ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Приборостроение»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по дисциплине

«Теория измерений »

Автор
Цыбрий И.К.

Ростов-на-Дону, 2014

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов направления 200100.62 очной, заочной форм обучения.

Автор

к.т.н., доцент
Цыбрий И.К.

Оглавление

ЗАНЯТИЕ 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ СЛОЖНЫХ КВАЗИТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Даны следующие сигналы:

- $x(t) = A$, где $A = const$
- $x(t) = \delta(t-\tau)$, где τ - момент действия импульса
- $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$, где X_m, ω, и φ - амплитуда, частота и фаза сигнала, соответственно
- $x(t) = X_{m1} \cos\omega_1 t + X_{m2} \cos\omega_2 t$

  при $\omega_1 / \omega_2 =$ 0,95 и $\omega_1 / \omega_2 =$ 0,05
- $$x(t) = \begin{cases} X_m e^{-\alpha t} \cos\omega t; t \geq 0 \\ 0; t \lhd 0 \end{cases}$$
- $x(t) = 0,5,5,5,0,5,5,5,0,5,5,5,0,5,5,5,0,5,5,5...$ при $t = 1,2...$64
- x(t) =

1305	850	824	833	1171	1656	874	823
1193	825	823	840	1354	1651	850	853
1089	815	824	869	1427	1624	856	854
1115	823	822	861	1399	1573	852	854
1001	823	824	841	1418	1568	851	850
958	824	824	875	1484	1547	851	853
885	823	824	861	1470	1503	853	850
853	835	825	864	1511	1394	853	834
840	817	818	940	1627	1333	854	853
831	826	824	961	1648	1155	846	853
819	842	823	1023	1707	1199	852	851
833	825	829	1022	1682	1052	854	856
831	825	825	1138	1649	1061	853	854
825	823	825	1199	1671	979	853	856
825	823	824	1171	1656	897	858	870
825	822	829	1250	1682	873	850	852

Требуется:

1. Получить спектры измерительных сигналов с использованием быстрого преобразования Фурье.
2. Построить графики энергетического спектра, действительной и мнимой составляющих амплитудного спектра, фазового спектра, амплитудно-фазовую частотную характеристику.
3. Проанализировать особенности полученных спектров в зависимости от их сложности, периодичности, характера изменения во времени.
4. Добавить в следующую модель гармонического сигнала

$$x_i = \sin(0{,}1i) + \cos(19i/150) \quad \text{при} \quad i - 0 \ldots 127$$

шумовую компоненту: rnd(2)-1
5. Провести спектральный анализ зашумленного сигнала

Указания к выполнению.
Для представления сигналов в частотной области используют интегральное преобразование Фурье, связанное с сигналом *x(t)* зависимостью

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \; .$$

Эту формулу называют прямым интегральным преобразованием Фурье или непрерывным комплексным спектром сигнала.
Преобразование Фурье обладает свойством обратимости, т.е. по спектру сигнала можно восстановить его во временном пространстве, проведя обратное преобразование Фурье по формуле

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \; .$$

Процедура **Анализ Фурье** включена в **Пакет анализа** программы Excel и предназначена для решения задач в линейных системах и анализа периодических данных с использованием метода быстрого преобразования Фурье (БПФ). Эта процедура поддерживает также обратные преобразования, при этом инвертирование преобразованных данных возвращает исходные данные.
Для выполнения преобразования Фурье необходимо:

1. Ввести точки анализируемой функции f(x) в таблицу.

Причем, вследствие использования БПФ, отсчеты должны быть взяты через равные промежутки x, их количество N должно быть четной степенью 2 и максимальное число не должно превышать

4096.

2. Командой меню Сервис > Анализ данных вызвать диалоговое окно Пакета анализа и выбрать процедуру Анализ Фурье.

3. Задать параметры диалогового окна Анализ Фурье:

- входной интервал — введя ссылку на диапазон точек анализируемой функции, которые необходимо преобразовать;
- инверсия — флажок устанавливается, если выполняется обратное преобразование, возвращающее данные в выходной диапазон в виде исходной функции. Если флажок сброшен, то в выходной диапазон выводятся значения коэффициентов ряда Фурье;
- выходной интервал — введя ссылку на левую верхнюю ячейку выходного диапазона.

Размер выходного диапазона будет определен автоматически, и на экран будет выведено сообщение в случае возможного наложения выходного диапазона на исходные данные.

Частотные характеристики полученного спектра находятся с помощью **Мастера функций** программы Excel.

