ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

«Имитационное моделирование процессов»

Методические указания

к практическим занятиям
по дисциплине

«Основы моделирования управленческих задач»

Автор:
Димитров В.П.

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практических работ со студентами, обучающихся по направлению 221400 «Управление качеством». Приводится методика имитационного моделирования и индивидуальные задания.

Автор

Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ
д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: состоит в приобретении навыков решения задач методом имитационного моделирования.

Задачи:

- ознакомиться с сущностью метода статистических испытаний;
- ознакомиться с кругом задач, решаемых с помощью данного метода;
- изучить способы генерации случайных чисел;

В практической деятельности часто встречаются задачи, когда необходимо получить знания характеристик какого-либо процесса. Если проведение натурного эксперимента сопряжено со значительными затратами ресурсов, или с невозможностью наблюдения явлений в реальных условиях, то целесообразно применение имитационного моделирования. Особенностью имитационного моделирования, в отличие от классического лабораторного эксперимента является возможность его реализации исключительно на компьютере.

Суть имитационного моделирования заключается в том, что с помощью математических соотношений описывается взаимосвязь между составными частями исследуемой системы. Затем рассчитывают характеристики системы с шагом времени t, причём на каждом новом шаге учитываются изменения, произошедшие в системе на предыдущем шаге. Таким образом, как бы воспроизводится (имитируется) поведение системы. В большинстве случаев для выявления всех свойств системы и изучения её поведения требуется многократное имитационное моделирование, для чего используют случайные выборки начальных исходных условий из их допустимого множества. По полученным выборкам рассчитывают оценки функциональных характеристик системы.

В этом случае имитационное моделирование следует рассматривать как статистический эксперимент. Результаты, полученные в имитационной модели, представляют собой наблюдения, подверженные экспериментальным ошибкам. Поэтому любое утверждение, касающееся характеристик исследуемой системы, должно основываться на результатах статистических проверок.

В основе имитационного моделирования лежит метод Монте-Карло, центральная идея которого заключается в использовании выборок для получения искомых оценок.

Сущность рассматриваемого подхода (его также называют методом статистических испы- таний) состоит в следующем:

требуется найти значение А некоторой изучаемой величины, для чего выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно $A: M(X) = A$.

Практически поступают так: вычисляют (разыгрывают) n возможных значений X_i случайной величины X и находят их среднее арифметическое значение:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Принимают $\bar{X}$ в качестве оценки (приближенного значения) искомого числа А:

$$\mathrm{A} \approx \mathrm{A} *= \bar{X}$$

Первая особенность рассматриваемого метода – простая структура вычислительного алгоритма. Как правило, составляется программа для осуществления одного случайного испытания. Затем это испытание повторяется N раз, причём каждый опыт не зависит от всех остальных. Результаты всех опытов усредняют.

Вторая особенность метода – погрешность вычислений, как правило, пропорциональна $\sqrt{D/N}$, где D – некоторая постоянная, N – число испытаний. Отсюда видно, что для того, чтобы уменьшить погрешность в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе ещё один верный десятичный знак), нужно увеличить число N в 100 раз. Добиться такой точности таким путём практически невозможно. поэтому обычно считается, что метод Монте-Карло эффективен при решении тех задач, в которых устраивает результат со сравнительно небольшой точностью (5 – 20%). При решении многих задач удаётся значительно увеличить точность решения задачи, выбрав способ расчёта, которому соответствует малое значение D.

Эффективность применения метода статистических испытаний зависит от умения разыгрывать случайную величину. На практике используют различные варианты получения случайных чисел: таблицы случайных чисел, применение генераторов случайных чисел, использование методов псевдослучайных чисел.

Числа, полученные по какой-либо формуле и имитирующие значения случайной величины X, называются псевдослучайными числами. На получение каждого числа затрачивается несколько операций. Поэтому скорость генерирования псевдослучайных чисел имеет тот же порядок, что и скорость работы ЭВМ. Кроме того, нужно лишь один раз проверить качество такого генератора, затем его можно много раз безбоязненно использовать при решении однотипных задач.

Недостаток метода – ограниченность количества псевдослучайных чисел, так как последовательность чисел, вычисляемых ЭВМ по формуле вида $X_{i+1} = F(X_i)$, обязательно периодическая.

