



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Приборостроение и биомедицинская инженерия»

Практикум по дисциплинам

«Теоретические основы информационно- измерительной техники, Информационно- статистическая теория измерений»

Автор
Цыбрий И. К.

Ростов-на-Дону, 2019



Аннотация

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения направлений 12.03.01 «Приборостроение» (бакалавриат) 12.04.01 «Приборостроение» (магистратура).

Автор

к.т.н, доцент кафедры
«Приборостроение и
биомедицинская инженерия»
Цыбрий И.К.



Оглавление

Практическое занятие №1	5
Ряды Фурье.....	5
Классический спектральный анализ:	8
Численный спектральный анализ	8
Спектральный анализ на основе быстрого преобразования Фурье.....	9
Эффект Гиббса.	9
Задание на лабораторную работу.	10
Практическое занятие №2	12
Исследование спектральных характеристик периодических сигналов.	12
Практическое занятие №3	17
Корреляционные функции и спектральные плотности стационарных случайных сигналов.	17
Практическое занятие №4	22
Прохождение стационарных случайных сигналов через линейные стационарные динамические системы.....	22
Практическое занятие №5	30
Постановка задачи фильтрации по Колмогорову-Винеру.	30
Практическое занятие №6	38
Изучение возможности синтеза сигналов по дискретным отсчетам в соответствии с теоремой Котельникова.....	38
Практическое занятие №7	43
Z-преобразование сигналов и системных функций.	43
Практическое занятие №8	49
Синтез наблюдателя полного порядка для многомерных функций.....	49
Практическое занятие №9	58
Дискретный фильтр Калмана. Задачи оптимальной фильтрации по Калману.....	58
Приложение 1	70
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	72



ПРИЛОЖЕНИЕ 3.82

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.

Ряды Фурье.

В технических приложениях часто изучаются периодические процессы, которые можно определить следующим образом – пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, величину T называют периодом этой функции, если от прибавления его к аргументу величина функции не меняется:

$$f(x + T) = f(x)$$

Очевидно, что величина $n \cdot T$ также является периодом функции при условии, что n - целое число. При анализе периодических процессов достаточно рассмотреть функции с периодом 2π . Если период функции $g(x)$ равен T , то функция $g(x) = g\left(\frac{T \cdot x}{2\pi}\right)$ будет иметь период 2π .

Разложение в ряд Фурье возможно для периодических сигналов, для которых выполняется требование – должен существовать фрагмент сигнала длительностью в один период, удовлетворяющий **условиям Дирихле**:

- не должно быть разрывов второго рода, то есть функция должна быть ограничена по модулю;
- число разрывов первого рода (скачков) должно быть конечным;
- число экстремумов должно быть конечным.

Так как целью данной работы не является изложение темы «ряды Фурье», а лишь построение примеров их использования, то основываясь на введенном понятии периода функции, воспользуемся следующим определением для функции периодической с периодом 2π и кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi; \pi]$:

Ряд Фурье $S(t)$ для функции $f(x)$ имеет вид:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 \cdot t) + b_k \sin(k\omega_1 \cdot t))$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \cos(k\omega_1 \cdot \tau) d\tau$$

Где:

для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \sin(k\omega_1 \cdot \tau) d\tau$$

для $k = 1, 2, \dots$ a_0

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

- круговая частота, соответствующая периоду повторения сигнала. a_0

Константа a_0 рассчитывается по общей формуле для a_k . Это слагаемое является средним значением сигнала на периоде.

Синусно-косинусная форма представления ряда Фурье имеет некоторое неудобство, требуется суммирование двух гармонических функций. Проведем следующее рассуждение, обозначим:

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k) \quad b_k = A_k \sin(\varphi_k)$$

Величины A_k и φ_k могут быть получены из следующих соотношений:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}$$

При этом можно записать:

$$\begin{aligned} a_k \cos(k\omega_1 \cdot t) + b_k \sin(k\omega_1 \cdot t) &= A_k \cos(k\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\varphi_k) + A_k \sin(k\omega_1 \cdot t) \cdot \sin(\varphi_k) = \\ &= A_k \cos(k\omega_1 \cdot t + \varphi_k) \end{aligned}$$

Тогда ряд Фурье можно представить в виде вещественной формы:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 \cdot t - \varphi_k)$$

Ряд Фурье может быть также представлен в комплексном виде, для чего преобразуем общий член ряда с помощью формул Эйлера:

$$\begin{aligned} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) &= a_k \frac{\exp(jkx) + \exp(-jkx)}{2} + b_k \frac{\exp(jkx) - \exp(-jkx)}{2j} = \\ &= a_k \frac{\exp(jkx) + \exp(-jkx)}{2} - jb_k \frac{\exp(jkx) - \exp(-jkx)}{2} = \\ &= \frac{a_k - jb_k}{2} \cdot \exp(jkx) + \frac{a_k + jb_k}{2} \cdot \exp(-jkx) = \dot{C}_k \cdot \exp(jkx) + \dot{C}_{-k} \cdot \exp(-jkx) \end{aligned}$$

Где: $\dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$ $\dot{C}_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$ $C_0 = \frac{a_0}{2}$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = C_0 + \sum_{k=1}^N (\dot{C}_k \exp(jkx) + \dot{C}_{-k} \exp(-jkx)) = \\ &= \sum_{-N}^N \dot{C}_k \exp(jkx) \end{aligned}$$

Комплексные коэффициенты ряда связаны амплитудами и фазами, входящими в вещественную форму:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2} A_k \cdot \exp(j \cdot \varphi_k) \quad A_k = 2 \cdot |\dot{C}_k| \quad \varphi_k = \arg(\dot{C}_k)$$

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(\dot{C}_k) \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(\dot{C}_k)$$

Из этого следует, что формула для расчета коэффициентов

\dot{C}_k ряда Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \exp(-j \cdot k \omega_1 \cdot \tau) d\tau$$

Если $f(\tau)$ является четной функцией, то коэффициенты

\dot{C}_k ряда будут чисто вещественными, если $f(\tau)$ - функция нечетная, то коэффициенты ряда будут чисто мнимыми.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье называют амплитудным спектром, а совокупность их фаз фазовым спектром,

причем в случае вещественного сигнала $f(\tau)$ амплитудный и фазовый спектры обладают симметрией. Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью A_k (спектр амплитуд) и j_k (спектр фаз) от частоты $\omega_k = k\omega_1$.

Классический спектральный анализ:

Спектральный анализ периодических функций заключается в нахождении амплитуды и фазы гармоник ряда Фурье. Задача, обратная спектральному анализу, называется *спектральным синтезом*. Слово "классический" означает, что коэффициенты Фурье вычисляются прямым интегрированием.

Численный спектральный анализ

Численный спектральный анализ заключается в нахождении коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ (или $A_1, A_2, \dots, A_k, j_1, j_2, \dots, j_k$) для периодической функции $y = f(t)$, заданной на отрезке $[0, T]$ дискретными отсчетами. Он сводится к вычислению коэффициентов Фурье по формулам численного интегрирования для метода прямоугольников:

```
function [a b]=FourierKoeff(y,t,N)
%Расчет коэффициентов разложения в ряд Фурье
a=zeros(1,N+1);%
b=a;%
a(1)=0.5*trapz(t,y)/pi;
for i=1:N
    for k=1:length(t)+1
        yi=y.*cos((i)*t);
        zi=y.*sin((i)*t);
    end
    %Результат расчета интеграла по методу трапеций
    a(i+1)=trapz(t,yi);
    b(i+1)=trapz(t,zi);
end
a=a/pi;
b=b/pi;
```

Спектральный анализ на основе быстрого преобразования Фурье.

Встроенные в Matlab средства быстрого преобразования Фурье (БПФ) существенно упрощают процедуру приближенного спектрального анализа. БПФ - быстрый алгоритм переноса сведений о функции, заданной 2^m (m - целое число) отсчетами во временной области, в частотную область. Если речь идет о функции $f(t)$, заданной действительными отсчетами, следует использовать функцию *fft*.

fft(v)

Возвращает прямое БПФ 2^m -мерного вещественнозначного вектора v , где v - вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$.

Результатом будет вектор A размерности $1 + 2m - 1$ с комплексными элементами - отсчетами в частотной области. Фактически действительная и мнимая части вектора есть коэффициенты Фурье a_k и b_k , что существенно упрощает их получение (см. Приложение 3).

Функция *ifft* реализует обратное БПФ:

ifft(v)

Возвращает обратное БПФ для вектора v с комплексными элементами. Вектор v имеет $1 + 2^{m-1}$ элементов.

Результатом будет вектор A размерности $2m$ с действительными элементами.

Эффект Гиббса.

Эффект Гиббса возникает при разложении в ряд Фурье функций, имеющих разрыв первого рода. Рассмотрим пример с применением п.п.п. Matlab – определение коэффициентов разложения в ряд Фурье сигнала вида рис. 22 и получение амплитудного и фазового спектров:

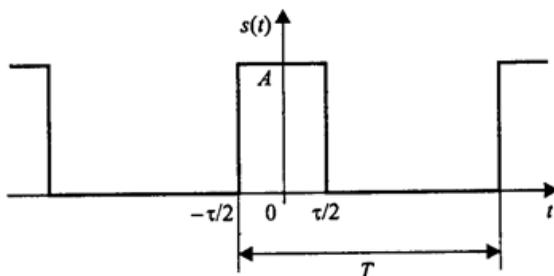


Рис. 1 периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

Отличие результата разложения в усеченный ряд Фурье от исходной функции и носит название эффекта Гиббса. Из приведенного результата видно, что увеличение числа привлекаемых гармоник приводит к уменьшению этого отличия.

ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ.

Задание 1. Вычислить первые шесть пар коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $f(t)$ на отрезке $[0, 2 \cdot]$. Построить графики 1, 2 и 3 гармоник. Выполнить гармонический синтез функции $f(t)$ по 1, 2 и 3 гармоникам. Результаты синтеза отобразить графически.

Задание 2. Выполнить классический спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 3. Выполнить анализ эффекта Гиббса представлением ряда Фурье с различным количеством членов. Отобразить графически результат.

Задание 4. Выполнить численный спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Для этого необходимо задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 32 отсчетах. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 5. Выполнить спектральный анализ и синтез функции $f(t)$ с помощью БПФ. Для этого необходимо:

- задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 128 отсчетах;
- выполнить прямое БПФ с помощью функции `fft` и отобразить графически найденные спектры амплитуд и фаз первых шести гармоник;
- выполнить обратное БПФ с помощью функции `ifft` и отобразить графически результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

Задание 6. Выполнить, используя возможности Simulinka восста-

новление анализируемого сигнала рис. 2.
 Исходные данные для выполнения работы взять по своему номеру
 в списке группы в таблице 1 приложения.

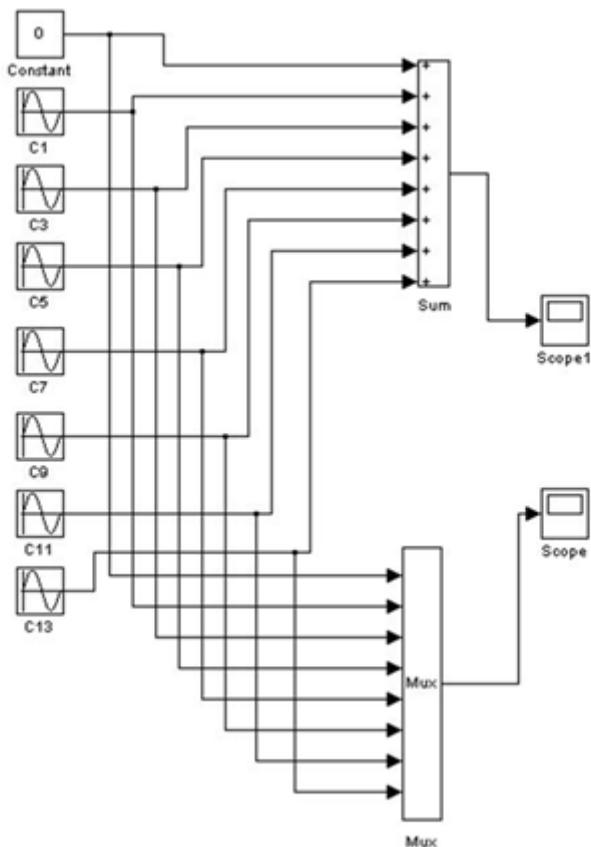


Рис. 2. Восстановление исследуемого сигнала в среде Simulink.

Таблица – Функции генерации сигналов пакета Signal Processing

№	Функция	Действие
1	chirp	Генерирует косинусоиду с переменной частотой
2	diric	Вычисляет функцию Дирихле
3	gauspuls	Генерирует синусоиду, модулированную функцией Гаусса
4	gmonopuls	Генерирует моноимпульс Гаусса

5	pulstran	Генерирует импульсы
6	rectpuls	Генерирует аperiodические прямоугольные импульсы
7	sawtooth	Генерирует пилообразные колебания
8	sinc	Функция sinc
9	square	Генерирует прямоугольные импульсы
10	tripuls	Генерирует аperiodические треугольные импульсы

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2.

Исследование спектральных характеристик периодических сигналов.

Основные понятия и соотношения:

Любой периодический сигнал $X(t)$ может быть при выполнении условий Дирихле представлен тригонометрическим рядом Фурье:

$$X(t) = a_0 + k = 1 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t))$$

где: $\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ - угловая частота 1-й или основной гармоники;

a_0, a_k, b_k - коэффициенты разложения в ряд.

Формулы для расчета коэффициентов ряда имеют вид:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} X(t) dt \quad ; \quad a_k = \frac{1}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} X(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad ;$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} X(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad ; \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

где: A_k - амплитуда к-й гармоники;

φ_k - фаза к-й гармоники;

$$\omega_k = k \cdot \omega_1 - \text{угловая частота } k\text{-й гармоники};$$

t_n - момент начала периода.

Зависимости A_k и φ_k представляют собой соответственно спектры амплитуд и фаз.

Ряд Фурье может быть представлен в комплексной форме:

$$X(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \exp(j \cdot k \cdot \omega_1 \cdot t) \quad 2.1$$

где коэффициенты ряда вычисляются по формуле:

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} X(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad 2.2$$

Формулы 2.1 и 2.2 парой преобразования Фурье, совокупность коэффициентов $\dot{A}_k = A_k \cdot \exp(j \cdot \varphi_k)$ является комплексным спектром периодического сигнала $X(t)$. Совокупность действительных величин $\dot{A}_k = |A_k|$ является функцией частоты и представляет собой спектр амплитуд. Совокупность величин φ_k в зависимости от частоты является спектром фаз.

