



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

## **СТРУКТУРА И ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Методические указания к практическим занятиям  
по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Авторы:  
Зубрилина Е.М.  
Пастухов А.Г.  
Димитров В.П.





## Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика моделирования по схеме марковских случайных процессов, однородных и неоднородных марковских цепей. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

## Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н,  
Зубрилина Елена Михайловна

Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич

Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ  
д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович



## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	12
1 ОБЩАЯ СТРУКТУРА СМО <b>Ошибка! Закладка не определена.</b>	
2 КЛАССИФИКАЦИЯ СМО.....	
3 ПОКАЗАТЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СМО.....	
4 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ СМО.....	
ЗАДАНИЕ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ .....	
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....	20
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	20

## ВВЕДЕНИЕ

**Цель работы** - приобрести компетенции по определению показателей эффективности системы массового обслуживания (СМО).

## 1 ОБЩАЯ СТРУКТУРА СМО

СМО состоит из следующих элементов (рис. 1).

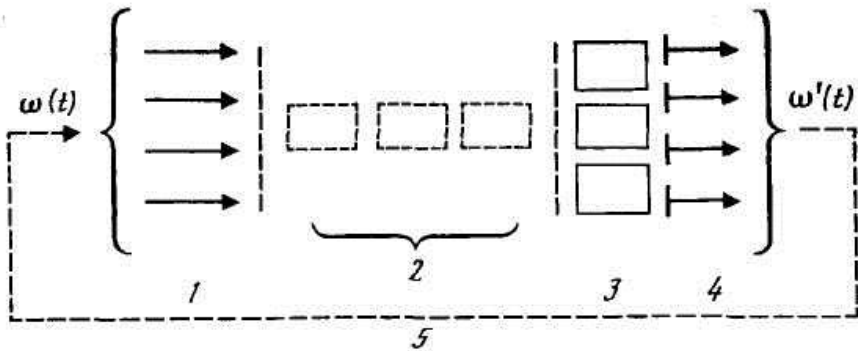


Рис. 1. Общая схема системы массового обслуживания

1 - входящий поток требований  $\omega(t)$  - совокупность требований к СМО на проведение определенных работ (заправка, мойка, ТО и др.) или оказание услуг (покупка изделий, деталей, материалов и др.). Входящий поток требований может быть постоянным:  $\omega(t)=\text{const}$  - и переменным:  $\omega(t)\neq\text{const}$ .

Требования бывают однородные (одинаковые виды работ или услуг) и неоднородные (разные виды работ или услуг).

2 - очередь - требования, ожидающие обслуживания.

Очередь оценивается средней длиной  $r$  - числом объектов или клиентов, ожидающих обслуживания.

3 - обслуживающие аппараты (каналы обслуживания) - совокупность рабочих мест, исполнителей, оборудования, осуществляющих обслуживание требований по определенной технологии.

### Теория массового обслуживания

4 - выходящий поток требований  $\omega(t)$  - поток требований, прошедших СМО. В общем случае выходящий поток может состоять из требований обслуженных и необслуженных. Пример необслуженных требований: отсутствие нужной детали для автомобиля, находящегося в ремонте.

5 - замыкание (возможное) СМО - состояние системы, при котором входящий поток требований зависит от выходящего.

На автомобильном транспорте после обслуживания требований (ТО, ремонт) автомобиль должен быть технически исправным.

## 2 КЛАССИФИКАЦИЯ СМО

Системы массового обслуживания классифицируются следующим образом.

1. По ограничениям на длину очереди:
  - СМО с потерями - требование покидает СМО необслуженным, если в момент его поступления все каналы заняты.
  - СМО без потерь - требование занимает очередь, даже если все каналы заняты.
  - СМО с ограничениями по длине очереди  $t$  или времени ожидания: если существует ограничение на очередь, то вновь поступившее  $(t+1)$ -е требование выбывает из системы необслуженным (например, ограниченная емкость накопительной площадки перед АЗС).
2. По количеству каналов обслуживания  $p$ :
  - одноканальные  $p = 1$ ;
  - многоканальные  $p \geq 2$ .
3. По типу обслуживающих каналов:
  - однотипные (универсальные);
  - разнотипные (специализированные).
4. По порядку обслуживания:
  - однофазовые - обслуживание производится на одном аппарате (посту);
  - многофазовые - требования последовательно проходят несколько аппаратов обслуживания (например, поточные линии ТО; конвейерная сборка автомобиля; линия внешнего ухода: уборка → мойка → обсушка → полировка).
5. По приоритетности обслуживания:
  - без приоритета - требования обслуживаются в порядке их поступления на СМО;
  - с приоритетом — требования обслуживаются в зависимости от присвоенного им при поступлении ранга приоритетности

### Теория массового обслуживания

(например, заправка автомобилей скорой помощи на АЗС; первоочередной ремонт на АТП автомобилей, приносящих наибольшую прибыль на перевозках).

