



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

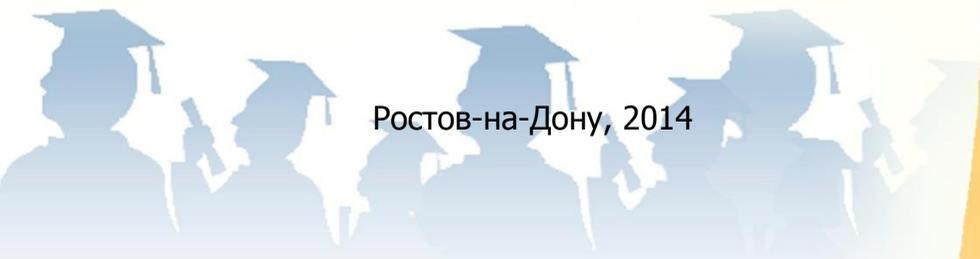
Кафедра «Автоматизация промышленных процессов»

## УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

# «Современная теория автоматического управления»

Авторы  
Кудряшев С.Б.,  
Губанова А.А.

Ростов-на-Дону, 2014





## Аннотация

В учебном пособии рассматриваются вход-выходные методы описания и исследования динамических систем, методы и оценки фундаментальных свойств систем автоматического управления на основе современной теории автоматического управления. Приводятся краткие теоретические сведения о видах и формах управления, а также их общепринятая классификация.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 220400.62 «Управление в технических системах», 220700.62 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 221000.62 «Робототехника и мехатроника», а также может быть рекомендовано для студентов других специальностей, решающих теоретические и практические задачи анализа и синтеза автоматических систем.

## Автор

Кудряшев С.Б., к.т.н., доцент,

Губанова А.А., ст. преподаватель





## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>1. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ .....</b>	<b>7</b>
1.1. Векторно-матричные модели систем управления.....	7
в непрерывном времени.....	7
1.2. Переход от графической формы записи системы.....	13
к матрично-векторной .....	13
1.3. Основные формы приведения матриц. ....	17
Передаточная матрица .....	17
1.4. Анализ свойств, объектов и систем управления .....	21
1.5. Модальное управление объектами .....	26
1.6. Наблюдатели состояния систем Калмана.....	31
и Луенбергера .....	31
<b>2. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>38</b>
2.1. Метод Ляпунова .....	38
2.2. Критерий устойчивости Попова .....	42
<b>3. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>46</b>
<b>КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....</b>	<b>51</b>
<b>РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>54</b>



## ВВЕДЕНИЕ

Современная теория автоматического управления (ТАУ) – сравнительно молодая научная дисциплина, основанная на глубоких философских концепциях и строгих математических методах, и возникшая из-за появления сложных систем управления с большим числом элементов электроники и автоматики.

Целью изучения теории автоматического управления является формирование компетенций специалиста, знающего теорию управления и умеющего выполнять исследовательские и расчетные работы по созданию и внедрению в эксплуатацию систем автоматического управления любыми техническими (и не только) объектами с широким использованием средств современной вычислительной техники.

Современные сложные системы разнообразной природы представляют собой комплекс различных подсистем, выполняющих определенные технологические функции и связанных между собой процессами интенсивного динамического взаимодействия и обмена энергией, веществом и информацией. Указанные суперсистемы являются нелинейными, многомерными и многосвязными, в них протекают сложные переходные процессы и возникают критические и хаотические режимы. Проблемы автоматического управления такого рода динамическими суперсистемами являются весьма актуальными, чрезвычайно сложными и недоступными для существующей классической теории и методов управления. В качестве инструмента для решения этих проблем предлагается использовать принципы и методы новой теории управления, базирующейся на идее направленной самоорганизации и управляемой динамической декомпозиции нелинейных многомерных систем.

Существующая теория управления весьма успешно освоила методы централизованного внешнего воздействия на различные объекты, однако, наступило время пересмотра силовых подходов в задачах управления и перехода на идеи самоорганизации синергетики. Отсюда вытекает насущная потребность поиска путей целевого воздействия на процессы самоорганизации в нелинейных динамических системах. Другими словами, возникла необходимость создания способов формирования и возбуждения внутренних сил взаимодействия, которые могли бы породить в фазовом пространстве синтезируемых систем диссипативные структуры, адекватные физической (химической, биологической) сущности соответствующей системы. В этой связи возникает



## Современная теория автоматического управления

фундаментальная проблема поиска общих объективных законов процессов управления, которая сводится к максимальному учету естественных свойств объекта соответствующей физической природы. Эта принципиально новая проблема системного синтеза порождает крупные самостоятельные задачи в тех предметных областях, к которым принадлежит объект управления.

Цель управления тем или иным образом связывается с изменением во времени регулируемой (управляемой) величины – выходной величины управляемого объекта. Для осуществления цели управления, с учётом особенностей управляемых объектов различной природы и специфики отдельных классов систем, организуется воздействие на управляющие органы объекта – управляющее воздействие. Оно предназначено также для компенсации эффекта внешних возмущающих воздействий, стремящихся нарушить требуемое поведение регулируемой величины. Управляющее воздействие вырабатывается устройством управления. Совокупность взаимодействующих управляющего устройства и управляемого объекта образует систему автоматического управления.

Современная ТАУ базируется на информационно-физических взаимодействиях в управляемых системах различной природы. При этом физическое (химическое, биологическое, экономическое и др.) начало выступает как одна из определяющих сущностей процессов управления, а сами эти процессы базируются на явлениях самоорганизации, возникающих в системах конкретной природы. Именно та или иная природа системы и вводимые законы синергетического управления и определяют в конечном итоге процессы самоорганизации, т.е. самоуправления в системах.

Таким образом, при синергетическом подходе к синтезу систем целью их функционирования, в отличие от классической теории автоматического регулирования и теории оптимального управления, является не только выполнение требований к характеру переходного процесса, но и, в первую очередь, обеспечение желаемого асимптотического поведения системы на аттракторе или в его близкой окрестности. Это связано с тем обстоятельством, что поведение любой нелинейной диссипативной системы может быть разделено на этап переходного движения, когда ее траектории устремляются к аттрактору, и этап асимптотического движения на желаемом аттракторе – цели системы. Такой подход позволяет принципиально разрешить проблему аналитического синтеза объективных законов



управления нелинейными многомерными объектами – законов обратных связей, синтезируемых на основе наиболее полных нелинейных моделей динамических объектов с непосредственным учетом их естественных закономерностей, физических (химических и др.) критериев и ограничений. Итак, целью синтезируемой системы является достижение соответствующего желаемого аттрактора, т. е. асимптотически устойчивого конечного состояния. Размерность аттрактора – цели исходной системы – обычно существенно меньше размерности ее исходного фазового пространства. Отсюда вытекает идеология процессов обработки информации и управления в сложных нелинейных динамических системах: для этого необходимо, чтобы указанные процессы включали, по меньшей мере, две фазы – фазу расширения и фазу сжатия фазового пространства. Эти фазы реализуются с помощью соответствующей совокупности нелинейных положительных и отрицательных обратных связей. При этом в фазе расширения в системе формируется подмножество различных альтернатив поведения для ее взаимодействия с внешней средой или другими системами. В фазе сжатия система сжимает область притяжения аттракторов, ранее построенных, в один из желаемых аттракторов – цель системы.

Таким образом, можно сказать, что новая теория управления применяет методы анализа и синтеза, на основе которых могут быть созданы высокоэффективные системы управления различного назначения (аэрокосмическая техника, промышленные роботы, автомобилестроение, медицинская аппаратура и т.д.).

Структура учебного пособия соответствует учебному плану направлений бакалавров и включает в себя основы матрично-векторных моделей системы автоматического управления (САУ), способы получения представления систем в матрично-векторной форме, основные формы приведения, оценки устойчивости, наблюдаемости, управляемости нелинейных систем и др. в ТАУ.

Значительное число примеров и упражнений, приведенных в учебном пособии, позволяют глубже освоить теорию и ее применение к решению практических задач.



# 1. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

## 1.1. Векторно-матричные модели систем управления в непрерывном времени

Современная теория автоматического управления оперирует с векторно-матричными моделями динамических систем. При этом рассматриваются в общем случае многомерные системы, т.е. системы произвольного порядка со многими входами и многими выходами, в связи с чем широко используются векторно-матричные уравнения и аппарат векторной алгебры. Для получения векторно-матричной модели исследуемая динамическая система представляется в виде «черного ящика» с некоторым числом входных и выходных каналов (рис. 1.1, а).

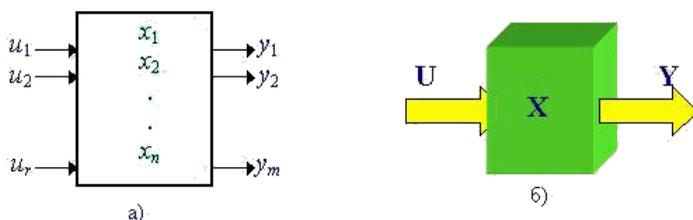


Рис. 1.1. Скалярное (а) и векторное (б) представления динамической системы в виде «черного ящика»

Все переменные, характеризующие систему, можно разделить на три группы.

1. Входные переменные или входные воздействия, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемой системе, характеризуются вектором входа

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_r],$$

где  $u$  – входная переменная;  $T$  – транспонирование;  $r$  – число входов.

2. Выходные переменные, характеризующие реакцию системы на указанные входные воздействия, представляются вектором выхода

$$y^T = [y_1, y_2, \dots, y_m],$$

где  $y$  – выходная переменная;  $m$  – число выходов.



3. Промежуточные переменные, характеризующие внутреннее состояние системы, представляются вектором

$$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n],$$

где  $x$  – промежуточная переменная;  $n$  – число переменных состояния.

Таким образом, совокупность входов можно рассматривать как один обобщенный вход, на который воздействует вектор входа  $u$ , совокупность выходов как вектор  $y$ , а совокупность промежуточных координат, характеризующих состояние системы, – в виде вектора состояния  $x$  (рис. 1.1, б).

Состояние системы – это та минимальная информация о прошлом, которая необходима для полного описания будущего поведения (т.е. выходов) системы, если поведение ее входов известно.

Собственно система, ее входы и выходы – это три взаимосвязанных объекта, которые в каждой конкретной ситуации определяются соответственно математической моделью системы, заданием множеств входных и выходных переменных.

Решение задач анализа и синтеза связано с исследованием состояний системы, множество которых образует пространство состояний,  $x \in R^n$ .

В общем случае динамическая система в непрерывном виде может быть описана с помощью матричных уравнений:

$$\dot{x}(t) = F[x(t), u(t), t]; \quad (1.1)$$

$$y(t) = Q[x(t), u(t), t], \quad (1.2)$$

где  $F$  –  $n$ -мерная вектор-функция системы;  $Q$  –  $m$ -мерная вектор-функция выхода.

Матричное уравнение (1.1) называют уравнением состояния системы. Его решение, удовлетворяющее начальному

условию  $x_0 = x(t_0)$ , дает вектор состояния системы

$$x(t) = \Psi[x(t_0), u(t), t]. \quad (1.3)$$

Матричное уравнение (1.2), определяющее выходные переменные в зависимости от  $x(t)$  и  $u(t)$ , называют уравнением выхода.

