



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

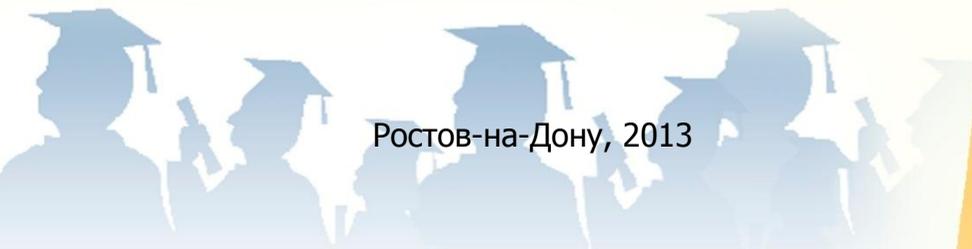
Кафедра «Управление в технических системах»

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

# **«Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления»**

Автор  
Заковоротный В.Л., Чувейко М.В.

Ростов-на-Дону, 2013





## Аннотация

Учебное пособие включает краткое изложение современных взглядов на анализ и синтез нелинейных систем управления. Основное внимание уделено методам качественного исследования систем в фазовом пространстве. Рассмотрены методы точечных отображений, в том числе стробоскопическому отображению Пуанкаре, эффективному для изучения многих вопросов в прикладной части анализа процессов обработки на металлорежущих станках. Особое внимание уделено также асимптотическим методам исследования и синтеза нелинейных систем, в том числе нелинейной коррекции. При анализе устойчивости нелинейных систем рассматриваются приближенные методы анализа и методы функций Ляпунова. В методическое пособие включены также вопросы анализа и синтеза систем управления нелинейными объектами, возмущенными стационарным шумом, а также приложения методов анализа и синтеза нелинейных систем к задачам управления процессами обработки на металлорежущих станках. Прикладная часть методического пособия иллюстрируется примерами построения систем управления процессами обработки на металлорежущих станка.

## Авторы

**В.Л. Заковоротный-д.т.н., проф.**

**М.В. Чувейко**



## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>1. Примеры нелинейных систем управления, имеющих нелинейные законы управления и (или) нелинейные уравнения объекта управления. ....</b>	<b>14</b>
1.1. Изменение свойств серводвигателя вращения шпинделя за счет реакции со стороны процесса резания .....	14
1.2. Влияние на движение транспортного устройства фрикционных свойств контакта колеса с полотном.....	31
1.3. Влияние на движение судна гидродинамических сил .....	37
1.4. Система позиционирования электромеханической системы с учетом кулонового трения .....	38
<b>2. Качественные методы исследования нелинейных систем в фазовом пространстве.....</b>	<b>44</b>
2.1. Понятие о фазовом пространстве. ....	44
2.2. Понятие о фазовой плоскости.....	48
2.3. Пример формирования хаотического (странного) аттрактора .....	63
2.4. Понятие о точечных отображениях.....	75
<b>3. Асимптотические методы исследования нелинейных систем.....</b>	<b>81</b>
3.1. Асимптотические методы, основанные на анализе систем, имеющих малый параметр при старшей производной (метод Л.С. Понтрягина и А.Н. Тихонова).....	82
3.2. Асимптотические методы анализа нелинейных систем (метод Крылова-Боголюбова – Митропольского) .....	96
3.3. Метод гармонической линеаризации.....	105
3.3.1. Понятие о гармонической линеаризации .....	105
3.3.2. Случай симметричных периодических движений .....	107
3.3.3. Случай несимметричных периодических движений .....	115
3.3.4. Гармоническая линеаризация на дискретном множестве	



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

частот .....	119
<b>4. Устойчивость нелинейных систем. ....</b>	<b>139</b>
4.1. Понятие устойчивости .....	139
4.2. Основы теории Флоке .....	144
4.3. Использование метода функций Ляпунова.....	155
<b>5. Основы синтеза нелинейных законов управления ....</b>	<b>158</b>
5.1. Нелинейные законы управления. ....	160
5.2. Коррекция свойств релейной системы управления с помощью конструирования линии .....	167
переключения .....	167
<b>6. Методы анализа и синтеза систем управления нелинейными объектами, возмущенными стационарным шумом.....</b>	<b>177</b>
6.1. Преобразование плотности распределения в безинерционном нелинейном звене. Вычисление моментов первого и второго порядка на выходе нелинейного звена .....	178
6.2. Понятие о статистической линеаризации нелинейных звеньев .....	183
<b>7. Приложение методов анализа и синтеза нелинейных систем к задачам управления процессами обработки на металлорежущих станках .....</b>	<b>187</b>
7.1. Принцип разделения движений. ....	189
7.2. Свойства подсистемы «медленных» движений. Определение функции управления .....	200
7.3. Обеспечение устойчивости подсистемы «быстрых» движений .....	207
<b>Заключение .....</b>	<b>221</b>
<b>Литература.....</b>	<b>222</b>



## ВВЕДЕНИЕ

Настоящий курс входит в программу подготовки магистров по специальности «Управление в технических системах» по научному направлению «Управление сложными нелинейными динамическими объектами. Проблемы анализа и синтеза». Основное содержание курса посвящено проблеме управления движением механических систем, взаимодействующих с различными средами: гидродинамическими; аэродинамическими; трибологическими; средами, формируемыми процессом резания, с которой взаимодействуют подсистемы станка при совершении движений исполнительных элементов в процессе формирования поверхности детали с целью ее изготовления при обеспечении заданных характеристик качества. Основное внимание в курсе уделено управлению объектами, динамика которых описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Здесь, прежде всего, рассматриваются объекты, характеризующие движение механических систем, взаимодействующих со средами, динамические связи в которых описываются нелинейными уравнениями. Рассматриваются также случаи, когда закон управления является нелинейным. Например, при синтезе систем, оптимальных по быстродействию, как известно, используется закон управления, основанный на переключениях координат состояния в системе. Переключения физически реализуются с помощью идеального реле. Рассматриваются и другие случаи синтеза нелинейных законов управления.

Необходимость изучения нелинейной теории управления объясняется не тем, что практически все реальные объекты являются нелинейными, а тем, что в нелинейных системах форми-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

руются различные стационарные многообразия (предельные циклы, инвариантные торы, странные аттракторы и пр.), которые в линейных системах принципиально не возможны. Кроме этого именно нелинейные законы управления позволяют существенно улучшить качество регулирования. Здесь, прежде всего, рассматриваются вопросы синтеза оптимальных законов управления, скользящие режимы при управлении, нелинейные корректирующие устройства.