Вариант кода предлагаемый к использованию в работе:

```
function Row_Fourier
```

```
clc;
```

```
clear all;
```

```
global Am
```

```
%Более или менее нормальный результат
```

```
%N-количество гармоник ряда Фурье
```

```
%t-время
```

```
%у-значения функции, разлагаемой в ряд Фурье
```

```
%a-вектор коэффициентов при cos(kx)
```

```
%b-вектор коэффициентов при sin(kx)
```

```
T=2*pi;%
```

```
om=2*pi/T;%
```

```
[y t]=func;
```

```
ki(1)=1;
```

```
tau=0.5;
```

```
disp('данные исследуемого сигнала y');
```

```
disp(' T [c] om [рад/c] Am [V]');
```

```

fprintf('| %5.2f | %5.2f | %5.2f |\n',...
    T,om,Am);
for k=1:10
    [z(:,k),a,b]=RazIF(k,y,t);
    ki(k+1)=k+1;
    fi(k+1)=om*k;
end
%Расчет коэффициентов ряда Фурье в косинусной форме
[A F]=S_C_forma(a,b);
%Расчет коэффициентов ряда Фурье в комплексной форме
[C Fi]=Komp_Koef(a,b,fi);

%Вывод результатов на график
Pech1(t,y,z(:,4),z(:,6),z(:,8));
Pech2(a,b,ki);
Pech3(A,F,ki);
Pech4(C,Fi,ki);

function [A F]=S_C_forma(a,b)
%Расчет коэффициентов ряда Фурье в косинусной форме
A=sqrt(a.^2+b.^2);
F=atan(b./a);

function [C Fi]=Komp_Koef(a,b,fi)
%Расчет коэффициентов ряда Фурье в комплексной форме
c=(a-b*1j)/2;
c_n=(a+b*1j)/2;
C=[fliplr(c_n(2:end)),c];
Fi=[fliplr(fi(1:end-1)),0,fi(1:end-1)];
%
function [razl a b]=RazIF(N,y,t)
%Расчет суммы членов ряда Фурье
[a b]=FourierKoef(y,t,N);
razl=a(1);
for i=1:N
    razl=razl+a(i+1)*cos(i*t)+b(i+1)*sin(i*t);
end

function [a b]=FourierKoef(y,t,N)
%Расчет коэффициентов разложения в ряд Фурье
a=zeros(1,N+1);%
b=a;%
    
```

```

for i=1:N+1
    for k=1:length(t)+1
        yi=y.*cos((i-1)*t);
        zi=y.*sin((i-1)*t);
    end
    %Результат расчета интеграла по методу трапеций
    a(i)=trapz(t,yi);
    b(i)=trapz(t,zi);
end
a=a/pi;
b=b/pi;

```

```

function Pech1(t,y,y1,y2,y3)
global Am
%
figure(1)
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',8);
plot(t,y,t,y1,'-k',t,y2,'-k',t,y3,':k')
%grid on
axis([-1.1*pi 1.1*pi -1.25*Am 1.25*Am]);
xlabel('Время')
    ylabel('F(x)');
    h = legend('y','k=4','k=6','k=8',4);
set(h,'Interpreter','none')
function Pech2(a,b,ki)
%
figure(2)
subplot(2,1,1)
stem(ki,a)
grid on
    ylabel('a(k)')
    xlabel('k')
subplot(2,1,2)
stem(ki,b)
grid on
    ylabel('b(k)')
    xlabel('k')

```

```

function Pech3(Ai,fi,ki)
%
figure(3)
subplot(2,1,1)

```

```

stem(ki,Ai)
grid on
ylabel('A(k)')
xlabel('k')
subplot(2,1,2)
stem(ki,fi)
grid on
ylabel('Fi(k)')
xlabel('k')

function Pech4(Ci,fi,ki)
%
k=[fliplr(-ki(1:end-1)),0,ki(1:end-1)];
figure(4)
subplot(2,1,1)
stem(k,Ci)
grid on
ylabel('C(k)')
xlabel('k')
subplot(2,1,2)
stem(k,fi)
grid on
ylabel('Fi(k)')
xlabel('k')
function [y t]=func
%Функция, разлагаемая в ряд Фурье
global Am
Am=10;%модуль значения функции на интервале
n=100;%количество дискрет по оси времени
dt=2*pi/n;
for k=1:n+1
t(k)=-pi+dt*k;%
if t(k)<=0
y(k)=-Am;
else y(k)=Am;
end
end
end
    
```

Задание на проведение расчета выбирается из таблицы №2 приложения. Расчет проводится с использованием Matlab. Возможно использование приведенного кода, естественно с изменением подпрограммы, описывающей исследуемую функцию. Ре-

зультат работы представляет собой графики с пояснениями полученных результатов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3.

Корреляционные функции и спектральные плотности стационарных случайных сигналов.

Основные понятия и соотношения:

Определение статистических характеристик данных процессов производится путем усреднения данных процессов различными методами. Если результаты усредненных данных процессов не зависят от применяемого способа усреднения и от вида случайного процесса, то такие случайные стационарные процессы называются - эргодическими.

В дальнейшем будем рассматривать стационарные дискретные случайные процессы, предполагая, что они обладают эргодическим свойством. В этом случае среднее значение дискретного случайного процесса по множеству равно среднему значению по времени, которое определяется следующей суммой:

$$\overline{X[k]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]$$

Вся необходимая информация для расчета линейных систем для стационарного процесса содержится в корреляционной функции:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) \cdot X(t + \tau) dt \quad 3.1$$

Корреляционной функцией стационарного дискретного случайного процесса $X[k]$ является неслучайная дискретная (решетчатая) функция, определяемая выражением^

$$R(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot N + 1} \sum_{k=-N}^{k=N} X[k] \cdot X[k + m] \quad 3.2$$

где $\tau = 0, 1, 2, \dots$ — дискретные значения относительного времени.

Дискретная корреляционная функция обладает следующими основными свойствами:

1. Начальное значение дискретной корреляционной функции

(при $\tau=0$) равно среднему значению квадрата Дискретного случайного процесса:

$$R(0) = \overline{X[k]^2} \quad 3.3$$

2. Дискретная корреляционная функция при $\tau=0$ достигает наибольшего значения:

$$R_x(m) \geq R_x(0) \quad 3.4$$

3. Дискретная корреляционная функция является четной:

$$R_x(m) = R_x(-m) \quad 2.5$$

При наличии двух дискретных случайных процессов, $X[n]$ и $G[n]$, вводят понятие взаимной корреляционной функции:

$$R_{XY}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot N + 1} \sum_{k=-N}^{k=N} X[k] \cdot Y[k+m] \quad 3.6$$

свойства которой схожи со свойствами взаимной корреляционной функции для непрерывных случайных процессов.

В том случае когда исследуется связь между двумя случайными процессами $x(t)$ и $y(t)$, характеристикой этой связи будет являться взаимная корреляционная функция:

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)Y(t+\tau)dt$$

Так, например,

$$R_{XG}(m) = R_{XG}(-m) \quad 3.7$$

а в случае, если $X[k]$ и $G[k]$ статистически независимы (взаимно некоррелированы), имеем

$$R_{XG}(m) = R_{XG}(-m) = 0 \quad 3.8$$

Если исследуются частотные характеристики объекта, то для этой цели используется соответствующая спектральная плотность $S_{xx}(\omega)$ и взаимная спектральная плотность $S_{yx}(\omega)$ случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Она является четной функцией ω , для любой частоты ω $S_{xx}(\omega) \geq 0$. Физически величина спектральной плотности показывает, какая доля мощности случайного процесса приходится на эту частоту.

Общая же мощность случайного процесса может быть подсчитана как интеграл его спектральной плотности. Из обратного преобразования Фурье можно получить

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

Тогда дисперсия будет равна суммарной мощности случайного процесса:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

Задание на проведение расчета выбирается из таблицы №3 приложения. Расчет проводится с использованием Matlab. Возможно использование приведенного кода, естественно с изменением подпрограммы, описывающей исследуемую функцию. Результат работы представляет собой графики с пояснениями полученных результатов.

```
function Kor_Func_Spect
clc;
clear all;
%очищаем память
N=10;
% задаем параметры сигнала
sigma=3.3;%sigma-стандартное отклонение
%b,s-параметры пространственно-частотного масштабирования
b=2.5;
s=0.005;
D=1.3;%D-фрактальная размерность 1<D<2
K=1023;
%Формирование исследуемого сигнала
[Z k]=sl_proc(N,sigma,b,D,s,K);
```

```
[R lag]=Corr_Func(Z);%Расчет корреляционной функции
S=fft(Z);% прямое БПФ
F=ifft(S);% обратное БПФ
f=(0:length(Z)-1)/length(Z);% вектор частот
```

```
figure (1)% вывод графика на экран
plot(k,Z)
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title ('генерированный сигнал');
xlabel('t-время')
ylabel('Y(t)')
grid on
```

```
figure(2)% вывод графика на экран
plot(lag,R)
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title ('Корреляционная функция');
xlabel('лаг-тау')
ylabel('R(тау)')
grid on
```

```
figure (3)% вывод графика на экран
subplot(3,1,1),plot(Z)
xlim([0 K+1]);
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title ('генерированный сигнал');
xlabel('t-время')
ylabel('Y(t)')
grid on
subplot(3,1,2),plot(f,abs(S))
ylim([0 1200]);
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title ('Прямое преобразование Фурье');
xlabel('f-частота [кГц]')
ylabel('Y(t)')
grid on
subplot(3,1,3),plot(F)
xlim([0 K+1]);
ylim([-2 2]);
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title ('Обратное преобразование Фурье');
xlabel('k-число отсчетов')
```

```

        ylabel('Y(t)')
    grid on

    function [R lags]=Corr_Func(X)
    % вычисление функции
    % автокорреляции (lags ограничивает область значений R)
    [R,lags] = xcorr(X,100,'unbiased');

    function [X k]=sl_proc(N,sigma,b,D,s,K)
    % Формирование случайного тестового сигнала проводится
    % с помощью функции Веерштрасса
    % n+1-число гармоник
    % psi-фаза, распределенная равномерно на отрезке [0 2*pi]
    % t-время
    k=0:1:K;
    h=sigma*((2)^0.5);
    % введем вспомогательные переменные для
    % удобной записи сигнала
    h1=(1-b^(2*D-4))^0.5;
    h2=(1-b^((2*D-4)*(N+1)))^0.5;
    h3=(h*h1)./h2;
    % создание матрицы-строки из k нулевых элементов
    X=zeros(1,length(k));
    for n=1:N+1
        c1=2*pi*s*k*b.^(n-1);
        c2=(D-2).*(n-1);
        f=(b.^c2);
        c=random('unif',0,n-1);
        ksi=2*pi*c;%случайная фаза изменяется от 0 до 2 pi
        term=h3.*f.*sin(c1+ksi);
        X=X+term;% функция сигнала
    End
    
```

Задание на проведение расчета выбирается из таблицы №3 приложения. Расчет проводится с использованием Matlab. Возможно использование приведенного кода, естественно с изменением подпрограммы, описывающей исследуемую функцию. Результат работы представляет собой графики с пояснениями полученных результатов

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4.

Прохождение стационарных случайных сигналов через линейные стационарные динамические системы.

Основные понятия и соотношения:

Пусть дано линейное звено или система (далее система) с одной входной $f(t)$ и одной выходной $y(t)$ переменными, описываемая линейным дифференциальным уравнением вида

$$b_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + b_n y(t) = a_0 \frac{d^m f(t)}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{df(t)}{dt} + a_m f(t) \quad 4.1$$

где $b_i, i = 0, \dots, n; a_i, i = 0, \dots, m$ - коэффициенты, характеризующие параметры системы.

Начальные условия нулевые.

Используя прямое одностороннее преобразование Лапласа

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt \quad \text{и} \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad 4.2$$

где $p = \sigma + j\omega$ - комплексная переменная, можно записать

$$b_0 Y(p) p^n + b_1 Y(p) p^{n-1} + \dots + b_{n-1} Y(p) p + b_n Y(p) =$$

$$a_0 F(p) p^m + a_1 F(p) p^{m-1} + \dots + a_{m-1} F(p) p + a_m F(p)$$

или

$$(b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n) Y(p) =$$

$$(a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p + a_m) F(p)$$

Откуда

$$\frac{Y(p)}{F(p)} = W(p) = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n} \quad 4.3$$

Отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией звена (системы) $W(p)$.

Знаменатель данного выражения называется характеристическим уравнением системы. Реакция системы на входной единичный сигнал типа $\delta(t)$ называется весовой функцией или импульсной переходной характеристикой системы.

При прохождении случайного процесса через линейную систему его характеристики изменяются. Формулы связи между характеристиками системы и характеристиками сигнала на ее входе и выходе особенно простые, когда пользоваться спектральными плотностями случайных процессов и частотными характеристиками системы.

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ - соответственно случайные процессы на входе и выходе системы с амплитудно-фазовой характеристикой $W(j\omega)$, тогда спектральная плотность выходного сигнала связана со спектральной плотностью входного соотношением:

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) |W(j\omega)|^2 \quad 4.4$$

Среднее значение квадрата сигнала на входе системы в соответствии с может быть рассчитано по формуле:

$$M[y^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega$$

Взаимная спектральная плотность процесса на входе нелинейной системы связана со спектральной плотностью процесса на входе и частотной характеристикой системы выражением:

$$S_{yx}(\omega) = S_{xx}(\omega) W(j\omega) \quad 4.5$$

Выражение (3.5) соответствует связи между взаимной корреляционной функцией сигналов на входе и выходе объекта, корреляционной функцией входного сигнала и импульсной характеристикой системы выражением:

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^t (t - \tau) K_{xx}(\tau) d\tau$$

Последние два выражения являются основой для определения динамических характеристик объекта статистическими методами.

Взаимосвязь между спектральной плотностью выходного и входного сигналов объекта:

$$S_{yx}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot W(j\omega)^2$$

Преобразовав (4.5), получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) W(j\omega)^2 d\omega$$

$$D(y(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) W(j\omega)^2 d\omega$$

Расчетные формулы для корреляционной функции и спектральной плотности даются в виде:

Автокорреляционная функция:

$$R_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N X[n] \cdot X[n + m]$$

где $\tau = 0, 1, 2, \dots$ — дискретные значения относительного времени.

Взаимная корреляционная функция:

$$R_{x,g}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N X[n] \cdot G[n + m]$$

Спектральная плотность:

$$S_x^*(\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] e^{-j\bar{\omega}m},$$

Взаимная спектральная плотность:

$$S_{xg}^*(j\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xg}[m] e^{-j\bar{\omega}m}.$$

Где $\bar{\omega} = \omega T$ — относительная круговая частота

Задание на проведение расчета выбирается из таблицы №4 приложения, в таблице № 4.2 приводятся типичные формулы расчета корреляционных функций и спектральных плотностей. Расчет проводится с использованием Matlab. *Возможно использование приведенного кода, естественно с изменением подпрограммы, описывающей исследуемую функцию.* Результат работы представляет собой графики с пояснениями полученных результатов.

Используем для исследования возможности Simulinc

Исходные данные для корреляционной функции сигнала

$$K_y(\tau) = D \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} :$$

N	D	α	m_y
1	0.15	0,05	2

По принятым исходным данным проводим расчет передаточной функции формирующего фильтра:

$$W_F = \frac{K_F}{T_F p + 1}$$

$$S_y(\omega) = \int_0^{\infty} K_y(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2D\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = |W_F(j\omega)|^2$$

$$W_F(p) = \frac{\sqrt{\frac{2D}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha} p + 1} = \frac{K_F}{T_F p + 1}$$

$$K_F = \sqrt{\frac{2D}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{0,5}} = 4.899$$

$$T_F = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,05} = 0.2 \quad W_F = \frac{4,899}{2p + 1}$$

Линейная система может быть описана передаточной функцией вида:

$$W_i(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

В таблице № 4.1 приведены исходные данные:

№	b_1	b_0	a_2	a_1	a_0
1	0.16	4.8	0.78	2.52	1

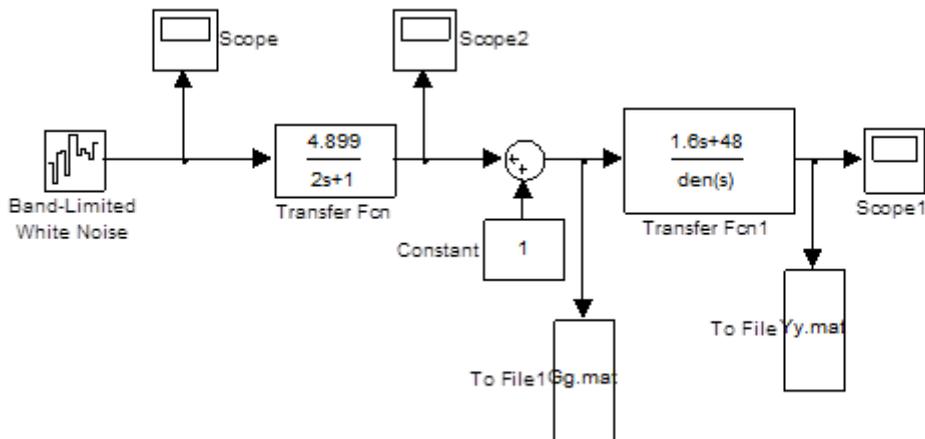


Рис 4.1 Simulink- модель, построенная по данным таблицы 4.1.