ЗАНЯТИЕ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Задача № 1

Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}.$$

Найти плотность вероятности $f(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервалы (1; 2,5), (2,5; 3,5).

Задача № 2

Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = x/2$ в интервале (0; 2), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

Задача № 3

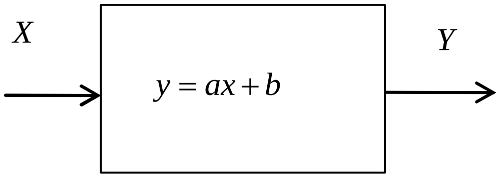
Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ в интервале (0; π), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию величины X.

Задача № 4

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1; 6]. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и СКО случайной величины X.

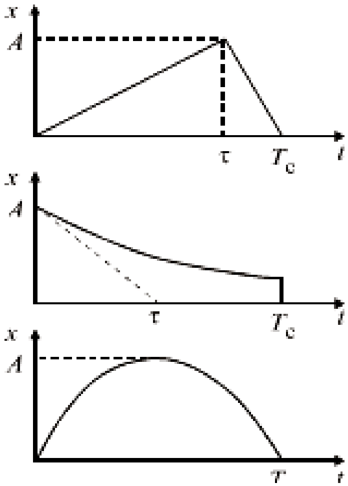
Задача № 5

На функциональный преобразователь с параметрами $a=-1,\ b=4$ поступают значения случайной величины X, обладающей нормальным законом распределения с параметрами [5; 2]. Отыскать закон распределения для случайной величины Y.



ЗАНЯТИЕ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ КВАНТОВАННЫХ И ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Даны следующие математические модели сигналов:



$$x(t)=\begin{cases}(A/\tau)\cdot t & \text{при } 0\le t\le\tau,\\ A\cdot(t-T_c)/(\tau-T_c) & \text{при } \tau\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}A\cdot\exp(-t/\tau) & \text{при } 0\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}A\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{T_c}\cdot t\right) & \text{при } 0\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$$

Целью работы является определение периода дискретизации по спектральной характеристике заданного сигнала и оценка погрешности восстановления сигнала при помощи ряда Котельникова.

Указания к выполнению.

Найти спектральную характеристику отсчетной функции

$$\varphi_n(t)=\frac{\sin\omega_в(t-nT)}{\omega_в(t-nT)}.$$

Составить программу расчета спектральной характеристики

$$X(j\omega)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

По амплитудной спектральной характеристике $X(\omega)$ определить значение частоты $\omega_в$ из условия, что $X(\omega) \le 0.05 \max\limits_{\omega} X(\omega)$ при $\omega \ge \omega_в$.

Определить интервал дискретизации Котельникова $T = \pi/\omega_в$ и сформировать дискретную последовательность

$$x(n) = x(nT)\,,\ n = 0,1,\ldots,N = T_c/T\ ,$$

где $T_с$ – интервал определения заданного сигнала $x(t)$.

Составить программу расчета сигнала $x_N^*(t)$, восстанавливаемого из дискретной последовательности $x(nT), n = 0,1,\ldots,N$, при помощи ряда Котельникова. Построить на одном рисунке графики функций $x(t)$ и $x_N^*(t)$.

Сформировать сигнал ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - x_N^*(t)$. Определить максимальную абсолютную ошибку

$$\varepsilon_{\max} = \max_t |\,\varepsilon(t)\,|\,.$$

ЗАНЯТИЕ 4. ИЗУЧЕНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Даны результаты измерения выходного напряжения источника питания в контрольных точках:

Контрольные точки измерения напряжения, В	Результаты измерения, В
0,1	0,102
0,2	0,205
0,3	0,306
0,4	0,406
0,5	0,51
0,6	0,617
0,7	0,715
0,8	0,81
0,9	0,91
1,0	1,01
2,0	2,03
3,0	3,03
4,0	4,04
5,0	5,04
6,0	6,05
7,0	7,03
8,0	8,05
9,0	9,06
10,0	10,06
20,0	20,05
29,9	29,96

Необходимо определить допускаемую погрешность, абсолютную погрешность, относительную погрешность.

Указания к выполнению.

