ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ.

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Авторы:
Зубрилина Е.М.
Пастухов А.Г.
Димитров В.П.

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика моделирования по схеме марковских случайных процессов, однородных и неоднородных марковских цепей. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н, Зубрилина Елена Михайловна
Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич
Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - приобрести компетенции в моделировании процессов на основе расчета непрерывных марковских цепей.

1 МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ (НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ)

Вместо переходных вероятностей $\boldsymbol{P_{ij}}$ матрицы здесь применяется плотность вероятности перехода $\boldsymbol{\lambda_{ij}}$, которую можно представить в виде отношения:

$$\lambda_{ii} = \lim \frac{P_{ij}(\Delta t)}{}, \qquad (1)$$

где P_{ij} (Δt) — вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i, за время Δt перейдет из него в состояние S_j.

Если все плотности вероятностей λ_{ij} не зависят от t, марковский процесс называется *однородным,* если эти плотности являются функциями от времени $\lambda_{ij}(t)$, процесс называется *неоднородным.*

Вероятности состояний системы могут быть найдены интегрированием системы дифференциальных уравнений, которые называются *уравнениями Колмогорова.* Составление уравнений Колмогорова производится по определенному правилу.

Прежде всего, необходимо составить размеченный граф состояний (рис. 1).

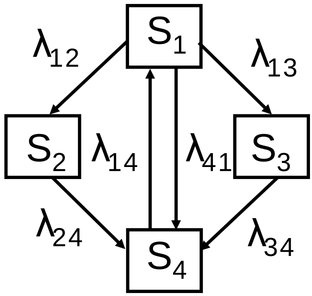

Рис. 1. Размеченный граф состояний системы

Затем при написании уравнений руководствоваться следующим: В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак «минус», если в состояние — знак «плюс». Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующей данной стрелке, на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка. Начальные условия берутся в зависимости от того, каково было начальное состояние системы S.

Пример 1. Размеченный граф состояний системы представлен на рис. 1.

Написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова и начальные условия для решения этой системы, если известно, что в начальный момент система находилась в состоянии S_1.

Решение.

Руководствуясь изложенным выше правилом, запишем уравнения Колмогорова:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14})\cdot p_1(t)+\lambda_{41}\cdot p_4(t);\\
\frac{dp_2(t)}{dt} &= -\lambda_{24}\cdot p_2(t)+\lambda_{12}\cdot p_1(t);\\
\frac{dp_3(t)}{dt} &= -\lambda_{34}\cdot p_3(t)+\lambda_{13}\cdot p_1(t);\\
\frac{dp_4(t)}{dt} &= -\lambda_{41}\cdot p_4(t)+\lambda_{14}\cdot p_1(t)+\lambda_{24}\cdot p_2(t)+\lambda_{34}\cdot p_3(t).
\end{aligned}\right\}(2)$$

Начальные условия:
при t=0 $p_1(0)=1$; $p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=0$.

Так как $p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)+p_4(t)=1$, то систему из всех четырех уравнений можно было бы не писать, а любую из этих вероятностей выразить через три остальные.

В уравнениях (2) $p_i(t)$ - вероятность того, что в момент t система S будет находиться в состоянии S_i (i=1, 2, …, n). В дальнейшем для краткости записи аргумент t у функций p_i будет опускаться.

Коэффициенты при p_i могут быть постоянными или переменными в зависимости от того, постоянны или переменны интенсивности λ_{ij} потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние. Уравнения для вероятностей состояния представляют собой линейные дифференциальные уравнения, которые только в редких случаях могут быть проинтегрированы в квадратурах: обычно их решают численно (вручную или на ЭВМ).

2 ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК

Рассмотрим поток однородных событий (требований), различающихся только моментами их появления. Такой поток можно изобразить последовательностью точек на оси времени (рис. 2).

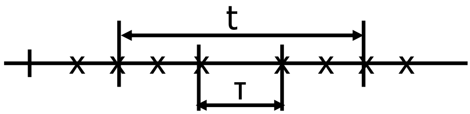

Рис. 2. Поток требований во времени

Входящий поток называют простейшим, если вероятность поступления того или иного числа требований в течение интервала времени t зависит только от протяженности этого интервала и не зависит от его расположения на оси времени (*стационарность*), причем требования поступают поодиночке (*ординарность*) и независимо друг от друга (*отсутствие последействия*).