В результате проведенного моделирования получены файлы G.mat и Y.mat, в которых содержатся данные сигналов на входе в динамическую систему и выходе.

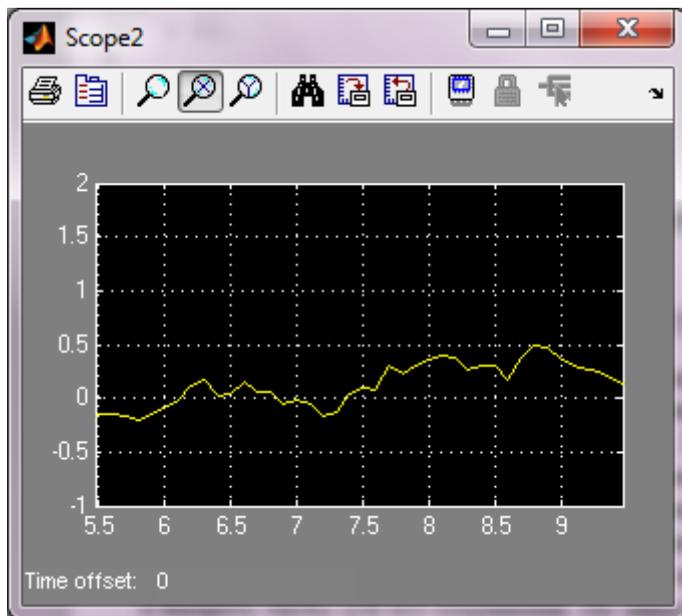


Рис. 3.2 Сигнал на входе динамического звена

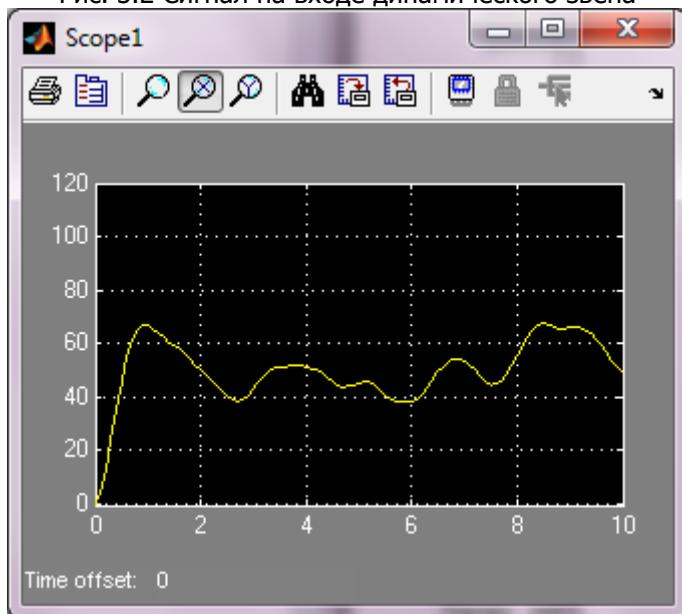


Рис. 4.3 сигнал на выходе динамического звена.

```

function Korr_Spectr
clc;
clear all;
%
%открытие файла данных и их загрузка в Workspace
fid1=fopen('D:\G.mat','r');
[G_d,count1]=fread(fid1);
%открытие файла данных и их загрузка в Workspace
fid2=fopen('D:\Y.mat','r');
[Y_d,count2]=fread(fid2);
%
G_data=Form(G_d);
Y_data=Form(Y_d);
t_v=0.1;%
n_G=count1;%
n_Y=count2;%
%
    F_plot_Proc(G_data,1);
    F_plot_Proc(Y_data,2);
[Rg lags]=Korr(G_data);
    F_plot_Korr(Rg,lags,1);
[Ry lags]=Korr(Y_data);
    F_plot_Korr(Ry,lags,2);
[Sg S_2g f nd]=spectr(G_data,t_v);
    F_plot_Spectr(Sg,f,nd,1);
[Sy S_2y f]=spectr(Y_data,t_v);
    F_plot_Spectr(Sy,f,1);

    function Z_u=Form(Z)
%Выделение из массива данных выборки размером степени 2
n=pow2(floor(log2(length(Z))));
Z_u=Z(1:n);

function [R lags]=Korr(y)
%Кореляционная функция
    M_R=xcorr(y);
    [R,lags] = xcorr(y,100,'coeff');
    lags=lags';

function [S S_2 f nd]=spectr(yd,t0)
% Спектральный анализ сигнала
y=yd-mean(yd);%Центрированное значение сигнала.
    
```

```

nd=length(yd); % длина вектора времени записи сигнала
dt = t0/nd;%
Y = fft(y,nd/2); %БПФ по nd/2 точкам
% шкала частоты для построения - достаточно
%половины точек
f = 1 / dt *(0:nd/4)/nd/2;
S = Y.* conj(Y) / nd/2;
%Спектр сигнала (conj()) - взятие комплекс-сопряженного)
S_2 = abs(Y).^2; %Спектральная плотность мощности
%сигнала (квадрат модуля)
    
```

```

function F_plot_Proc(x,index)
%
name(1)='G';
name(2)='Y';
Zag=strcat('Случайный процесс - ',name(index));
figure(index)
plot(x)
    set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
    title(Zag)
    grid on
    
```

```

function F_plot_Korr(x,lags,index)
%
name(1)='G';
name(2)='Y';
Zag=strcat('Корреляционная функция ',name(index));
figure(index+2)
size(lags)
size(x)
%stem(lags,x)
plot(lags,x)
    set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
    title(Zag)
    grid on
    
```

```

function F_plot_Spectr(S,f,nd,index)
%
name(1)='G';
name(2)='Y';
Zag=strcat('Спектральная плотность -',name(index));
figure(index+4)
    
```

```
% F_plot_Spectr(Sg,f,nd,2,s1,s2)
plot(f,S(1:nd/4+1),'o-')
%stem(f(s1:s2),S(s1:s2));
grid on;
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10),
title(Zag);
xlabel('Частота (Гц)'); ylabel('Модуль')
```

Ковариационная матрица случайного вектора — квадратная симметрическая неотрицательно определенная матрица, на диагонали которой располагаются дисперсии компонент вектора, а внедиагональные элементы — ковариации между компонентами. Ковариационная матрица случайного вектора является многомерным аналогом дисперсии случайной величины для случайных векторов. Матрица ковариаций двух случайных векторов — многомерный аналог ковариации между двумя случайными величинами.

- Сокращённая формула для вычисления матрицы ковариации:
- $\text{cov}(x)$ — возвращает смещенную дисперсию элементов вектора x . Для матрицы, где каждая строка рассматривается как наблюдение, а каждый столбец — как переменная, $\text{cov}(x)$ возвращает матрицу ковариации. $\text{diag}(\text{cov}(x))$ — вектор смещенных дисперсий для каждого столбца и $\text{sqrt}(\text{diag}(\text{cov}(x)))$ — вектор стандартных отклонений.
- Функция $C = \text{cov}(x,y)$, где x и y — векторы-столбцы одинаковой длины, равносильна функции $\text{cov}([x y])$.
- Пример:
» $D=[2 -3 6:3 6 -1:9 8 5]; C=\text{cov}(D)$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5.

Постановка задачи фильтрации по Колмогорову-Винеру.

Основные понятия и соотношения: ФИЛЬТР ВИНЕРА.

Передаточная функция фильтра Колмогорова-Винера может быть записана в виде:

$$W_V(j\omega) = \frac{1}{W_f(j\omega)} \cdot \left[\frac{S_{gx}(\omega)}{W_f(-j\omega)} \right]_+$$

Где: $W_V(j\omega)$ - частотная передаточная функция формирующего фильтра входного сигнала $X(t) = G(t) + n(t)$;
 $S_{gx}(\omega)$ - взаимная спектральная плотность входного и полезного сигналов;
 $[\dots]_+$ - выражение, получаемое в разложении дробно-рациональной

функции $\frac{S_{gx}(\omega)}{W_f(-j\omega)}$ на простые дроби при исключении тех слагаемых, чьи полюсы расположены в нижней полуплоскости

ω или правой полуплоскости $p = j\omega$.

Рассмотрим измерительную систему, выполненную на основе фильтра Колмогорова-Винера при стохастическом полезном сигнале на входе и цветном аддитивном шуме измерений рис. 5.1.

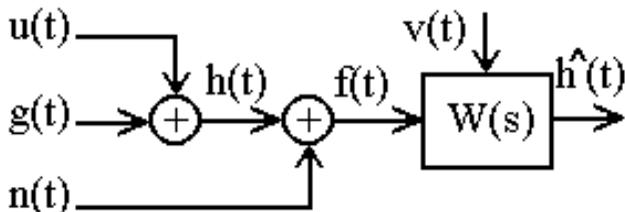


Рис. 5.1. Блок схема измерительной системы.

В рассматриваемой модели $u(t)$ - полезный детерминированный сигнал, $g(t)$ - случайный информационный процесс, за-

данный своей спектральной плотностью $S_g(\omega)$, $n(t)$ -шум измерений (цветной) задан спектральной плотностью $S_n(\omega)$.
 $h(t) = u(t) + g(t)$ -полный информационный процесс,
 $f(t) = h(t) + n(t)$ -аддитивная смесь полезного сигнала и шума.

Постоянная функция.

Эта функция абсолютно неинтегрируемая, но в пределе имеет преобразование Фурье:

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) = \delta^*(\omega),$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

где $\delta(\omega)$ – дельта-функция в частотной области.

Гармонический бесконечный сигнал $A \cos \omega_0 t$, $t \in [-\infty, \infty]$.

Представление этого сигнала в форме рядов Фурье (рис.2.29):

$$x(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{A}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

Эта функция абсолютно неинтегрируемая, но в пределе имеет интегральное преобразование Фурье:

$$F(j\omega) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \frac{A2\pi}{2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right\} = A\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Полагаем, что полезный сигнал и помеха не коррелированы, поэтому $S_f(\omega) = S_g(\omega) + S_n(\omega)$, то есть суммарный входной сигнал является аддитивной смесью полезного сигнала и шума. Корреляционная функция входного сигнала получается в виде:

$$R_f(\tau) = R_g(\tau) + R_n(\tau)$$

Задаваясь спектральными плотностями полезного сигнала и шума можно найти передаточную функцию формирующего фильтра

для входного сигнала $W_f(j\omega)$.

Найдем взаимную корреляционную функцию входного и полезного сигналов:

$$R_{fg}(\tau) = M[\tilde{X}(t) \cdot h(t + \tau)] = M[(h(t) + n(t)) \cdot h(t + \tau)] = R_g(\tau)$$

Рассмотрим пример моделирования фильтра Колмогорова-Винера для случая эргодических процессов. Пусть задано математическое ожидание управляющего сигнала $M(u(t)) = Mg$,

случайный информационный процесс задан спектральной плотностью $S_g(\omega)$,

а шумовая компонента процесса измерения задана спектральной плотностью $S_n(\omega)$ и представляет собой цветной шум.

$$S_g(\omega) = \frac{16}{0.1 \cdot \omega^2 + 4} \quad S_n(\omega) = \frac{16 \cdot \omega^2}{\omega^2 + 324} \quad Mg = 0.1$$

$$S_g(j\omega) = \frac{16}{-0.1 \cdot (j\omega)^2 + 4} \quad S_n(j\omega) = \frac{-16 \cdot (j\omega)^2}{-(j\omega)^2 + 324}$$

Получим передаточную функцию формирующего фильтра с использованием возможностей п.п.п. Matlab:

```
>> Sg=tf(16,[0.1 0 4])
```

```
Transfer function:
```

```
16
```

```
-----
```

```
0.1 s^2 + 4
```

```
>> Sn=tf([16 0 0],[1 0 3.2])
```

```
Transfer function:
```

```
16 s^2
```

```
-----
```

```
s^2 + 3.2
```

Спектральная плотность смеси полезного сигнала и помехи получаем суммируя спектральные плотности этих сиг-

налов, так как они не коррелированы.

$$S_y = S_g + S_n$$

Transfer function:

$$1.6 s^4 + 80 s^2 + 51.2$$

$$0.1 s^4 + 4.32 s^2 + 12.8$$

Для получения передаточной функции формирующего фильтра входного процесса проводим процедуру факторизации (примеры и код программы в приложении 2), в настоящем примере покажем эту процедуру подробно:

```
[num,den]=tfdata(Sy,'v')ж
```

```
num=num/1.6
```

```
den=den/0.1
```

```
K=1.6/0.1
```

```
K =16
```

```
Sy=tf(num,den)
```

Transfer function:

$$s^4 + 50 s^2 + 32$$

$$s^4 + 43.2 s^2 + 128$$

```
[z,p] = zpndata(Sy,'v')
```

Нули спектральной плотности входного сигнала:

z =

$$-0.0000 + 7.0251i$$

$$-0.0000 - 7.0251i$$

$$0.0000 + 0.8052i$$

$$0.0000 - 0.8052i$$

Полюсы спектральной плотности входного сигнала:

p =

$$-0.0000 + 6.3246i$$

$$-0.0000 - 6.3246i$$

$$0.0000 + 1.7889i$$

$$0.0000 - 1.7889i$$

$$G_+ = (\omega - j \cdot 7.025) \cdot (\omega - j \cdot 0.8052)$$

$$P(j\omega) = j^2 \cdot (\omega - j \cdot 7.025) \cdot (\omega - j \cdot 0.8052) = (j\omega)^2 + 7.8302 \cdot (j\omega) + 5.6565$$

$$M_+ = (\omega - j \cdot 6.324) \cdot (\omega - j \cdot 1.7889)$$

$$Q(j\omega) = j^2 \cdot (\omega - j \cdot 6.324) \cdot (\omega - j \cdot 1.7889) = (j\omega)^2 + 8.1129 \cdot (j\omega) + 11.313$$

Результат факторизации спектральных плотностей - передаточная функция формирующего фильтра имеет вид:

$$W_f(p) = 4 \cdot \frac{p^2 + 7.8302 \cdot p + 5.6565}{p^2 + 8.1129 \cdot p + 11.313}$$

Передаточная функция фильтра Винера имеет вид:

$$W_{vin}(p) = \frac{1}{W_f(j\omega)} \cdot \left[\frac{S_y(\omega)}{W_f(-j\omega)} \right]_+$$

Подставляем необходимые выражения в общую формулу передаточной функции фильтра:

$$W_f(-j\omega) = 4 \cdot \frac{(j\omega)^2 - 7.8302 \cdot (j\omega) + 5.6565}{(j\omega)^2 - 8.1129 \cdot (j\omega) + 11.313}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_y(\omega)}{W_f(-j\omega)} &= \frac{1.6\omega^4 + 80\omega^2 + 51.2}{0.1\omega^4 + 4.32\omega^2 + 12.8} \cdot \frac{(j\omega)^2 - 8.1129 \cdot (j\omega) + 11.313}{4 \cdot ((j\omega)^2 - 7.8302 \cdot (j\omega) + 5.6565)} = \\ &= \frac{1.6\omega^4 + 80\omega^2 + 51.2}{0.1 \cdot (\omega - j6.324)(\omega + j6.324)(\omega - j1.7889)(\omega + j1.788)} \times \\ &\times \frac{(j\omega)^2 - 8.1129 \cdot (j\omega) + 11.313}{4 \cdot (j\omega - 7.0250)(j\omega - 0.8052)} \end{aligned}$$