Абсолютная погрешность установки выходного напряжения:

$\delta = U_{изм} - U_{уст}$;

Относительная погрешность установки выходного напряжения:

$\delta\ \% = (U_{изм} - U_{уст}) / U_{уст}$;

При этом должно быть установлено, что погрешность установки выходного напряжения не превышает:

$0{,}5\%\ U_{уст} + 0{,}1\%\ U_{max}$;

ЗАНЯТИЕ 5. УПРАЖНЕНИЕ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ВЛИЯНИЕМ ВНЕШНИХ УСЛОВИЙ

В таблице приведены результаты измерений:

1	2	3	4	5	6
1	1	17	3,97	20	23
7,48	1,13	14,42	6	19,57	20,7
6,42	2	9,89	5,1	17,08	23,8
13,9	1,06	10,33	8,19	17	19,52
18,06	1,59	7,87	3,21	14,81	25,4
19,65	3,17	5,23	8,69	15,11	22,3
17,68	1,44	3,27	8,38	13,22	23
24,48	8	2,14	4,66	13,83	22,1
20,78	19,57	3,84	11,34	12	23,3
22,52	17,68	0,63	8,25	11,79	23,5
19,19	11	5,79	14,04	9,29	20,71
22,22	4,53	2,52	15,68	10,81	24,11
18,82	1,66	6,61	8,5	7,56	20,9
18,74	3,4	8,56	15,43	10,96	22,6
19,57	0,76	7,75	12,85	4,69	26,9
18,06	2	5,67	15,18	2,8	20,9
18,29	1,13	7,18	19,9	4	22,5
16,17	1,51	14,92	17,19	2,27	20,6
15,11	0,3	13,6	19,71	3,93	21,84
14,28	2	21,22	17,76	1	23,88

Необходимо определить погрешности измерений, вызванные влиянием внешних условий

Указания к выполнению.

При обработке результатов измерений предлагается следующий порядок операций.

При прямых (непосредственных) измерениях

1. Вычисляется среднее из *n* измерений:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
.

2. Определяется среднеквадратичная погрешность среднего арифметического: $$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\langle x\rangle - x_i\right)^2}{n(n-1)}}$$.

3. Задается доверительная вероятность a и определяется коэффициент Стьюдента $t_{a,n}$ для заданного a и числа произведенных измерений n.

4. Находится полуширина доверительного интервала (абсолютная погрешность результата измерений):

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сист}^2 + \Delta x_{сл}^2}$$, где D $x_{сл} = t_{a,n}\,S$.

5. Оценивается относительная погрешность результата измерений

$$\delta = \frac{\Delta x}{\langle x\rangle}$$

6. Окончательный результат записывается в виде

$x = < x > \pm$ D x.

При косвенных измерениях

1. Для каждой серии измерений величин, входящих в определение искомой величины, производится обработка в описанной выше последовательности. При этом для всех измеряемых величин задают одно и то же значение доверительной вероятности a .

2. Оценивается точность результата косвенных измерений.

3. Определяется относительная погрешность результата серии косвенных измерений.

4. Окончательный результат записывается в виде

$y = < y > \pm$ D y, где $< y > = f(< x_1 > , < x_2 > ,..., < x_m >)$.

Возможен и другой подход к оценке погрешности результата косвенного измерения. Вместо определения искомой величины через средние значения $< x_i >$ как $< y > = f(< x_1 > , < x_2 > ,..., < x_m >)$ можно для каждого выполненного опыта вычислить

$$y_i = f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)})$$

а затем найти $< y >$ как среднее арифметическое и далее абсолютную погрешность Dy. Оба способа дают близкие результаты.

ЗАНЯТИЕ 6. РАСЧЕТ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Задача № 1

Систематическая ошибка измерителя дальности равна +20м, случайная ошибка распределена по нормальному закону с СКО $\sigma = 25$ м.
Какова вероятность того, что показание дальномера не превосходит истинное значение дальности по абсолютной величине на 20 м?

Задача № 2

Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 метрам в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону с СКО $\sigma = 100$ м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

Задача № 3

Самолёту задан коридор относительно желаемой высоты полёта ± 50 м. Система удержания высоты полёта работает с систематической ошибкой +20м и случайной нормально распределённой с СКО $\sigma = 75$ м.
Какова вероятность того, что самолёт будет лететь ниже, внутри и выше заданного коридора?

Задача № 4

Систематическая ошибка высотомера равна +20м, случайная ошибка распределена по нормальному закону. Требуется, чтобы с вероятностью 0.9 ошибка измерения высоты по абсолютной величине не превосходила 100 м.
Какую СКО должен при этом иметь высотомер?