В частном случае зависимости  $F_i (i = 1 \dots n)$ ,  $Q_k (k = 1 \dots m)$  могут быть линейными комбинациями переменных



## Современная теория автоматического управления

состояния  $x_i$  и входных переменных  $u_j$ . При этом динамическая система описывается в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u; \quad (1.4)$$

$$y = C(t)x + D(t)u. \quad (1.5)$$

Переход к стационарным моделям позволяет оперировать с коэффициентными матрицами, т.е. со стационарными уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad (1.6)$$

$$y = Cx + Du, \quad (1.7)$$

где  $A$  – функциональная матрица размером  $n \times n$ , называемая матрицей состояния системы (объекта);  $B$  – функциональная матрица размером  $n \times r$ , называемая матрицей управления (входа);  $C$  – функциональная матрица размером  $m \times n$ , называемая матрицей выхода по состоянию;  $D$  – функциональная матрица размером  $m \times r$ , называемая матрицей выхода по управлению.

Очень часто  $D=0$ , т.е. выход непосредственно не зависит от входа.

В дальнейшем под векторно-матричной моделью объекта (системы) будем понимать описание ее динамического поведения в классе стационарных непрерывных линейных систем, представленное в виде уравнений (1.6), (1.7).

Таким образом, векторно-матричная модель имеет единую форму представления, что значительно облегчает алгоритмизацию и компьютерную реализацию проектных процедур и проектных операций структурно-параметрического синтеза и анализа систем управления. Однако с использованием векторно-матричной модели может быть получено лишь приближенное проектное решение, которое потребует дальнейшего уточнения, так как такие модели отображают динамическое поведение реального объекта лишь в классе стационарных линейных систем.

Построение векторно-матричной модели реального объекта сопряжено с проблемами линеаризации исходного математического описания и приведения его к структурированному виду – форме Коши.

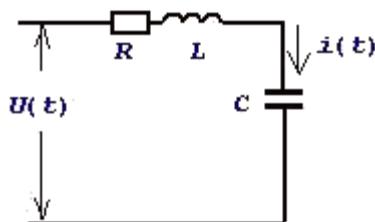


Рис. 1.2. Схема RLC-цепи

Пример 1.1. Получим уравнения состояния для простейшей RLC-цепи, показанной на рис. 1.2.

Динамическое поведение этой системы при  $t \geq t_0$  полностью определяется, если известны начальные значения  $i(t_0)U_e(t_0)$  и входное напряжение  $U(t)$  при  $t \geq t_0$ . Следовательно,  $i(t)U_e(t)$  можно выбрать в качестве переменных состояния, т.е.  $x^T = [i(t)U_e(t_0)]$ ;  $y = [i(t)]$ .

Для указанных переменных состояния можно записать дифференциальные уравнения:

$$U(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + U_e; \quad C \frac{dU_e}{dt} = i(t)$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{U}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ U(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t).$$

Таким образом, для рассматриваемой системы матрицы А, В, С векторно-матричной модели будут иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

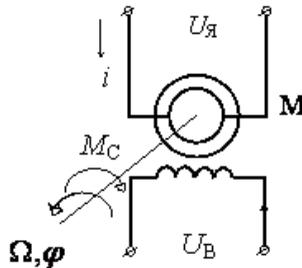


Рис. 1.3. Электродвигатель постоянного тока

Пример 1.2. На рис. 1.3. показан электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения, работающий при постоянном магнитном потоке ( $\Phi = \text{const}$ ).

Дифференциальные уравнения для такого объекта могут быть записаны относительно следующих переменных состояния: скорости вращения ротора  $\Omega(t)$ ; тока якоря  $i(t)$ ; углового перемещения ротора  $\varphi(t)$ . При использовании зависимостей для электродвижущей силы  $E = k\Phi\Omega = C\Omega$  и вращающего момента двигателя  $M = k\Phi \cdot i = Ci$  получим уравнение электрической цепи

$$U_{\text{я}}(t) = R_{\text{я}}i(t) + L_{\text{я}} \frac{di(t)}{dt} + E$$

и уравнения вращающейся части:

$$M - M_c = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega$$

где  $J$  – приведенный момент инерции электродвигателя.

Представляя векторы состояния входа и выхода как  $x^T = [\Omega(t) \ i(t) \ \varphi(t)]$ ,  $u^T = [U_{\text{я}} \ M_c]$ ,  $y = [\Omega(t)]$ , получим следующую векторно-матричную модель электродвигателя постоянного тока:



$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ i \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C/J & 0 \\ -C/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/J \\ 1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ M_C \end{bmatrix},$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

То есть для рассматриваемой системы матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  векторно-матричной модели будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & C/J & 0 \\ -C/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1/J \\ -1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

Пример 1.3. Написать уравнения состояния системы, имеющей матрицы состояния:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как видно из матрицы  $A$  размерность состояния системы будет равна четвертой степени. Из матрицы  $B$  можно сделать вывод, что система имеет два входных воздействия, а также два выходных (матрица  $C$ ). В соответствии с матрицами  $A, B$  и  $C$  уравнения состояния опишем систему в виде дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -5x_2 - 2x_3 + U_1; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = -x_2 - x_3 + U_2; \\ y_1 = x_1; \\ y_2 = x_3. \end{cases}$$



## 1.2. Переход от графической формы записи системы к матрично-векторной

Правила построения матрично-векторной математической модели по структурной схеме. Переход от графической формы описания к матрично-векторной осуществляется согласно в следующей последовательности:

1 – исходная математическая модель, заданная в графической форме, преобразуется к структуре, содержащей лишь элементарные звенья 0-го (пропорциональные) и 1-го порядков (апериодические, интегрирующие);

2 – на выходах динамических звеньев (звенья 1-го порядка) назначаются переменные состояния  $x_i$ , выходы звеньев 0-го порядка не обозначаются (они входят в матрично-векторную математическую модель в качестве коэффициентов);

3 – формируются сигналы на входах динамических звеньев согласно полученной на первом этапе структуры, при этом участвуют как назначенные переменные состояний, так и сумматоры, и динамические звенья 0-го порядка;

4 – в результате всех проделанных преобразований составляется система дифференциальных уравнений в форме Коши.

Для наглядности методики перехода рассмотрим некоторые приемы и примеры декомпозиции динамических звеньев (наиболее характерных и часто встречающихся типов) на звенья 0-го и 1-го порядков.

Основной целью декомпозиции (разложения) динамических звеньев на простые составляющие является получение структурной схемы исследуемого объекта управления удобной для дальнейшего ее представления в форме Коши. При этом необходимо учесть очень важный момент. Декомпозиции можно подвергать только физически реализуемые звенья, так как в противном случае в правых частях уравнений Коши могут появляться производные, что недопустимо, так как тогда переход к матрично-векторной форме записи будет невозможен. Следовательно, на начальном этапе декомпозиции необходимо все идеальные динамические звенья, имеющиеся в структурной схеме, преобразовать к реальным, и только после этого приступать к разложению. В принципе, схемы, составленные по реальным физическим объектом, и не должны иметь



идеальных динамических звеньев, но в идеальных структурных схемах, составленных в учебных целях, это возможно.

Иллюстрацию процедуры декомпозиции динамических звеньев целесообразно начать с типовых звеньев 1-го порядка. Покажем преобразование аperiodического звена к совокупности интегрирующего и пропорционального звеньев. Передаточная функция аperiodического звена имеет вид

$$W_A(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1} . \quad (1.8)$$

Преобразуем выражение (1.8) к приведенному виду и обозначим  $1/T = \alpha$ , получим

$$W_A^{*p}(p) = k \cdot \alpha \cdot \frac{1}{p + \alpha} . \quad (1.9)$$

В графической форме записи такое преобразование от (1.8) к (1.9) сведется к переходу, показанному на рис. 1.4.

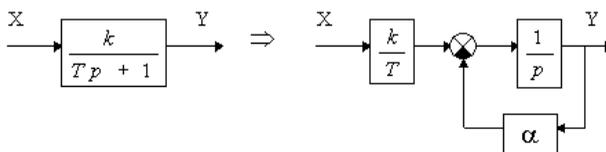


Рис. 1.4. Декомпозиция аperiodического звена

Следующим по сложности преобразования можно рассмотреть декомпозицию колебательного звена.

Пусть математическая модель колебательного звена задана в форме, аналогичной выражению (1.8)

$$W_{ж}(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} . \quad (1.10)$$

Перейдем к приведенной форме записи

$$W_{ж}^{*p}(p) = k \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{2\xi}{T} p + \frac{1}{T^2}}$$

и, обозначив

$$\alpha = \frac{2\xi}{T}; \quad \beta = \frac{1}{T^2},$$

получим колебательное звено следующего вида:



$$W_{\text{ж}^p}(p) = k \cdot \beta \cdot \frac{1}{p^2 + \alpha \cdot p + \beta}. \quad (1.11)$$

Воспользовавшись результатами, полученными для апериодического звена, выражение (1.11) можно представить в графическом виде (рис. 1.5,а). После преобразования звена, полученного в прямом канале к произведению двух звеньев, получим структуру, изображенную на рис. 1.5,б, и после разложения оставшегося приведенного апериодического звена структурная схема примет окончательный вид, представляющий собой два контура отрицательных обратных связей (рис. 1.5,в).

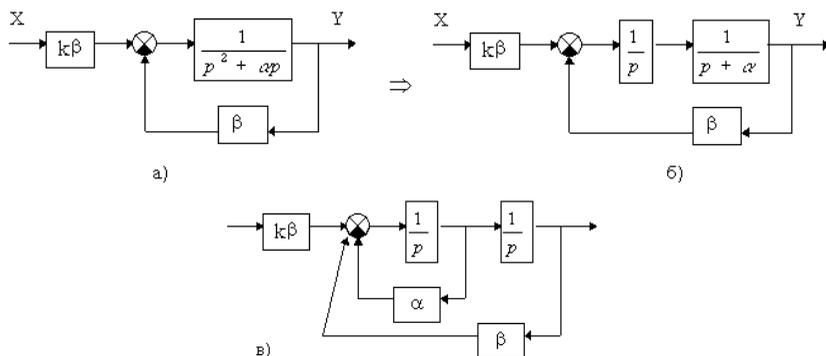


Рис. 1.5. Декомпозиция колебательного звена

В качестве еще одного примера, хорошо иллюстрирующего процедуру декомпозиции, можно рассмотреть реальное пропорционально-дифференцирующее звено 1-го порядка (ПД1)

$$W_{\text{ГД1}}(p) = \frac{T_1 \cdot p + 1}{T_2 \cdot p + 1}. \quad (1.12)$$

Разложим выражение (1.12) на сумму двух дробей

$$W_{\text{ГД1}}(p) = \frac{T_1 \cdot p}{T_2 \cdot p + 1} + \frac{1}{T_2 \cdot p + 1}$$

и после обозначения  $T_1/T_2 = k$  получим выражение

$$W_{\text{ГД1}}(p) = k \cdot \frac{T_2 \cdot p}{T_2 \cdot p + 1} + \frac{1}{T_2 \cdot p + 1}.$$

В первой дроби в числителе прибавим и вычтем единицу, тогда выражение (1.12) примет вид



$$\begin{aligned}
 W_{ГД1}(p) &= k \cdot \frac{T_2 \cdot p + 1 - 1}{T_2 \cdot p + 1} + \frac{1}{T_2 \cdot p + 1} = \\
 &= k \cdot \left( 1 - \frac{1}{T_2 \cdot p + 1} \right) + \frac{1}{T_2 \cdot p + 1}. \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

На рис. 1.6 показана схема, соответствующая выражению (1.13). Из него видно, что в схему входят только апериодические и пропорциональные звенья. Так как правило декомпозиции апериодического звена уже изложено выше, то, в случае необходимости, дальнейшее разложение исследуемого звена не составит особого труда.