Проведем дальнейшие расчеты с использованием возможностей Matlab, расчет проводим в командном окне:

```
>> Wfm=tf([1 -7.8302 5.6565],[1 -8.1129 11.313])
```

Transfer function:

```
s^2 - 7.83 s + 5.657
```

```
-----
```

```
s^2 - 8.113 s + 11.31
```

```
>> Sy=tf([1.6 0 -80 0 51.2],[0.1 0 -4.32 0 12.8])
```

Transfer function:

```
1.6 s^4 - 80 s^2 + 51.2
```

0.1 s^4 - 4.32 s^2 + 12.8

>> ww=Sy/Wfm

Transfer function:

1.6 s^6 - 12.98 s^5 - 61.9 s^4 + 649 s^3 - 853.8 s^2 - 415.4 s + 579.2

0.1 s^6 - 0.783 s^5 - 3.754 s^4 + 33.83 s^3 - 11.64 s^2 - 100.2 s + 72.4

>> [b,a]=tfdata(ww,'v');

>> [r,p,k]=residue(b,a)

r	p	k
-0.0010	7.0250	16
0.0082	6.3246	
13.6385	-6.3246	
-0.0006	1.7889	
-18.1679	-1.7889	
-0.0005	0.8052	

$$ww = \frac{13.6385}{p + 6.3246} - \frac{18.1679}{p + 1.7889} + k$$

>> r=[13.6385 -18.1679];

>> p=[6.3246 1.7889];

>> [b,a]=residue(r,p,k)

b =16.0000 -134.3454 271.5320

a =1.0000 -8.1135 11.3141

$$\left[\frac{S_y(\omega)}{W_f(-j\omega)} \right]_+ = \frac{16p^2 - 134.3454p + 271.532}{p^2 - 8.1135p + 11.3141}$$

$$W_{vin}(p) = \frac{p^2 + 8.1129 \cdot p + 11.313}{4 \cdot (p^2 + 7.8302 \cdot p + 5.6565)} \cdot \frac{16p^2 - 134.3454p + 271.532}{p^2 - 8.1135p + 11.3141}$$

$$W_{vin}(p) = \frac{p^2 + 8.1129 \cdot p + 11.313}{4p^2 + 31.3208 \cdot p + 22.626} \cdot \frac{16p^2 - 134.3454p + 271.532}{p^2 - 8.1135p + 11.3141}$$

$$W_{vin}(p) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{A}{p + 7.02} + \frac{B}{p + 0.8052} \right) \cdot \left(\frac{C}{p - 6.3246} + \frac{D}{p - 1.7889} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{Ap + 0.8052A + Bp + 7.02B}{(p + 7.02) \cdot (p + 0.8052)} \cdot \frac{Cp - 1.7889C + Dp - 6.3246D}{(p - 6.3246) \cdot (p - 1.7889)}$$

Для вычисления дисперсии ошибки при использовании оптимального фильтра нужно для полученной функции $C(s)$ найти спектральную плотность **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и вычислить интеграл **Ошибка! Источник ссылки не найден..** В среде Matlab существует и другой способ: факторизовать полученную спектральную плотность ошибки:

$$S_\varepsilon(s) = F_\varepsilon(s) F_\varepsilon(-s)$$

а затем вычислить (с помощью функции **norm**) норму устойчивой передаточной функции $F_\varepsilon(s)$. Эта норма представляет собой СКВО выхода системы при действии на ее вход единичного белого

шума, то есть, $\sqrt{D_\varepsilon}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6.

Изучение возможности синтеза сигналов по дискретным отсчетам в соответствии с теоремой Котельникова.

Основные понятия и соотношения:

Теорема Котельникова (теорема отсчетов) имеют следующей формулировку: если наивысшая частота в спектре функции $S(t)$ меньше, чем f_m , то функция $S(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга не более чем на $1/2f_m$ секунд.

В соответствии с этой теоремой сигнал $S(t)$, ограниченный по спектру наивысшей частотой $\omega_m = 2\pi f_m$, можно представить рядом

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin \omega_m (t - n/2f_m)}{\omega_m (t - n/2f_m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\Delta t) \frac{\sin \omega_m (t - n\Delta t)}{\omega_m (t - n\Delta t)} \quad (1)$$

Этот ряд называется рядом Котельникова. В этом выражении $1/2f_m = \Delta t$ обозначает интервал между двумя отсчетными точками на оси времени, а $S(n/2f_m) = S(n\Delta t)$ – выборки функции $S(t)$ в моменты времени $t = n\Delta t$.

Исходя из (1), теорема Котельникова формулируется так: произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше f_m , может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки $\Delta t = 1/2f_m$.

В приведенном на рисунке 2.1 алгоритме, роль базисных функций $\varphi_n(t)$ выполняют функции отсчетов:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_m (t - n\Delta t)}{\omega_m (t - n\Delta t)}$$

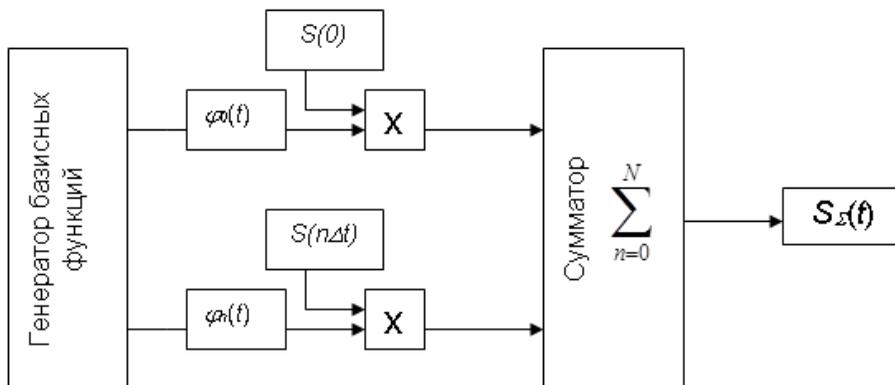


Рис.6.1 структурная схема синтезатора

Спектром Котельникова называется последовательность выборок $S(n\Delta t)$ на временной оси. Рассчитаем спектра Котельникова для заданного видеосигнала прямоугольной формы, с длительностью $t_u = 0,14$ мс.

Интервал между двумя отсчетными точками на оси времени опре-

деляется соотношением $\Delta t = \frac{f_m}{2}$. В этом выражении граничную

частоту спектра f_m можно найти как $f_m = \frac{1}{t_u}$ Таким образом, получаем Δt :

$$\Delta t = \frac{f_m}{2} = 0.075 \text{ мс}$$

Таким образом, мы получаем спектр Котельникова – дискретизированный сигнал, который включает в себя две составляющих. Континуальный и дискретизированный сигналы изображены на рисунке.6.2.

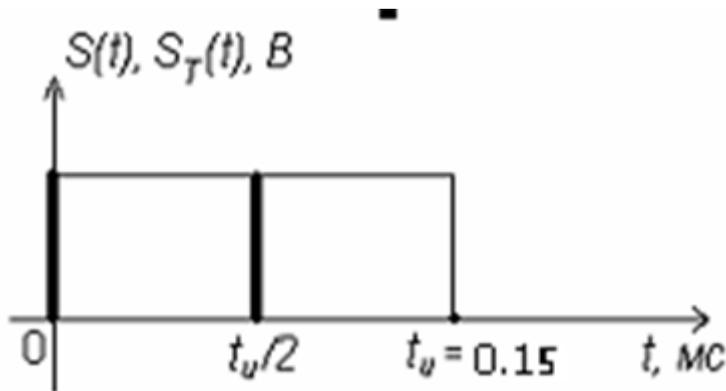


Рис. 6.2 Континуальный и дискретизированный сигналы.

Рассмотрим случай прямоугольного импульса:

Для прямоугольного сигнала устанавливаем длительность импульса $t_u=0,14$ мс, число отсчетов $N=8$ (на периоде) и частоту среза ФНЧ $F_{cp}=4$ кГц.

Рассмотрим амплитудно-частотную диаграмму (на рисунке 3.1). Спектр дискретизированного сигнала имеет периодический характер, подобно лепесткам в групповом спектре прямоугольного сигнала, только здесь амплитуда этих лепестков не убывает.

Спектр синтезированного сигнала содержит только один лепесток. Граничная частота в этом спектре определяется частотой среза ФНЧ фильтра, которая в данном случае равна 4 кГц. Спектральные составляющие, соответствующие этой и последующим частотам, не входят в ряд Котельникова и не участвуют в процессе синтеза сигнала, так как они отбрасываются фильтром. Следовательно, старшая составляющая дискретного линейчатого спектра соответствует частоте 3 кГц. Погрешность синтеза сигнала составляет 18,7%.

При изменении длительности дискретизирующих импульсов (то есть, когда они отличны от нуля), периодический спектр станет квазипериодическим, так как при этом включается множитель

$$\frac{\sin(x)}{x}$$

Далее, увеличим N и F_{cp} в 2 раза, то есть $N=16$ и $F_{cp}=8$ кГц. ФНЧ фильтр при этом начинает пропускать больше высокочастотных составляющих в ряд Котельникова, поэтому колебания в восстанавливаемом сигнале становятся чаще. В частотном спектре

восстанавливаемого сигнала появится еще один лепесток (толстые линии на спектре, рисунок 3.1), в который входят новые высокочастотные составляющие. Этот лепесток и совершает "вырез" сигнала в пике (см. рисунок 3.1). При этом абсолютная разность сигналов $\Delta S = |S(t) - S_y(t)|$ уменьшается, что приводит к снижению погрешности. Погрешность синтеза в этом случае составляет 16,6%.

Задание на проведение расчета выбирается из таблицы №6 приложения. Расчет проводится с использованием Matlab, данные для расчета берутся из таблицы 5 приложения.

```
function Row_Kotelnikov
%
clc;
clear all;
global w1 w2 w3 f1 f2 f3 a
a=5.3;%Постоянная составляющая сигнала
w1=2*pi;%Частота первой гармоники
w2=3*pi;%Частота второй гармоники
w3=8*pi;%Частота третьей гармоники
f1=0.5*pi;%Фаза первой гармоники
f2=0.1*pi;%Фаза второй гармоники
f3=0;%Фаза третьей гармоники
t_imp=0.8;%Длительность импульса
t = -1: 0.001: 1;%Вектор значений времени
fd=w3*10; % частота дискретизации
s = P_imp(t,t_imp);% прямоугольный импульс длительностью 0,8с
knum=fd; % количество отсчётов в секунду
k=-knum:1:knum;%Вектор номеров отсчета
tk=k/fd; % временные отсчёты
sk=P_imp(tk,t_imp);% значения сигнала в точках временных отсчётов

% Вычисление k-тых функций Котельникова
for i=1:2*knum+1
    angle=pi*fd*t - k(i)*pi + .000000000001;
    K(i,:) = sin (angle) ./ angle;
end
s_rec=sk*K; % Восстановление импульса
%
g=F(t);%исследуемый сигнал
k=-knum:1:knum;
```

```

tk=k/fd; % временные отсчёты
gk=F(tk);% значения сигнала в точках временных отсчётов
%
g_rec=gk*K;%Восстановленный сигнал
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,s)
%axis()
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,s_rec)
grid on
figure(2)
subplot(3,1,1)
plot(t,g)
grid on
subplot(3,1,2)
plot(t,g_rec)
grid on
subplot(3,1,3)
plot(t,g_rec-g)
grid on
    
```

```

function [y]=P_imp(t, delta_t)
% Прямоугольный импульс
for i=1:length(t)
    if (t(i) >= -delta_t/2) && (t(i) <= delta_t/2)
        y(i)=1;
    else
        y(i)=0;
    end
end
function x=F(t)
%
global w1 w2 w3 f1 f2 f3 a
x = a*cos(w1*t+f1)+ 2*cos(w2*t +f2) + 3*cos(w3*t+f3);
    
```

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7.

Z-преобразование сигналов и системных функций.

Основные понятия и соотношения:

Решетчатые функции

Математическое описание импульсных САУ усложняется из-за дискретного характера сигнала. Квантованный по времени сигнал может быть представлен выборкой ординат непрерывной функции времени. Эти ординаты разделены периодом квантования, а внутри периодов все промежуточные значения равны нулю. Поэтому дискретный сигнал удобно описывать функциями дискретной переменной.

Рассмотрим функцию времени $x(t)$, определенную для всех значений t и тождественно равную нулю для $t < 0$. Пусть n – натуральное число ($n=0,1,2,3,\dots$) и T – период дискретности. **Функцией дискретного аргумента называется** числовая последовательность $x[0], x[T], x[2T], \dots, x[nT]$, получающаяся в результате выборки значений функции $x(t)$ в точках $t = nT$, n – натуральное число. Для краткости ее называют **решетчатой функцией** и обозначают $x[n]$. При заданном интервале дискретности T то по функции $x(t)$ решетчатая функция $x[n]$ определяется однозначно. Непрерывная функция $x(t)$ – огибающая для своей решетчатой функции $x[n]$. Но поскольку через дискретные точки решетчатой функции можно провести множество огибающих, то обратного соответствия между решетчатой функцией и «породившей» ее функцией $x(t)$ нет: $x[n] \rightarrow x(t)$.

Поскольку значения решетчатой функции известны только для дискретных значений аргумента, то для изучения поведения таких функций методы дифференциального и интегрального исчисления оказываются непригодными. Для оценки свойств решетчатой функции используется аппарат конечных разностей и конечных сумм, позволяющий оценивать свойства числовых последовательностей (функций дискретного аргумента).

Приращение функции вычисляется с помощью одного из трех разностных операторов ∇, Δ, δ :

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$	- разность, взятая назад
$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$	- разность, взятая вперед
$\delta f_i = f_{i+0.5} - f_{i-0.5}$	- центральная разность
$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2 \cdot f_{i+1} + f_i$	-разность второго порядка
$\nabla^2 f_i = f_i - 2 \cdot f_{i-1} + f_{i-2}$	-разность второго порядка
$\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i$	-разность порядка m
$\nabla^m f_i = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1}$	

Z – ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

Z – преобразованием решетчатой функции $f(nT)$ называется функция комплексного аргумента Z, определяемая выражением

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) Z^{-n} \quad (6.1)$$

Это выражение может быть получено следующим образом. Если предыстория системы относительно $t = 0$ учитывается соответствующими граничными условиями, то допустимо полагать, что непрерывная функция времени $f(t) = 0$ при $t < 0$. В этом случае, как известно, функция $f(t)$ может быть заменена изображением по Лапласу (одностороннее преобразование)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-p \cdot t) dt, \quad (6.2)$$

Взяв конечный интервал времени равным периоду дискретности ($\Delta t = T$) и представив текущее время в виде последовательности $t = 0, T, 2T, \dots, nT$ можно в выражении (6.2) интеграл заменить суммой, а величину dt периодом квантования

$\Delta t = T$:

$$F^*(p) = T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \exp(-pnT) \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) представляет собой дискретное преобразование Лапласа. Предел этого выражения при $\Delta t = T \rightarrow 0$ даст преобразование Лапласа непрерывной величины (6.2).

Если обозначить $e^{pT} = Z$, то

$$F^*(p) = T \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) Z^{-n} \quad (6.4)$$

При этом Z-преобразование, как следует из формулы (1), отличается от дискретного преобразования Лапласа только множителем T , т.е.

$$F^*(p) = T \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} = TF(Z)$$

Операция суммирования носит название *прямого дискретного преобразования Лапласа* (или Z-преобразования) для решетчатой функции $f(nT)$ в функцию комплексного переменного Z . Эта операция кратко обозначается как

$F(Z) = Z \{f(nT)\}$. И указывает, что $F(Z)$ есть Z – изображение решетчатой функции $f(nT)$ или, короче, $f(n)$. Соответственно $f(n)$ является *оригиналом* $F(Z)$. Изображение $F(Z)$ существует, если (6.1) сходится.