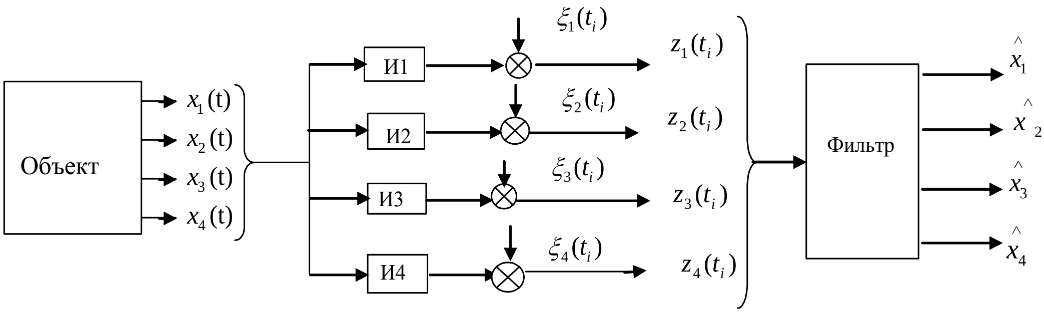
ЗАНЯТИЕ 7. УПРАЖНЕНИЯ ПО СТРУКТУРНОМУ СИНТЕЗУ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР И УСТРОЙСТВ ПО ЗАДАННЫМ АЛГОРИТМАМ

Информационно-измерительная система (ИИС) измеряет четыре координаты объекта $x_1,\ x_2, x_3,\ x_4$, которые относительно медленно изменяются со временем.

В составе ИИС четыре одновременно работающих измерителя И1, И2, И3, И4, которые, в первом приближении, можно принять безынерционными.

На выходе каждого из измерителей в момент измерения t_i (i = $\overline{1,N}$) фиксируется величина

$z_j(t_i)=h_{j1}x_1(t_i)+h_{j2}x_2(t_i)+h_{j3}x_3(t_i)+h_{j4}x_4(t_i)+\xi_j(t_i)$ (i = $\overline{1,N}$; j = $\overline{1,4}$), где $\xi_j(t_i)$ - помеха измерения.



Таким образом, в момент измерения t_i (i = $\overline{1,N}$) с помощью ИИС доступны обработке сразу четыре числа $z_1(t_i)$, $z_2(t_i)$, $z_3(t_i)$, $z_4(t_i)$, причём

$$z_1(t_i)=h_{11}x_1(t_i)+h_{12}x_2(t_i)+h_{13}x_3(t_i)+h_{14}x_4(t_i)+\xi_1(t_i),$$

$$z_2(t_i)=h_{21}x_1(t_i)+h_{22}x_2(t_i)+h_{23}x_3(t_i)+h_{24}x_4(t_i)+\xi_2(t_i),$$

$$z_3(t_i)=h_{31}x_1(t_i)+h_{32}x_2(t_i)+h_{33}x_3(t_i)+h_{34}x_4(t_i)+\xi_3(t_i),$$

$$z_4(t_i)=h_{41}x_1(t_i)+h_{42}x_2(t_i)+h_{43}x_3(t_i)+h_{44}x_4(t_i)+\xi_4(t_i).$$

С помощью специального эксперимента с объекта удалось снять массив данных значений $z_1(t_i)$, $z_2(t_i)$, $z_3(t_i)$, $z_4(t_i)$ для

20 моментов измерения (N=20), при которых, с достаточной степенью точности, можно считать значения измеряемых величин x_1, x_2, x_3, x_4 постоянными. Этот массив данных приведён в табл.1.

Относительно помех измерения $\xi_1(t_i), \xi_2(t_i), \xi_3(t_i), \xi_4(t_i)$ известно, что:

- каждая из них - нормально распределённая случайная величина с нулевым матожиданием;
- помехи измерения являются взаимно независимыми;
- помехи измерения не зависят от момента измерения.

Требуемая точность измерения значений x_1, x_2, x_3, x_4 определяется доверительной вероятностью $\beta = 0.99$ и доверительным интервалом, относительно которого известно, что он должен быть не менее чем в два раза меньше, чем доверительный интервал, получаемый при измерении в один момент времени при t_1.

Известно, что матрица h = (h_{sj}) (s, j = $\overline{1,4}$), определяемая системой (1), остаётся постоянной и одинаковой для любого момента измерения. Вариант матрицы h выбирается из таблицы 3 в соответствии с номерами измерителей.

Требуется: Сформировать фильтр, который на основе минимального числа замеров удовлетворяет заданным требованиям на точность измерения.

Указания к выполнению.