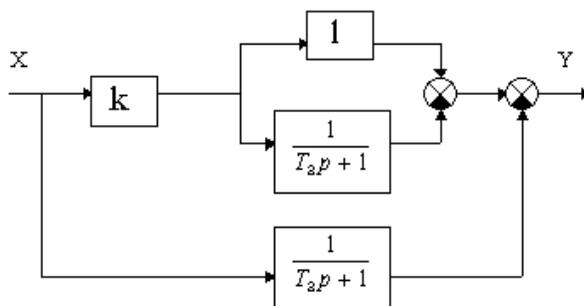
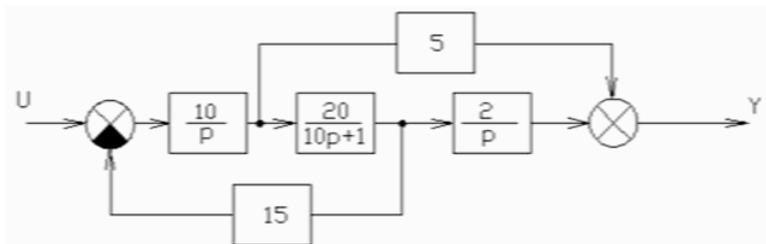


Рис. 1.6. Схема декомпозированного ПД звена

Аналогично можно произвести декомпозицию и других типовых звеньев.

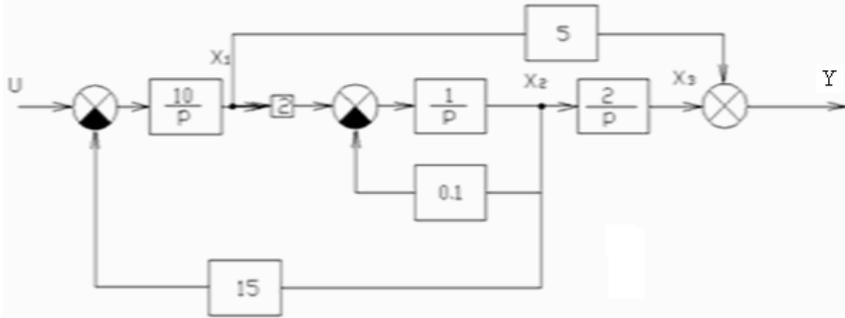
**Пример 1.4.** По заданной структурной схеме объекта управления построить матрично-векторную математическую модель.



Произведем декомпозицию каждого звена, на выходе каждого интегратора расставим переменные состояния  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , а на входе – производные  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots$ . Получим



следующую структуру:



Перейдем к записи в форме Коши, которая формируется из системы уравнений

$$\begin{cases} px_1 = 10(U - 15x_2) \\ px_2 = -0,1x_2 + 2x_1 \\ px_3 = 2x_2 \\ y = 5x_1 + x_3 \end{cases} \quad \text{переменных состояний}$$

матрицы  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ .

Из системы уравнений определим матрицы состояний системы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -150 & 0 \\ 2 & -0.1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [5 \quad 0 \quad 1]; \quad D = [0].$$

### 1.3. Основные формы приведения матриц.

#### Передаточная матрица

Для исследования динамической системы в пространстве состояний используется та или иная форма записи матрично-векторной математической модели в зависимости от цели исследования. Любую матрично-векторную математическую модель, при определенных условиях, можно привести к необходимому базису, наиболее удобному для анализа свойств объекта. Современная теория управления насчитывает следующие основные формы приведения [1, 2].

1. Основная нормальная управляемая форма:



## Современная теория автоматического управления

$$A_{\text{он}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ L & L & K & L & L \\ 0 & 0 & L & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & L & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; B_{\text{он}} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_{\text{он}} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (1.14)$$

2. Транспонированная основная нормальная форма:

$$A_{\text{тон}} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & K & 0 & 0 & -a_1 \\ K & K & K & 0 & K \\ 0 & K & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & K & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; B_{\text{тон}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix}; C_{\text{тон}} = [0 \ K \ 0 \ 1]. \quad (1.15)$$

3. Дополнительная нормальная форма:

$$A_{\text{доп}} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & K & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & K & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & K & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_{\text{доп}} = B_{\text{он}}; C_{\text{доп}} = C_{\text{он}}. \quad (1.16)$$

4. Обратная нормальная форма:

$$A_{\text{обр}} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; B_{\text{обр}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ M \\ 0 \end{bmatrix}; C_{\text{обр}} = [0 \ K \ 0 \ 1]. \quad (1.17)$$

5. Каноническая диагональная форма:

$$A_d = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix};$$

$$C_d = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] = [1 \ 1 \ \dots \ 1]. \quad (1.18)$$



6. Жорданово-каноническая форма:

$$A_{\text{ж}} = \begin{bmatrix} p_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_i & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_i \end{bmatrix}; \quad B_{\text{д}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix};$$

$$C_{\text{н}} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n].$$

**Пример 1.5.** В какой форме представлена матрица

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ?$$

Матрица A представлена в обратной нормальной форме.

**Пример 1.6.** В какой форме представлена матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix} ?$$

Матрица A представлена в основной нормальной форме.

**Пример 1.7.** Определить корни характеристического

уравнения системы, заданной матрицей  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ .

Матрица представляет собой основную нормальную форму, последняя строка матрицы и есть коэффициенты нашего уравнения, т.е.  $a_0 = 0$ ;  $a_1 = -6$ ;  $a_2 = -1$ . При определении характеристического уравнения берем все коэффициенты с противоположным знаком и зеркально отображаем, старшая степень должна быть равна размерности матрицы  $N(p) = p^3 + p^2 + 6p = (p^2 + p + 6)p$ , откуда  $p_1 = 0$ , решим квадратное уравнение

$$(p^2 + p + 6) = 0 \Rightarrow p_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 24}}{2} = -0,5 \pm 2,3i.$$

**Пример 1.8.** Определить матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  объекта, заданного дифференциальным уравнением  $M \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = u$ , где  $k = 40$ ;  $M = 0,2$ ;  $b = 5$ .

Запишем дифференциальное уравнение в форме производных



и подставим имеющиеся значения:  $0,2y'' + 5y' + 40y = u$ .  
Представим дифференциальное уравнение в виде раздельных переменных:

$$y = x_1; \quad \dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = (u - 40x_1 - 5x_2) \frac{1}{0,2}.$$

Получим систему уравнений по форме Коши

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = x_1 + x_2 \cdot 0; \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \cdot 0; \\ \dot{x}_2 = 5u - 200x_1 - 25x_2. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -25 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Матрица, составленная из передаточных функций и задающая операторную связь между формируемыми переменными и влияющими на них входными воздействиями, называется *матричной передаточной функцией* или *передаточной матрицей*.

**Пример 1.9.** Система задана матрицей  $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ .

Определить корни характеристического уравнения и переходную матрицу  $\hat{O}(s)$ .

Для начала надо знать формулу нахождения передаточной матрицы:  $\hat{O}(s) = (p \cdot E - A)^{-1}$ .

Чтобы определить корни характеристического уравнения надо найти само уравнение по формуле  $H(p) = (p \cdot E - A)$ , где  $E$  – единичная матрица. Отсюда следует

$$\begin{aligned} H(p) = (p \cdot E - A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p-0 & 0-(-6) \\ 0-(-1) & p-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 6 \\ 1 & p+5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из полученной матрицы составим систему уравнений по форме Коши  $\begin{cases} y_1 = px_1 - 6x_2 \\ y_2 = x_1 + (p+5)x_2 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим

$$x_1 = \frac{y_1}{p} + \frac{6}{p} \cdot x_2, \text{ тогда } y_2 = \frac{y_1}{p} + \frac{6}{p} x_2 + (p+5)x_2 = \frac{y_1}{p} + \left(\frac{6}{p} + p+5\right)x_2.$$

Отсюда



$$x_2 = \frac{y_2}{p^2 + 5p + 6} - \frac{\frac{y_1}{p}}{\frac{(p^2 + 5p + 6)}{p}} = \frac{p}{p^2 + 5p + 6} y_2 - \frac{1}{p^2 + 5p + 6} y_1;$$

$$x_1 = \frac{y_1}{p} + \frac{6}{p} \left( \frac{p}{p^2 + 5p + 6} y_2 - \frac{1}{p^2 + 5p + 6} y_1 \right) =$$

$$= \frac{y_1}{p} + \frac{6}{p^2 + 5p + 6} y_2 - \frac{6}{p(p^2 + 5p + 6)} y_1 = \frac{p+5}{p^2 + 5p + 6} y_1 + \frac{6}{p^2 + 5p + 6} y_2.$$

Следовательно,

$$\Phi(s) = (p \cdot E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+5}{p^2 + 5p + 6} & \frac{6}{p^2 + 5p + 6} \\ -\frac{1}{p^2 + 5p + 6} & \frac{p}{p^2 + 5p + 6} \end{bmatrix}.$$

Далее необходимо получить корни, решив квадратное уравнение  $p^2 + 5p + 6 = 0$ , где  $p_1 = -3$ ;  $p_2 = -2$ . Откуда конечное решение будет иметь вид

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{p+5}{(p+3)(p+2)} & \frac{6}{(p+3)(p+2)} \\ -\frac{1}{(p+3)(p+2)} & \frac{p}{(p+3)(p+2)} \end{bmatrix}.$$

#### 1.4. Анализ свойств, объектов и систем управления

Пренебрежение фактором управления или наблюдения объекта может привести к ошибочным результатам, в связи с этим рассматриваются два важных понятия: наблюдаемость и управляемость.

В результате возникают два важных вопроса:

1. Можно ли, выбрав соответствующим образом входы  $U(t)$ , перевести объект управления из некоторого произвольного состояния  $X(t_0)$  в другое произвольное состояние  $X(t_1)$  ?

2. Можно ли, наблюдая вектор выходов  $Y(t)$  в течение достаточно длительного промежутка времени, определить начальное состояние объекта?

**Понятие управляемости.** Объект называется полностью управляемым, если для любых компонентов времени  $t_0, t_1$ ,



( $t > t_0$ ) любых заданных состояний  $x(t_0)$ ,  $x(t_1)$  существует управление  $U(t)$ , где  $t_0 < t < t_1$ , переводящее начальное состояние  $x(t_0)$  в конечное  $x(t_1)$ .

