	μ_2, ч$^{-1}$
0	0,5	3,0	1,5	4,0
1	1,0	2,5	2,0	3,5
2	1,5	2,0	2,5	3,0
3	2,0	1,5	3,0	2,5
4	2,5	1,0	3,5	2,0
5	0,5	3,0	1,5	4,0
6	1,0	2,5	2,0	3,5
7	1,5	2,0	2,5	3,0
8	2,0	1,5	3,0	2,5
9	2,5	1,0	3,5	2,0
	α	γ	β	γ

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В каких случаях применяют расчет СМО по методу динамики средних?
2. В чем заключается сущность метода динамики средних?
3. Какие величины являются характеристиками случайной величины $X_k(t)$ численности единиц (элементов), находящихся в момент t в состоянии ε_k?
4. Для определения математического ожидания и дисперсии случайной величины необходимо знать интенсивности всех потоков событий, переводящих *элемент или систему* из состояния в состояние?
5. Какие действия необходимо предпринять для составления дифференциальных уравнений средних численностей состояний (уравнений динамики средних)?