1. За основу решения задачи принять метод максимального правдоподобия (ММП).
2. На основе правила ″3-х сигм ‟ найти приближённые значения СКО ошибки измерения каждого из четырёх измерителей $\sigma_{\xi 1}, \sigma_{\xi 2}, \sigma_{\xi 3}, \sigma_{\xi 4}$.
3. На основе ММП и одного измерения при t_1 отыскать оценки измеряемых величин $\hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1, \hat{x}_3^1, \hat{x}_4^1$ и для каждой из них построить доверительные интервалы для заданной доверительной вероятности $\beta = 0.99$.
4. На основе ММП и заданных 20-ти измерений отыскать оценки измеряемых величин $\hat{x}_1^{20}, \hat{x}_2^{20}, \hat{x}_3^{20}, \hat{x}_4^{20}$ и для каждой из них построить доверительные интервалы для заданной довери-

тельной вероятности $\beta = 0.99$.

5.Подсчитать минимальное число измерений M для получения требуемой точности измерения.

6.Для полученного числа M в системе Matlab провести моделирование полученного фильтра, построить графики зависимости оценки $\hat{x}_j^M \quad (j = \overline{1,4})$ от номера опыта (число опытов принять равным 15-ти) и убедиться, что показания для $\hat{x}_j^M \quad (j = \overline{1,4})$ и соответствующие доверительные интервалы для каждого из опытов включают значения $\hat{x}_1^{20}, \hat{x}_2^{20}, \hat{x}_3^{20}, \hat{x}_4^{20}$.

Таблица.

t_i	$z^1(t_i)$	$z^2(t_i)$	$z^3(t_i)$	$z^4(t_i)$	$z^5(t_i)$	$z^6(t_i)$	$z^7(t_i)$
1	7.3276	100.530	189.6191	291.6118	241.6253	32.1538	280.2074
2	11.4286	87.4353	186.5571	304.8978	342.9048	30.0510	308.8614
3	13.2471	112.1514	175.8063	396.1147	301.5060	25.0937	285.3699
4	8.6164	89.9491	188.5418	335.4250	271.9684	33.5777	332.0967
5	11.7160	103.2874	186.3780	361.4940	337.2578	39.7662	276.0616
6	12.5080	100.1932	169.8871	346.3994	311.4232	35.5395	225.2437
7	6.8125	88.7810	167.4506	310.2267	256.4608	41.7869	258.0509
8	7.1181	76.2933	169.0823	314.0213	361.2814	34.5227	326.6695
9	11.1423	97.4081	145.4973	364.1827	314.0276	41.3226	291.6033
10	9.2002	87.8937	170.3199	294.5048	367.5513	30.3009	306.3767
11	11.3800	104.1446	177.3689	381.0591	352.2113	26.3011	323.3260
12	11.6312	103.0774	181.2962	370.4480	270.2138	30.9444	231.3872
13	11.4238	114.9243	203.8702	300.9143	242.8629	37.9512	275.6596
14	12.5805	103.9128	167.9805	328.7197	297.7183	26.4190	273.8709
15	11.3372	91.5640	187.4647	282.6111	286.1231	35.1764	264.4559
16	12.3817	101.8034	190.9810	231.8840	263.0368	28.9929	289.5375
17	7.5951	87.9088	193.8178	391.3169	323.3996	34.7559	340.6304
18	9.9604	97.8049	155.1582	316.0682	367.9821	26.5008	293.8468
19	9.6866	97.5178	179.2407	358.3684	276.4086	32.4300	331.8234
20	6.7918	108.9500	179.7576	353.7029	262.8959	21.9772	274.1139

ЗАНЯТИЕ 8. УПРАЖНЕНИЯ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ С ЦЕЛЬЮ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Задача 1.

Случайная величина x равномерно распределена на отрезке [c,d], Величины d и c являются параметрами данного распределения. Построить для них оценки, используя метод моментов.

Для равномерного распределения $\frac{b+a}{2}$ является математическим ожиданием, а $\frac{(b-a)^2}{12}$ - дисперсией.

Задача 2.

Провели 35 наблюдений за временем наладки устройства. Найти закон распределения времени наладки, используя метод квантилей.

Исходя из физической сути задачи, предполагаем, что время наладки подчинено экспоненциальному закону распределения: $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$.

Необходимо определить параметр λ.

Задача 3.

Пример 7.7. С какой вероятностью можно утверждать, что возможность покупки изделия с дефектом находится в пределах от 8 до 12 процентов, если из 30 обследованных изделий, купленных в этом магазине, три оказались с дефектами?

Задача 4.

