ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО СХЕМЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Авторы:
Зубрилина Е.М.
Пастухов А.Г.
Димитров В.П.



## Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика моделирования по схеме марковских случайных процессов, однородных и неоднородных марковских цепей. Приводятся индивидуальные задания и методика решения задач.

## Авторы

Доцент кафедры «Управление качеством» ДГТУ, к.т.н, Зубрилина Елена Михайловна
Заведующий кафедрой «Общетехнические дисциплины» БелСХА, д.т.н., профессор Пастухов Александр Геннадьевич
Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

# Оглавление





## ВВЕДЕНИЕ

**Цель работы** - приобрести компетенции моделирования процессов на основе моделировании систем массового обслуживания.

## 1 МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системы массового обслуживания могут быть двух типов — с отказами и с ожиданием (с очередью).

В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, покидает систему и в дальнейшем процессе не участвует. В системах с ожиданием заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и принимается к обслуживанию, как только освободится один из каналов.

Основными параметрами системы массового обслуживания являются:

$\boldsymbol{n}$ — число каналов;

$\boldsymbol{\lambda}$ — интенсивность потока заявок (среднее число заявок, поступающих в единицу времени);

$\boldsymbol{\mu}$ — производительность каждого канала (среднее число заявок, обслуживаемых каналом в единицу времени), а также ограничения (длина очереди, время пребывания заявки в очереди и др.).

Сведения данного раздела относятся только к системам массового обслуживания, в которых все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются пуассоновскими (потоками без последствий). Для математического описания таких процессов применяется аппарат марковских случайных процессов.

Составление дифференциальных уравнений Колмогорова для марковских систем массового обслуживания производится по правилам, изложенным ранее.

**Пример 1.**

Рассматривается трехканальная система массового обслуживания с отказами. Интенсивность потока заявок $\boldsymbol{\lambda}$, интенсивность потока обслуживания $\boldsymbol{\mu}$. Составить дифференциальные уравнения состояний системы.

**Решение.**

Возможные состояния системы:

*$S_0$* — все каналы свободны;

*$S_1$* — занят один канал, два свободных;

*$S_2$* — заняты дна канала, один свободен;

*$S_3$* — заняты все три канала.

Граф состояний показан на рис. 1.

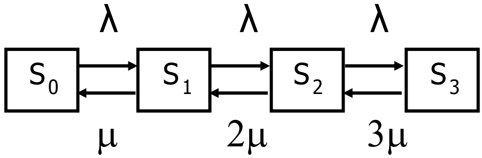


Рис. 1. Граф состояния для примера 1

Разметим граф. Если система находится в состоянии $S_0$, то поступившая заявка, переводит ее в $S_1$ с интенсивностью $\lambda$. Если система находится в состоянии $S_1$, то поступившая заявка переводит ее в $S_2$ с интенсивностью $\lambda$ и т.д. Переход системы в обратном направлении будет при следующих условиях. Из $S_1$ (занят один канал) система перейдет в $S_0$ тогда, когда закончится обслуживание заявки, занимающей этот канал. Интенсивность этого потока событий $\mu$. Если обслуживанием занято два канала, то поток событий, переводящий систему из $S_2$ в $S_1$, будет вдвое интенсивнее, т.е. равным $2\mu$. Аналогично поток событий, переводящий систему из $S_3$ в $S_2$, будет равен $3\mu$.

Разметив граф состояний (рис. 1) и пользуясь общим правилом, составим уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_0}{dt} &= -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1; \\
\frac{dp_1}{dt} &= -(\lambda + \mu) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_2; \\
\frac{dp_2}{dt} &= -(\lambda + 2\mu) \cdot p_2 + \lambda \cdot p_1 + 3\mu \cdot p_3; \\
\frac{dp_3}{dt} &= -3\mu \cdot p_3 + \lambda \cdot p_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Начальные условия (при $t$=0): $p_0=1;\ p_1=p_2=p_3=0$.

Решение уравнений типа (1) обычно выполняется на ЭВМ. При этом будут получены вероятности состояний как функции времени. В большинстве случаев бывает достаточным знание предельных вероятностей состояний, характеризующих установившийся режим работы системы массового обслуживания (при $t \to \infty$). Для этого согласно правилу следует левые части уравнений (производные) положить равными нулю и решить полученную таким образом систему линейных алгебраических уравнений.

В табл. 1 приведены размеченные графы состояний некоторых типов систем массового обслуживания и предельные вероятности состояний этих систем. Составление дифференциальных уравнений состояний системы при наличии размеченного графа рассмотрены нами ранее.

Для оценки эффективности систем массового обслуживания (при $t \to \infty$) можно воспользоваться данными табл. 2, в которой для различных показателей эффективности даны расчетные формулы. Предельные вероятности состояний систем массового обслуживания, используемые в расчетных формулах табл. 2, находятся из соотношений (15) — (20) табл. 1. Для краткости записи в табл. 1 и 2 обозначены: $\rho=\lambda/\mu$; $\chi=\rho/n$.

Дополнить табл. 1 и 2 для различных графов.