Для оценки управляемости используем теорему Калмана: *Для полной управляемости объекта необходимо и достаточно, чтобы матрица управляемости  $M_Y = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{N-1}B]$ , чтобы она имела ранг размерности объекта  $n$ , если ранг меньше  $n$ , но больше 0, значит объект частично управляемый, если ранг равен 0, то неуправляемый.*

**Понятие наблюдаемости.** Объект называется полностью наблюдаемым, если по данным измерения, наблюдения  $Y(t)$ ,  $U(t)$ , на конечном интервале времени  $t_0 < t < t_1$ , можно определить начальное состояние. Другими словами объект называется полностью наблюдаемым, если все его состояния являются наблюдаемыми в любой момент времени.

Для полной наблюдаемости необходимо и достаточно, чтобы

$M_n = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$ , если ранг больше 0, меньше 0 –  $n$  – частично наблюдаемый.

**Понятие полноты.** Если объект полностью управляемый и наблюдаемый, то он является полным. Для определения полноты по вход-выходной форме записи, необходимо определить корни числителя и знаменателя передаточной функции, если в числителе и в знаменателе есть одинаковые корни, то такой объект является неполным.

**Пример 1.10.** Даны матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Оценить управляемость системы.

Для проверки управляемости необходимо вычислить произведение матриц  $A$  и  $B$ , а также квадрат системной матрицы  $A$ , умноженную на  $B$ :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее составляется матрица управляемости:



$$M_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как можно заметить, в матрице управляемости третий столбец равен сумме первого и удвоенного второго, пятый сумме – сумме третьего и удвоенного четвертого, а также первого и умноженного на четыре второго. Второй же, четвертый и последний вообще совпадают. Это указывает на линейную зависимость столбцов и на то, что матрица управляемости имеет неполный ранг. Следовательно, система не полностью управляема. С другой стороны, после вычеркивания, например, последней строки, несколько пар оставшихся столбцов оказываются линейно зависимыми. Следовательно, исследуемый объект имеет ранг, равный двум.

Анализ же по каналам воздействия  $U_1$  и  $U_2$  приводит к квадратным матрицам управляемости, получаемым из 1-, 3-, 5-го и 2-, 4-, 6-го столбцов матрицы управляемости соответственно:

$$M_{U_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{U_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Ранг первой матрицы равен}$$

двум и определяет степень общей управляемости объекта, так как ранг второй матрицы равен лишь единице. Это указывает на то, что второй канал менее эффективен, как управляющий, поскольку воздействует только на одну переменную состояния.

**Пример 1.11.** Даны матрицы  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Оценить наблюдаемость системы. Чтобы проверить наблюдаемость, нужно найти  $A^T$ ,  $C^T$ ,  $(A^T)^2$ .

Здесь матрицы являются транспонированными, т.е. делаем замену строк на столбцы, получаем:

$$A^T C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix};$$



$$(A^T)^2 C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Матрица наблюдаемости будет иметь вид

$$M_H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, ранг матрицы  $M_H$  равен 3, исследуемая система вполне наблюдаема.

**Пример 1.12.** Оценить управляемость и наблюдаемость системы, заданной следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 1 \quad 0].$$

Управляемость определяется по формуле

$$Q_y = [B \quad AB \quad A^2B \dots \quad A^{n-1}B]. \quad \text{Итак, } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad - \quad \text{известно из}$$

условия задачи,

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \\ -12 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -11 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тогда } M_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -11 \\ 2 & -11 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow |M_o| = -159.$$

Система управляема.

Наблюдаемость определяется по формуле

$$M_f = [\tilde{N}^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T].$$

Здесь матрицы являются транспонированными, т.е. делаем замену строк на столбцы, получаем:



$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{тогда } A^T \cdot C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (A^T)^2 \cdot C^T = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Отсюда } M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |M_H| = -6.$$

Система частично наблюдаема.

**Пример 1.13.** Оценить управляемость системы, если она задана передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + 5p + 3}{p^5 + 4p^4 + 10p^3 + 13p^2 + 11p + 3}.$$

Оценить управляемость системы можно также косвенным методом посредством передаточной функции

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad \text{при этом необходимо найти}$$

определитель результата. Результат – это матрица, имеющая размерность  $[(n+m)]$ , где  $n$  – порядок знаменателя;  $m$  – порядок числителя.

Матрица результата имеет вид:

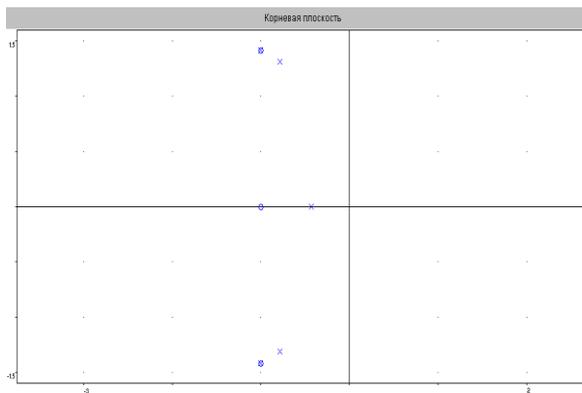
$$R = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_m & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix}.$$

Система управляема, если она не имеет общих нулей и полюсов. Тогда, исходя из передаточной функции, получим следующую матрицу:



## Современная теория автоматического управления

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 13 & 11 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 13 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & 13 & 11 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}, |R| = 0.$$



Нули:

z1 = -1.000000

z2 = -1.000000 + 1.414214j

z3 = -1.000000 - 1.414214j

Полюсы:

p1 = -0.430160

p2 = -0.784920 + 1.307141j

p3 = -0.784920 - 1.307141j

p4 = -1.000000 + 1.414214j

p5 = -1.000000 - 1.414214j

Система устойчива, так как все вещественные корни отрицательны (корневой критерий). Система неуправляема, так как есть общие нули и полюсы (z2 и p4, z3 и p5).

### 1.5. Модальное управление объектами

Рассмотрение объектов и систем в пространстве состояний имеет то преимущество, что при замыкании такой системы обратной связью имеется возможность выбора эффективных (наилучших) значений коэффициентов операторов обратной связи по каждой переменной состояния. Такой подход дает больше возможностей для формирования устойчивой системы и придания ей заданного качества, так как  $n$ -мерный статический регулятор обратной связи имеет  $n$  степеней свободы, тогда как П-регулятор при вход-выходном описании имеет только одну степень свободы.



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ Y = Cx \end{cases}$$

Замыкая такой объект обратными связями по переменным состояниям, можно получить вектор управляющих воздействий.

$$U = KX, \quad K = [K_1, K_2 \dots K_n];$$

$$U = K_1 X_1 + K_2 X_2 + \dots + K_n X_n;$$

$$\dot{X} = AX + B_k X;$$

$$\dot{X} = (A + B_k) X;$$

$$\dot{X} = A_c X + ZB_c;$$

$$A_c = A + B_k;$$

$$B_k = A_c - A;$$

$$N(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0;$$

$$N^c(p) = p^n + a_{n-1}^c p^{n-1} + \dots + a_1^c p + a_0^c;$$

$p_1, p_2 \dots p_n$  – корни объекта;

$p_1^c, p_2^c \dots p_n^c$  – корни системы (должны быть лучше, чем

корни объекта).

Для построения вектора обратной связи необходимо матрично-векторную модель объекта преобразовать к основной нормальной управляемой форме записи.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}; \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0^c & -a_1^c & -a_2^c & \dots & -a_{n-1}^c \end{bmatrix};$$

$$k_i = a_{i-1} - a_{i-1}^c.$$

Управление, при котором корни (моды) характеристического полинома системы принимают заранее



заданные значения, называется модальным.

**Пример 1.14.** Построить систему модального управления для объекта вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad N(p) = p^3 + 5p^2 - 2p.$$

Выберем корни будущей системы, исходя из условия устойчивости системы:

$$p_1^c = -5;$$

$$p_{2,3}^c = -10 \pm 5j;$$

$$N^c(p) = p^3 + 25p^2 + 225p + 625;$$

$$k_i = a_{i-1} - a_{i-1}^c;$$

$$k_1 = 0 - 625 = -625;$$

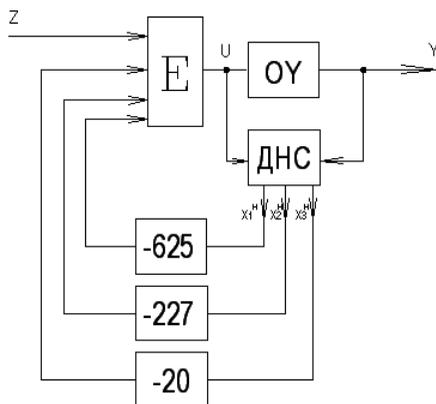
$$k_2 = -2 - 225 = -227;$$

$$k_3 = 5 - 25 = -20;$$

$$k = [-625 \quad -227 \quad -20];$$

$$U = kx = -625x_1 - 227x_2 - 20x_3.$$

Конечное решение задачи представим следующей схемой:



*Замечание 1.* Модальное управление не позволяет повышать точность работы системы, так как устройство управления является статическим, поэтому для обеспечения высокой точности работы системы необходимо изначально



повысить порядок астатизма объекта за счет включения интегрирующих звеньев.

*Замечание 2.* Ограниченность модального управления состоит в том, что обратная связь по переменным состояния изменяет моды только характеристического полинома. Если вход-выходная модель объекта имеет полином в правой части, то он переходит во вход-выходное описание системы без изменений. Но так как числитель не влияет на устойчивость системы, то его необходимо учитывать только в случае обеспечения высокого качества функционирования систем.

**Пример 1.15.** Необходимо получить преобразование, разделяющее по управлению, и реализовать модальное управление объекта

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В качестве разделяющих преобразований можно использовать матрицу Вандермонда, которая приводит объект к диагональной форме записи

$$W = P_{RU} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 16 & 9 & 4 & 1 \\ -64 & -27 & -8 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_{RU} = P_{RU} A P_{RU}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B_{RU} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7.5 & 3.5 \\ -10 & -4 \\ 4.5 & 1.5 \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 0 & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix};$$



## Современная теория автоматического управления

$$B_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (b_{11}k_{13} + b_{12}k_{23}) & (b_{11}k_{14} + b_{12}k_{24}) \\ 0 & 0 & (b_{21}k_{13} + b_{22}k_{23}) & (b_{21}k_{14} + b_{22}k_{24}) \\ 0 & 0 & (b_{31}k_{13} + b_{32}k_{23}) & (b_{31}k_{14} + b_{32}k_{24}) \\ 0 & 0 & (b_{41}k_{13} + b_{42}k_{23}) & (b_{41}k_{14} + b_{42}k_{24}) \end{bmatrix} \quad (!)$$

$$A_C^{RU} = \begin{bmatrix} -4 & * & * & 0 \\ 0 & -3 & * & * \\ 0 & 0 & -6 & * \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$B_K = A_{RU}^C - A_{RU};$$

$$b_{31}k_{13} + b_{32}k_{23} = -6 + 2 = -4;$$

$$b_{41}k_{14} + b_{42}k_{24} = -5 + 1 = -4;$$

$$b_{41}k_{13} + b_{42}k_{23} = 0;$$

$$b_{11}k_{14} + b_{12}k_{24} = 0;$$

$$\begin{cases} -10k_{13} - 4k_{23} = -4; \\ 4.5k_{14} + 1.5k_{24} = -4; \\ 4.5k_{13} + 1.5k_{23} = 0; \\ -2k_{14} - k_{24} = 0; \end{cases}$$

$$k_{13} = -2; \quad k_{14} = -2.667;$$

$$k_{23} = 6; \quad k_{24} = 5.333;$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2.667 \\ 0 & 0 & 6 & 5.337 \end{bmatrix};$$

$$U = kx;$$

$$U_1 = -2x_3 - 2.667x_4;$$

$$U_2 = 6x_3 + 5.337x_4;$$

$$A_{RU}^C = B_K + A_{RU};$$

$$A_{RU}^C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -1.33 \\ 0 & 0 & -6 & 5.334 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$



## 1.6. Наблюдатели состояния систем Калмана и Луенбергера

В теории управления применяется два типа наблюдателей состояний:

- 1) наблюдатель состояния Калмана (так называемый полный наблюдатель);
- 2) наблюдатель состояния Луенбергера (так называемый редуцированный наблюдатель).