На основе выражения (6.1) получены таблицы Z-преобразований различных функций времени.

В таблице 6.1 приведены выражения Z-преобразований для некоторых функций времени.

Очевидно, что все функции времени, имеющие одинаковые значения в точках $t=nT$ оси времени, обладают одинаковыми Z-преобразованиями $F(Z)$. Это означает, что связь между функцией времени $f(t)$ и соответствующим ей Z-преобразованием

$F(Z)$ не является взаимно однозначной. Функция $F(Z)$ характеризует только последовательность чисел $f(n)$, но не позволяет судить о поведении оригинала $f(t)$ внутри интервалов.

Таблица 3.1

$f(t), t > 0$	$f(nT)$	Изображение по Лапласу $f(p)$	Z-изображение $F(Z)$
$1(t)$	$1(nt)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\delta(t)$	$\delta(nt)$	1	1
t	nT	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{(nt)^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$a^{\frac{t}{T}}$	a^n	$\frac{1}{p - (1/T) \ln a}$	$\frac{z}{z-a}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha nT}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{1}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$1 - e^{-\alpha nT}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$	$\frac{z(1-d)}{(z-1)(z-d)}, d = e^{-\alpha T}$

Обратное Z-преобразование позволяет определить решетчатую функцию-оригинал $f(n)$ или $f(n, \sigma)$ по ее Z-преобразованию и сокращенно записывается в виде

$$f(n, \sigma) = Z^{-1} \{F(z, \sigma)\} \quad \text{или} \quad f(n) = Z^{-1} \{F(z)\},$$

При заданной $F(Z)$ существует три способа нахождения решетчатой функции: в виде бесконечного ряда, разложением на элементарные дроби и при помощи интеграла обратного преобразования.

Первый метод позволяет непосредственно получить числовую последовательность $f(n)$. Если $F(Z)$ представляет собой рациональную функцию, т.е. отношение двух многочленов, то разделив многочлен числителя на многочлен знаменателя, получим бесконечный ряд Лорана. Числовые значения коэффициентов членов ряда определяют дискреты решетчатой функции $f(nT)$. Указанный способ позволяет определять сколь угодно большое число значений n . При выполнении операции деления многочлены числителя и знаменателя следует записывать по возрастающим степеням (z^{-1}).

Пример 1.

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Дано:

Решение:

Определить: $f(nT)$

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}.$$

Путем непосредственного деления получим

$$F(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots$$

Отсюда

$$f(0) = 0; \quad f(T) = 1; \quad f(2T) = 2; \quad f(3T) = 3; \\ f(4T) = 4, \dots$$

Второй метод основан на разложении функции $F(z)/z$ на элементарные дроби и использовании таблицы преобразования.

Непосредственно функция $F(z)$ на элементарные дроби не раскладывается, так как фигурирующие в таблице функции от z имеют в числителе множитель z .

Пример 2.

$$F(z) = \frac{4z}{(z-3)(z-1)^2}.$$

Дано: Определить: $f(n)$.

Решение:

Разложим $F(z)/z$ на элементарные дроби:

$$F(z)/z = \frac{4}{(z-3)(z-1)^2} = \frac{1}{z-3} - \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-1}^2,$$

$$F(z) = \left[\frac{z}{z-3} - \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-1} \right].$$

Из таблицы соответствия получим:

$$f(n) = 3^n - 2n - 1(n), \text{ при } n \geq 0.$$

Задания на практическую работу:

Задание 1. Записать дискретные функции $X[k]$, получаемые в результате дискретизации с периодом $T = 0.1$ сигналов вида:

$$X(t) = 3 \cdot \exp(-3.6\pi \cdot t) \cdot 1(t)$$

$$X(t) = 3 \cdot \cos(2\pi \cdot t) \cdot 1(t)$$

Задание 2. Сигнал, описываемый функцией $X(t) = 3 \cdot \cos(2\pi \cdot t) \cdot 1(t)$ представить в дискретном виде таким образом, чтобы на одном периоде сигнала было 10 периодов дискретизации.

Задание 3. Найти первую $\Delta X[k]$ и вторую $\Delta^2 X[k]$ прямые разности дискретных функций:

$$X[k] = a \cdot k + b \quad X[k] = \exp(-a \cdot k)$$

Задание 4. Найти первую $\nabla X[k]$ и вторую $\nabla^2 X[k]$ обратные разности дискретных функций:

$$X[k] = a \cdot k + b \quad X[k] = \exp(-a \cdot k)$$

Задание 5. Найти Z-изображения дискретной функции, полу-

ченной дискретизацией сигналов:

$$X(t) = 3 \cdot \exp(-3.6\pi \cdot t) \cdot 1(t) \quad \text{с периодом } T = 0.1$$

$$X(t) = 3 \cdot \cos(2\pi \cdot t) \cdot 1(t) \quad \text{с периодом } T = 0.05$$

Задание 6. Найти Z-изображения дискретной функции:

$$X[k] = \delta[k - 1] + 2 \cdot \delta[k - 2] + 5 \cdot \delta[k - 3]$$

$$X[k] = 0.5 \cdot 1[k] + 0.7 \cdot \delta[k] + 5 \cdot \delta[k - 1]$$

Задание 7. Используя разложение на простые дроби найдите обратное Z-преобразование выражения:

$$X(z) = \frac{z}{(z - 1) \cdot (z - 5)}$$

Проведите это преобразование в командном окне Matlab.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8.

Синтез наблюдателя полного порядка для многомерных функций.

Основные понятия и соотношения:

Рассмотрим систему МИМО, основываясь на том, что матрицы **A**, **B**, **C** приведены в форме НКФ (наблюдаемая каноническая форма):

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}$$

Введем n -мерный вектор состояния наблюдателя:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{X}}, \quad 7.1$$

где **M** - неизвестная не особая матрица размером $[n \times n]$.

Дифференцируем вектор **V**, и, с учетом выражений 4.8 и 4.10, запишем

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \cdot \dot{\hat{\mathbf{X}}}$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{X}}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U})$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{X}}) + \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}$$

Так как имеет место соотношение $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$, получим:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \quad 7.2$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{G} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{M}^{-1} \quad \mathbf{S} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} \quad 7.3$$

Тогда выражение 4.11 примет вид:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \quad 7.4$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение наблюдателя. Структурная схема наблюдателя полного порядка приведена на рис. 7.1.

Из уравнения 7.13 следует, что для устойчивости и качества процесса восстановления необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы \mathbf{G} имели заданное расположение корней на комплексной плоскости.

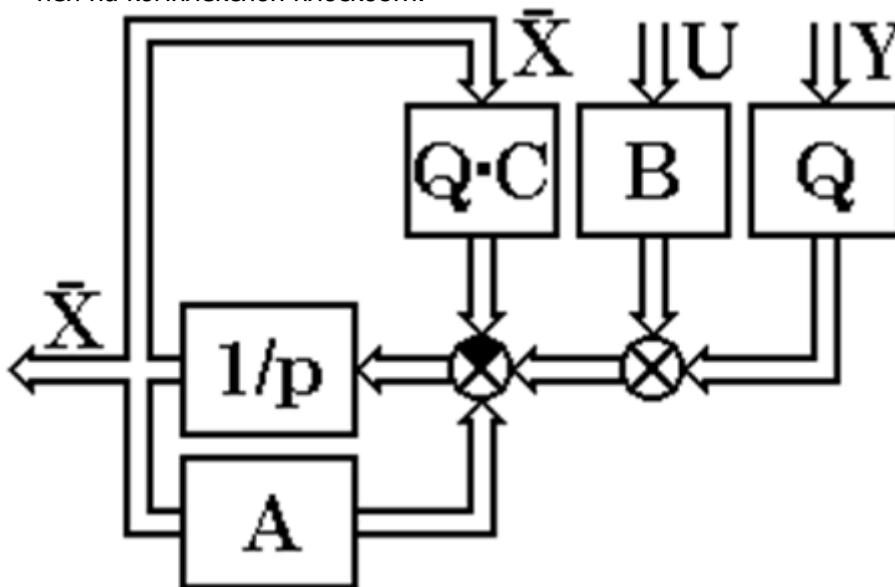


Рис. 7.1 Структурная схема наблюдателя полного порядка.

Рассмотрим соотношения:

$$\mathbf{G} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{M}^{-1} \quad \mathbf{S} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}$$

Исключая матрицу \mathbf{K} из последних равенств, получим:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \quad 7.5$$

Или окончательно имеем:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \quad 7.6$$

Матрица \mathbf{M} , входящая в выражение 7.15 является решением матричного уравнения Сильвестра. Условия, при которых это решение будет единственным, описано выше. Если это решение получено, то по очевидному соотношению:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad 7.7$$

можно найти искомую матрицу обратных связей наблюдателя.

Введем обозначения: $\mathbf{F} = -\mathbf{A}$, $\mathbf{R} = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}$, тогда уравнение 4.15 примет вид: $\mathbf{G} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}$

В этом примере используем возможность приведения матриц \mathbf{G} и \mathbf{F} к диагональной форме при помощи модальной матрицы. Обозначим \mathbf{HG} и \mathbf{HF} модальные матрицы соответственно для матриц \mathbf{G} и \mathbf{F} . Умножим обе части равенства 7.18 слева на матрицу \mathbf{HG}^{-1} и справа на матрицу \mathbf{HF} :

$$\mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{HF} + \mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{HF} = \mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{HF}$$

Введем обозначение:

$$\mathbf{DR} = \mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{HF}$$

Далее можем записать очевидное равенство:

$$\mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{HG} \cdot \mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{HF} + \mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{HF} \cdot \mathbf{HF}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{HF} = \mathbf{DR}$$

Так как имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{HG} = \mathbf{DG} \quad \mathbf{HF}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{HF} = \mathbf{DF},$$

где \mathbf{DG} и \mathbf{DF} диагональные матрицы, получим:

$$\mathbf{DG} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{DF} = \mathbf{DR}$$

7.8

где: $\mathbf{Y} = \mathbf{HG}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{HF}$

Рассмотрим матричное равенство 4.19 в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} dg_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & dg_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & dg_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & dg_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} df_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & df_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & df_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & df_{nn} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} dr_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & dr_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & dr_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & dr_{nn} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Далее можно провести очевидные преобразования:

$$\begin{bmatrix} dg_{11}y_{11} & dg_{11}y_{12} & dg_{11}y_{13} & \cdots & dg_{11}y_{1n} \\ dg_{22}y_{21} & dg_{22}y_{22} & dg_{22}y_{23} & \cdots & dg_{22}y_{2n} \\ dg_{33}y_{31} & dg_{33}y_{32} & dg_{33}y_{33} & \cdots & dg_{33}y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ dg_{nn}y_{n1} & dg_{nn}y_{n2} & dg_{nn}y_{n3} & \cdots & dg_{nn}y_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} df_{11}y_{11} & df_{22}y_{12} & df_{33}y_{13} & \cdots & df_{nn}y_{1n} \\ df_{11}y_{21} & df_{22}y_{22} & df_{33}y_{23} & \cdots & df_{nn}y_{2n} \\ df_{11}y_{31} & df_{22}y_{32} & df_{33}y_{33} & \cdots & df_{nn}y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ df_{11}y_{n1} & df_{22}y_{n2} & df_{33}y_{n3} & \cdots & df_{nn}y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dr_{11} & dr_{12} & dr_{13} & \cdots & dr_{1n} \\ dr_{21} & dr_{22} & dr_{23} & \cdots & dr_{2n} \\ dr_{31} & dr_{32} & dr_{33} & \cdots & dr_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ dr_{n1} & dr_{n2} & dr_{n3} & \cdots & dr_{nn} \end{bmatrix}$$

Из анализа развернутого матричного уравнения можно записать соотношение, связывающее матрицы: **DG, DF, DR:**

$$dg_{jj} \cdot y_{jk} + df_{kk} \cdot y_{jk} = dr_{jk}$$

или

$$y_{jk} = \frac{dr_{jk}}{dg_{jj} + df_{kk}}$$

Рассмотрим пример с применением п.п.п. Маhtсad.
 Построение наблюдателя полного порядка.

Исходные данные:

$$K_{tv} := 10 \quad T_{tv} := 0.005 \quad K_{dt} := 0.075 \quad K_{tg} := 0.2$$

$$L := 1.32 \cdot 10^{-3} \quad R := 0.36 \quad Cd := 1.82$$

$$E_{12} := 27912.52 \quad J_1 := 0.019 \quad J_2 := 0.034$$

$$\text{ORIGIN} := 1$$

Собственная матрица объекта

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &:= \frac{-1}{T_{tv}} & A_{2,1} &:= \frac{1}{L} & A_{2,2} &:= \frac{-R}{L} & A_{2,3} &:= \frac{-Cd}{L} \\
 A_{3,2} &:= \frac{Cd}{J_1} & A_{3,4} &:= \frac{-1}{J_1} & A_{4,3} &:= E_{12} & A_{4,5} &:= -E_{12}
 \end{aligned}$$

$$A_{5,4} := \frac{1}{J_2} \quad B_{1,1} := \frac{K_{tv}}{T_{tv}} \quad B_{5,2} := \frac{-1}{J_2}$$

$$C_{1,2} := K_{dt} \quad C_{2,3} := K_{tg} \quad C_{2,5} := 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 757.58 & -272.73 & -1378.79 & 0 & 0 \\ 0 & 95.79 & 0 & -52.63 & 0 \\ 0 & 0 & 27912.52 & 0 & -27912.52 \\ 0 & 0 & 0 & 29.41 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы управления и наблюдения

$$B = \begin{pmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -29.41 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E := \text{identity}(5)$

Коэффициенты характеристического полинома получаем в виде:

$$d^T := \left(472.7 \quad 2.5 \times 10^6 \quad 1.1 \times 10^9 \quad 2.3 \times 10^{11} \quad 2.2 \times 10^{13} \right)$$

Находим матрицу преобразования к базису НКП:

$$q := C^T \quad s := q \langle 1 \rangle$$

$$z5 := s^T \quad z4 := z5 \cdot A + d1 \cdot z5 \quad z3 := z4 \cdot A + d2 \cdot z5$$

$$z2 := z3 \cdot A + d3 \cdot z5 \quad z1 := z2 \cdot A + d4 \cdot z5 \quad P \langle 5 \rangle := z5^T$$

$$P \langle 4 \rangle := z4^T \quad P \langle 3 \rangle := z3^T \quad P \langle 2 \rangle := z2^T \quad P \langle 1 \rangle := z1^T$$

$$P := P^T \quad A_{sv} := P \cdot A \cdot P^{-1} \quad C_{sv} := C \cdot P^{-1}$$

Собственную матрицу объекта в базисе НКП получаем в виде:

$$A_{sv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2.46 \times 10^{-7} & 5.96 \times 10^{-5} & -2.17 \times 10^{13} \\ 1 & 0 & 0 & 1.99 \times 10^{-8} & -2.33 \times 10^{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1.11 \times 10^9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2.48 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -472.73 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы A

$$p := \text{eigenvals}(A)$$

$$p^T = \left(-4.9 + 1.5j \times 10^3 \quad -4.9 - 1.5j \times 10^3 \quad -131.5 + 168.5j \quad -131.5 - 168.5j \quad -200 \right)$$

Как видно из собственных значений матрицы A объект обладает значительной колебательностью и малым затуханием.