В состав большинства языков программирования высокого уровня входят функции, позволяющие генерировать случайные числа с заданным законом распределения. Например, для случайных чисел, распределённых по равномерному закону

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 \text{ при } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ при } x < 0 \text{ или } x > 1 \end{pmatrix}$$

предложено несколько алгоритмов генерации.

<u>Алгоритм 1:</u>

$$V_{i+1} = F(11V_i + \pi)$$

где F() – символ взятия дробной части числа; $V_0 = 0{,}011$.

Алгоритм обеспечивает генерацию примерно 8000 неповторяющихся чисел.

<u>Алгоритм 2:</u>

$$V_{i+1} = F(V_i/Z + \pi)$$

где F() – символ взятия дробной части числа; $V_0 = 0$; $Z_{i+1} = Z_i + 1 \times 10^{-8}$; $Z_0 = 0{,}011$

Алгоритм обеспечивает генерацию примерно 8900 неповторяющихся чисел.

В зависимости от условий решаемой задачи, может оказаться необходимым формирование случайных чисел V_{i+1} с равномерным законом распределения в интервале [A, B]. В этом случае алгоритм генерации имеет вид:

$$V_{i+1} = \mathrm{A} + (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \times V_i$$

Можно получить псевдослучайные числа, распределённые по закону, близкому к нормальному закону распределения, закону Пуассона, распределению Раэля и др.

1. ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Нормальный закон распределения

Сначала генерируются псевдослучайные числа V_i, распределённые равномерно на интервале (0;1). Затем из V_i получим η_i функциональным преобразованием:

$$\eta_i = [sign(V_i - 1)] \times \sqrt{-(\pi/2) \times Ln[4 \times V_i(1 - V_i)]}$$

где

$$sign = \begin{Bmatrix} 1 \text{ при } x > 0 \\ 0 \text{ при } x = 0 \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{Bmatrix}$$

Случайные числа, соответствующие нормальной случайной величине N: 0;1, можно получить из равномерной случайной величины R (на интервале [0;1]) с помощью аппроксимации:

$$N{:}\,0;1 \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}$$

С ростом k, точность аппроксимации растёт.

Плотность вероятности нормального распределения определяется как

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1.2. Экспоненциальный закон распределения

Случайные числа, соответствующие экспоненциальной случайной величине E:b, можно получить из равномерной случайной величины R (на интервале [0;1]) с помощью соотношения: $E{:}\,b \sim b \times LnR$

Плотность вероятности экспоненциального распределения определяется как

$$\varphi(x) = \frac{1}{b} e^{(-\frac{x}{b})}$$

2. ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ СИСТЕМЫ ПОСТАВОК

Рассмотрим систему поставок продукции условного производства, которая состоит из двух подсистем А+В и С (рисунок 1), связанных последовательном цикле, и не функционирует при нарушении работы (отказе) хотя бы одного поставщика (одной подсистемы).

Первая подсистема содержит два подразделения (поставщика) А и В (соединены параллельно) и не функционирует при одновременном сбое в работе обоих поставщиков. Вторая подсистема состоит из одного поставщика С и не функционирует при сбое в его работе. Требуется оценить надёжность системы P, зная вероятность безотказной работы отдельных поставщиков: P(A)=0,8; P(B)=0,85; P(C)=0,60. Для наглядности в таблице 1 приведён пример первых трёх испытаний.

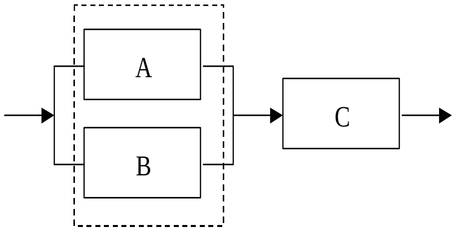

Рисунок 1 – Структурная схема системы поставок

Таблица 1 – Расчетные данные для оценки надежности системы поставок

сп.	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе				
		A	B	C	элемен-тов			бло-ков	систе сте-мы
					A	B	C		
1	Первый Второй	0,10	0,09	 0,79	+	+	 –	+ –	–
2	Первый Второй	0,25	0,33	 0,76	+	+	 –	+ –	–
3	Первый Второй	0,52	0,01	 0,35	+	+	 +	+ +	+
…									

Из таблицы случайных чисел, либо с помощью алгоритма генерации псевдослучайных чисел выберем три случайных числа: например: 0,10; 0,09; 0,73. Если случайное число меньше вероятности события, то считаем, что событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило. В соответствии с этим правилом разыгрываем события A, B и C, состоящие в безотказной работе соответственно поставщиков A, B, C.

