ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

ОПТИМИЗАЦИЯ СМО С ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Авторы:
Зубрилина Е.М.
Пастухов А.Г.
Димитров В.П.

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика моделирования по схеме марковских случайных процессов, однородных и неоднородных марковских цепей. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н, Зубрилина Елена Михайловна
Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич
Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - приобрести компетенции по оптимизации СМО с переменной интенсивностью обслуживания.

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания, на которую поступает простейший поток заявок интенсивности λ. (рис. 1).

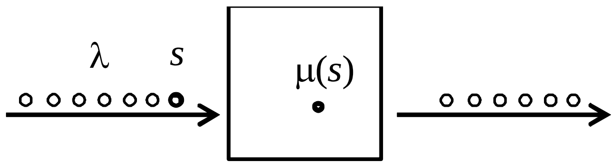

Рис. 1. Схема однолинейной СМО

Если заявка, находящаяся в данный произвольный момент времени t первой в очереди, поступила в систему в момент времени t_0, то величину $s(t) = t-t_0$ будем называть текущим временем ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Обслуживание предполагается марковским с интенсивностью $\mu(s)$ вида

$$\mu(s) = \begin{cases} \mu_1 & \textbf{при} \quad s \le s_0 \\ \mu_2 > \mu_1 & \textbf{при} \quad s > s_0 \end{cases} \qquad (1)$$

где s_0- некоторая положительная константа.

Переключение от обслуживания с одной интенсивностью на обслуживание с другой интенсивностью описывается следующим правилом. Если обслуживание происходило с интенсивностью μ_1, то переключение на обслуживание с большей интенсивностью μ_2 происходит тогда, когда текущее время ожидания s заявки, находящейся первой в очереди станет равным s_0. Если же заявка обслуживается с интенсивностью μ_2, то переключение на обслуживание с интенсивностью μ_1 происходит тогда, когда s станет меньше s_0. Очевидно, что это обратное переключение с интенсивности μ_2 на интенсивность μ_1 происходит тогда, когда заявка, стоящая первой в очереди, поступает на обслуживание и ее место занимает заявка, ранее бывшая в очереди второй.

Поведение рассматриваемой системы массового обслуживания описывается марковским процессом s(t) с особыми состояниями υ(t) = 0 и υ(t) = 1, где s(t) – текущее время ожидания заявки, находящейся первой в очереди, а υ(t) – число требований, находящихся в момент времени t на обслуживании, если очередь в этот момент пуста.

Состояние υ(t) = 0 – система пуста (то есть очередь пуста, на приборе нет заявки). Состояние υ(t) = 1 заключается в том, что очередь пуста, а на приборе находится заявка, которая обслуживается.

Обозначим финальную плотность вероятностей ρ(s) через $\rho_1(s)$ в области $0 \le s \le s_0$ и $\rho_2(s)$ в области $s \ge s_0$. Обозначим через π(0) финальную вероятность того, что система находится в состоянии υ(t) = 0, а через π(1) финальную вероятность того, что система в некоторый момент времени t находится в состоянии υ(t) = 1.

Будем считать, что в описанной системе массового обслуживания имеют место потери только двух типов.

1. <u>Потери от ожидания.</u> Потери от ожидания определяются числом заявок i, находящихся в очереди. Если в очереди в течение единицы времени находится i заявок, то будем считать, что потери от ожидания в единицу времени равны $F(i)$. Тогда L_1 - среднее значение потерь от ожидания в единицу времени имеет вид:

$$L_1 = MF(i) = \int_0^{s_0} \widetilde{F}(s) P_1(s) ds + \int_{s_0}^{\infty} \widetilde{F}(s) P_2(s) ds, \qquad (2)$$

где функция $\widetilde{F}(s)$ имеет вид:

$$\widetilde{F}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} F(i) \frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!}. \qquad (3)$$

В частности, если $F(i) = C_1 i$, где C_1 - потери от ожидания одной заявки в единицу времени, то $\widetilde{F}(s) = C_1(\lambda s + 1)$.

$$\left.\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{\lambda^2(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\exp[(\lambda-\mu_1)s]}{\lambda^2(\mu_1-\mu_2)\exp[(\lambda-\mu_1)s_0]-\mu_1^2(\lambda-\mu_2)}, \\ P_2(s) &= \frac{\lambda^2(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\exp[(\lambda s-\mu_1 s_0-\mu_2(s-s_0)]}{\lambda^2(\mu_1-\mu_2)\exp[(\lambda-\mu_1)s_0]-\mu_1^2(\lambda-\mu_2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