В курсе большое внимание уделяется управлению движением механических систем, взаимодействующим с различными средами (трибологическими, гидродинамическими, средами, формируемыми процессом резания при управлении движением исполнительных элементов станка и пр.). Динамические связи, формируемые процессами обработки резанием и (или) трением, преобразуют свойства управляемой системы. В данном случае под динамической связью понимается математическое описание изменения сил в области сопряжения система – среда в координатах и траекториях движения. При управлении движением в такой системе естественно учитывать влияние сил, возникающих в области сопряжения система – среда, на движение системы. Эти внутренние силы формируют в координатах состояния дополнительные внутренние регулирующие воздействия, которые, наряду с внешними силами, определяют движение управляемых координат. Эти связи, как правило описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, преобразующими линейный объект движения механической системы в нелинейный.

Нелинейная теория управления базируется на принципах нелинейной динамики, в становление которой внесли вклад вы-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

дающиеся ученые мира. Здесь, прежде всего, необходимо отметить работы А.А. Андропова, Р. Беллмана, Н.Н. Крылова, Ю.А. Митропольского, Л.С. Понтрягина, А. Пуанкаре и др. [1 - 4]. На законы нелинейной динамики опираются синергетические методы анализа и синтеза. Синергетическая теория управления, сформулированная в последние два десятилетия, прежде всего трудами А.А. Колесникова и его учеников [8], опирается на известные работы в области синергетики. Это работы И.Пригожина и Г. Хакена. Применительно к рассматриваемой области научного направления «Управление сложными нелинейными динамическими объектами. Проблемы анализа и синтеза» магистерской подготовки основные положения системного синергетического подхода созданы работами В.Л. Заковоротного и его учеников [6, 7]. Таким образом, предлагаемый курс лекций дает магистрантам основные теоретические знания при написании магистерской диссертации по указанному научному направлению. Кроме научных публикаций и монографий по указанному направлению отсутствует методический материал для изучения этого направления анализа и синтеза управляемых движений механических систем. Поэтому предлагаемый курс лекций фактически является первой попыткой систематизации накопленного научного материала.

Для понимания материала, посвященного анализу и синтезу управления сложными нелинейными объектами, в курс лекций включены следующие разделы.

1) Анализ класса систем, подлежащих рассмотрению в дисциплине. В этом разделе рассматриваются примеры принципиального изменения свойств управляемой системы за счет учета реакции на систему среды, с которой взаимодействует система.



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Здесь главное внимание уделено электромеханическим системам, взаимодействующим со средами. Однако приводятся примеры, когда движение осуществляется от иных (не электрических) источников энергии. В этом разделе приводятся математические модели систем и показываются принципиальные изменения их свойств, заключающихся в преобразовании квазилинейных систем в существенно нелинейные. Примером такой системы может служить система пространственного позиционирования обобщенной массы, взаимодействующей с процессом трения. Причем, движение системы осуществляется по прямой с помощью серводвигателя постоянного тока с якорным управлением при постоянстве возбуждения. Закон взаимодействия обобщенной массы с трением описывается законом Кулона, учитывающим знак силы трения, зависящий от знака скорости.

2) Качественные методы исследования нелинейных систем в фазовом пространстве. Основы качественной теории анализа нелинейных систем в фазовом пространстве сформулированы А. Пуанкаре. Затем они были существенно развиты А.А. Андроновым и его учениками (например, Ю.И. Неймарком). Здесь рассматриваются понятия о фазовом пространстве, фазовой траектории, анализируются типовые фазовые траектории в фазовой плоскости, формируемые многообразия, дается понятие о притягивающем многообразии как аттрактора, рассматривается основа теории бифуркаций и пр. Анализируются свойства диссипативных систем, в том числе вытекающего из положений Лиувилля свойства уменьшения фазового объема координат состояния во времени. Показывается принципиальное отличие консервативных систем от диссипативных, в частности существование в диссипа-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

тивных системах притягивающих многообразий. Рассматривается проблема введения диссипативных функций. Рассматривается идея и принципы синергетического подхода к анализу и синтезу диссипативных систем. Особое внимание уделяется методам анализа, основанным на точечных отображениях, например, стробоскопическом отображении Пуанкаре.

3) Асимптотические методы исследования нелинейных систем. Приводятся основные положения асимптотических методов анализа на основе метода Ляпунова-Пуанкаре малого параметра, метода асимптотических разложений Крылова\_ Боголюбова – Митропольского, метода асимптотического поведения решений нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих малый параметр при старшей производной Понтрягина- Тихонова. Приводятся примеры использования методов при исследовании конкретных систем. Примеры подобраны таким образом, чтобы проиллюстрировать формирование различных многообразий в окрестности равновесия, в том числе орбитально асимптотически устойчивых предельных циклов, инвариантных торов, странных (хаотических) аттракторов. Рассматривается понятие бифуркации в параметрическом пространстве.

Особое внимание уделяется методу гармонической линеаризации, получившему наибольшее распространение при анализе и синтезе нелинейных систем, в которых рассматриваются лишь стационарные состояния. Приводятся критерии анализа автоколебаний для нелинейных систем, обладающих свойством симметрии относительно насматриваемой точки, а также нелинейных связей, не обладающих этим свойством.

Формулируется понятие эволюции, и рассматриваются



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

асимптотические методы решения функциональных интегро - дифференциальных уравнений эволюционной системы.

4) Устойчивость нелинейных систем. Здесь, прежде всего, рассматривается метод функций Ляпунова и принципы ее построения. Формулируется понятие абсолютной устойчивости, рассматривается критерий Попова, приводится квадратичный критерий устойчивости. Особое внимание уделяется проблеме устойчивости движения механической системой, взаимодействующей со средой. Показывается, что за счет введения связи, формируемой средой, положительно определенные симметричные матрицы скоростных коэффициентов и упругости в уравнении динамики механической системы преобразуются в несимметричные, то есть представимые в виде суммы симметричных и кососимметричных составляющих. Показывается, что за счет взаимодействия со средой существует два принципиально различных механизма потери устойчивости. Первый определяется влиянием циркуляционных сил, определяемых кососимметричной составляющей матрицы упругости. Второй – преобразованием положительно определенной симметричной составляющей матрицы скоростных коэффициентов из положительно определенной в отрицательно определенную. Для приложений, связанных с управлением движением механических систем, взаимодействующих со средами, важное значение имеют уравнения в вариациях, имеющие периодически изменяющиеся параметры. В связи с этим в курсе лекций уделяется внимание теории Флоке анализа устойчивости систем с периодически изменяющимися параметрами. Даются понятия матрице монодромии и мультипликаторам. Приводятся условия асимптотической устойчивости.