Наиболее распространенным в инженерной практике является динамический наблюдатель состояния (ДНС) Калмана.

Условия асимптотической оценки наблюдателя состояния:

$$\begin{cases} 1) B_H = B; \\ 2) A_H = a - F_H C, \end{cases} \quad (1.19)$$

где  $F_H$  – вектор обратных связей наблюдателя, формирующий его динамические свойства.

Модель наблюдателя Калмана (рис. 1.7)

$$\dot{x}^H = Ax^H + BU + F_H(Y - Y^H)$$

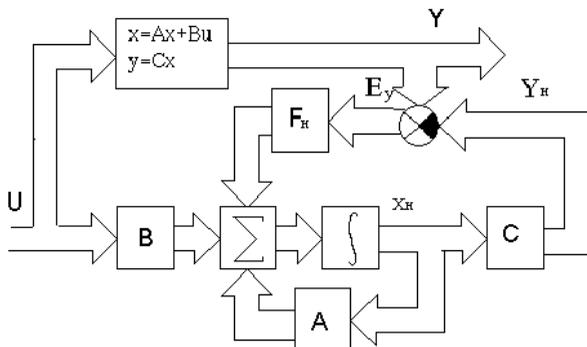


Рис. 1.7. Модель наблюдателя Калмана

Для обеспечения асимптотического затухания ошибки наблюдения необходимо, чтобы  $A_H$  имела устойчивый спектр корней и чтобы характер затухания удовлетворял условиям асимптотической ошибки. Для этого необходимо выполнить условие

$$\min |\operatorname{Re}(p_i^H)| > \max |\operatorname{Re}(p_i)|. \quad (1.20)$$

Из второго условия можно определить вектор обратных



связей наблюдателя

$$F_H C = A - A_H :$$

$$1) A_{OH} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; C_{OH} = [1 \ 0 \ 0];$$

$$A_{OH}^H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0^H & -a_1^H & -a_2^H \end{bmatrix}; C_{OH}^H = [1 \ 0 \ 0];$$

$$F_H = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0 \ 0];$$

$$F_H C = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 \\ f_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{OH} - A_{OH}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (a_0^H - a_0) & (a_1^H - a_1) & (a_2^H - a_2) \end{bmatrix}.$$

Вывод. Основная нормальная форма записи является непригодной для формирования вектора обратных связей ДНС, так как невозможно определить все его коэффициенты ( $F_H$ );

$$2) A_{TOH} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}; C_{TOH} = [0 \ 0 \ 1];$$

$$A_{TOH}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0^H \\ 1 & 0 & -a_1^H \\ 0 & 1 & -a_2^H \end{bmatrix}; C_{TOH}^H = [0 \ 0 \ 1];$$

$$F_H C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} = A_{TOH} - A_{TOH}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_0^H - a_0 \\ 0 & 0 & a_1^H - a_1 \\ 0 & 0 & a_2^H - a_2 \end{bmatrix}$$

$$f_i = a_{i-1}^H - a_{i-1} \quad (i = 1, n),$$

где  $a_i^H$  – коэффициент характеристического полинома наблюдателя.

**Пример 1.16.** Синтезировать наблюдатель Калмана для объекта, заданного матрицами:



## Современная теория автоматического управления

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,03 & -0,43 & -1,4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0 \ 0];$$

$$p_1 = -0.1; p_2 = -0.3; p_3 = -1;$$

$$P_{ТОН}^1 = \begin{bmatrix} 0.43 & 1.4 & 1 \\ 1.4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{ТОН} = P_{ТОН}^1 A (P_{ТОН}^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.03 \\ 1 & 0 & -0.43 \\ 0 & 1 & -1.4 \end{bmatrix};$$

$$B_{ТОН} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{ТОН} = [0 \ 0 \ 1].$$

Выберем корни наблюдателя  $p_{1,2,3} = -2$ ;

$$N_H(p) = (p+2)^3 = p^3 + 6p^2 + 12p + 8;$$

$$A_{ТОН}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix};$$

$$a_0 = 0.03; \quad a_0^H = 8;$$

$$a_1 = 0.43; \quad a_1^H = 12;$$

$$a_2 = 1.4; \quad a_2^H = 6;$$

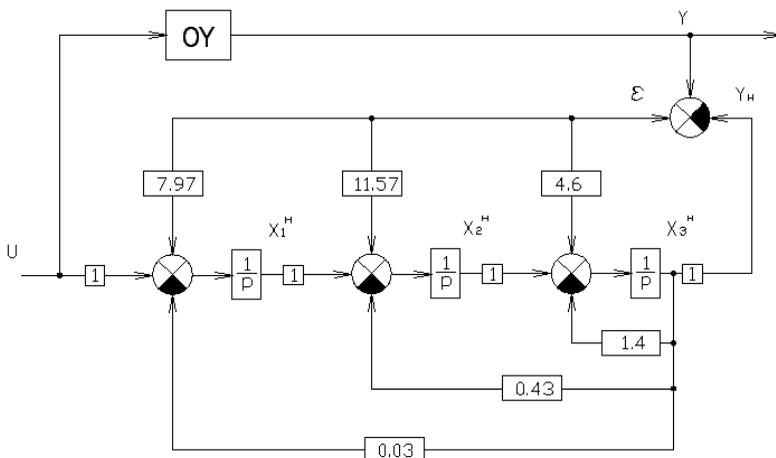
$$f_1 = 8 - 0.03 = 7.97;$$

$$f_2 = 12 - 0.43 = 11.57;$$

$$f_3 = 6 - 1.4 = 4.6;$$

$$F_H = \begin{bmatrix} 7.97 \\ 11.57 \\ 4.6 \end{bmatrix}; \dot{x}_H = Ax_H + BU - F_H(Y - Y^H); B_{ТОН} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

и составим схему:



Преимуществом использования ДНС при построении САУ по сравнению с классическими вход-выходными методами является появление возможности для формирования закона управления не только непосредственно изменяемых  $Y$  и входных воздействий  $U$ , но и всех наблюдаемых переменных состояния, оценивающих реальные переменные с точностью определенной выбранными параметрами асимптотической оценки.

Достоинство асимптотического ДНС Калмана состоит в его универсальности и высокой эффективности наблюдаемых переменных состояния, т.е. независимо от причин отклонения действительных значений этих переменных, наблюдаемые переменные сводятся к ним со скоростью, определяемой выбранными значениями собственных чисел наблюдателя.

Недостатком является его большая сложность при высокой размерности объекта, так как он является полным. Во многих реальных случаях выходная переменная  $Y$  совпадает с одной из переменных состояния, тогда оценка соответствующей переменной оказывается лишней, кроме того практически всегда базис объекта можно преобразовать так, чтобы указанное условие соблюдалось, более того в многомерных объектах базис можно построить таким образом, чтобы выходные переменные совпадали с таким же количеством переменных состояния, тогда появляется возможность создать редуцированный или усеченный наблюдатель с общей экономией, соответствующий общему количеству выходных переменных  $Y$ .

**Редуцированный наблюдатель состояния.** Для синтеза



## Современная теория автоматического управления

ДНС необходимо объект преобразовать к транспонированной основной форме записи наблюдаемой.

Необходимо применить преобразование

$$p_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -j_0 \\ 0 & E & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_{L^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & j_0 \\ 0 & E & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

где  $j_i$  - коэффициент характеристического полинома наблюдателя состояний.

Свойства ДНС выбираются аналогично ДНС Калмана, но размерность наблюдателя на единицу меньше размерности объекта:

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_0 & \delta_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\gamma_2 & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\gamma_{n-2} & \delta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \delta_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = P_L B = \begin{bmatrix} b_1 - \gamma_0 b_n \\ b_2 - \gamma_1 b_n \\ \dots \\ \dots \\ b_{n-1} - \gamma_{n-2} b_n \\ b_n \end{bmatrix};$$

$$A_L = \begin{bmatrix} \bar{A} & \dots & a \uparrow \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{a} & \dots & a_n \end{bmatrix}; \quad B_L = \begin{bmatrix} b \uparrow \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix},$$

где  $\delta$  - некоторые коэффициенты, которые фигурируют в коэффициентах характеристического полинома и наблюдателя.

После преобразования матрица  $\bar{A}$  имеет транспонированную основную форму, коэффициент  $\gamma$  определяет ее свойства. Задавая их с учетом точности наблюдения можно сформировать ДНС:

$$\begin{cases} \dot{x}_L = A_L x_L + B_L U; \\ Y = C_L x_L; \end{cases}$$

$$C_L = [0 \ 0 \ \dots \ 1];$$

$$\begin{cases} \dot{x}_L \uparrow = \bar{A} x_L \uparrow + a \uparrow x_{Ln} + b \uparrow U; \\ \dot{x}_{Ln} = \underline{a} x_{Ln} + a_n x_{Ln} + b_n U; \end{cases}$$

$\dot{x}_L \uparrow = \bar{A} x_L \uparrow + a \uparrow Y + b \uparrow U$  - уравнение редуцированного наблюдателя Луенбергера.



Современная теория автоматического управления

Матрица  $\bar{A}$  определяет точность работы наблюдателя, т.е. скорость схождения ошибки к нулю определяется собственными числами матрицы  $\bar{A}$  (коэффициент  $\gamma$ , который выбирается по аналогии с ДНС Калмана).