Хотя многие индивидуальные процессы и не удовлетворяют полностью этим требованиям, понятие простейшего потока играет большую роль, так как близкие к нему потоки часто встречаются на практике. Но наиболее важно то обстоятельство, что в результате суммирования некоторого числа стационарных ординарных потоков с практически любым последействием получается поток, близкий к простейшему.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность наступления k событий за время t. Если поток требований простейший, то вероятность случайного события, состоящего в том, что за время $t+\Delta t$ поступит точно n требований, можно представить как

$$P_n(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t)\cdot P_k(\Delta t).$$

Решая это уравнения, находим для плотности распределения числа требований за время t следующее выражение

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

Что представляет собой дискретное распределение Пуассона, которое характеризует простейший поток. На рис. 3 показаны графики этого распределения для различных значений *a=λt*..

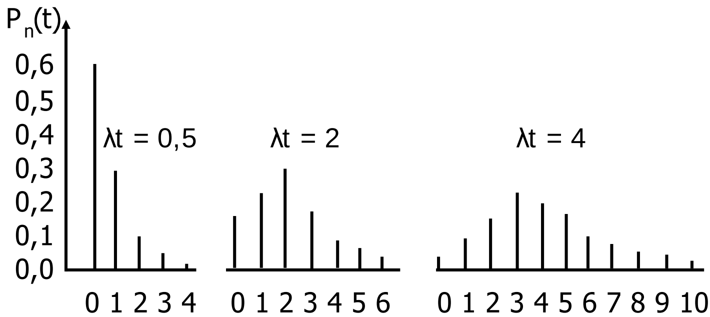

Рисунок 3 – Распределение Пуассона

3 НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ С ПУАССОНОВСКИМИ ПОТОКАМИ СОБЫТИЙ

Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние, пуассоновские (стационарные или нестационарные), то процесс, протекающий в системе, будет марковским. Плотность вероятности перехода $\boldsymbol{\lambda_{ij}}$ (см. формулу 1) в непрерывной цепи Маркова представляет собой интенсивность потока событий.

Составление уравнений состояния системы, находящейся под воздействием пуассоновского потока событий, производится аналогично тому, как рассмотрено выше для системы, характеризуемой плотностями вероятностей перехода.

Пример 2. Станцией технического обслуживания обеспечивается ТО и Р четырех автомобилей, из которых один основной и три дополнительные с общей грузоподъемностью равной грузоподъемности основного. Интенсивность потока воздействующих факторов, приводящих к снижению параметров технического состояния и выходу из строя, изменяется со временем, по мере выполнения перевозок, и составляет λ(t).

Вначале транспортный процесс осуществляет основной автомобиль. После его выхода из строя перевозку осуществляют одновременно три дополнительных автомобиля.

Составить размеченный граф состояний и написать уравнения Колмогорова, для вероятностей состояний.

Решение.

Будем нумеровать состояния системы соответственно числу работоспособных автомобилей:

S_4 — все автомобили работоспособны;

S_3 — основной автомобиль вышел из строя, остальные автомобили работоспособны;

S_2 — основной автомобиль и один из дополнительных вышли из строя, остальные автомобили работоспособны;

S_1 — основной автомобиль и два из дополнительных вышли из строя, один дополнительный автомобиль работоспособен;

S_0 — все автомобили отказали.

Граф состояний показан на рис. 4.

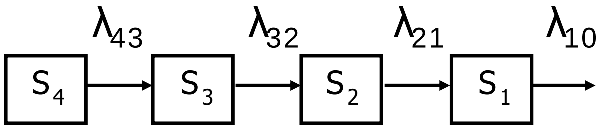

Рис. 4. Граф состояний для примера 2

Чтобы разметить этот граф состояний, определим интенсивность потоков факторов выводящих из строя автомобили и переводящих систему, из состояния в состояние.

Из состояния S_4 в S_3 в систему переводит поток повреждающих факторов с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda}_{34}(t)=\boldsymbol{\lambda}(t)$.

Из состояния S_3 в S_2 систему переводит поток повреждающих факторов с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda}_{32}(t)=\boldsymbol{\lambda}(t)$, так как по условиям примера после отказа основного автомобиля действие повреждающих факторов распределяется равномерно по остальным трем дополнительным автомобилям.

Аналогично для $\boldsymbol{\lambda}_{21}(t)=\boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\boldsymbol{\lambda}_{10}(t)=\boldsymbol{\lambda}(t)$.

Обозначая вероятности состояний соответственно ***p_4, p_3, p_2, p_1, p_0,*** запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = -\lambda(t)\cdot p_4; \quad \frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda(t)\cdot p_3 + \lambda(t)\cdot p_1;$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda(t)\cdot p_2 + \lambda(t)\cdot p_3; \quad \frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda(t)\cdot p_1 + \lambda(t)\cdot p_2;$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lambda(t)\cdot p_1.$$

Начальные условия (при t=0 все автомобили работоспособны): $p_4=1,\ p_3=p_2=p_1=p_0=0.$

Пример 3.