6. По величине входящего потока требований:

- с неограниченным входящим потоком;
- с ограниченным входящим потоком (например, в случае предварительной записи на определенные виды работ и услуг).

7. По структуре СМО:

- замкнутые – входящий поток требований при прочих равных условиях зависит от числа ранее обслуженных требований (комплексное АТП, обслуживающее только свои автомобили);
- открытые – входящий поток требований не зависит от числа ранее обслуженных: АЗС общего пользования, магазин по продаже запасных частей.

8. По взаимосвязи обслуживающих аппаратов:

- с взаимопомощью – пропускная способность аппаратов непостоянна и зависит от занятости других аппаратов: бригадное обслуживание нескольких постов СТО; использование "скользящих" рабочих;
- без взаимопомощи - пропускная способность аппарата не зависит от работы других аппаратов СМО.

Применительно к технической эксплуатации автомобилей находят распространение замкнутые и открытые, одно- и многоканальные СМО, с однотипными или специализированными обслуживающими аппаратами, с одно- или многофазовым обслуживанием, без потерь или с ограничением на длину очереди или на время нахождения в ней.

## 3 ПОКАЗАТЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СМО

В качестве показателей эффективности работы СМО используют параметры.

Интенсивность обслуживания

$$\mu = 1/t_d,$$

где  $t_d$  – продолжительность (длительность) обслуживания одного требования.

Приведенная плотность потока требований

$$\rho = \omega/\mu,$$

где  $\omega$  – параметр потока требований.

Абсолютная пропускная способность показывает количество требований, поступающих в единицу времени, т.е.

$$A = \omega g,$$

### Теория массового обслуживания

где  $g$  - относительная пропускная способность.

Относительная пропускная способность определяет долю обслуженных требований от общего их количества.

Вероятность того, что все посты свободны  $P_0$ , характеризует такое состояние системы, при котором все объекты исправны и не требуют проведения технических воздействий, т.е. требования отсутствуют.

Вероятность отказа в обслуживании  $P_{отк}$  имеет смысл для СМО с потерями и с ограничением по длине очереди или времени нахождения в ней. Она показывает долю "потерянных" для системы требований.

Вероятность образования очереди  $P_{оч}$  определяет такое состояние системы, при котором все обслуживающие аппараты заняты, и следующее требование "встает" в очередь с числом ожидающих требований  $r$ .

Среднее время нахождения в очереди

$$t_{ож} = n/\omega.$$

Количество требований, связанных с системой,

$$k = r + n_{зан},$$

где  $n_{зан}$  – среднее количество занятых постов.

Время связи требования с системой:

– СМО с потерями  $t_{сист} = g t_d$ ;

– СМО без потерь  $t_{сист} = t_d + t_{ож}$ .

Издержки от функционирования системы

$$И = C_1 \cdot r + C_2 \cdot n_{св} + (C_1 + C_2) \cdot p,$$

где  $C_1$  – стоимость простоя автомобиля в очереди;  $r$  – средняя длина очереди;  $C_2$  – стоимость простоя обслуживающего канала;  $n_{св}$  – количество простаивающих (свободных) каналов.

Из-за случайности входящего потока требований и продолжительности их выполнения всегда имеется какое-то среднее число простаивающих автомобилей. Поэтому требуется так распределить число обслуживающих аппаратов (постов, рабочих мест, исполнителей) по различным подсистемам, чтобы  $И \rightarrow \min$ . Этот класс задач имеет дело с дискретным изменением параметров, так как число аппаратов может изменяться только дискретным образом. Поэтому при анализе системы обеспечения работоспособности автомобилей используются методы исследования операций, теории массового обслуживания, линейного, нелинейного и динамического программирования и имитационного моделирования.

