ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. МЕТОД ДИНАМИКИ СРЕДНИХ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Авторы:
Зубрилина Е.М.
Пастухов А.Г.
Димитров В.П.

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика моделирования по схеме марковских случайных процессов, однородных и неоднородных марковских цепей. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н, Зубрилина Елена Михайловна
Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич
Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - приобрести компетенции моделирования процессов на основе расчетов по методу динамики средних.

1 ОБЩИЙ ПРИНЦИП СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ (УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СРЕДНИХ)

Сущность метода динамики средних заключается в следующем. Рассматривается не состояние системы в целом, а отдельного ее элемента. Каждый элемент может быть в любом из *п* возможных состояний: ε_i, ε_i, ...,. ε_n.

Состояние системы в целом в, каждый момент *t* характеризуется численностью состояний, т.е. числом единиц, находящихся в состоянии ε_k , которое будет случайным. Характеристиками случайной величины $X_k(t)$ — численности единиц (элементов), находящихся в момент *t* в состоянии ε_k , являются математическое ожидание и дисперсия.

Для нахождения этих характеристик необходимо знать интенсивности всех потоков событий, переводящих *элемент, а не систему* из состояния в состояние. Таким образом, задача сводится к определению вероятностей состояния одного отдельного элемента. А это может быть получено решением дифференциальных уравнений Колмогорова.

Математическое ожидание и дисперсия численности ***k-го*** состояния будут равны

$$m_k(t) = Np_k(t); \tag{1}$$

$$D_k(t) = Np_k(t)\cdot(1 - p_k(t)) = m_k(t)\cdot\left(1 - \frac{m_k(t)}{N}\right), \tag{2}$$

где $p_k(t)$ — вероятность того, что отдельный элемент в момент *t* будет находиться в состоянии ε_k.

Зная дисперсию $D_k(t)$, можно найти среднее квадратическое отклонение численности состояния ε_k :

$$\sigma_k(t) = \sqrt{Np_k(t)\cdot(1-p_k(t))} = \sqrt{m_k(t)\cdot\left(1-\frac{m_k(t)}{N}\right)}. \qquad (3)$$

В общем случае для любого момента времени t ориентировочное значение диапазона практически возможных значений численности будет равно

$$m_k(t) = \pm 3\sigma_k(t). \qquad (4)$$

Если число элементов N в системе велико, то численность ***k-го*** состояния можно считать распределенной по нормальному закону. Тогда вероятность того, что численность ***k-го*** состояния будет заключена в пределах от α до β, находится по формуле

$$P(\alpha < X_k < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - m_k}{\sigma_k}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_k}{\sigma_k}\right)\right]^*, \qquad (5)$$

где m_k, σ_k — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение численности ***k-го*** состояния; Φ(x) — функция Лапласа.

Формулы (2) - (6) применимы только для условий, когда элементы системы однородные, интенсивности потоков событий независимы от средних численностей состояний системы.

Пусть система ***S*** состоит из ***N*** однородных элементов типа $\boldsymbol{\varepsilon}$ и в ней протекает марковский случайный процесс. Для составления дифференциальных уравнений средних численностей состояний (уравнений динамики средних) такой системы необходимо вначале составить размеченный граф состояний каждого элемента с указанием интенсивности $\boldsymbol{\lambda_{ij}}$ всех потоков событий, переводящих элемент $\boldsymbol{\varepsilon}$ из состояния в состояние (рис. 1).

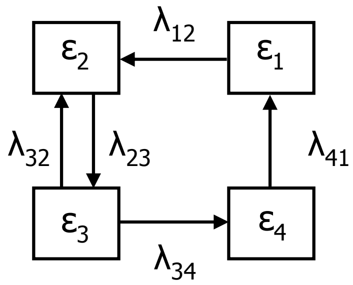

Рис. 1. Схема системы

Затем руководствоваться следующим правилом: производная средней численности состояния равна сумме стольких членов, сколько стрелок связано с данным состоянием; если стрелка направлена из состояния, член имеет знак «минус», если в состояние — знак «плюс»; каждый член равен произведению интенсивности потока событий, переводящего элемент по данной стрелке, на среднюю численность того состояния, из которого исходит стрелка $(\lambda_{kj} m_k(t))$.

Нормирующим условием будет

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t) = N. \qquad (6)$$

Пример 1.

Система S состоит из N однородных элементов. Граф состояний каждого элемента представлен на рис. 1. В начальный момент $t=0$ все элементы находятся в состоянии $\boldsymbol{\varepsilon_i}$. Написать систему дифференциальных уравнений для средних численностей состояний.

Решение.

Руководствуясь сформулированным выше правилом и имея размеченный граф состояний элементов системы, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_{12} \cdot m_1 + \lambda_{41} \cdot m_4; \\
\frac{dm_2}{dt} &= -\lambda_{23} \cdot m_2 + \lambda_{12} \cdot m_1 + \lambda_{32} \cdot m_3; \\
\frac{dm_3}{dt} &= -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) \cdot m_3 + \lambda_{23} \cdot m_2; \\
\frac{dm_4}{dt} &= -\lambda_{41} \cdot m_4 + \lambda_{34} \cdot m_3.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где m_1, $т_2$, $т_3$, $т_4$ — средние численности состояний, удовлетворяющие условию (3). Для краткости записи аргумент *t* опущен.