Три автомобиля совершают ралли-рейд и форсируют сложный участок пересеченной местности. Плотность препятствий на местности такова, что при принятой скорости движения автомобилей интенсивность встречи с препятствием **λ**. При встрече с препятствием команда автомобиля принимает меры защиты и сходит с трассы с вероятностью $\boldsymbol{p}$. Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояния системы.

Решение.

Состояния системы характеризуются числом сохраненных автомобилей. Все автомобили равноценны, с одинаковой интенсивностью и независимо могут встретить препятствие. Вероятность схода автомобиля с трассы при встрече с препятствием одинакова для каждого из них.

Пронумеруем состояния системы:

$\boldsymbol{S_3}$ — все автомобили остались на трассе;

$\boldsymbol{S_2}$ — один автомобиль сошел, два остались на трассе;

$\boldsymbol{S_1}$ — два автомобиля сошли, один остался на трассе;

$\boldsymbol{S_0}$ — все автомобили сошли с трассы.

Граф состояний показан на рис. 5.

Разметим граф, для чего определим интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние.

Из состояния S_3 в S_2 систему переводит поток неудачных встреч с препятствиями.

Интенсивность встреч равна **λ**, но не все они повреждающие, каждое из них оказывается повреждающим только с вероятностью $\boldsymbol{p}$. Так как система $\boldsymbol{S}$ в состоянии $\boldsymbol{S_3}$ состоит из трех автомобилей, на каждый из них действует поток повреждающих встреч с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda p}$, то на систему в целом действует суммарный поток неудачных повреждающих встреч с интенсивностью $\boldsymbol{3\lambda p}$.

$$\boxed{S_3} \xrightarrow{3\lambda p} \boxed{S_2} \xrightarrow{2\lambda p} \boxed{S_1} \xrightarrow{1\lambda p}$$

Рис. 5. Граф состояний для примера 3

Аналогично из состояния S_2 в S_1 система переводится потоком повреждающих встреч $2\lambda p$, а из $\boldsymbol{S_1}$ в $\boldsymbol{S_0}$ — $\boldsymbol{\lambda p}$.

Вероятности состояний системы обозначим соответственно $\boldsymbol{p_3, p_2, p_1, p_0}$.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний имеют вид (аргумент *t* для краткости записи опускаем):

$$\frac{dp_3}{dt} = -3\lambda \cdot p \cdot p_3; \quad \frac{dp_2}{dt} = -2\lambda \cdot p \cdot p_2 + 3\lambda \cdot p \cdot p_3;$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda \cdot p \cdot p_1 + 2\lambda \cdot p \cdot p_2; \quad \frac{dp_0}{dt} = \lambda \cdot p \cdot p_1.$$

Начальные условия (при t=0 все автомобили находятся на трассе): $p_3=1;\ p_2=p_1=p_0=0.$

4 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Если число состояний системы S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в каждое другое состояние, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы. Например, система, представленная графом состояний на рисунке 6, из любого состояния может перейти в любое другое.

Напротив, для системы, граф состояний которой показан на рис. 7, переход в состояние S_5 возможен из S_1, но невозможен из S_4. При t→∞ и **λ**=const (интенсивности потоков событий постоянны) в системе S (рис. 6) устанавливается некоторый предельный стационарный режим: система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них не зависит от времени — каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью. При этом предельные вероятности состояний p_i так же как и определенные, в сумме должны давать единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{4}$$

Предельные вероятности состояний дают средние относительные величины времени пребывания системы в данном состоянии.

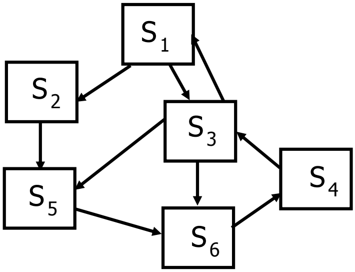

Рис. 6. Граф состояния (при переходе из любого состояния)

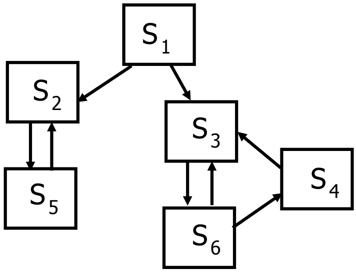

Рис.7. Граф состояния (с невозможность перехода из S_4)

Для вычисления предельных вероятностей состояний нужно составить систему уравнений Колмогорова, описывающих вероятности состояний, и решить ее, положив левые части (производные) равными нулю (в предельном режиме все вероятности состояний постоянные и их производные равны нулю). В этом случае система дифференциальных уравнений превратится в систему линейных алгебраических уравнений, которая решается при нормировочном условии (4).

Пример 4.