Теория массового обслуживания

## 4 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

### ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ СМО

**Пример 1.** Станция технического обслуживания имеет один пост диагностирования ( $n = 1$ ). Длина очереди ограничена двумя автомобилями

( $m = 2$ ). Определить параметры эффективности работы диагностического поста, если интенсивность потока требований на диагностирование в среднем  $\omega = 2$  треб./ч, продолжительность диагностирования  $t_d = 0,4$  ч.

Решение.

Интенсивность диагностирования  $\mu = 1/t_d = 1/0,4 = 2,5$ .

Приведенная плотность потока  $\rho = \omega/\mu = 2/2,5 = 0,8$ .

Вероятность того, что пост свободен

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-0,8}{1-0,8^4} = 0,339.$$

Вероятность образования очереди

$$P_{оч} = \rho^2 \cdot P_0 = 0,8^2 \cdot 0,339 = 0,217.$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} = \frac{0,8^3(1-0,8)}{1-0,8^4} = 0,173.$$

Относительная пропускная способность

$$g = 1 - P_{отк} = 1 - 0,173 = 0,827.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = 2 \cdot 0,827 = 1,654.$$

Среднее количество занятых постов или вероятность загрузки поста

$$n_{зан} = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{0,8 - 0,8^4}{1 - 0,8^4} = 0,661 = 1 - P_0.$$

Среднее количество требований, находящихся в очереди

$$r = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)]}{(1 - \rho^{m+2}) \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,8^2 [1 - 0,8^2 (2 + 1 - 2 \cdot 0,8)]}{(1 - 0,8^4) \cdot (1 - 0,8)} = 0,564.$$

Среднее время нахождения требования в очереди

$$t_{ож} = r/\omega = 0,564/2 = 0,282 \text{ ч.}$$



### Теория массового обслуживания

**Пример 2.** На автотранспортном предприятии имеется один пост диагностирования ( $n = 1$ ). В данном случае длина очереди практически неограниченна. Определить параметры эффективности работы диагностического поста, если стоимость простоя автомобилей в очереди составляет  $C_1=20$  р.е. (расчетных единиц) в смену, а стоимость простоя постов  $C_2=15$  р.е. Остальные исходные данные те же, что и для предыдущего примера.

Решение.

Интенсивность диагностирования  $\mu = 1/t_d = 1/0,4 = 2,5$ .

Приведенная плотность потока  $\rho = \omega/\mu = 2/2,5 = 0,8$ .

Вероятность того, что пост свободен,

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Вероятность образования очереди

$$P_{оч} = \rho^2 \cdot P_0 = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128.$$

Относительная пропускная способность  $g = 1$ , так как все намеченные автомобили пройдут через диагностический пост.

Абсолютная пропускная способность  $A = \omega = 2$  треб./ч.

Среднее количество занятых постов  $n_{зан} = \rho = 0,8$ .

Среднее количество требований, находящихся в очереди,

$$r = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} = \frac{0,8^2}{(1 - 0,8)} = 3,2.$$

Среднее время ожидания в очереди

$$t_{ож} = \frac{\rho^2}{\mu \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,8^2}{2,5 \cdot (1 - 0,8)} = 1,6.$$

Издержки от функционирования системы

$$I_1 = C_1 \cdot r + C_2 \cdot n_{св} + (C_1 + C_2) \cdot \rho = 20 \cdot 3,2 + 15 \cdot 0,2 + (20 + 15) \cdot 0,8 = 95,0 \text{ р.е./смену.}$$

**Пример 3.** На том же автотранспортном предприятии число постов диагностирования увеличено до двух ( $n = 2$ ), т.е. создана многоканальная система. Так как для создания второго поста необходимы капиталовложения (площади, оборудование и т.д.), то цена простоя средств обслуживания увеличивается до  $C_2 = 22$  р.е. Определить параметры эффективности работы системы диагностирования. Остальные исходные данные те же, что для предыдущего примера.

Решение. Интенсивность диагностирования и приведенная плотность потока остаются теми же:  $\mu = 1/t_d = 1/0,4 = 2,5$ ;  $\rho = \omega/\mu = 2/2,5 = 0,8$ .