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

5) Основы синтеза нелинейных законов управления. В этом разделе рассматриваются методы синтеза систем, оптимальных по быстродействию, управление в которых осуществляется с помощью релейных систем. Кроме этого рассматриваются законы и принципы управления релейными системами в скользящем режиме. Затрагиваются также вопросы синтеза нелинейных корректирующих систем.

При синтезе нелинейных систем управления особое место занимает использование синергетической теории управления. Применение синергетической теории управления раскрывается на примере управления процессами обработки на металлорежущих станках. На основе принципа расширения пространства состояния приводятся уравнения динамики при управлении процессами обработки на металлорежущих станках. Для уравнений расширенного пространства состояния на основе методов Понtryгина – Тихонова рассматривается вопрос построения иерархии систем дифференциальных уравнений по принципу «медленности» времени. Рассматриваются проблемы устойчивости проектируемых траекторий на всех иерархических уровнях. Анализируются многообразия, формируемые в окрестностях траекторий медленных движений, а том числе орбитально асимптотически устойчивые предельные циклы, инвариантные торы и странные (хаотические) аттракторы. Приводится общая методика системного синтеза управляемого процесса резания, заключающаяся в проектировании требуемого многообразия траекторий формирующих движений инструмента относительно заготовки, определении оптимальной траектории на многообразии, и вычисления функций управления на основе решения обратных задач динамики. При



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

выборе оптимальной траектории на многообразии в качестве оптимизационного функционала рассматривается критерий минимума приведенных затрат на изготовление партии деталей.

6) Методы анализа и синтеза систем управления нелинейными объектами, возмущенными стационарным шумом. Рассматриваются типы случайных процессов, и дается определение стационарного случайного процесса. Рассматриваются основные понятия и определения, в том числе понятия о корреляционных функциях и спектральных плотностях. Доказываются зависимости, позволяющие рассматривать прохождение стационарного случайного процесса через линейную детерминированную систему. Основное внимание уделяется анализу и синтезу нелинейных систем на основе использования методов статистической линеаризации нелинейных связей. Рассматриваются вопросы расчета точности нелинейных стационарных непрерывных систем управления, а также в случае, когда системы являются нестационарными.

7) Приложение методов анализа и синтеза нелинейных систем к задачам управления процессами обработки на металлорежущих станках. Приводятся примеры изменения уравнений движения систем управления исполнительными элементами станков за счет динамической связи, формируемой процессом резания. Приводятся примеры построения функций управления на основе использования асимптотических методов нелинейной динамики.

Все разнообразие затронутых в лекционном курсе вопросов объединено единой линией, главное внимание уделяется эффектам, обусловленным нелинейностью связей в объекте. В част-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

ности влиянию вибраций на траектории движения, многообразиям, формируемым в окрестностях стационарных траекторий и пр. При этом рассматривается проблема управления движением механической системы, взаимодействующей с различными средами (трибологическими, гидродинамическими, аэродинамическими, средами, формируемыми процессами обработки резанием на металлорежущих станках).

При изучении курса магистрант должен обладать знаниями в области анализа и решений систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, основами функционального анализа, основами теории автоматического управления в объеме бакалаврской подготовки. Кроме этого он должен знать основные принципы построения уравнений динамики механических систем, представленных дискретными пространственными динамическими структурами в объеме курса аналитической механики для инженерных специальностей.

При написании курса лекций автор использовал некоторые материалы более чем тридцати кандидатских и шести докторских диссертаций, защищенных под его руководством. За что автор выражает благодарность своим ученикам. Кроме этого автор признателен заслуженному деятелю науки и техники РФ, д.т.н., профессору Южного Федерального университета А.А. Колесникову за рекомендации и полезные советы при подготовке этого курса.

## **1. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ИМЕЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ И (ИЛИ) НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ.**

Вначале рассмотрим примеры управления движением механических систем, взаимодействующих с различными средами. Примеры нелинейных систем управления, имеющих в своей структуре типовые нелинейные элементы (релейные элементы с идеальным реле, реле с зоной нечувствительности, неоднозначности, типовые нелинейные элементы типа люфт, ограничение и пр.) можно рассмотреть в типовом курсе анализа нелинейных систем управления. Поэтому эти вопросы в курсе лекций не затрагиваются.

### **1.1. Изменение свойств серводвигателя вращения шпинделя за счет реакции со стороны процесса резания**

Рассмотрим систему, состоящую из двигателя постоянного тока, который обеспечивает вращение шпинделя, жестко связанного с ротором двигателя. Будем считать заданной и неизменной скоростью продольной подачи суппорта. Кроме этого будем считать припуск  $t_{P,0}$  неизменным, а инструмент - недеформируемым (рис.1). Управление частотой вращения шпинделя осуществляется с помощью напряжения якоря. Поток возбуждения двигателя постоянного тока также будем считать постоянным. Тогда



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

уравнение динамики двигателя постоянного тока определяется следующим образом

$$T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = U^{(E)}(t) - U^{(M)}(t) - T_{\text{ЭМ}} \frac{d\omega}{dt} - \omega, \quad (1)$$

где  $U^{(E)} = U / c_e$  - напряжение якоря, приведенное к частоте вращения шпинделя;

$U^{(M)}(t) = R_0 / c_e c_M [M(t) + T_{\text{Э}} dM(t) / dt]$  - момент, действующий на ротор двигателя, приведённый к частоте вращения шпинделя;

$T_{\text{ЭМ}} = GR / c_e c_M$ ,  $T_{\text{Э}} = L / R$  - соответственно электро-механическая и электрическая постоянные времени двигателя;

$G$  ,  $R$ ,  $L$  - соответственно момент инерции, приведённый к ротору двигателя, сопротивление и индуктивность цепи якоря двигателя;

$c_e$ ,  $c_M$  - параметры двигателя;

$\omega$  - частота вращения шпинделя;

$R_0$  - радиус заготовки в точке контакта с ней режущего инструмента.