**Пример 1.17.** Синтезировать наблюдатель Луенбергера, математическая модель объекта имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1];$$

$$p_1 = -1; \quad p_2 = -2; \quad p_3 = -3;$$

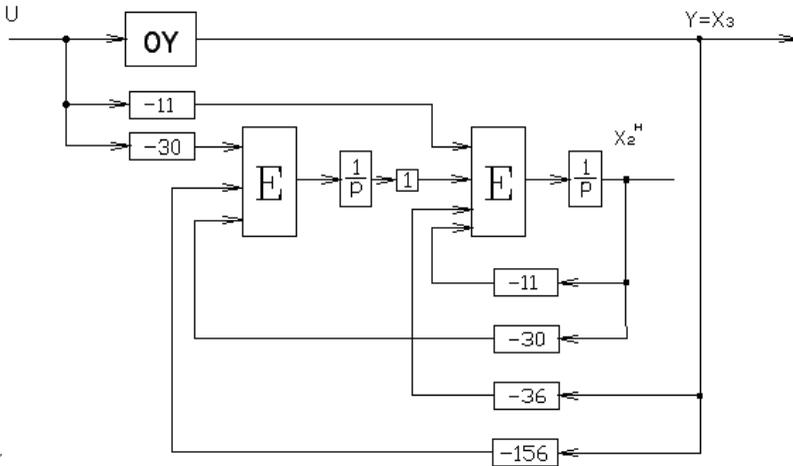
$$N_i(p) = (p + 5)(p + 6) = p^2 + 11p + 30;$$

$$P_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_L = P_L A P_L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -30 & -156 \\ 1 & -11 & -36 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -30 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}; \quad a \uparrow = \begin{bmatrix} -156 \\ -36 \end{bmatrix}; \quad \underline{a} = [0 \quad 1]; \quad a_n = 5; \quad B_L = \begin{bmatrix} -30 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $b \uparrow = \begin{bmatrix} -30 \\ -11 \end{bmatrix}; \quad b_n = 1.$

Конечное решение задачи представим следующей схемой:





## Современная теория автоматического управления

Недостатком наблюдателя Луенбергера по сравнению с наблюдателем Калмана является то, что в нем отсутствует сравнение действительного и наблюдаемого значения переменной состояния и подстройка переменных состояния к истинным значениям с помощью обратной связи. В результате, выигрывая в простоте реализации наблюдателя, проигрывают в точности оценки состояния. При спонтанных отклонениях начальных значений переменная ошибка наблюдения подавляется с интенсивностью, заданной коэффициентами  $\gamma$ , но при наличии постоянно действующего неконтролируемого воздействия наблюдаемость осуществляется также с постоянной, не равной нулю ошибкой. В этом отношении наблюдатель Калмана более эффективен, чем наблюдатель Луенбергера.



## 2. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 2.1. Метод Ляпунова

Основополагающий подход к оценке устойчивости связан с рассмотрением невозмущенных движений, для ее оценки нужно доказать, что возмущенное движение в окрестности ограничено по возрастанию переменных в пространстве состояний.

Невозмущенное движение называется устойчивым по Ляпунову, если для любого положительного числа  $\varepsilon$  (как бы мало оно ни было) можно найти некоторое число  $\delta$ , такое, что из неравенства  $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow$  для каждого  $t \geq 0 \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$ , где  $t_0$  - фиксированный начальный момент времени.

Устойчивость по Ляпунову называют устойчивостью в малом или локальной устойчивостью.

Движение и соответственно его равновесное положение, устойчивое по Ляпунову и отвечающее дополнительному относительно предыдущего определению свойству, называется асимптотически устойчивым.

Ляпунов предложил исследовать устойчивость движения с помощью специальных знакоопределенных функций, которые называются функцией Ляпунова.

Функция Ляпунова  $V(x, t)$  – это непрерывная вещественная функция, определенная в  $n$ -мерном пространстве  $R^n$ , имеющая определенный знак, непрерывные частные производные в области  $\|x\| < R$  и равная нулю только в начале координат. Другими словами,  $x \in S(R)$ , где  $R$  – шаг радиуса.

Для оценки устойчивости функции Ляпунова необходимо знать понятия знакоопределенности функции.

Функцию  $V(x, t)$  назовем определенно положительной в области (\*), если всюду в этой области, кроме начала координат, имеет смысл неравенство  $V(x, t) > 0$ . Если же выполняется неравенство  $V(x, t) < 0$ , то функция  $V(x, t)$  называется определенно отрицательной (общее название – функция знакоопределенная).

Если в области (\*) имеет место всюду неравенство  $V(x, t) \geq 0$



или  $V(x, t) \leq 0$ , то функция называется знакопостоянной.

Например, функция  $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  является определено положительной, функция  $V = x_1^2 + x_2^2$  будет знакопостоянной в пространстве  $R^2$ . Функция  $V = -x_1^2 - x_2^2$  является определено отрицательной в пространстве  $R^2$ .

**Теорема 1 (об устойчивости).** Если для системы  $\dot{x} = F(x, t)$  (\*\*\*) существует в области  $R$  знакоопределенная функция  $V(x, t)$ , производная которой по времени, взятая в силу системы (\*\*), является знакопостоянной функцией знака, противоположного знаку функции  $V(x, t)$ , то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

**Теорема 2 (об асимптотической устойчивости).** Если для системы (\*\*\*) существует знакоопределенная функция  $V(x, t)$ , полная производная которой по времени, найденная в силу системы (\*\*), будет также знакоопределенной, знака противоположного с  $V(x, t)$ , то положение равновесия будет асимптотически устойчивым.

Исследования устойчивости с помощью функции Ляпунова получило название второго (прямого) метода Ляпунова.

В соответствии с представленными теоремами для оценки устойчивости можно построить знакоопределенную функцию и, убедившись в отрицательной определенности ее производной, доказать устойчивость.

**Пример 2.1.** С помощью математического пакета MatLab исследовать на устойчивость систему, заданную матрицами.

В MatLab это функция – `lyap(A,L)`

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$Q = \text{lyap} = \begin{bmatrix} 2.7167 & 2.3 & 0.0833 \\ 2.3 & 5.0167 & 0.3 \\ 0.0833 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix};$$

$$V(x, t) = 2.7167x_1^2 + 5.0167x_2^2 + 0.3x_3^2 + 4.6x_1x_2 + 0.1666x_1x_3 + 0.6x_2x_3;$$



$$\dot{V}(x, t) = -1x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 0.008x_1x_2 + 0.0004x_1x_3,$$

так как функция Ляпунова является определенно положительной, а ее производная определенно отрицательной, то согласно теореме Ляпунова система является асимптотически устойчивой.

**Пример 2.2.** Применение прямого метода Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{12}x_2; \\ \dot{x}_2 = -\alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2. \end{cases}$$

Так как система имеет 2-й порядок и является линейной, то можно использовать квадратичную форму записи функции Ляпунова:

$$V(x) = q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + 2q_{12}x_1x_2;$$

$$\dot{V}(x) = 2q_{11}x_1\dot{x}_1 + 2q_{22}x_2\dot{x}_2 + 2q_{12}x_1\dot{x}_2 + 2q_{12}\dot{x}_1x_2;$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2q_{11}x_1\alpha_{12}x_2 + 2q_{22}x_2(-\alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2) + 2q_{12}x_1(-\alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2) + \\ &+ 2q_{12}\alpha_{12}x_2x_2 = 2[(\alpha_{12}q_{11} - \alpha_{22}q_{22})x_1x_2 - q_{22}\alpha_{22}x_2^2 + q_{12}\alpha_{12}x_1^2 - q_{12}\alpha_{21}x_1^2]. \end{aligned}$$

Для обеспечения положения определенности функции Ляпунова необходимо взять  $q_{12} = 0$

$$\dot{V}(x) = 2[(\alpha_{12}q_{11} - \alpha_{21}q_{22})x_1x_2 - q_{22}\alpha_{22}x_2^2].$$

Для обеспечения отрицательной определенности производной функции Ляпунова необходимо выполнить условие, т.е. приравнять коэффициенты, которые мы имеем

$$\dot{V}(x) = -2q_{22}\alpha_{22}x_2^2$$

(дополнительным условием нужно, чтобы  $\alpha_{22}$  было положительно):

$$q_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad q_{22} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} > 0;$$

$$\dot{V}(x) = -2\frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{\alpha_{21}}x_2^2, \quad \frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{\alpha_{21}} > 0 \quad (*.3) \quad - \quad \text{условие}$$

обеспечения устойчивости для системы 2-го порядка.

**Пример 2.3.** Использовать в качестве функции Ляпунова

$V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ . Исследовать на асимптотическую устойчивость систему, заданную уравнениями:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \cdot x_2^4; \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_2. \end{cases}$$

Из функции Ляпунова найдем производную по формуле  $ax_1^n + bx_2^m = nax_1^{n-1} \cdot \dot{x}_1 + mbx_2^{m-1} \cdot \dot{x}_2$ . Получим  $\dot{V} = x_1^4 + x_2^4 = 4x_1^3 \cdot \dot{x}_1 + 4x_2^3 \cdot \dot{x}_2$ . Подставим из системы уравнений вместо производных значения:  $4x_1^3 \cdot (-2x_1 \cdot x_2^4) + 4x_2^3 (x_1^4 \cdot x_2) = \dots = 4x_1^4 \cdot x_2$ . Для асимптотически устойчивой системы должно быть выполнено условие  $\frac{dV}{dt} \geq 0, V(x_1, x_2) > 0$ , тогда, исходя из конечного результата, следует, что система асимптотически устойчива.

**Пример 2.4.** Использовать в качестве функции Ляпунова  $V = ax_1^n + bx_2^m$ , где  $n$  и  $m$  – четные числа, а функция  $V$  – знакоопределенная. Исследовать на асимптотическую устойчивость систему, заданную уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \cdot x_2^4; \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_2. \end{cases}$$

Найдем производную:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= nax_1^{n-1} \cdot \dot{x}_1 + mbx_2^{m-1} \cdot \dot{x}_2 = -3na \cdot x_1^{n-1} \cdot x_2 - an \cdot x_1^{n+2} - \\ &- 2mb \cdot x_2^m + bm \cdot x_1^3 \cdot x_2^{m-1} = -3an \cdot x_1^{n-1} \cdot x_2 + bm \cdot x_1^3 \cdot x_2^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Здесь необходимо избавиться от слагаемых, т.е.

$$bm \cdot x_2^{m-2} = 3na \cdot x_1^{n-4}, \quad \text{отсюда} \quad a = \frac{b \cdot m \cdot x_2^{m-2}}{3n \cdot x_1^{n-4}}. \quad \text{Примем}$$

$n = 4, m = 2$ . Отсюда получим  $a = \frac{b}{6}$ , тогда  $V = x_1^4 + 6x_2^2$ , откуда

$$\frac{dV}{dt} = 4x_1^3 \cdot \dot{x}_1 + 12x_2 \cdot \dot{x}_2. \quad \text{Известно, что функция по Ляпунову}$$

больше нуля, а ее производная – меньше, поэтому любая точка стремится к началу координат (аналогия скорости и ускорения – замедленное движение), следовательно, система устойчивая.



## 2.2. Критерий устойчивости Попова

Абсолютной устойчивостью называется устойчивость системы при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к одному из определенных классов. Нелинейности считаются одного класса, если их характеристики  $f(x_H)$  находятся в секторе  $[0, k_H]$  между осью абсцисс и прямой с угловым коэффициентом  $k_H$  (рис. 2.1, а). Критерий Попова относится к частотным методам определения абсолютной устойчивости нелинейных систем.