**Пример 2.**

Вычислительная станция имеет три ЭВМ ($n=3$). Средняя интенсивность потока на выполнение расчетов — четыре заявки в час ($\lambda=4$). Среднее время решения одной задачи $t_{об}=0,5$ ч. Станция принимает и ставит в очередь на решение не более $\tau=3$ заявок. Заявки, прибывшие, когда в очередь поставлено 3 заявки, не принимаются (получают отказ). Найти основные характеристики системы массового обслуживания: вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число занятых ЭВМ, среднее число заявок в очереди, среднее время ожидания и пребывания заявки на станции.

**Решение.**

Имеем многоканальную систему массового обслуживания с ожиданием при ограниченном $\tau$ числе мест в очереди

Предварительно вычислим:

$\mu=1/\bar{t}_{об}=1/0.5=2$ ч$^{-1}$ ; $\rho=\lambda/\mu=4/2=2$; $\chi=\rho/n=2/3$.

Используя формулы (19), находим:

- вероятность того, что все ЭВМ свободны

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^3}{3!}\cdot\frac{\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}} = \frac{1}{1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\frac{2}{3}}} = \frac{81}{665} = 0.122,$$

- вероятность того, что все три ЭВМ заняты и три заявки стоят в очереди

$$p_{m+n} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 = p_6 = \frac{2^6}{3^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{81}{665} = \frac{32}{665} = 0.048.$$

<u>Последующие расчеты выполняем с помощью формул табл. 2:</u>

Относительная пропускная способность:

$Q=1-p_{m+n}=1-p_6=1-0.048=0.952.$

Абсолютная пропускная способность:

$A=\lambda q=4\cdot 0.952=3.808$ *заявок в час.*

Вероятность отказа:

$P_{отк}=p_{m+n}=p_6=0.048.$

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n n!}\cdot\frac{1-(m+1)\chi+m\chi}{(1-\chi)^2} = \frac{2^4\cdot 81}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 665}\cdot\frac{1-4\frac{2}{3}+3\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{216}{665} = 0.325.$$

Среднее число занятых ЭВМ: $\bar{z}=A/\mu=3.808/2=1,904.$

Среднее число заявок, находящихся в вычислительной станции:

$k=\bar{r}+\bar{z}=0,325+1,904=2,229.$

Среднее время ожидания заявки в очереди:

$\bar{t}_{ож}=\bar{r}/\lambda=216\cdot 4/665=0,081$ *ч.*

Среднее время пребывания заявки в вычислительной станции:

$\bar{t}_{сист}=\bar{t}_{ож}+q/\mu=0.081+0.952/2=0.557$ *ч.*

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Моделирование систем массового обслуживания

**Задача 1.**

Техническая система S состоит из двух узлов. В случайные моменты времени каждый из узлов поочередно может выйти из строя (отказать), после чего сразу же начинается ремонт узла.

Возможны следующие состояния системы: $S_0$ - оба узла исправны; $S_1$ – первый узел ремонтируется, второй исправен; $S_2$ – второй узел ремонтируется, первый – исправен; $S_3$ – оба узла ремонтируются.

Поток отказов интенсивностью $\lambda_1$ переводит систему из состояния $S_0$ в $S_1$. Обратный перевод осуществляется потоком восстановления интенсивностью $\mu_1$.

Потоки отказов и восстановления считаем простейшими, а интервалы времени между событиями имеют экспоненциальное распределение с параметром, равным интенсивности соответствующего потока. Аналогично осуществляются другие переходы.

Требуется:

1) определить вероятности состояний системы $\boldsymbol{p_0, p_1, p_2, p_3}$ с использованием уравнений Колмогорова и нормировочного уравнения;

2) трудоемкость ремонта каждого узла;

3) трудоемкость ремонта обоих узлов.

Размеченный граф состояний системы S показан на рис. 1.

Таблица 1 – Варианты исходных данных

| Значения αβγ | Интенсивность потока отказов | | Интенсивность потока восстановления | |
|---|---|---|---|---|
| | $\lambda_1$, ч$^{-1}$ | $\lambda_2$, ч$^{-1}$ | $\mu_1$, ч$^{-1}$ | $\mu_2$, ч$^{-1}$ |
| 0 | 0,5 | 3,0 | 1,5 | 4,0 |
| 1 | 1,0 | 2,5 | 2,0 | 3,5 |
| 2 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 |
| 3 | 2,0 | 1,5 | 3,0 | 2,5 |
| 4 | 2,5 | 1,0 | 3,5 | 2,0 |
| 5 | 0,5 | 3,0 | 1,5 | 4,0 |
| 6 | 1,0 | 2,5 | 2,0 | 3,5 |
| 7 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 |
| 8 | 2,0 | 1,5 | 3,0 | 2,5 |
| 9 | 2,5 | 1,0 | 3,5 | 2,0 |
| | α | γ | β | γ |

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А.П. Кирпичников – Казань. Изд-во Казан. ун-та., 2011. – 199 с.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В каких случаях применяют расчет СМО по методу динамики средних?
2. В чем заключается сущность метода динамики средних?
3. Какие величины являются характеристиками случайной величины $X_k(t)$ численности единиц (элементов), находящихся в момент $t$ в состоянии $\varepsilon_k$?
4. Для определения математического ожидания и дисперсии случайной величины необходимо знать интенсивности всех потоков событий, переводящих *элемент или систему* из состояния в состояние?
5. Какие действия необходимо предпринять для составления дифференциальных уравнений средних численностей состояний (уравнений динамики средних)?