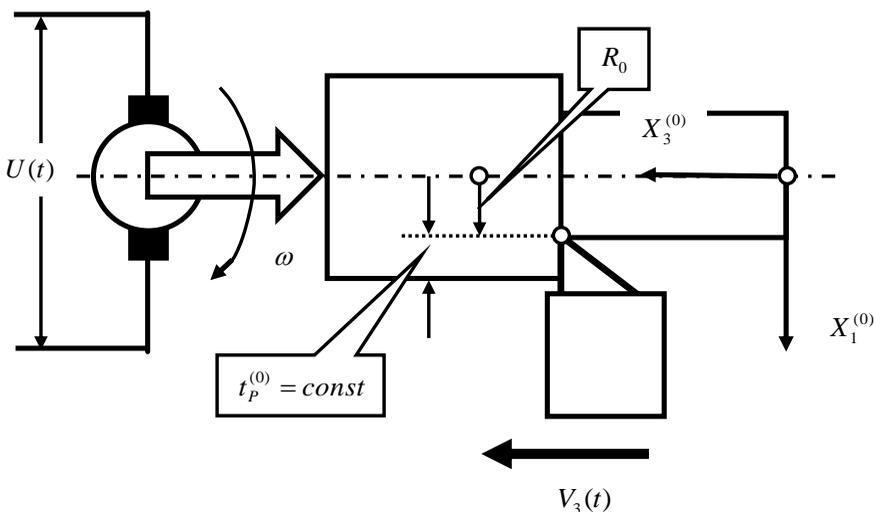


Рис. 1. Схема формирования момента сопротивления вращения шпинделя в координатах состояния динамической системы резания

Обычно при исследовании динамических свойств двигателя и способов управления частотой вращения момент не представляется в координатах состояния или считается заданным и неизменным, что само по себе странно, так как при частоте вращения  $\omega = 0$  момент, действующий на ротор существует. Следовательно, ротор двигателя должен вращаться от этого момента и работать как генератор. Уже это замечание показывает, что представление внешнего момента не в координатах состояния системы является неправомерным. Для полного раскрытия уравнения (1) необходимо представить момент  $M(t)$  в координатах состояния системы резания. Вначале ограничимся случаем, когда упругими деформациями инструмента относительно обрабатываемой заготовки можно пренебречь. Кроме того, рассмотрим стационарное состояние системы, когда скорость продольной по-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

дачи суппорта есть величина постоянная, а скорость поперечных перемещений суппорта равна нулю. Для определения момента, формируемого процессом резания, воспользуемся связью силы резания с текущим значением площади срезаемого слоя. Тогда в изображениях по Лапласу [1]

$$M(p) = \rho \chi_2 R_0 \frac{1}{p} [1 - \exp(-TP)] V_3(p), \quad (2)$$

где  $\rho$  - давление стружки на переднюю поверхность инструмента;

$R_0$  - радиус детали;

$\chi_2$  - угловой коэффициент, связывающей вектор силы с его проекцией по направлению скорости резания;

$T$  - время одного оборота, величина, обратная частоте вращения шпинделя.

Представим  $\frac{1}{p} [1 - \exp(-TP)]$  в виде ряда Тейлора. Тогда

$$M(p) = R_0 F_2(p) = \chi_2 \rho R_0 t_p^{(0)} \left\{ T - \frac{T^2}{2!} p + \frac{T^3}{3!} p^2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{T^n}{n!} p^{n-1} + \dots \right\} V_3(p) \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда  $V_3 = const$ . Тогда вместо (1) с учетом (3) при ограничении в ряде Тейлора первыми двумя членами имеем

$$T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = U^{(E)}(t) - k_{\omega} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{T_2}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} \right) - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - \omega, \quad (4)$$

где  $k_{\omega} = \chi_2 \rho R_0 t_p^{(0)} / c_e c_M$  - коэффициент, учитывающий влияние скорости вращения шпинделя на момент сопротивления вращения ротора серводвигателя. Он имеет смысл квадрата час-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

тоты, определяемой моментом сопротивления в установившемся состоянии. Уравнение (4) принципиально отличается от уравнения двигателя постоянного тока, прежде всего, наличием двух нелинейных элементов.

Пусть напряжение, приведённое к частоте вращения двигателя, есть величина постоянная, то есть  $U^{(E)} = const$ . Тогда этому напряжению соответствует два установившегося значения частоты вращения двигателя (рис. 2)

$$\omega_{1,2}^{(0)} = \frac{U^{(E)} \pm \sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega}}}{2}. \quad (5)$$

Очевидно, что при  $(U^{(E)})^2 < 4k_{\omega}$  не существует управления, которому соответствуют вещественные частоты вращения ротора серводвигателя. При  $(U^{(E)})^2 > 4k_{\omega}$  одному и тому же значению напряжения на якоре двигателя соответствуют два значения точки равновесия системы. Не трудно показать, что верхняя ветвь смещения точки равновесия в зависимости от напряжения якоря соответствует устойчивым точкам равновесия (например, частота  $\omega_0^{(i)}$  на рис. 2). Нижняя ветвь – неустойчивым (например, частота  $\omega_0^{(k)}$  на рис. 2).

Покажем, что верхней ветви соответствуют устойчивые точки равновесия, а нижней – неустойчивые. Для этого согласно теории Ляпунова [3, 4] необходимо рассмотреть уравнение в вариациях относительно точки равновесия. Рассмотрим систему (4) в вариациях относительно точки равновесия после замены  $\omega(t) = \omega_0 + \Omega(t)$  и примем во внимание, что  $\Omega(t) \rightarrow 0$ . Тогда в

вариациях относительно точки равновесия имеем

$$T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + \left\{ k_{\omega} T_{Э} \frac{2\Omega}{(\omega_0)^3} + T_{ЭМ} \right\} \frac{d\Omega}{dt} + \left( 1 - \frac{k_{\omega}}{(\omega_0)^2} \right) \Omega = 0. \quad (6)$$