Задача об исследовании абсолютной устойчивости возникает в связи с тем, что в некоторых случаях нелинейная характеристика звена является нестабильной и может быть охарактеризована только определенной областью.

Пусть известна частотная функция линейной части системы  $W_L(j\omega)$  и задано значение параметра  $k$ , который является некоторым предельным параметром нелинейной характеристики  $f(x_H)$ , произвольно располагающейся в заданной области.

Необходимо определить, обеспечивается ли абсолютная устойчивость конкретной системы для любой характеристики  $f(x_H)$ , удовлетворяющей условиям:

$$0 \leq \frac{f(x_H)}{x_H} \leq k \text{ при } x_H \neq 0, \quad (2.1)$$

$$f(0) = 0.$$



Современная теория автоматического управления

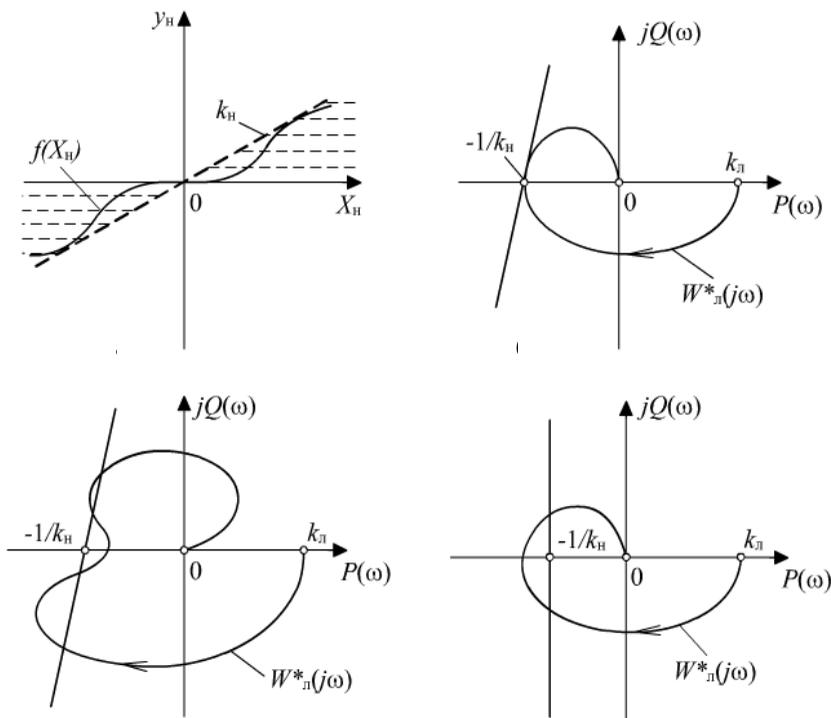


Рис. 2.1. Критерий абсолютной устойчивости Попова

В формулировке критерия используется понятие модифицированной амплитудно-фазовой характеристики (АФХ).

Пусть линейная часть системы устойчива и имеет АФХ:

$$W_{\text{л}}(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{2.2}$$

Образум из этой обычной АФХ следующую видоизмененную АФХ, у которой мнимая часть получена умножением  $Q(\omega)$  на  $\omega T_M$

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = P(\omega) + j\omega T_M Q(\omega) \tag{2.3}$$

где  $T_M = 1c$  – нормирующий множитель.

Характеристика выражения (3.3) и называется модифицированной.

Критерий абсолютной устойчивости равновесия нелинейной системы, удовлетворяющей вышеперечисленным



требованиям, формулируется следующим образом: для абсолютной устойчивости равновесия достаточно, чтобы модифицированная характеристика  $W_E^*(j\omega)$  не охватывала точку  $(-1/k_f, 0)$  и через эту точку можно было провести прямую, не пересекающую характеристику  $W_E^*(j\omega)$  (последняя лежит справа от прямой).

На рис. 2.1, б показан случай, когда критерий устойчивости выполняется, а на рис. 2.1, в, г – случаи, когда не выполняется.

По наклону прямой Попова, «прижатой» к кривой  $W_E^*(j\omega)$ , можно судить о допустимом классе нелинейности: если прямая вертикальна, то нелинейность может быть только однозначной, а если она наклонена, то нелинейность может быть и однозначной и неоднозначной (с гистерезисом).

**Пример 2.5.** Определить с помощью критерия Попова абсолютную устойчивость равновесия нелинейной системы, состоящей из трехпозиционного релейного элемента (рис. 2.2, а) с параметрами  $b=1$ ,  $c=8$  и линейной части

$W_E(j\omega) = k_E e^{-j\omega T} / (Tj\omega + 1)$  с параметрами  $k_E = 0.25$ ,  $T = 10$  с.

Представим АФХ

$$W_R(j\omega) = \frac{k_R(\cos \omega\tau - T\omega \sin \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{k_R(\sin \omega\tau + T\omega \cos \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1}$$

Соответствующая модифицированная характеристика (рис. 2.2, б)

$$W_R^*(j\omega) = \frac{k_R(\cos \omega\tau - T\omega \sin \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} - j\omega \frac{k_R(\sin \omega\tau + T\omega \cos \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1}$$

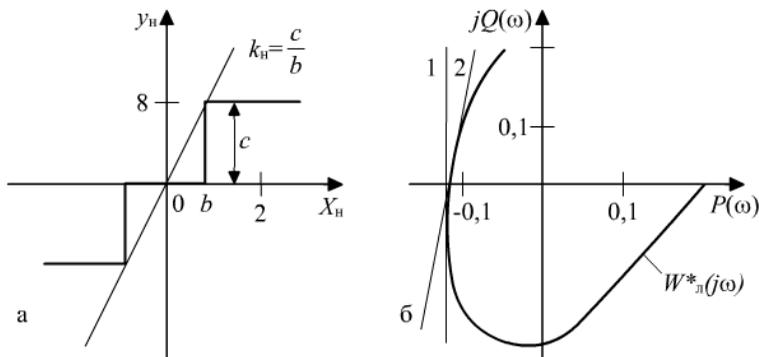


Рис. 2.2. Определение абсолютной устойчивости

Через точку с абсциссой, равной  $1/k_L = -0.125$ , проведена прямая 1, которая не пересекается с кривой  $W^*_Л(j\omega)$ . При заданных параметрах равновесие абсолютно устойчиво. Для определения допустимого по условию устойчивости равновесия значения зоны нечувствительности  $b$  проведем прямую 2, «прижатую» к характеристике  $W^*_Л(j\omega)$ . Она пересекает действительную ось в точке с абсциссой  $\approx 0.11$ . Тогда допустимое значение для углового коэффициента  $k_L \leq 1/0.11 \approx 9$ , а для зоны нечувствительности  $b \geq c/k_i \approx 0.9$ . При  $b < 0.9$  состояние равновесия системы будет неустойчивым.



### 3. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Интенсивное развитие современных средств вычислительной техники привело к появлению и внедрению в инженерную практику цифровых ЭВМ, в связи с чем возник новый класс систем управления.

Дискретно-непрерывная система управления содержит хотя бы один преобразователь аналогового сигнала в дискретную форму (рис. 4.1). Таким образом, промышленная цифровая система управления всегда содержит непрерывный (аналоговый) объект и дискретно работающее устройство управления. Согласование этих разнообразно работающих устройств осуществляется с помощью аналого-цифровых преобразователей и цифро-аналоговых преобразователей.

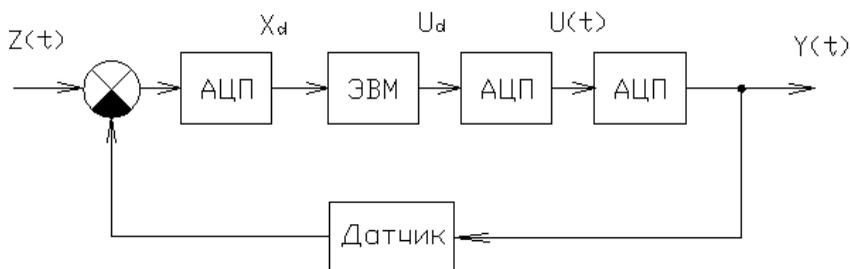


Рис. 3.1. Структура дискретно-непрерывной системы управления

**Пример 3.1.** Рассмотрим пример преобразования непрерывной передаточной функции, описывающей двигатель постоянного тока, в дискретное преобразование Фурье. Пусть электродвигатель описывается звеном 2-го порядка и имеет непрерывную передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{\omega(p)}{U_{\pi}(p)} = \frac{2}{0,02p^2 + p + 4}.$$

Запишем скрипт Matlab, полагая, что такт квантования  $T=0,01$  с:

```
>> num=[2];
>> den=[0.02 1 4];
>> sysc=tf(num,den); % Формирование непрерывной ПФ
>> sysd=c2d(sysc,0.01) % Формирование ДПФ
>> T=[0:0.01:1]; % Задание параметров вычислений
>> step(sysd,T) % Расчет переходного процесса
```



## Современная теория автоматического управления

Transfer function:

$$0.004254 z + 0.003602$$

$$z^2 - 1.591 z + 0.6065$$

На рис. 3.2 приведена схема набора модели в среде Simulink, а на рис. 3.3 изображен переходный процесс в дискретной САУ при подаче на якорную цепь электродвигателя ступеньки напряжения 1В.

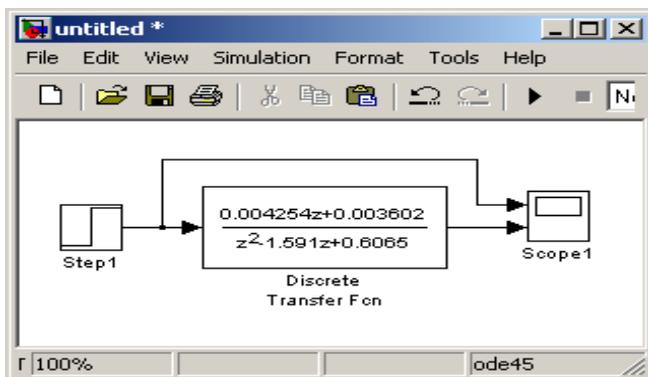


Рис. 3.2. Схема набора дискретной модели электродвигателя

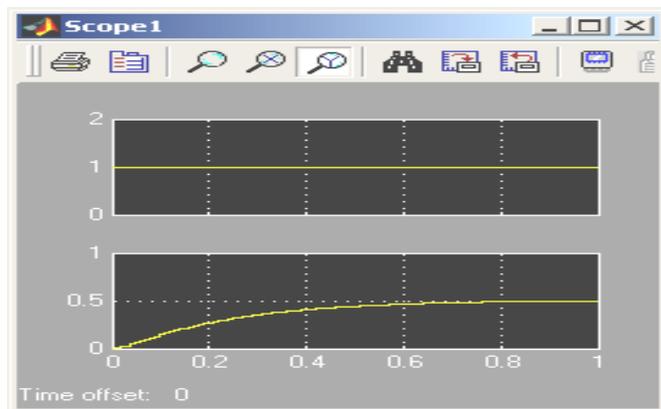


Рис. 3.3. Переходный процесс в электродвигателе

Как следует из графика, при заданном такте квантования  $T=0,01$  с переходный процесс практически идентичен переходному процессу в непрерывной САУ.