Формируем желаемую матрицу G в вертикальной сопряженной форме, основываясь на коэффициентах фильтра Баттерворта пятого порядка.

$$w_0 := 15$$

$$a_1 := 3.24 \cdot w_0 \quad a_2 := 5.24 \cdot w_0^2 \quad a_3 := 5.24 \cdot w_0^3 \quad a_4 := 3.24 \cdot w_0^4 \quad a_5 := w_0^5$$

Вектор коэффициентов желаемого характеристического полинома

$$a^T = \left(48.6 \quad 1179 \quad 17685 \quad 1.64 \times 10^5 \quad 7.59 \times 10^5 \right)$$

Строим желаемую собственную матрицу объекта в виде

$$i := 1..4 \quad k := 5..1$$

$$G_{i+1,i} := 1 \quad G_{6-k,5} := -a_k$$

Получаем желаемую матрицу в виде:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -7.59 \times 10^5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1.64 \times 10^5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17685 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1179 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -48.6 \end{pmatrix} \quad C_{sv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8.3 \times 10^{-10} & -1.66 \times 10^{-7} & -0 & 0.38 \end{pmatrix}$$

Выбираем матрицу S $S := C_{sv}^T$

$q := \text{eigenvals}(G)$ Находим собственные значения матрицы G

$$q^T = \left(-4.6 + 14.3j \quad -4.6 - 14.3j \quad -15 \quad -12.2 + 8.8j \quad -12.2 - 8.8j \right)$$

$$R := -S \cdot C_{sv} \quad F := -A_{sv} \quad G := G$$

Определяем модальные матрицы

$$HF := \text{eigenvecs}(F) \quad HG := \text{eigenvecs}(G)$$

Диагональные формы матриц A и G

$$DF := HF^{-1} \cdot F \cdot HF$$

$$DG := HG^{-1} \cdot G \cdot HG$$

$$DR := HG^{-1} \cdot R \cdot HF$$

Решение матричного уравнения

$$i := 1..5$$

$$k := 1..5$$

$$Y_{i,k} := \frac{DR_{i,k}}{(DG_{i,i} + DF_{k,k})}$$

Находим решение уравнение Сильвестра

$$M := HG \cdot Y \cdot HF^{-1}$$

Проверка решения уравнения Сильсестра

$$W := G \cdot M + M \cdot F - R$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Точность решения 10^{-10}

Определяем матрицу коэффициентов усиления наблюдателя

$$Q_{sv} := M^{-1} \cdot S$$

$$Q := P^{-1} \cdot Q_{sv}$$

$$Q_{sv} = \begin{pmatrix} -2.13 \times 10^{13} & -6.48 \times 10^{10} \\ -2.53 \times 10^{11} & 5.65 \times 10^7 \\ -1.34 \times 10^9 & 8.56 \times 10^5 \\ -3.59 \times 10^6 & -13598.62 \\ -251.68 & -522.04 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -148.18 & 29.02 \\ -3355.78 & -6960.58 \\ 34101.13 & -862.22 \\ -10689.44 & 2.17 \times 10^5 \\ -18356.63 & 483.96 \end{pmatrix}$$

Задание на проведение расчета выбирается из таблицы №8 приложения. Расчет проводится с использованием Matlab. Возможно использование приведенного кода, естественно с изменением подпрограммы, описывающей исследуемую функцию. Результат работы представляет собой графики с пояснениями полученных результатов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9.

Дискретный фильтр Калмана. Задачи оптимальной фильтрации по Калману.

Основные понятия и соотношения:

Назначение фильтра Калмана – минимизировать дисперсию оценки векторного случайного процесса $\mathbf{X}[k]$, изменяющегося во времени следующим образом:

$$\mathbf{X}[k] = \Phi[k] \cdot \mathbf{X}[k-1] + \xi[k],$$

Где: $\Phi[k]$ – матрица перехода, $\xi[k]$ – случайный вектор (шум процесса), имеющий нормальное распределение с корреляционной матрицей $\mathbf{Q}_P[k]$.

При рассмотрении статистической задачи оптимизации входной сигнал считался *случайным процессом* и минимизировался *средний квадрат* ошибки воспроизведения образцового сигнала. В случае приема нестационарного сигнала статистическое усреднение может быть невозможно и требуется вести обработку по одной или нескольким реализациям процесса.

Калман в своих работах изменил постановку задачи много-

мерной фильтрации, потому что придав ей форму модели в пространстве состояний. В результате был получен алгоритм, выполняющий процедуру рекурсивного оценивания. Рекурсией называется

Помимо полезного сигнала, на выходе датчиков неизбежно присутствует шум, вызванный различными факторами, в том числе и случайными погрешностями измерения, присущими самим датчикам. Чтобы восстановить, насколько возможно, полезный сигнал, мы отфильтровываем шум с помощью фильтра Калмана. Использование фильтра предполагает, что изучаемый процесс с разумной степенью точности описывается стохастическими дифференциальными или разностными уравнениями. Эти уравнения обычно отражают общие представления о «типичном» ходе процесса, отклонения от которого считаются случайными и описываются с помощью «шумов». Таким образом, система контроля предназначена для измерения и выдачи информации о контролируемом процессе, который содержит детерминированную составляющую и стохастическую. Измерение проходит при воздействии шумов измерения. Возможны при этом варианты:

1. непрерывный фильтр непрерывного процесса;
2. дискретный фильтр дискретного процесса;
3. дискретный фильтр непрерывного процесса.

Третий вариант наиболее часто распространен.

Непрерывный фильтр Калмана. Задана непрерывная модель объекта управления:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Где: \mathbf{X} - n -мерный вектор состояния системы, \mathbf{U} - l -мерный вектор управлений, \mathbf{Y} - m -мерный вектор выхода, $\mathbf{A}(t)$ - матрица состояния системы размером $[n \times n]$, $\mathbf{B}(t)$ - матрица управления размером $[n \times l]$, $\mathbf{C}(t)$ - матрица измерений размером $[m \times n]$, $\mathbf{D}(t)$ - матрица прямого канала размером $[m \times l]$, $\mathbf{w}(t)$ - случайный входной шум с заданным законом распределения, $\mathbf{v}(t)$ - случайный шум измерений, обычно типа белого шума. Шумы $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ обычно не коррелированы между собой. Если входной шум имеет спектральную плотность отличную

от $\delta(t)$, то задачу сводят к возмущению типа белого шума применением формирующего фильтра. В этом случае на двух входах шумовых компонент действует белый шум:

$$M\{w\} = M\{v\} = 0$$

$$M\{w(t)\} = M\{w(\tau)\} = \mathbf{Q} \cdot \delta(t - \tau)$$

$$M\{v(t)\} = M\{v(\tau)\} = \mathbf{R} \cdot \delta(t - \tau)$$

$$M\{w(t)\} = M\{v(\tau)\} = 0$$

При такой постановке задачи решением является фильтр Калмана, описываемый системой уравнений:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{Y}_v - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{U})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_v \\ \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Где: \mathbf{I} - единичная матрица размером $[n \times n]$;

\mathbf{N} - нулевая матрица размером $[n \times l]$.

Матрица коэффициентов обратных связей \mathbf{L} определяется с использованием процедуры `[kest,Ln,Pn]=kalman(sys,Q,R)` в среде Матлаб.

При моделировании первого уравнения удобно его представить в виде двух уравнений вида:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{Y}_v - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{U})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_v \\ \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}) \cdot \hat{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{Y}_v - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{X}})$$

Дискретный фильтр Калмана для заданной непрерывной модели объекта управления:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

Оптимальный дискретный фильтр описывается уравнениями:

$$\hat{\mathbf{X}}[k+1] = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}}[k] + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}[k] + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{Yv}[k] - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{X}}[k] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}[k])$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Yv}[k] \\ \hat{\mathbf{X}}[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}) \\ \mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{X}}[k] + \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D} & \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \cdot \mathbf{D} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}[k] \\ \mathbf{Yv}[k] \end{bmatrix}$$

Матрица коэффициентов обратных связей \mathbf{L} и новая матрица обратных связей \mathbf{M} определяются с использованием процедуры `[kest,Ln,Pn]=kalmd(sys,Q,R,Ts)` в среде Матлаб.

При моделировании первого уравнения удобно его представить в виде двух уравнений вида:

$$\hat{\mathbf{X}}1[k+1] = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}}[k] + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}[k]$$

$$\hat{\mathbf{X}}2[k+1] = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{Yv}[k] - \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{X}}[k] - \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}[k])$$

Рассмотрим пример информационной системы, включающей в себя датчик, и фильтр сигнала, полагаем, что измеряемый сигнал является аддитивной смесью синусоиды с постоянной частотой, амплитудой и фазой равной нулю, а также шума возмущения

$$S_g(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 2 \cdot \omega^2 + 10}$$

со спектральной плотностью

Система измерения описывается передаточной функцией ви-

$$W_i(s) = \frac{K}{ai_1 \cdot s^2 + ai_2 \cdot s + ai_3},$$

да $-$ где: $K = 3.8$,
 $ai = [3, 0.4, 0.8]$.

Необходимые численные данные для постановки задачи приведены в таблице 8 приложения 1.

Блок схема исследуемой модели приведена на рис.

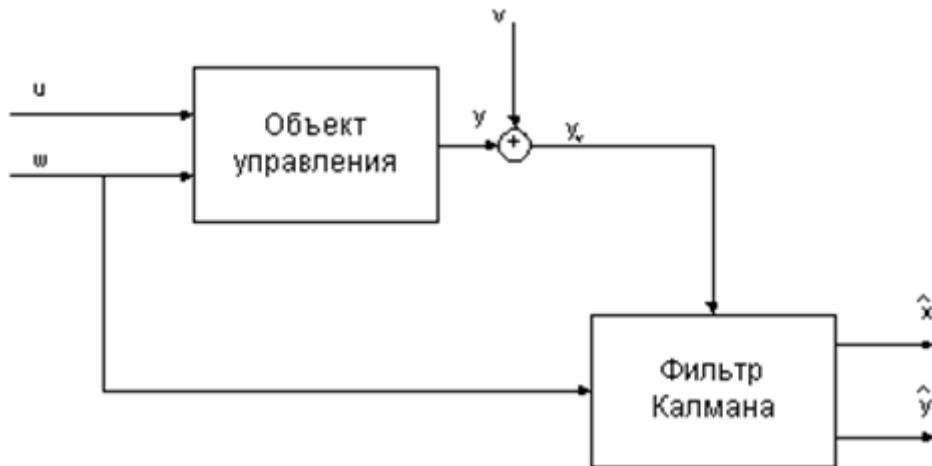


Рис. Блок схема системы измерений.

Где:

$w(t)$ - возмущающий шум на входе формирующего фильтра;

$u(t)$ - детерминированная составляющая измеряемого процесса;

$g(t)$ - случайная составляющая измеряемого процесса;

$v(t)$ - шум измерений.

Проведем расчет полной модели объекта наблюдения, к которому относятся детерминированно-стохастический процесс $h(t)$ и система измерений, заданная передаточной функцией $W_0(s)$.

Спектральная плотность помехи возмущения в функции оператора Лапласа записывается в виде:

$$S_g(s) = \frac{-s^2 + 4}{s^4 - 2 \cdot s^2 + 10}$$

Для определения характеристик формирующего фильтра применяем процедуру факторизации спектральной плотности и в результате получаем:

$$S_g(s) = \frac{4}{10} \cdot \frac{-0.25 \cdot s^2 + 1}{0.1 \cdot s^4 - 0.2 \cdot s^2 + 1} =$$

$$= 0.6324 \cdot \frac{1 + 0.5 \cdot s}{0.3162 \cdot s^2 + 0.9124 \cdot s + 1} \cdot 0.6324 \cdot \frac{1 - 0.5 \cdot s}{0.3162 \cdot s^2 - 0.9124 \cdot s + 1}$$

Таким образом, передаточная функция формирующего фильтра получается в виде:

$$W_{ff}(s) = 0.6324 \cdot \frac{1 + 0.5 \cdot s}{0.3162 \cdot s^2 + 0.9124 \cdot s + 1}$$

Дифференциальное уравнение формирования процесса $g(t)$ запишем на основе его передаточной функции с учетом того, что в Matlab отсутствуют нулевые индексы

$$ag_1 \frac{dg^2(t)}{dt^2} + ag_2 \frac{dg(t)}{dt} + ag_3 \cdot g(t) = bg_2 \frac{dw(t)}{dt} + bg_1 w(t)$$

Используем метод вспомогательной переменной (необходимое условие соблюдено, приложение 2) переходим к матричной модели:

$$\mathbf{A}_{ff} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ag_3}{ag_1} & -\frac{ag_2}{ag_1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{ff} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ag_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{ff} = [bg_3 \quad bg_2] \quad \mathbf{D}_{ff} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Запишем в матричном виде модель измерителя:

$$W_i(s) = \frac{K}{ai_1 \cdot s^2 + ai_2 \cdot s + ai_3}$$

Дифференциальное уравнение измерителя имеет вид:

$$ai_1 \frac{dy^2(t)}{dt^2} + ai_2 \frac{dy(t)}{dt} + ai_3 \cdot y(t) = K \cdot h(t)$$

В матричной модели получаем:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ai_3}{ai_1} & -\frac{ai_2}{ai_1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{ai_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Совмещаем полученные модели подсистем в единую матричную модель:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{ag_3}{ag_1} & -\frac{ag_2}{ag_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{ai_3}{ai_1} & -\frac{ai_2}{ai_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{ag_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{ai_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ u + g \end{bmatrix}$$

В свою очередь имеется соотношение -

$$g = \begin{bmatrix} bg_3 & bg_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \text{ поэтому окончательно получаем:}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{ag_3}{ag_1} & -\frac{ag_2}{ag_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{ai_1} \cdot bg_3 & \frac{K}{ai_1} \cdot bg_2 & -\frac{ai_3}{ai_1} & -\frac{ai_2}{ai_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{ag_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{ai_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Для проведения расчетов, необходимых для моделирования используем следующий m-файл:

```
function Kalman_N_D
%Проектирование стационарного фильтра Калмана
%Объект-нерерывный фильтр Kalman_N-непрерывный
%фильтр Kalman_D-дискретный
clc;
clear all;
U=10;%
omega=5;%
Q=2.3;%Ковариация шума возмущения
R=0.01;%Ковариация шума измерения
delta=0.03;%Допустимая ошибка при определении шага dt
%Параметры формирующего фильтра спектральной плотно-
сти
%возмущения
bg=[0 1 4];%Кoeffициенты полинома знаменателя
ag=[1 -2 10];%Кoeffициенты полинома числителя
%Параметры измерителя
bi=[0 0 3.8];%Кoeffициенты полинома знаменателя
ai=[3 0.4 0.8];%Кoeffициенты полинома знаменателя
%Интенсивность возмущающего белого шума
q=bg(length(bg))/ag(length(ag));
Kd=Q/q;%Кoeffициент усиления элемента Grid
K=bi(length(bi));%
%
Ag=[0,1,-ag(3)/ag(1),-ag(2)/ag(1)];
Vg=[0;1];
Cg=[4 1];
Ai=[0,1,-ai(3)/ai(1),-ai(2)/ai(1)];
Bi=[0;0.5];
Ci=[0.25,0];
N=zeros(2);
A=[Ag,N;N,Ai];
A(4,1)=K/ai(1)*bg(3);
```

```

A(4,2)=K/ai(1)*bg(2);           %Матрица системы
B=[0,0;0,1/ag(1);0,0;K/ai(1),0];%Матрица входа
C=[0,0,0,1];                   %Матрица выхода
D=[0 0];                        %Матрица прямой передачи

%Расчет шага дискретности
Ts_i=W_p(bi,ai,delta);
Ts_g=W_p(bg,ag,delta);
if Ts_i>Ts_g
    Ts=Ts_g;
else
    Ts=Ts_o;
end
%
sys=ss(A,B,C,D,'inputname',{'u','v'},'outputname','y');
%
disp('Сигналы измеряемый и возмущения:')
disp('Детерминированный измеряемый сигнал')
disp('U='), disp(U)
disp('omega='), disp(omega)
disp('Стохастическая компонента измеряемого сигнала')
disp('Q='), disp(Q)
disp('Kd='), disp(Kd)
disp('Шум измерений')
disp('R='), disp(R)

disp('Модель объекта')
disp('A='), disp(A)
disp('B='), disp(B)
disp('C'), disp(C)
disp('D'), disp(D)

disp('Непрерывный фильтр Калмана')
[~,Ln,Pn]=kalman(sys,Q,R);
M=A-Ln*C;
disp('Ln='), disp(Ln)
disp('Pn='), disp(Pn)
disp('A-L*C'),disp(M)

disp('Дискретный фильтр Калмана')
[~,Ld,Pd,M,Z] = kalmd(sys,Q,R,Ts);
disp('Ld='), disp(Ld)
    
```

```
disp('Pd='), disp(Pd)
disp('M='), disp(M)
disp('Z='), disp(Z)
```

```
function Ts=W_p(b,a,d)
%Функция, предназначенная для определения требуемого
%шага дискретности
m=length(b);
n=length(a);
W0_2=(b(m)/a(n))^2;
for w=0:10000
B=0;
for i=1:m
    B=B+b(i)*(j*w)^(m-i);
end
A=0;
for k=1:n
    A=A+a(k)*(j*w)^(n-k);
end
z=real(B/A).^2+imag(B/A).^2;
if z<d*W0_2
    Ts=pi/w;
    return
end
end
```