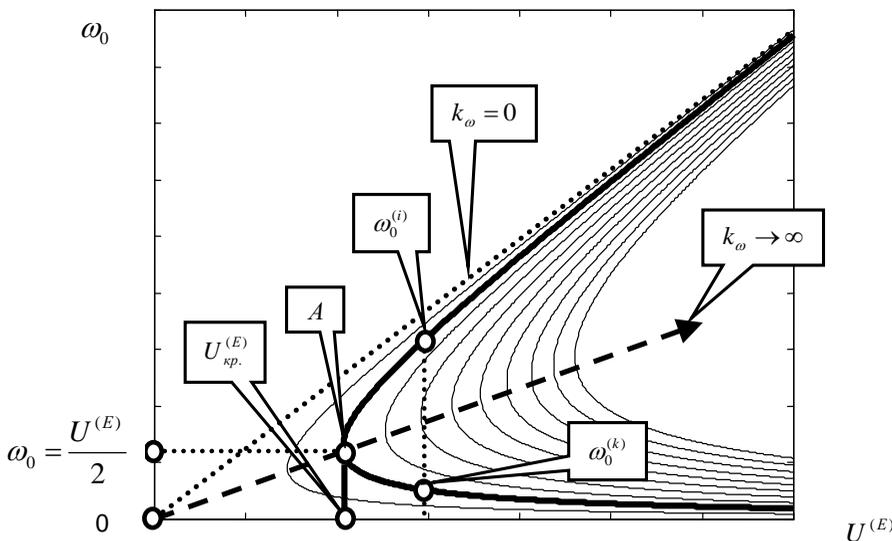


Рис. 2. Диаграммы смещения точек равновесия привода вращения шпинделя в зависимости от напряжения якоря при различных значениях коэффициента  $k_{\omega}$

Очевидно, что система, описываемая уравнением (6) теряет устойчивость равновесия при условии  $(1 - \frac{k_{\omega}}{(\omega_0)^2})$ . Частота

$\omega_0$  определяется соотношениями (5). Поэтому справедливо

$$\left( 1 - \frac{k_{\omega}}{(\omega_0)^2} \right) = \frac{2\sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega}} \{ \sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega}} \pm U^{(E)} \}}{\{ U^{(E)} \pm \sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega}} \}^2}. \quad (7)$$



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

В (7) знаменатель всегда положителен. Поэтому знак (7) определяется знаком числителя. В числителе на рассматриваемых двух ветвях траектории смещения равновесия  $(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega} > 0$ .

Поэтому  $(1 - \frac{k_{\omega}}{(\omega_0)^2}) > 0$  при условии  $\sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega}} + U^{(E)}$ , что

соответствует верхней ветви траектории (рис. 2). Если

$\sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega}} - U^{(E)}$ , что соответствует нижней ветви траек-

тории на рис. 2, то  $(1 - \frac{k_{\omega}}{(\omega_0)^2}) < 0$ . Таким образом, нижняя ветвь

соответствует неустойчивому равновесию.

Приведём пример фазового портрета системы для двигателя, имеющего следующие параметры:  $U = 220$  вольт,  $T_{ЭМ} = 0,0482$  с,  $T_{Э} = 0,03642$  с,  $c_e = 0,68; в \cdot с$ ,  $k_{\omega} = 20000$  (рис. 3).

Как видно, в рассматриваемом примере система имеет две точки равновесия:  $(O_1)$  и  $(O_2)$ . Первая точка  $O_1$  является неустойчивой. Вторая точка  $O_2$  - устойчива. Эти точки формируют две области, разделённые сепаратрисной кривой. Причем, одна ветвь сепаратриссы характеризует аттрактор, асимптотически притягивающийся к точке равновесия  $O_2$ . Блок схема программы в программном комплексе Simulink для вычисления фазовых траекторий приведена на рис. 4.

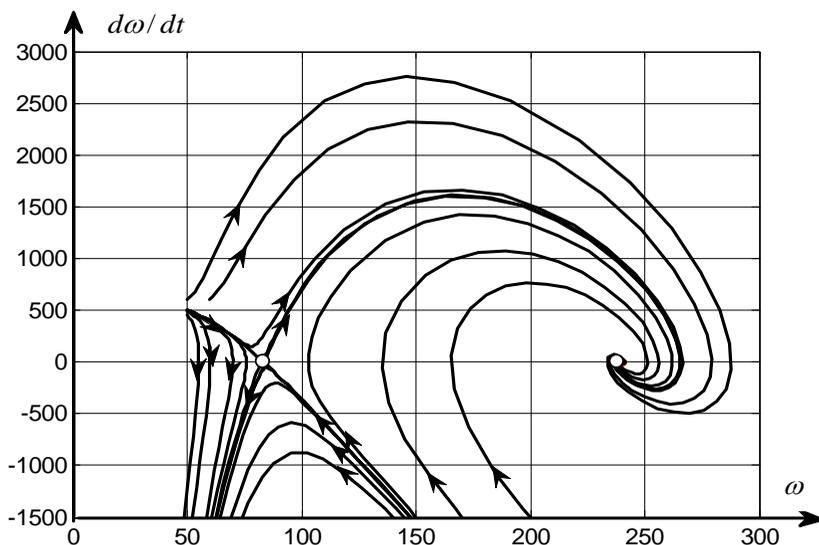


Рис.3. Фазовой портрет системы  
 Проанализируем полученный результат.

1. Динамические свойства серводвигателей за счёт реакции со стороны процесса резания могут существенно менять свои свойства. В частности, для традиционной схемы процесса обработки на токарном станке наибольшей чувствительностью к изменениям свойств за счет реакции со стороны процесса резания обладают серводвигатели вращения шпинделя.

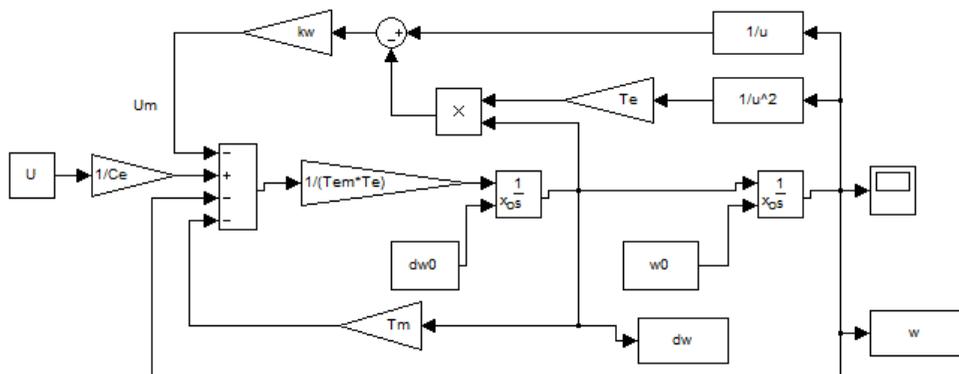


Рис. 4. Структурная схема динамики привода вращения шпинделя с процессом резания в Simulink