**Пример 3.2.** Пусть дискретное преобразование Фурье является моделью двигателя постоянного тока и представляется в



виде

$$D(z) = \frac{\omega(p)}{U_n(p)} = \frac{0,004254z + 0,003602}{z^2 - 1,591z + 0,6065} =$$

$$= \frac{0,004254z^{-1} + 0,003602z^{-2}}{1 - 1,591z^{-1} + 0,6065z^{-2}} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}.$$

Для составления схемы переменных состояния воспользуемся пакетом Simulink системы программирования Matlab. Схема непосредственного программирования приведена на рис. 3.4. Логика программирования легко воспринимается: выходная переменная  $y(z)$  формируется как сумма произведений коэффициентов полинома числителя и знаменателя на  $z$  в соответствующих степенях. В схеме применено 4 блока задержки (Unit Delay) на период  $T$  квантования. На рис. 3.5 приведена эквивалентная схема переменных состояния, содержащая всего 2 блока задержки.

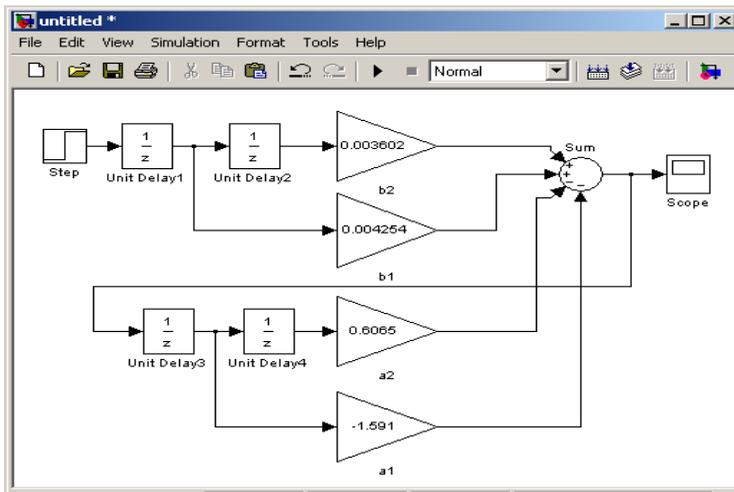


Рис. 3.4. Схема переменных состояния дискретной системы, полученная способом непосредственного программирования

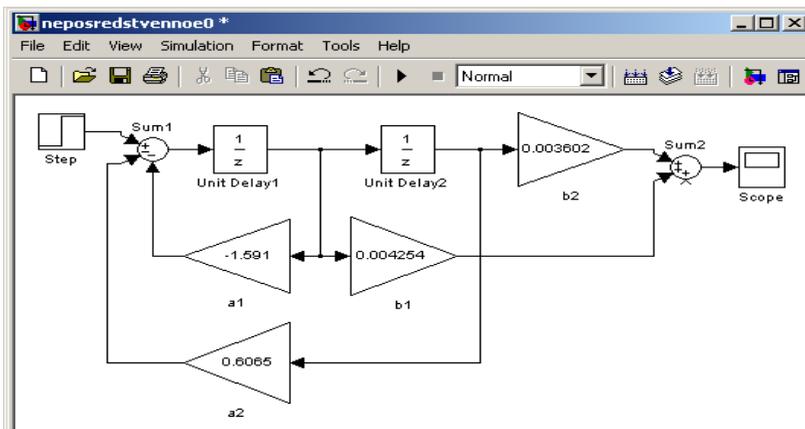


Рис. 3.5. Модифицированная схема переменных состояния

Заметим, что для моделирования идеальных дискретных систем (без непрерывной части) не обязательно применение фиксаторов, поскольку значения входного и выходного сигналов берутся точно в дискретные моменты времени (моменты квантования).

Переходный процесс в обоих дискретных моделях электродвигателя одинаков и приведен на рис. 3.6. Как видим, он полностью совпадает с переходным процессом, полученным моделированием дискретного объекта по его передаточной функции.

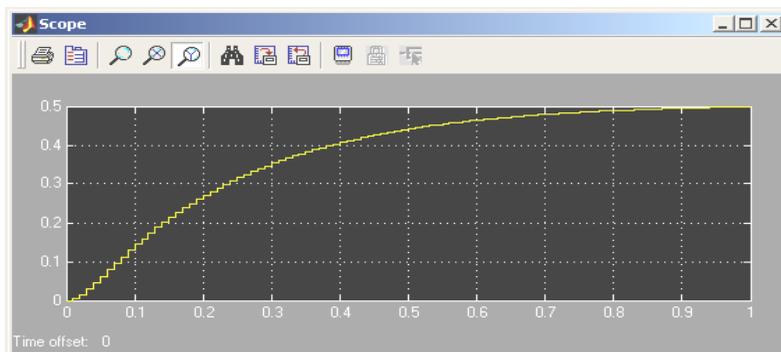


Рис. 3.6. Переходный процесс в дискретной модели электродвигателя, представленной схемой пространства состояний

**Пример 3.3.** Непрерывная динамическая система имеет системную матрицу вида:



## Современная теория автоматического управления

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_1 = -1;$$

$$\lambda_2 = -2.$$

Необходимо определить системную матрицу дискретно-непрерывной системы управления.

Для решения задачи необходимо определить переходную матрицу непрерывной системы и, осуществив дискретизацию, получить дискретную матрицу  $A_T$ .

Преобразуем системную матрицу к диагональной форме записи

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; P_{KZ} = W^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_{\hat{E}\hat{A}} = P_{\hat{E}\hat{A}} A_{\hat{E}\hat{A}} P_{\hat{E}\hat{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\hat{O}(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}; \hat{O}_{\hat{E}\hat{A}} = e^{A_{\hat{E}\hat{A}}(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что объект системной матрицы  $A$  снабжен техническими устройствами дискретизации по входу и выходу.

$$A_T = \hat{O}_{\hat{E}\hat{A}}[(k+1)T, kT] = \begin{bmatrix} e^{-[(k+1)T-kT]} & 0 \\ 0 & e^{-2[(k+1)T-kT]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix};$$

$$T_1 = 1, T_2 = 0.1;$$

$$A_{T_1} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix};; A_{T_2} = \begin{bmatrix} e^{-0.1} & 0 \\ 0 & e^{-0.2} \end{bmatrix}.$$

Объект, квантованный с периодом  $T_1$ , является устойчивым в дискретной области, так как диагональные элементы системной матрицы меньше 1, а объект с  $T_2$  является устойчивым в дискретной области, но на границе устойчивости, так как диагональные элементы стремятся к единице.



## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Описание одномерных и многомерных объектов и систем в пространстве состояний. Понятие переменных состояния и пространства состояний.
2. Построение матрично-векторных математических моделей по системе дифференциальных уравнений.
3. Правила построения матрично-векторных математических моделей по структурной схеме.
4. Понятие базиса в пространстве состояний.
5. Связь матрично-векторных и вход-выходных форм математического описания динамических систем. Построение вход-выходных математических моделей по матрично-векторным математическим моделям.
6. Техника вычисления передаточных матриц.
7. Преобразование вход-выходных математических моделей в матрично-векторную форму описания.
8. Понятие управляемости и наблюдаемости динамических систем.
9. Понятие стабилизируемости, детектируемости, идентифицируемости динамических систем.
10. Общие закономерности преобразования матрично-векторных математических моделей к произвольно выбранному базису. Преобразование на основе свойств управляемости объекта управления.
11. Общие закономерности преобразования матрично-векторных математических моделей к произвольно выбранному базису. Преобразование на основе свойств наблюдаемости объекта управления.
12. Основные формы представления математической модели и способы перехода к ним. Основная нормальная управляемая, транспонированная основная нормальная, дополнительная и обратная нормальная формы представления.
13. Основные формы представления математической модели и способы перехода к ним. Каноническая диагональная, жорданово-каноническая и треугольная формы представления.
14. Наблюдатели (идентификаторы) состояния линейных динамических объектов и систем. Синтез уравнения наблюдателя Калмана. Редуцированный наблюдатель состояний (наблюдатель Луенберге-ра).



## Современная теория автоматического управления

15. Системы с обратной связью по состоянию (линейные стационарные). Одномерные системы управления в пространстве состояния.
16. Модальное управление многомерными объектами.
17. Управление и наблюдение в многомерных системах. Разделяющие преобразования. Многомерный наблюдатель Луенбергера. Преобразование, разделяющее по наблюдению и управлению.
18. Возможности систем обратной связи для многовходовых объектов.
19. Построение многовходовых объектов с использованием разделяющих преобразований.
20. Понятия возмущенных и невозмущенных движений.
21. Траектории, интегральные кривые и особые точки в пространстве состояний.
22. Свободные и вынужденные движения в линейной динамической системе.
23. Оценка устойчивости состояния линейных автоматических систем по матрично-векторной математической модели. Понятия устойчивости в пространстве состояний.
24. Устойчивость по Ляпунову.
25. Оценка устойчивости по переходной матрице и по спектру системной матрицы.
26. Оценка устойчивости замкнутых систем с использованием функции Ляпунова. Основные определения и теоремы. Построение функции Ляпунова для линейных систем на основе их матрично-векторных математических моделей.
27. Оценка качества переходного процесса с использованием функции Ляпунова. Оценка времени затухания возмущенного движения.
28. Применение второго метода Ляпунова для линейных систем.
29. Понятие дискретно-непрерывной САУ.
30. Получение матрично-векторной математической модели дискретно-непрерывной системы.
31. Переходные уравнения состояния дискретно-непрерывной системы.
32. Вычисление переходной матрицы состояния.
33. Эквивалентные преобразования матрично-векторных математических моделей линейных дискретно-непрерывных систем.
34. Оценка фундаментальных свойств ДНС. Оценка



## Современная теория автоматического управления

- управляемости, наблюдаемости, устойчивости ДНС.
35. Математические модели процессов в ДНС. Понятие идеального квантователя. Применение преобразования Лапласа для анализа дискретных сигналов. Теорема прерывания. Работа фиксирующего элемента.



## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдук А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах: учеб. пособие / А.Р. Гайдук. – СПб.: Лань, 2011.
2. Колганов А.Р. Основные разделы современной теории автоматического управления [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/525691/> 2012. – 71 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления: учеб. В 5 т. Т. 2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / К.А. Пупков [и др.]; под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ, 2004. – 638 с.
4. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы: учеб. пособие для вузов / И.В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2006. – 271 с.
5. Певзнер Л.Д. Практикум по теории автоматического управления: учеб. пособие для вузов / Л.Д. Певзнер. – М.: Высшая школа, 2006. – 590 с.
6. Попов А.К. Элементы теории автоматического управления. В 2 ч. / А.К. Попов. – М: Изд-во МИРЭА, 2010. Ч. 1. – 208 с.; Ч. 2. – 184 с.
7. Практикум по автоматике: математическое моделирование систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов / Б.А. Карташов [и др.]; под ред. Б.А. Карташова. – М.: Колосс, 2006. – 183 с.