Сигналы измеряемый и возмущения:

Детерминированный измеряемый сигнал

$U=10$

$\omega=5$

Стохастическая компонента измеряемого сигнала

$Q=2.3000$

$Kd=5.7500$

Шум измерений

$R= 0.0100$

Модель объекта

A=

0	1.0000	0	0
-10.0000	2.0000	0	0
0	0	0	1.0000
5.0667	1.2667	-0.2667	-0.1333

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 \\ 1.2667 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\mathbf{D} = [0 \ 0]$$

Непрерывный фильтр Калмана

$L_n =$

$$L_n = \begin{bmatrix} 5.3692 \\ 19.5312 \\ -0.0000 \\ 10.0600 \end{bmatrix}$$

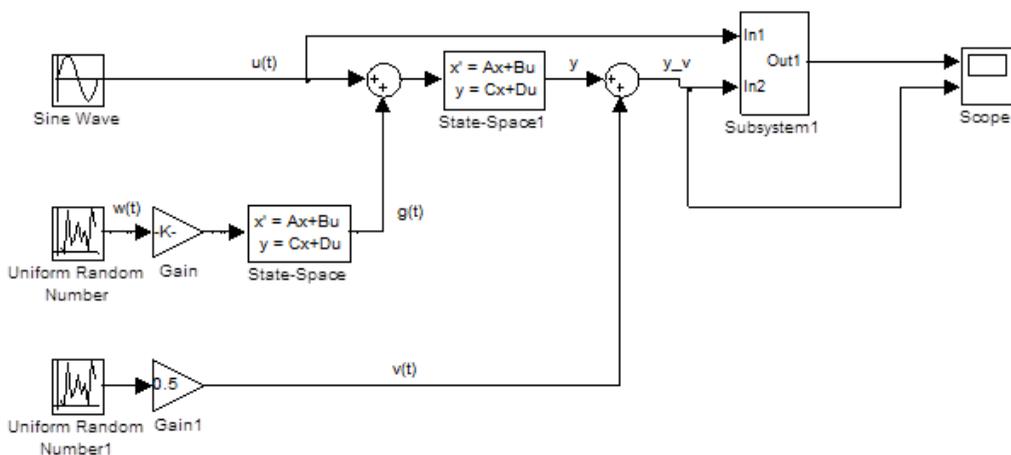
$P_n =$

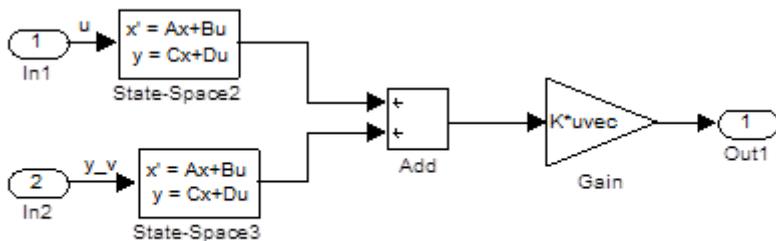
$$P_n = \begin{bmatrix} 0.0339 & 0.1441 & 0.0088 & 0.0537 \\ 0.1441 & 1.0994 & -0.0537 & 0.1953 \\ 0.0088 & -0.0537 & 0.2893 & -0.0000 \\ 0.0537 & 0.1953 & -0.0000 & 0.1006 \end{bmatrix}$$

$A-L_nC =$

$$A-L_nC = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & -5.3692 \\ -10.0000 & 2.0000 & 0 & -19.5312 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 5.0667 & 1.2667 & -0.2667 & -10.1934 \end{bmatrix}$$

Полученные данные позволяют разработать динамические модели исследуемой системы и фильтра Калмана в среде Simulink:





ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Таблица №1- задание.

Номер вар.	Вид сигнала	Амплитуда E, В	Период T, мс	Длительность τ_n , мс
1	Прямоугольные импульсы	5	1	0,2
2	Прямоугольные импульсы	5	1	0,1
3	Прямоугольные импульсы	5	0,5	0,1
4	Прямоугольные импульсы	5	0,5	0,05
5	Прямоугольные импульсы	4	1	0,25
6	Прямоугольные импульсы	4	1	0,125
7	Прямоугольные импульсы	4	0,5	0,125
8	Прямоугольные импульсы	10	0,5	0,1
9	Пилообразное напряжение	4	1	–
10	Пилообразное напряжение	3	0,5	–
11	Пилообразное напряжение	2	1	–
12	Пилообразное напряжение	8	0,5	–
13	Пилообразное напряжение	4	0,5	–
14	Пилообразное напряжение	3	1	–
15	Пилообразное напряжение	2	0,5	–
16	Пилообразное напряжение	8	1	–
17	Меандр нечетный	4	1	–
18	Меандр нечетный	3	0,5	–
19	Меандр нечетный	2	1	–
20	Меандр нечетный	8	0,5	–
21	Меандр нечетный	4	0,5	–
22	Меандр нечетный	3	1	–
23	Меандр нечетный	2	0,5	–
24	Меандр нечетный	8	1	–
25	Треугольные импульсы	1	1	0,2
26	Треугольные импульсы	1	0,5	0,1
27	Треугольные импульсы	2	1	0,5
28	Треугольные импульсы	2	1	0,25
29	Треугольные импульсы	2	1	1
30	Треугольные импульсы	1	0,5	0,25

Таблица 2 – Функции генерации сигналов пакета Signal Processing

№	Функция	Действие
1	chirp	Генерирует косинусоиду с переменной частотой
2	diric	Вычисляет функцию Дирихле
3	gauspuls	Генерирует синусоиду, модулированную функцией Гаусса
4	gmonopuls	Генерирует моноимпульс Гаусса
5	pulstran	Генерирует импульсы
6	rectpuls	Генерирует аperiodические прямоугольные импульсы
7	sawtooth	Генерирует пилообразные колебания
8	sinc	Функция sinc
9	square	Генерирует прямоугольные импульсы
10	tripuls	Генерирует аperiodические треугольные импульсы

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Таблица №1.

№	Функция	Интервал
1	$Y(x) = \frac{x}{2}$	$[0, 2\pi]$
2	$Y(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} \end{cases}$	<i>при</i> $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} & [-\pi, 0] \\ \frac{\pi}{4} & [0, \pi] \end{cases}$
3	$Y(x) = x $	$[-\pi, \pi]$
4	$Y(x) = -A + \frac{A}{\pi} \cdot x \quad A = 10$	$[-\pi, \pi]$
5	$Y(x) = \begin{cases} -A \\ A \end{cases} \quad A = 5$	<i>при</i> $\begin{cases} -A & [-\pi, 0] \\ A & [0, \pi] \end{cases}$
6	$Y(x) = \begin{cases} x \\ 2 \cdot \pi - x \end{cases}$	<i>при</i> $\begin{cases} x & [0, \pi/4] \\ 2\pi - x & [\pi/4, \pi/2] \end{cases}$
7	$Y(x) = \begin{cases} A \\ 0 \end{cases} \quad A = 10$ $T = 2\pi \quad \tau = \pi$	<i>при</i> $\begin{cases} A & [-\tau/2, \tau/2] \\ 0 & [\tau/2, T - \tau/2] \end{cases}$
8	$Y(x) = A \quad A = 10$	$[0, \pi]$

9	$Y(x) = \begin{cases} A & A = 10 \\ 0 & \end{cases}$ $T = 2 \cdot \pi \quad \tau = \pi$	$\text{при} \begin{cases} A & [-\tau/2, \tau/2] \\ 0 & [\tau/2, T - \tau/2] \end{cases}$
10	$Y(x) = x^2$	$[0, \pi]$
11	$Y(x) = -A + \frac{A}{\pi} \cdot x \quad A = 5$	$[0, 2\pi]$
12	$Y(x) = \frac{x^2}{4}$	$[0, 2\pi]$

Таблица №2.

№	σ	b	s	D	N
1	1.3	2.5	0.005	1.3	10
2	2.3	2.5	0.005	1.3	10
3	3.3	2.5	0.005	1.3	10
4	4.3	2.5	0.005	1.3	10
5	5.3	2.5	0.005	1.3	10
6	3.3	1.5	0.005	1.3	10
7	3.3	2.5	0.005	1.3	10
8	3.3	3.5	0.005	1.3	10
9	3.3	4.5	0.005	1.3	10
10	3.3	5.5	0.005	1.3	10
11	3.3	3.5	0.0025	1.3	10
12	3.3	3.5	0.0035	1.3	10
13	3.3	3.5	0.005	1.3	10
14	3.3	3.5	0.0055	1.3	10

15	3.3	3.5	0.0065	1.3	10
16	3.3	3.5	0.005	1.1	10
17	3.3	3.5	0.005	1.2	10
18	3.3	3.5	0.005	1.3	10
19	3.3	3.5	0.005	1.4	10
20	3.3	3.5	0.005	1.5	10
21	3.3	3.5	0.005	1.3	8
22	3.3	3.5	0.005	1.3	9
23	3.3	3.5	0.005	1.3	10
24	3.3	3.5	0.005	1.3	11
25	3.3	3.5	0.005	1.3	12

Таблица №3

№	D	α	m_y
1	0.1	0.02	1
2	0.2	0.1	2
3	0.3	0.04	3
4	0.4	0.08	4
5	0.5	0.01	5
6	0.6	0.05	6
7	0.7	0.02	7
8	0.8	0.09	8
9	0.9	0.1	9
10	1.2	0.06	0.04
11	1.4	0.04	0.08
12	0.3	0.08	0.01
13	0.4	0.01	0.05
14	0.5	0.05	0.02
15	0.6	0.02	0.09
16	1.5	0.09	0.1
17	0.3	0.1	0.04
18	0.4	0.02	0.08
19	0.5	0.1	0.01
20	0.6	0.04	0.05
21	0.1	0.08	0.02
22	0.2	0.01	0.09
23	0.3	0.07	0.1
24	0.4	0.02	0.4
25	1.7	0.1	0.07

Таблица №4.1.

№	b_1	b_0	a_2	a_1	a_0
1	0.16	4	0.32	2.52	1
2	0.1	4.1	0.34	1.48	2
3	0.2	4.2	0.65	2.44	3
4	0.25	4.3	0.45	3.12	4
5	0.1	3.1	0.34	3.66	5
6	0.15	3.2	0.26	6.24	6
7	0.2	3.3	0.36	4.22	7
8	0.25	3.4	0.44	2.28	8
9	0.3	3.5	0.48	4.32	9
10	0.1	5	0.12	3.48	1
11	0.2	5.1	0.24	1.48	2
12	0.25	5.2	0.36	2.44	3
13	0.1	5.3	0.66	3.12	4
14	0.15	5.4	0.48	3.66	5
15	0.2	4.3	0.34	6.24	6
16	0.35	3.1	0.65	4.22	7
17	0.25	3.2	0.45	2.28	8
18	0.3	3.3	0.34	4.32	9
19	0.1	3.4	0.26	3.48	1
20	0.2	3.5	0.36	4.22	2
21	0.25	5	0.44	2.28	3
22	0.1	5.1	0.48	4.32	4
23	0.15	5.2	0.66	3.48	5
24	0.2	5.3	0.33	1.48	6
25	0.4	1.5	0.56	2.44	2

Таблица №4.2.

№	<i>Типовые алгоритмы моделирования нормальных случайных процессов</i>		
1	$R(\tau) = \sigma^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot \tau)$	$G(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 / \alpha^2} = \frac{2\sigma^2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	Экспоненциальная корреляционная функция
2	$R(\tau) = \sigma^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot \tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)$	$G(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\alpha} \cdot \frac{1 + x^2 + x_0^2}{(1 + (x + x_0)^2) \cdot (1 + (x - x_0)^2)}$ где: $x = \frac{\omega}{\alpha}$ $x_0 = \frac{\omega_0}{\alpha}$	
3	$R(\tau) = \sigma^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot \tau) \cdot (1 + \alpha \cdot \tau)$	$G(\omega) = \frac{4\sigma^2 \cdot \alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	
4	$R(\tau) = \sigma^2 \cdot \frac{\sin(\omega_0 \cdot \tau)}{\omega_0 \cdot \tau}$	$G(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi \cdot \sigma^2}{\omega_0}, & \omega \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases}$	
5	$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{1 + \omega_0^2 \cdot \tau^2}$	$G(\omega) = \frac{\pi \cdot \sigma^2}{\omega_0} \cdot \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	
6	$R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 - \omega_0 \cdot \tau), & \tau \leq \frac{1}{\omega_0}; \\ 0, & \tau > \frac{1}{\omega_0}; \end{cases}$	$G(\omega) = \frac{4\sigma^2}{\omega_0} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}$ где: $x = \frac{\omega}{\omega_0}$	

Таблица №5.