2. Реакция со стороны процесса резания на динамические свойства серводвигателя шпинделя определяется обобщённым параметром  $k_{\omega} = \chi_2 \rho R_0 t_P^{(0)} / c_e c_M$ . Он зависит как от параметров процесса резания, влияющих на формирование момента сопротивления, так и от параметров двигателя  $c_e$  и  $c_M$ . Характерно, что по мере уменьшения мощности серводвигателя ( $c_e c_M \rightarrow 0$ ) по сравнению с мощностью процесса резания, зависящего от сил  $\chi_2 \rho R_0 t_P^{(0)}$ , для каждого значения напряжения якоря существует зона нечувствительности в установлении стационарной скорости его вращения. Кроме этого, для каждого значения напряжения якоря существует две точки равновесия, соответствующего стационарной скорости. Причем, одна из этих точек является неустойчивой. Таким образом, для асимптотически устойчивой точки равновесия существует ограниченная область притяжения.

3. С первого взгляда, существование неустойчивой точки



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

равновесия противоречит физическим представлениям о свойствах серводвигателей. Однако необходимо учитывать, что по мере уменьшения скорости резания (частоты вращения шпинделя) при неизменной скорости подачи существенно возрастает площадь срезаемого слоя. В результате непропорционально быстро увеличивается момент сопротивления, который при недостаточной мощности двигателя вращения шпинделя может превышать момент двигателя. Это один из механизмов формирования заклинивания режущего инструмента, которое особенно актуально при создании оборудования, например, для сверления глубоких отверстий малого диаметра спиральными свёрлами. В связи с этим, при создании систем управления процессами обработки на станках актуальным является согласование мощности двигателя вращения сверла и двигателя его подачи. В частности при увеличении мощности двигателя точка критического напряжения якоря «А» переходим в начало координат, и свойства двигателя вращения шпинделя становятся традиционными. В этом случае двигатель не воспринимает реакцию со стороны процесса резания.

4. Момент, представленный в виде (2) характеризует лишь одну составляющую момента, которая определяется зависимостью сил от текущих значений площади срезаемого слоя. Однако существуют другие физические процессы, оказывающие влияние на момент. Например, при сверлении глубоких отверстий спиральными сверлами кроме составляющих момента, зависящих от площади срезаемого слоя необходимо учитывать накопление стружки в стружкоотводящих канавках. Эта составляющая увеличивается по мере заглубления инструмента в заготовку. Если положить, что накопление стружки и соответственно приращение



дополнительного момента  $\Delta M$  пропорционально пути, то

$$\Delta M(t) = k_c t . \quad (7)$$

Следовательно, область притяжения точки равновесия, соответствующая верхней ветви на рис. 2, с течением времени будет уменьшаться и полностью вырождаться. Другими словами в этой системе свойства системы будут двигаться и неизменно достигать такого терминального состояния, при котором процесс резания не существует (хотя бы в связи с заклиниванием инструмента). Именно в связи с этим процесс сверления глубоких отверстий происходит с периодическими выводами инструмента из зоны резания. Причем, законы переключения циклов обработки зависят от параметров двигателя и свойств процесса резания.

5. По мере увеличения отношения скорости подачи к скорости резания изменяется значение кинематического заднего угла. В результате существенно возрастают силы, действующие на заднюю грань инструмента, которые направлены против скорости подачи. Если реакция со стороны процесса резания на скорость подачи отсутствует, то эти силы начинают превосходить предельные значения из условий прочности инструмента. Поэтому при конкретных параметрах двигателя и мощности процесса резания можно выделить области, в которых процесс резания не существует (рис. 5). Эти области на рис. 5 затемнены. Кроме этого, силы, действующие на заднюю грань инструмента, имеют проекцию, направленную в сторону, противоположную силам, формируемым в области первичной и вторичной пластических деформаций. Они не только уменьшают проекции сил по направлению скорости резания, но и существенно увеличивают силы в направ-

лении скорости подачи. Поэтому для полного описания зависимости и свойств динамической системы привода вращения шпинделя необходимо ввести в рассмотрение дополнительные силы, действующие на заднюю грань инструмента.

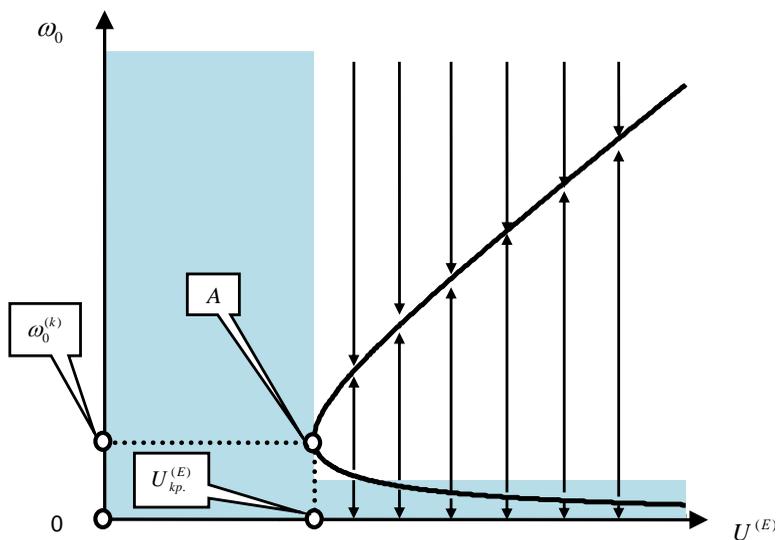


Рис. 5. Диаграммы смещения точек равновесия привода вращения шпинделя в зависимости от напряжения якоря при различных значениях коэффициента  $k_{\omega}$

Для пояснения влияния сил, формируемых в области контакта задней грани инструмента с обработанной частью заготовки, на динамические свойства привода вращения шпинделя учтем дополнительные силы, действующие на заднюю грань инструмента. Как и ранее будем считать, что упругие деформации инструмента отсутствуют. Тогда дополнительные силы, действующие на инструмент со стороны его задней грани, определяются двумя преобразованиями. Во-первых, зависимостью кинематического заднего угла от отношения скорости подачи к скорости резания,