В случае $\lambda = \mu_1$ формулы (4) не пригодны, так как имеется неопределенность, раскрывая которую, получим

$$\left.\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{\lambda(\lambda - \mu_2)}{(\lambda - \mu_2)(1 + \lambda s_0) - \mu_2}, \\ P_2(s) &= \frac{\lambda(\lambda - \mu_2)\exp[(\lambda - \mu_2(s - s_0)]}{(\lambda - \mu_2)(1 + \lambda s_0) - \mu_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

2. Потери на амортизацию. Если обслуживающий прибор работает с большой интенсивностью μ_2, то считаем, что система в единицу времени несет потери, равные C_2. Тогда среднее значение потерь на амортизацию в единицу времени равно

$$L_2 = C_2 \int_{s_0}^{\infty} P_2(s)ds. \qquad (6)$$

Таким образом, средние суммарные потери системы в единицу времени равны: $L = L_1 + L_2$ и имеют вид:

$$L(s_0) = \int_0^{s_0} \tilde{F}(s)P_1(s)ds + \int_{s_0}^{\infty} \tilde{F}(s)P_2(s)ds + C_2 \int_{s_0}^{\infty} P_2(s)ds. \qquad (7)$$

Обозначая $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}$, $\rho_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}$, $x_0 = \lambda s_0$ и рассматривая частный случай, когда $F(i) = C_1 i$ для определения оптимального момента включения большей интенсивности x_0^{opt} получим уравнения:

при $\rho_1 \neq 1$:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2(\rho_1 - 1)^2(1 - \rho_2)}\Big\{\rho_1^2(\rho_2 - 1) + (\rho_1 - 1)[(\rho_2 - 1)(x_0 + 1) - \rho_2] + \qquad (8)$$
$$+ \rho_1^2(\rho_1 - \rho_2)\exp\left[\frac{(\rho_1 - 1)x_0}{\rho_1}\right]\Big\}.$$

при $\rho_1 = 1$:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{4 + x_0[2 + (x_0 + 2)(1 - \rho_2)]}{2\rho_2}. \qquad (9)$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вывести уравнения для нахождения финальных вероятностей $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$. Вывести условия в нуле, условие на границе и условие нормировки.

2. Решить полученные уравнения аналитически и получить явный вид $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$, п(0), п(1).

3. Получить вид средних суммарных потерь описанной системы массового обслуживания, используя формулы (2)-(7). Получить формулы (8) и (9).

4. Разработать алгоритм нахождения оптимального момента включения большей интенсивности обслуживания μ_2, минимизирующий средние суммарные потери системы в единицу времени (7). Привести блок – схему алгоритма.

5. Численно реализовать этот алгоритм для частного случая, когда $F(i) = C_1 i$.

6. Вывести на экран графики зависимости x_0^{opt} от $\dfrac{C_2}{C_1}$ для указанных в таблице 1 значений ρ_1, ρ_2 в соответствии с номером варианта $\left(\dfrac{C_2}{C_1} \in [1,100]\right)$.

Таблица 1 – Варианты заданий для самостоятельной работы

№ варианта	ρ_1	ρ_2
1	$\rho_1 = \overline{0{,}6{,}1{,}2};\ 0{,}1$	0,1
2	$\rho_1 = \overline{0{,}5{,}1{,}3};\ 0{,}1$	0,15
3	$\rho_1 = \overline{0{,}4{,}1{,}4};\ 0{,}1$	0,2
4	$\rho_1 = \overline{0{,}2{,}1{,}0};\ 0{,}2$	0,25
5	от 0,5 до 1,0 с шагом 0,1	0,3
6	$\rho_1 = \overline{0{,}3{,}1{,}2};\ 0{,}2$	0,35

7	$\rho_1 = \overline{0,5,1,5};\ 0,2$	0,4
8	$\rho_1 = \overline{0,6,1,4};\ 0,2$	0,5
9	$\rho_1 = \overline{0,7,1,6};\ 0,2$	0,4
10	$\rho_1 = \overline{0,5,1,2};\ 0,1$	0,45

Как ведет себя x_0^{opt}, если

а) $\rho_1 = 1,\ \dfrac{C_2}{C_1} \le \dfrac{2}{\rho_2}$?

б) $\rho_1 \ne 1,\ \dfrac{C_2}{C_1} \le \dfrac{(1+\rho_1)(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2(1-\rho_2)}$?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.