№	$S_g(\omega)$	$S_n(\omega)$	№	$S_g(\omega)$	$S_n(\omega)$
1	$\frac{8}{198\omega^2 + 10201}$	$\frac{8\omega^2}{98\omega^2 + 1000}$	14	$\frac{1}{\omega^2 + 64}$	$\frac{0,25\omega^2}{2\omega^2 + 1}$
2	$\frac{0,25}{2\omega^2 + 1}$	$\frac{4\omega^2}{8\omega^2 + 100}$	15	$\frac{2}{\omega^2 + 324}$	$\frac{2\omega^2}{2\omega^2 + 324}$
3	$\frac{0,25}{2\omega^2 + 1}$	$\frac{0,01\omega^2}{30\omega^2 + 25}$	16	$\frac{4}{6\omega^2 + 25}$	$\frac{32\omega^2}{\omega^2 + 64}$
4	$\frac{1}{16\omega^2 + 100}$	$\frac{128\omega^2}{\omega^2 + 1024}$	17	$\frac{0,001}{6\omega^2 + 25}$	$\frac{25\omega^2}{25\omega^2 + 50}$
5	$\frac{8}{1,5\omega^2 + 1,5625}$	$\frac{1,8\omega^2}{2\omega^2 + 10,6}$	18	$\frac{0,25}{30\omega^2 + 25}$	$\frac{2\omega^2}{2,5\omega^2 + 5}$
6	$\frac{8}{0,72\omega^2 + 2,6}$	$\frac{0,28\omega^2}{2\omega^2 + 1}$	19	$\frac{32}{\omega^2 + 64}$	$\frac{128\omega^2}{\omega^2 + 1024}$
7	$\frac{0,001}{1,02\omega^2 + 2,2}$	$\frac{\omega^2}{2\omega^2 + 64}$	20	$\frac{128}{\omega^2 + 1024}$	$\frac{16\omega^2}{\omega^2 + 100}$
8	$\frac{0,1}{1,28\omega^2 + 1,8496}$	$\frac{2\omega^2}{2\omega^2 + 324}$	21	$\frac{324}{1,68\omega^2 + 1,3}$	$\frac{8\omega^2}{98\omega^2 + 1000}$
9	$\frac{16}{0,38\omega^2 + 3,2}$	$\frac{4\omega^2}{6\omega^2 + 25}$	22	$\frac{0,001}{6\omega^2 + 25}$	$\frac{1}{16\omega^2 + 100}$
10	$\frac{324}{1,68\omega^2 + 1,3}$	$\frac{0,01\omega^2}{6\omega^2 + 25}$	23	$\frac{0,25}{2\omega^2 + 1}$	$\frac{0,001}{1,02\omega^2 + 2,2}$
11	$\frac{162}{100\omega^2 + 1000}$	$\frac{0,25\omega^2}{30\omega^2 + 25}$	24	$\frac{8}{0,72\omega^2 + 2,6}$	$\frac{\omega^2}{2\omega^2 + 64}$
12	$\frac{9}{19\omega^2 + 25}$	$\frac{\omega^2}{0,5\omega^2 + 12}$	25	$\frac{32}{\omega^2 + 64}$	$\frac{4\omega^2}{6\omega^2 + 25}$
13	$\frac{100}{32\omega^2 + 518}$	$\frac{\omega^2}{16\omega^2 + 100}$	26	$\frac{128}{\omega^2 + 1024}$	$\frac{\omega^2}{0,5\omega^2 + 12}$

Таблица № 6

№	Длительность импульса $t_{\text{и}}$ [мс]	Число отсчетов N	Частота среза $F_{\text{ср}}$ [кГц]	Вид импульса
1	0.14	8	4	Прямоуг.
2	0.3	40	20	Треугольн.
3	1	10	4	Пилообр.
4	0.2	8	1	Синус
5	0.5	16	4	Прямоуг.
6	0.5	16	6	Треугольн.
7	1	24	16	Пилообр.
8	1.5	24	8	Синус
9	1.5	24	12	Прямоуг.
10	1.5	24	14	Треугольн.
11	1.5	32	24	Пилообр.
12	2	32	16	Синус
13	2	32	12	Прямоуг.
14	2	32	14	Треугольн.
15	2	32	36	Пилообр.
16	2	16	16	Синус
17	2.5	16	8	Прямоуг.
18	2.5	16	12	Треугольн.
19	2	16	24	Пилообр.
20	2.5	24	14	Синус
21	3	24	16	Прямоуг.
22	3	24	20	Треугольн.
23	2.4	32	16	Пилообр.
24	3	24	24	Синус
25	3	32	28	Прямоуг.

Таблица №7.1.

№	$S_g(\omega)$	w	ν	№	$S_g(\omega)$	w	ν
1	$\frac{8\omega^2 + 14}{0.01\omega^4 + 98\omega^2 + 1000}$	2	0.01	14	$\frac{0,25\omega^2 + 10}{0.4\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$	2	0.01
2	$\frac{4\omega^2 + 0.2}{0.01\omega^4 + 8\omega^2 + 100}$	5	0.03	15	$\frac{2\omega^2 + 16}{0.5\omega^4 + 2\omega^2 + 324}$	6	0.02
3	$\frac{0,01\omega^2 + 16}{30\omega^4 + 25}$	5	0.00 5	16	$\frac{32\omega^2 + 20}{0.5\omega^4 + \omega^2 + 64}$	4	0.05
4	$\frac{128\omega^2 + 10}{0.02\omega^4 + \omega^2 + 1024}$	7	0.04	17	$\frac{25\omega^2 + 16}{0.1\omega^4 + 25\omega^2 + 50}$	8	0.08
5	$\frac{1,8\omega^2 + 12}{0.1\omega^4 + 2\omega^2 + 10,6}$	8	0.00 1	18	$\frac{2\omega^2 + 12}{0.01\omega^4 + 2,5\omega^2 + 5}$	10	0.1
6	$\frac{0,28\omega^2 + 5}{0.04\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$	10	0.1	19	$\frac{128\omega^2 + 6}{0.04\omega^4 + \omega^2 + 1024}$	12	0.3
7	$\frac{\omega^2 + 16}{0.1\omega^4 + 2\omega^2 + 64}$	15	0.2	20	$\frac{16\omega^2 + 14}{0.1\omega^4 + \omega^2 + 100}$	5	0.06
8	$\frac{2\omega^2 + 2}{0.24\omega^4 + 2\omega^2 + 324}$	10	0.03	21	$\frac{8\omega^2 + 10}{\omega^4 + 98\omega^2 + 1000}$	8	0.8
9	$\frac{4\omega^2 + 10}{0.04\omega^4 + 6\omega^2 + 25}$	7	0.06	22	$\frac{10\omega^2 + 7}{0.06\omega^4 + 16\omega^2 + 100}$	2	0.03
10	$\frac{0,01\omega^2 + 8}{0.8\omega^4 + 6\omega^2 + 25}$	8	0.02	23	$\frac{0,1\omega^2 + 8}{0.2\omega^4 + 12,02\omega^2 + 2,2}$	10	0.02
11	$\frac{0,25\omega^2 + 6}{0.2\omega^4 + 30\omega^2 + 25}$	14	0.01	24	$\frac{\omega^2 + 16}{0.01\omega^4 + 2\omega^2 + 64}$	8	0.04
12	$\frac{\omega^2 + 6}{0.01\omega^4 + 0,5\omega^2 + 12}$	5	0.05	25	$\frac{4\omega^2 + 12}{0.5\omega^4 + 6\omega^2 + 25}$	12	0.1
13	$\frac{\omega^2 + 9}{0.5\omega^4 + 16\omega^2 + 100}$	8	0.08	26	$\frac{\omega^2 + 24}{0.08\omega^4 + 0,5\omega^2 + 12}$	16	0.05

Таблица №7.2.

Датчик представлен передаточной функцией вида:

$$W_o(s) = \frac{K}{a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3}$$

№	K	a_1	a_2	a_3	№	K	a_1	a_2	a_3
1	2.6	1	0.4	0.8	14	16.8	0.1	0.7	1.6
2	10.5	4	0.6	0.3	15	4.8	4	0.8	0.8
3	12.6	6	0.8	0.6	16	8.2	0.6	0.9	0.3
4	16.8	5	0.2	0.2	17	8.8	5	1.2	0.6
5	4.8	0.8	1	1.6	18	10.5	0.8	0.9	0.2
6	8.2	0.2	0.9	2.1	19	8.6	0.2	0.4	1.6
7	8.8	0.1	0.7	1.4	20	8.2	0.1	0.6	2.1
8	10.5	2	0.8	1.7	21	12.5	0.2	0.8	1.4
9	24.6	3	0.9	2.4	22	14.6	0.3	0.2	1.6
10	12.8	0.6	1.2	0.8	23	16.8	0.6	1	2.1
11	8.8	0.7	1.4	0.7	24	18.8	0.7	0.9	1.4
12	11.6	0.1	1.6	0.9	25	19.6	0.1	0.4	1.7
13	9.7	0.9	0.4	1.1	26	11.7	0.9	0.6	2.4

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Формирующий фильтр.

Формирующим фильтром называется звено, формирующее из белого шума сигнал с заданной спектральной плотностью. Изменение вида спектральной плотности в частотной области определяется соотношением:

$$S_{вых}(\omega) = |W(p)|^2 \cdot S_{ex}(\omega)$$

Если на вход фильтра подается сигнал белого шума, спектральная плотность которого является постоянной величиной $S_{ex}(\omega) = N$, то на выходе получим сигнал со спектральной плотностью вида:

$S_g(\omega) = N \cdot W(j\omega) \cdot W(-j\omega)$, где $W(j\omega)$ - АФЧХ фильтра.

Из изложенного следует, что для формирования сигнала с заданной спектральной плотностью, необходимо подать на вход формирующего фильтра белый шум с интенсивностью равной единице. Тогда в установившемся режиме выходной сигнал будет стационарным со спектральной плотностью:

$$S_g(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot 1 = W(j\omega) \cdot W(-j\omega)$$

Все полюсы функции $W(j\omega)$ должны быть расположены в левой полуплоскости, и её можно принять как передаточную функцию формирующего фильтра. Представление функции $S_g(\omega)$ в виде: $S_g(\omega) = W(j\omega) \cdot W(-j\omega)$ называется её факторизацией.

В простейших случаях процесс факторизации достаточно очевиден. Например, рассмотрим случайный процесс с корреляционной функцией вида - $R_x(\tau) = D \cdot \exp(-\alpha|\tau|)$ ей соответ-

ствует спектральная плотность - $S_g(\omega) = D \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$. Очевидные преобразования приводят к результату:

$$S_g(\omega) = D \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha \cdot D}}{\alpha + j \cdot \omega} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha \cdot D}}{\alpha - j \cdot \omega}$$

Отсюда следует, что передаточная функция формирующего

$$W_f(p) = \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha \cdot D}}{\alpha + p}$$

фильтра будет иметь вид:

Рассмотрим общий случай, когда спектральная плотность является дробно-рациональной функцией:

$$S_g(\omega) = \frac{G(\omega)}{M(\omega)} \quad \text{где } G(\omega) \text{ и } M(\omega) \text{ - полиномы от } \omega.$$

Спектральная плотность обладает следующими свойствами:

1. $S(\omega)$ - четная функция, а значит, она содержит только четные степени ω ;

2. степень полинома $G(\omega)$ всегда меньше степени полинома $M(\omega)$;

3. уравнение $M(\omega) = 0$ не имеет действительных корней;

4. корни уравнений $G(\omega) = 0$ и $M(\omega) = 0$ расположены симметрично относительно осей системы координат.

Полиномы $G(\omega)$ и $M(\omega)$ записываем в виде:

$$G(\omega) = b_0 \omega^{2m} + b_1 \omega^{2(m-1)} + \dots + b_m$$

$$M(\omega) = a_0 \omega^{2n} + a_1 \omega^{2(n-1)} + \dots + b_n$$

Допустим, например, что один из корней уравнения $G(\omega) = 0$ равен $\alpha + j\beta$ ($\alpha \geq 0, \beta > 0$), тогда его корнями будут $\alpha + j\beta$, $\alpha + j\beta$ и $\alpha + j\beta$. Этим корням будут соответствовать множители в полиномах $G(\omega)_+$ и $G(\omega)_-$:

$$G(\omega)_+ : [\omega - (\alpha + j\beta)] \cdot [\omega - (-\alpha + j\beta)]$$

$$G(\omega)_- : [\omega - (\alpha - j\beta)] \cdot [\omega - (-\alpha - j\beta)]$$

Аналогично такой же набор можно записать для полинома $M(\omega)$.

Спектральную плотность можно представить в виде:

$$S_g(\omega) = \frac{(j)^m \sqrt{b_0} G(\omega)_+ \cdot (j)^{-m} \sqrt{b_0} G(\omega)_-}{(j)^n \sqrt{a_0} M(\omega)_+ \cdot (j)^{-n} \sqrt{a_0} M(\omega)_-}$$

Где: $G(\omega)_+$, $M(\omega)_+$ - произведения элементарных сомножителей, с корнями уравнений, расположенными в верхней полуплоскости,

$G(\omega)_-$, $M(\omega)_-$ - произведения элементарных сомножителей, с корнями уравнений, расположенными в нижней полуплоскости.

Например:

$$c_0 + c_1 \cdot p^2 + c_2 \cdot p^4 = (a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2) \cdot (a_0 - a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2)$$

В таком случае спектральную плотность можно записать в виде:

$$S_g(\omega) = \frac{B(j\omega) \cdot B(-j\omega)}{A(j\omega) \cdot A(-j\omega)} = \left| \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \right|^2$$

Из последнего выражения следует, что передаточная функция формирующего фильтра получается в виде:

$$W_f(\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

При этом корням уравнений $G(\omega) = 0$ и $M(\omega) = 0$ расположенным в верхней полуплоскости на плоскости ω , на плоскости $p = j\omega$ соответствуют левые корни, все нули передаточной функции формирующего фильтра располагаются в левой полуплоскости.

Рассмотрим пример: определить передаточную функцию формирующего фильтра для стационарного случайного процесса со спектральной плотностью, используем возможности Matlab:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 8}{\omega^4 + 2 \cdot \omega^2 + 1}$$

```

>> B=[1 0 8];
>> A=[1 0 2 0 1];
>> b=roots(B)
    
```

```

b =
0 + 2.8284i
0 - 2.8284i
>> a=roots(A)
a =
-0.0000 + 1.0000i
-0.0000 - 1.0000i
0.0000 + 1.0000i
0.0000 - 1.0000i
    
```

В приведенном примере нули спектральной плотности равны:

$$\omega_1 = j \cdot 2.8284 \quad \omega_2 = -j \cdot 2.8284 \quad m = 1.$$

Полюсы спектральной плотности равны:

$$\omega_1 = j \cdot 1 \quad \omega_2 = -j \cdot 1 \quad \omega_3 = j \cdot 1 \quad \omega_4 = -j \cdot 1$$

$n = 2.$

На основании этих значений можно записать:

$$S_g(\omega) = \frac{(j)^m \sqrt{b_0} G(\omega)_+ \cdot (j)^{-m} \sqrt{b_0} G(\omega)_-}{(j)^n \sqrt{a_0} M(\omega)_+ \cdot (j)^{-n} \sqrt{a_0} M(\omega)_-}$$

$$G_+ = \omega - j \cdot 2.8284$$

$$B(j\omega) = j \cdot (\omega - j \cdot 2.8284)$$

$$M_+ = (\omega - j) \cdot (\omega - j)$$

$$A(j\omega) = j^2 \cdot (\omega - j)^2$$

Передаточная функция формирующего фильтра равна:

$$W(j\omega) = \frac{j \cdot (\omega - j \cdot 2.8284)}{j^2 \cdot (\omega - j)^2} = \frac{j \cdot \omega + 2.8284}{(j \cdot \omega + 1)^2}$$

Метод вспомогательной переменной.

Модель в пространстве состояний, если соответствующая передаточная функция имеет в числителе полином относительно оператора Лапласа, может быть получена с применением специальных приемов, наиболее простым из которых является метод вспомогательной переменной / /. Смысл этого приема состоит в том, чтобы избавиться от производных в правой части уравнений модели. Пусть передаточная функция объекта задана в виде:

Определение частоты дискретизации.

Частота, при которой амплитудофазочастотная характеристика уменьшается в 1000 раз, является частотой дискретизации, она определяет период дискретности процесса

Для расчета дискретной модели требуется определить период дискретности dt . На основании импульсной теоремы $dt = \pi / \omega_m$, где ω_m – максимальная частота пропускания системы. Вычисление периода дискретности производится в электронной таблице *Excel* (см. рисунок 4.6).

Метод расчета основан на определении ω_m , когда затухание амплитудно-частотной характеристики ограничено на уровне δ от уровня при $\omega = \omega_0 = 0$.

$$|W(j\omega_m)|^2 = \delta |W(j\omega_0)|^2.$$

При $\delta = 10^{-3}$ это уравнение приобретает вид

$$\omega_m^8 + 0,0775\omega_m^6 + 0,62\omega_m^4 - 10^{-8}\omega_m^2 - 10^{-5} = 0.$$