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

во-вторых, зависимостью сил от сближения задней поверхности инструмента с заготовкой. Важно подчеркнуть, что силы, действующие на заднюю поверхность, непропорционально быстро возрастают по мере уменьшения значения заднего угла. Причем силы, действующие на заднюю поверхность, в основном, формируются от двигателя подачи суппорта. Поэтому значение крутящего момента, действующего на ротор двигателя главного движения с учетом сил, действующих на заднюю поверхность, можно представить в виде двух композиционных составляющих. Эти силы, приведенные к частоте вращения ротора двигателя шпинделя, представляются в виде

$$M_{\omega} = k_{\omega} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{k_3}{\omega^2} \right), \tag{8}$$

где  $k_3$  - коэффициент, учитывающий влияние сил, действующих на заднюю грань инструмента. В выражении (8) принято во внимание, что по мере уменьшения частоты силы, действующие на заднюю грань инструмента, увеличиваются быстрее, чем силы, действующие на переднюю его поверхность. Область определения функции (8) определяется частотным диапазоном  $\omega \in (0, \infty)$ . Поэтому при цифровом моделировании  $M_{\omega} = -\infty$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Тогда уравнение динамики привода вращения шпинделя вместо (3) будет

$$U^{(E)}(t) = T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + [k_{\omega} \left( \frac{2k_3}{\omega^3} - \frac{1}{\omega^2} \right) + T_{\text{ЭМ}}] \frac{d\omega}{dt} + \omega + k_{\omega} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{k_3}{\omega^2} \right). \tag{9}$$

Прежде всего, рассмотрим точки равновесия системы (9) для напряжения якоря двигателя  $U^{(E)} = \text{const}$ . Для пояснения влияния реакции со стороны процесса резания на равновесия



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

системы удобно воспользоваться графической интерпретацией формирования точек равновесия (рис. 6). Уравнение для определения точки равновесия  $\omega^0$  будет

$$U^{(E)} = \omega^0 + k_{\omega} \left[ \frac{1}{\omega^0} - \frac{k_3}{(\omega^0)^2} \right]. \quad (10)$$

Очевидно, что свойства равновесия системы определяется коэффициентом  $k_{\omega}$ . При коэффициенте  $k_{\omega} \rightarrow 0$  свойство двигателя определяется традиционной пропорциональной зависимостью частоты якоря от напряжения  $U^{(E)}$ . В свою очередь, коэффициент  $k_{\omega}$ , как показано выше, зависит от отношения мощности двигателя к мощности процесса резания. В частности, если мощность двигателя неограниченно возрастает, то реакция со стороны процесса резания на зависимость точек равновесия от напряжения якоря нивелируется. В том же случае, когда мощность двигателя и процесса резания соизмеримы, то в области малых частот вращения двигателя формируется область неоднозначности в зависимости частоты вращения от напряжения якоря. При этом по мере увеличения напряжения имеют место бифуркации точки равновесия системы типа вилки.

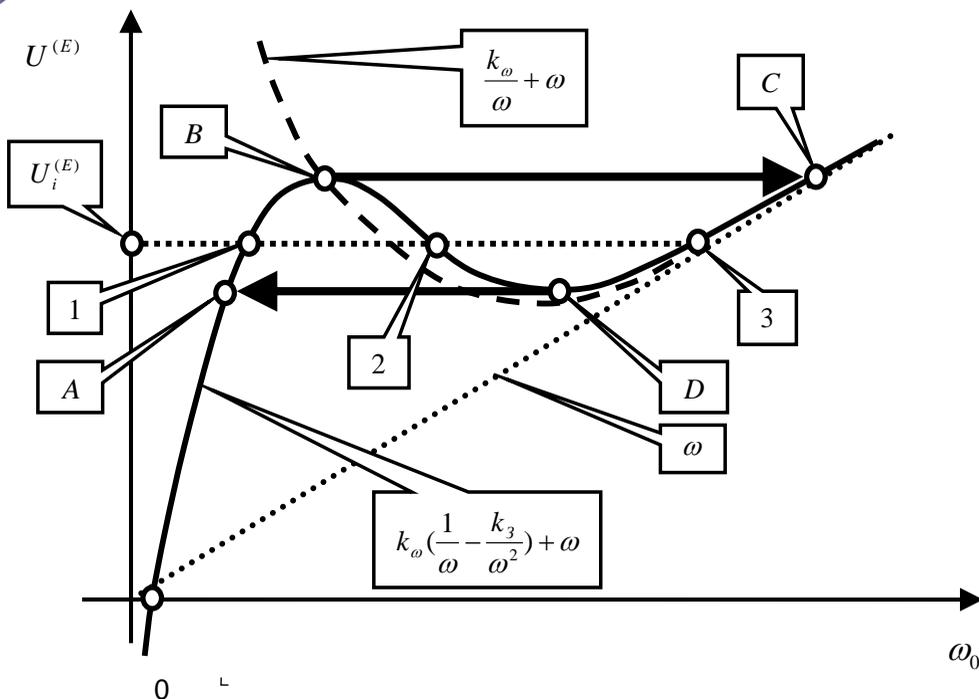


Рис. 6. Диаграммы смещения точек равновесия привода вращения шпинделя в зависимости от напряжения якоря

Например, для напряжения  $U_i^{(E)}$  соответствуют три точки равновесия: «1», «2» и «3». Причем, как нетрудно показать, равновесие, соответствующее точке «2», является неустойчивым. Неустойчивыми являются все точки равновесия, находящиеся на кривой «B-D». Таким образом, при возрастании напряжения траектория смещения точек равновесия соответствует кривой «A-B-C», при уменьшении – кривой «C-D-A».

Для этого случая также приведём пример фазового портрета системы (рис. 7). Здесь система имеет три точки равновесия  $O^{(1)}$ ,  $O^{(2)}$  и  $O^{(3)}$ . Причем, точка  $O^{(2)}$  является неустойчивой. Из этой точки выходят сепаратрисные кривые, которые делят фазо-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

вое пространство на две области притяжения точек равновесия  $O^{(1)}$  и  $O^{(3)}$ . Другими словами точки  $O^{(1)}$  и  $O^{(3)}$  характеризуют притягивающие многообразия, к которым асимптотически притягиваются все фазовые траектории в зависимости от вариаций скорости и ускорения вращения ротора двигателя вращения шпинделя.