С какой вероятностью можно утверждать, что возможность покупки изделия с дефектом находится в пределах от 8 до 12 процентов, если из 30 обследованных изделий, купленных в этом магазине, три оказались с дефектами?

Задача 5.

Провели 20 замеров диаметров изготавливаемых штамповкой втулок. Получили следующие значения (в мм): 10,85; 10,41; 11,05; 10,52; 10,43; 11,02; 10,56; 10,73; 10,85; 10,94; 11,00; 10,52; 10,55; 10,79; 11,04; 11,07; 10,84; 10,77; 10,65; 10,92.

Требуется найти оценки для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения величины X и построить для них доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности $P_{\partial} = 0{,}8$.

Указания к выполнению.

1. Задача точечной оценки параметров состоит в следующем:

- имеется выборка наблюдений (x_1, x_2, …, x_n) за случайной величиной X,
- объем выборки n фиксирован,
- найден вид закона распределения величины X, например, в форме плотности распределения f(T, x), где T – неизвестный параметр распределения,
- параметр является неслучайной величиной.

Требуется найти оценку θ параметра T закона распределения, для чего применяются следующие методы.

Метод максимального правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве «наиболее правдоподобного» значения параметра T берут значение θ, максимизирующее вероятность получить при n опытах данную выборку (x_1, x_2, …, x_n).

Это значение параметра θ зависит от выборки и является искомой оценкой.

Совместная плотность вероятности

$L(x_1, x_2 \ldots, x_n ; \theta) = f(x_1, \theta)\, f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)$,

рассматриваемая как функция параметра θ, называется **функцией правдоподобия**.

В качестве **оценки максимального правдоподобия** параметра T следует взять то значение θ, которое обращает функцию правдоподобия в максимум.

В целях упрощения вычислений переходят от функции правдоподобия к ее логарифму lnL.

Для нахождения оценки необходимо заменить в функции правдоподобия T на θ, принимая $\theta = \theta(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, и решить уравнение $\frac{dL}{d\theta} = 0$, которое обращает L в максимум.

Метод моментов.

Метод моментов заключается в следующем: любой момент случайной величины x зависит от параметра θ. Но тогда и параметр θ может оказаться функцией от теоретического момента. Подставив в эту функцию вместо неизвестного теоретического момента его выборочный аналог, получим вместо параметра θ его оценку .

Последовательность процедуры оценивания:

- выбирается столько эмпирических моментов, сколько требуется оценить неизвестных параметров распределения; желательно применять моменты младших порядков, так как погрешности вычисления оценок резко возрастают с увеличением порядка момента;
- вычисленные по экспериментальным данным оценки моментов приравниваются к теоретическим моментам;
- параметры распределения определяются через моменты, и составляются уравнения, выражающие зависимость параметров от моментов, в результате получается система уравнений, решение которой дает оценки параметров распределения генеральной совокупности.

Метод квантилей.

Квантильные оценки параметров распределения получают приравниванием теоретических и выборочных квантилей.

2. Для нахождения доверительных интервалов необходимо знать заранее вид закона распределения СВ X, тогда как для приближенных методов это не обязательно.

Идея точных методов нахождения доверительных интервалов сводится к следующему. Любой доверительный интервал находится из условия, выражающего вероятность выполнения некоторых неравенств, в которые входит интересующая нас оценка.

Закон распределения оценки в общем случае зависит от самих неизвестных параметров СВ X. Однако иногда удается перейти в неравенствах от случайной величины $\widetilde{a}$ к какой-либо другой функции имеющихся значений x_1, x_2, ..., x_n, закон которой зависит только от числа опытов n и от вида закона распределения СВ X. Такого рода СВ играют большую роль в математической статистике. Наиболее подробно они изучены для некоторых параметров нормального распределения случайной величины X.

Д,ля математического ожидания m_x получаем доверительные границы:

$$a_{1,2} = \tilde{m}_x \mp t_T \tilde{\sigma}_{m_x} = \tilde{m}_x \mp \frac{t_T \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}},$$

где $t_T = \arg T(P_\partial / 2;\ n-1)$ - обратная функция Стьюдента.

Доверительные границы для дисперсии D_x:

$$a_1 = (n-1)\tilde{D}_x / \chi_2^2, \qquad a_2 = (n-1)\tilde{D}_x / \chi_1^2,$$

где X - нормальная случайная величина,

$$\chi_1^2 = \chi^2((1-P_\partial)/2,\ \ n-1),$$

$$\chi_2^2 = \chi^2((1+P_\partial)/2,\ \ n-1).$$