Поскольку P(A) = 0,8 и 0,10<0,8, то событие A наступило; то есть поставщик A в этом испытании работает безотказно. Так кА P(B) = 0,85 и 0,9<0,85, то событие B наступило. Таким образом, оба поставщика первой подсистемы работают, следовательно работает и сама первая подсистема. (В соответствующих клетках таблицы стоят знаки «+»).

Так как P(C) = 0,60 и 0,73>0,60, то событие C не наступило, то есть поставщик C не функционирует. Не функционирует подсистема C, а значит и вся система поставок сбоит. В соответствующих клетках таблицы стоят знаки «-«.

Аналогичным образом разыгрывают N испытаний. В качестве искомой оценки надёжности P принимают относительную частоту P = n/N, где n – число испытаний, в которых система поставок работает эффективно.

3. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

Метод статистических испытаний применяется и для решения оптимизационных задач. При этом следует учитывать, что в имитационной модели значения управляемых переменных рассчитываются как часть входных данных модели и в результате прогона модели получается оценка результата работы системы, а не оптимальные значения переменных.

Последовательность решения оптимизационной задачи с применением метода Монте-Карло заключается в многократном моделировании независимых случайных вариантов решений из области допустимых (то есть в заданном интервале), вычислении в каждом из них критерия оптимизации и запоминании ближайшего к экстремуму.

Данный метод относится к числу универсальных, поскольку позволяет решать многоэкстремальные задачи общего вида с отысканием глобального экстремума. Основной недостаток метода заключается в необходимости проведения большого числа испытаний для получения решения, достаточно близкого к оптимальному.

Круг задач, в решении которых имитационное моделирование может оказаться эффективным, достаточно широк. При этом возможно моделирование любого процесса, на протекание которого влияют случайные факторы. В некоторых случаях бывает выгодно отказаться от модели- рования реального случайного процесса и вместо этого использовать искусственную модель. Вместе с тем не следует забывать о присущих данному методу недостатках. Так кА результаты моделирования подвержены статистическим ошибкам, их надёжность должна обосновываться. Кроме того, длительность процесса получения выборок и их анализ могут значительно снизить эффективность применения имитационного моделирования.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

Получить 200 случайных чисел, подчиняющихся экспоненциальному закону распределения. Интервал изменения параметра X(0;10). Построить кривую плотности вероятности данного распределения.

Варианты заданий:

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,2	2	3	4

Задание 2

Получить 200 случайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения, для $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Интервал изменения параметра X(0;6). Построить кривую плотности вероятности данного распределения.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. 4-е изд. М.: Наука, 1985. – 80с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А – ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НА ИНТЕРВАЛЕ (0; 1)

0,86515	0,46156	0,56558	0,94377
0,69186	0,42502	0,88955	0,91641
0,41686	0,85181	0,33181	0,53807
0,86522	0,88059	0,67248	0,12311
0,72587	0,89688	0,27689	0,14480
0,52452	0,33346	0,79130	0,45420
0,76773	0,27256	0,25731	0,16287
0,04826	0,80317	0,45904	0,70492
0,87113	0,45863	0,19976	0,07824
0,84754	0,38132	0,15218	0,89571
0,90795	0,66434	0,12332	0,57802
0,03393	0,99224	0,53758	0,18867
0,42163	0,38967	0,72664	0,00607
0,47171	0,89342	0,09082	0,90316
0,93000	0,78416	0,99628	0,50961
0,42499	0,83935	0,90410	0,77757
0,97526	0,66447	0,37625	0,66181
0,82134	0,75120	0,75601	0,10274
0,84778	0,24620	0,49250	0,76044
0,57616	0,64294	0,49286	0,42903