Учитывая нормирующее условие (6):

$m_1 + т_2 + т_3 + m_4 = N$,

можем одно из уравнений (7) отбросить. Если это будет, например, второе (наиболее сложное), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_{12} \cdot m_1 + \lambda_{41} \cdot m_4; \\
\frac{dm_3}{dt} &= -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) \cdot m_3 + \lambda_{23} \cdot [N - (m_1 + m_3 + m_4)]; \\
\frac{dm_4}{dt} &= -\lambda_{41} \cdot m_4 + \lambda_{34} \cdot m_3.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Так как при $t=0$ все элементы находятся в состоянии $\boldsymbol{\varepsilon_i}$, то начальными условиями (при t=0) будут:

$m_1=N$; $т_2 = т_3 = m_4 = 0$.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (8) производится на ЭВМ или вручную методом численного интегрирования. В результате будут получены значения средних численностей состояний: $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$, $m_4(t)$. Значения дисперсий и средних квадратических отклонений численностей состояний вычисляются по формулам (1) и (2)

2 ПРИНЦИП КВАЗИРЕГУЛЯРНОСТИ

В общем случае интенсивности потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, зависят от того, сколько элементов в данном состоянии имеется в системе. Численности же состояний системы являются случайными, поэтому и интенсивности потоков событий будут случайными. Это обстоятельство затрудняет составление уравнений динамики средних по изложенному ранее принципу, так как неизвестны численности состояний, определяющих интенсивности потоков событий.

Преодоление такого рода затруднений достигается допущением, которое носит название *принципа квазирегулярности.* Принимается, что интенсивность потоков событий, переводящих элемент из состояния в состояние, зависит не от самих численностей состояний, а от их средних значений (математических ожиданий).

Погрешности результатов, которые возникнут вследствие такого допущения для описания процесса, будут тем меньше, чем более многочисленна группа элементов и чем ближе к линейным функции, выражающие интенсивности потоков событий в зависимости от численности состояний.

Принцип составления дифференциальных уравнений динамики средних остается таким же, как описано выше, только интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, будут функциями математического ожидания численностей элементов для соответствующих состояний.

Пример 2.

Цех состоит из большого числа однотипных станков. На каждый из них действует поток неисправностей с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda}$, не зависящей от числа станков, находящихся в исправном состоянии. Ремонтом занимается бригада рабочих.

Ремонт организован так, что за единицу времени исправляется в среднем число станков, определяемое зависимостью $\boldsymbol{\mu=\varphi(N_0)}$, где $\boldsymbol{N_0}$ — число неисправных станков. Написать дифференциальные уравнения динамики средних для средних численностей состояний.

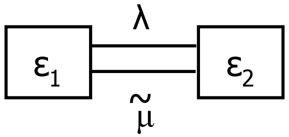

Рис. 2. Схема к примеру 2

Решение.

Каждый станок может быть в двух состояниях: $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ - исправен; $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ - неисправен, ремонтируется.

Граф состояний показан на рис.2. На нем поток интенсивности неисправностей λ.

Средняя интенсивность потока ремонтов, приходящихся на один станок, будет

$$\tilde{\mu} = \varphi_1(N_o) = \frac{\varphi(N_o)}{N_o}.$$

Число станков N_o, находящихся в ремонте, является случайным. Согласно принципу квазирегулярности заменяем его математическим ожиданием $т_2$ и на основе графа состояний запишем дифференциальные уравнения динамики средних для средних численностей $т_1$ и $т_2$ состояний ε_1 и ε_2:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda \cdot m_1 + \varphi_1(m_2) \cdot m_2;$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\varphi_1(m_2) m_2 + \lambda \cdot m_1.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\varphi_1(т_2)=\varphi(m_2)/m_2}$, уравнения запишутся в виде:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda \cdot m_1 + \varphi_1(m_2);$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\varphi_1(m_2) + \lambda \cdot m_1.$$

Нормирующее условие: $\boldsymbol{m_1 + m_2 = N}$.

Начальные условия (при $t=0$): $\boldsymbol{m_1=N;\ т_2=0}$.

3 УЧЕТ ПОПОЛНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ СОСТОЯНИЙ

На практике встречаются задачи с моделированием таких процессов, при которых численности элементов, находящихся в каких-то состояниях, пополняются извне. Пусть система S состоит из *N* однородных элементов и имеет размеченный граф состояний, показанный на рис. 3.

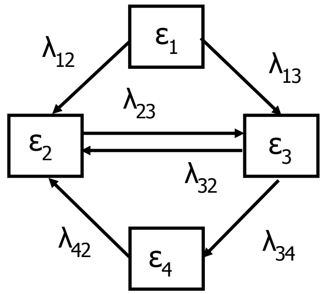

Рис. 3. Схема к примеру 3

Контингент элементов, находящихся в состоянии $\boldsymbol{\varepsilon_i}$, пополняется извне с интенсивностью δ, элементов за единицу времени. Величина δ может быть постоянной или переменной, как зависящей, так и не зависящей от средних численностей состояний.

Дифференциальные уравнения динамики средних с учетом пополнения численности состояний, составляются по изложенному ранее принципу, но к правой части соответствующего дифференциального уравнения прибавляется слагаемое, равное интенсивности пополнения — среднему числу элементов, вводимых в данное состояние за единицу времени.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем заключается правило составления дифференциальных уравнений Колмогорова для средних численностей состояний?
2. В чем заключается суть моделирования и расчета систем массового обслуживания машин?