Система *S* имеет возможные состояния S_1, S_2, S_3, S_4 размеченный граф которых показан на рис. 8. Вычислить предельные вероятности состояний $p_1, p_2, p_3, p_4,$ если интенсивности потоков событий равны $\lambda_{12}=2; \lambda_{14}=1; \lambda_{24}=1; \lambda_{31}=3; \lambda_{41}=2; \lambda_{43}=2.$

Решение.

Запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{14}) \cdot p_1 + \lambda_{31} \cdot p_3 + \lambda_{41} \cdot p_4;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{24} \cdot p_2 + \lambda_{12} \cdot p_1;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31} \cdot p_3 + \lambda_{43} \cdot p_4;$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{43}) \cdot p_4 + \lambda_{14} \cdot p_1 + \lambda_{24} \cdot p_2.$$

Полагая, левые части равными нулю и поставив значения λ_{ij}, получим систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний:

$$0=-3p_1+3p_2+2p_4; \quad 0=-p_2+2p_1; \quad 0=-3p_3+2p_4; \quad 0=-4p_4+p_1+p_2.$$

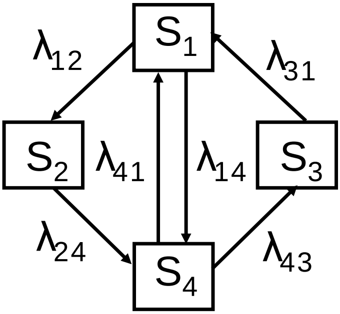

Рис. 8. Размеченный граф состояний системы для примера 4

Решение уравнений при нормировочном условии (4) дает: $p_1={}^4/_{17}$; $p_2={}^8/_{17}$; $p_3={}^2/_{17}$; $p_4={}^3/_{17}$.

Это значит, что в предельном установившемся режиме система S будет находиться в состоянии S_1 в среднем четыре семнадцатых части времени, в состоянии S_2 — восемь семнадцатых, в состоянии S_3 — две семнадцатых и в состоянии S_4 — три семнадцатых.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Система S состоит из трех автомобилей, которые участвуют в гонках на «выживание» на участке пересеченной местности. Плотность препятствий и столкновений на местности такова, что при принятой скорости движения автомобилей интенсивность встречи с препятствием или столкновения равна λ_{ij}. При встрече с препятствием или при столкновении экипаж автомобиля принимает меры защиты и выбывает из гонки (неработоспособен) с вероятностью p_j. Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояния системы.

Данная система может находиться последовательно в следующих состояниях: S_1 – все три автомобиля исправны и находятся на трассе; S_2 – один автомобиль выбыл из гонки, а два находятся на трассе; S_3 – два автомобиля выбыли из гонки, а один находится на трассе; S_4 – все три автомобиля выбыли из гонки (неработоспособны).

Требуется:

1) составить уравнения Колмогорова для марковского процесса заданного графом;

2) определить предельные вероятности состояний системы.

Размеченный граф состояний системы показан на рисунке 2.

матрицы.

Варианты интенсивностей воздействий в системе представлены в табл. 1.

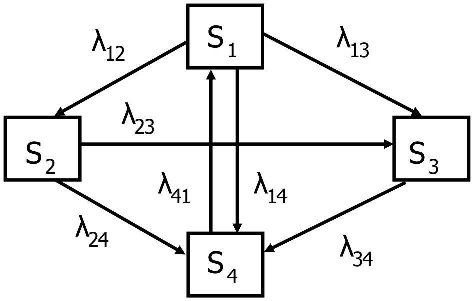

Рис. 9. Размеченный граф состояния системы

Таблица 1 – Варианты исходных данных

Значения αβγ	Интенсивность встречи с препятствием или столкновения					
	λ_{12}	λ_{13}	$\lambda_{14}=\lambda_{41}$	λ_{23}	λ_{24}	λ_{34}
0	0,5	1	3	2,5	1	0,5
1	1,0	2	1	2,0	2	1,0
2	1,5	3	2	1,5	3	1,5
3	2,0	1	3	1,0	4	2,0
4	2,5	2	1	0,5	5	2,5
5	0,5	3	2	2,5	5	2,5
6	1,0	1	3	2,0	4	2,0
7	1,5	2	1	1,5	3	1,5
8	2,0	3	2	1,0	2	1,0
9	2,5	1	3	0,5	1	0,5
	α		β		γ	

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте математическое определение плотности вероятности события.
2. Сформулируйте правило для составления дифференциальных уравнений Колмогорова.
3. Дайте определение и графическую трактовку простейшего (Пуассоновского) потока событий.
4. Приведите объяснение понятию «предельные вероятности состояний».
5. Запишите нормировочное уравнение для вычисления предельных вероятностей состояний.
6. Сформулируйте правило для вычисления предельных вероятностей состояний системы.