Вероятность того, что оба поста свободны

Теория массового обслуживания

$$P_0 = \frac{1}{\left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right\}} = \frac{1}{\left\{ \frac{0,8^0}{0!} + \frac{0,8^1}{1!} + \frac{0,8^2}{2!} + \frac{0,8^3}{2!(2-0,8)} \right\}} = 0,294.$$

Вероятность образования очереди

$$P_{оч} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 = \frac{0,8^2}{1 \cdot 2} \cdot 0,294 = 0,094.$$

т.е. на 37% ниже, чем в предыдущем примере.

Относительная пропускная способность  $g = 1$ , так как все автомобили пройдут через диагностические посты.

Абсолютная пропускная способность  $A = \omega = 2$  треб./ч.

Среднее количество занятых постов  $n_{зан} = \rho = 0,8$ .

Среднее количество требований, находящихся в очереди,

$$r = \frac{\rho \cdot P_{оч}}{(n - \rho)} = \frac{0,8 \cdot 0,094}{2 - 0,8} = 0,063.$$

Среднее время нахождения в очереди

$$t_{ож} = \frac{P_{оч}}{\mu \cdot (n - \rho)} = \frac{0,094}{2,5 \cdot (2 - 0,8)} = 0,031.$$

Издержки от функционирования системы

$$И_2 = C_1 \cdot r + C_2 \cdot n_{св} + (C_1 + C_2) \cdot \rho = 20 \cdot 0,063 + 22 \cdot 1,2 + (20 + 22) \cdot 0,8 = 61,26 \text{ р.е./смену,}$$

т.е. в 1,55 раза ниже, чем при тех же условиях для одного диагностического поста, главным образом за счет сокращения очереди автомобилей на диагностику и времени ожидания автомобилей более чем в 50 раз.

Следовательно, строительство второго диагностического поста в рассматриваемых условиях целесообразно. Используя формулу оценки издержек функционирования системы из условия ( $И_1 = И_2$ ) можно оценить предельные значения цены простоя средств обслуживания при строительстве и оснащении второго диагностического поста, которая в рассмотренном примере составляет  $C_2^P = 39$  р.е.

Теория массового обслуживания

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Оценка эффективности систем обслуживания машин

#### Задача 2

Станция технического обслуживания автомобилей имеет три отделения, в которых расположены технологические линии по ТО и Р.

В отделении № 1 имеется пост диагностирования при ТО  $n_1 = 1$ , длина очереди на обслуживание ограничена количеством автомобилей  $m$ , стоимость простоя автомобилей в очереди составляет  $C_1$ , стоимость простоя постов  $C_2$ .

В отделении № 2 имеется  $n_1$  пост диагностирования при ТО, длина очереди на обслуживание не ограничена (в результате прогрессивной организации труда). Затраты на простой автомобилей и постов неизменны.

В отделении № 3 число постов диагностирования составляет  $n_2$ , длина очереди на обслуживание не ограничена. Цена простоя средств обслуживания увеличилась до  $C'_2$ .

Интенсивность потока требований на диагностирование автомобилей в среднем  $\omega$ , продолжительность диагностирования составляет  $t_d$ .

Требуется определить параметры эффективности отделений №1, №2 и №3 и сравнить издержки от функционирования рассматриваемых систем.

Исходные данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Варианты исходных данных

Значения $\alpha\beta\gamma$	$n_2$	$m$	Цена простоя, р.е.			$\omega$ , треб./ч	$t_d$ , ч
			$C_1$	$C_2$	$C'_2$		
0	2	2	10	9	15	1	0,65
1	3	4	12	10	18	2	0,55
2	4	3	14	11	21	3	0,45
3	2	2	16	12	24	1	0,35
4	3	4	18	14	27	2	0,25
5	4	3	20	15	30	3	0,6
6	2	2	22	16	33	1	0,5
7	3	4	24	18	36	2	0,4
8	4	3	26	19	39	3	0,3
9	2	2	28	20	42	2	0,2
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$			$\alpha$	$\beta$

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В каких случаях применяют расчет СМО по методу динамики средних?
2. В чем заключается сущность метода динамики средних?
3. Какие величины являются характеристиками случайной величины  $X_k(t)$  численности единиц (элементов), находящихся в момент  $t$  в состоянии  $\varepsilon_k$ ?
4. Для определения математического ожидания и дисперсии случайной величины необходимо знать интенсивности всех потоков событий, переводящих элемент или систему из состояния в состояние?
5. Какие действия необходимо предпринять для составления дифференциальных уравнений средних численностей состояний (уравнений динамики средних)?