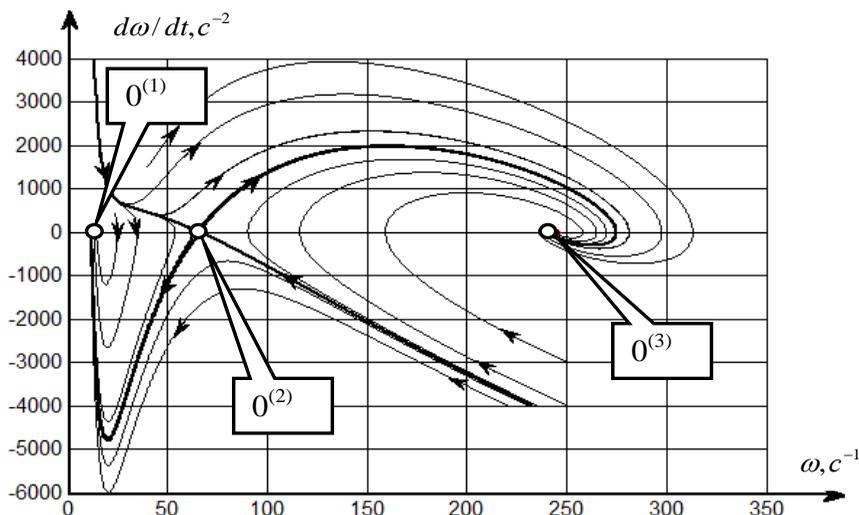


Рис.7. Фазовой портрет динамической системы привода вращения шпинделя с процессом резания

Структурная схема модели в Simulink приведена на рис. 8.

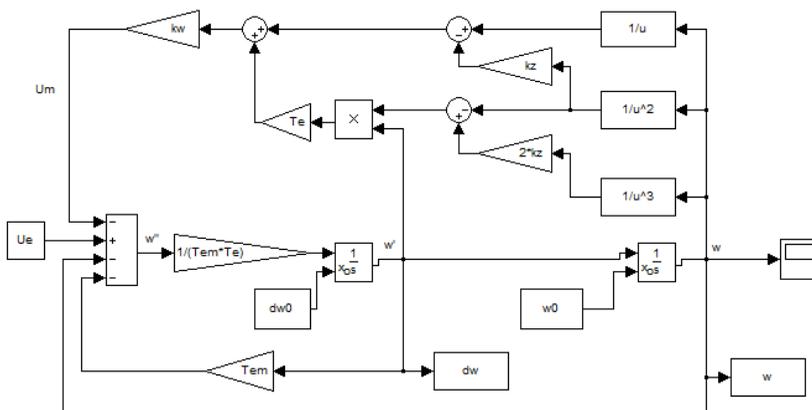


Рис.8. Структурная схема модели динамики привода вращения шпинделя с процессом резания в Simulink

Приведённый материал показывает, что для подсистемы, определяющей стационарную траекторию движения инструмента относительно заготовки, необходимо учитывать реакцию со стороны процесса резания. Если определить многообразие траекторий формообразующих движений и соответствующие им траектории движения исполнительных элементов станка, то этим траекториям исполнительных элементов будет соответствовать изготовление деталей заданного качества. Однако эти траектории должны быть асимптотически устойчивыми в вариациях относительно этих траекторий. Уравнение в вариациях относительно траектории «медленных» движений характеризуют подсистему «быстрых» движений. Вопрос обеспечения асимптотической устойчивости траекторий формообразующих движений будет рассмотрен ниже.



## 1.2. Влияние на движение транспортного устройства фрикционных свойств контакта колеса с полотном

Не нарушая общности, а также учитывая методические аспекты понимания взаимодействия систем со средой, рассмотрим упрощенную динамическую модель транспортного устройства, движение которого определяется двигателем постоянного тока. Рассмотрим упрощенную модель транспортного устройства на примере железнодорожного транспорта (рис. 9). Более подробное описание динамической модели можно найти в нашей книге [14].

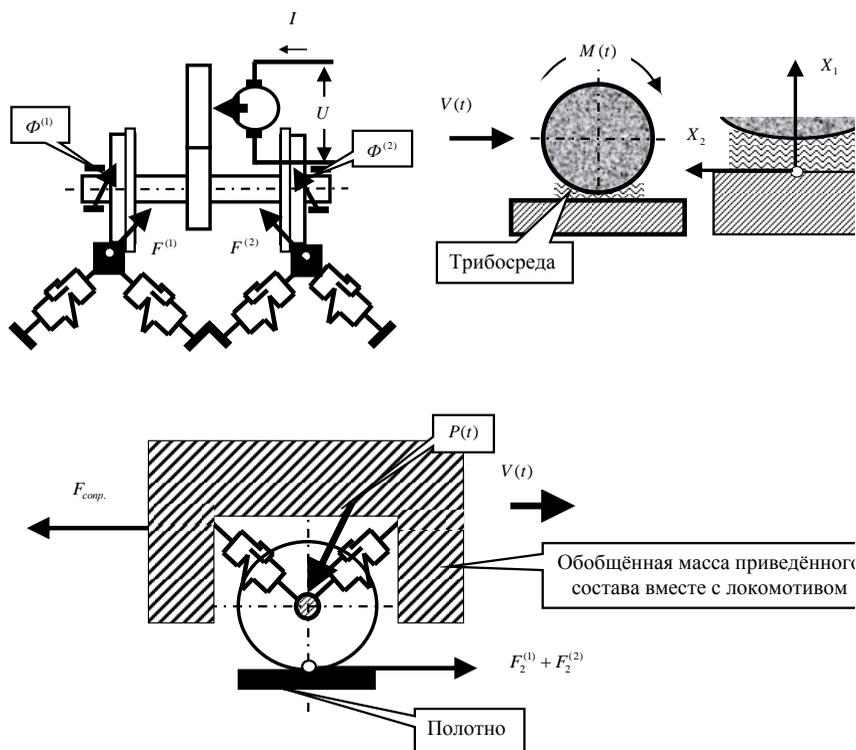


Рис. 9. Схема стандартной динамической системы транспортного устройства

Здесь для упрощения анализа с целью акцентирования внимания на главной проблеме будем считать полотно недеформируемым. Кроме этого упругими деформациями колесной пары относительно тележки, тележки относительно корпуса транспортного устройства и других элементов устройства будем пренебрегать. Также будем считать ротор двигателя жестко связанным с колесом. Тогда для описания движения необходимо рассмотреть систему (1), которую мы дополним уравнением поступательных движений транспортного устройства в виде следующей системы дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} U - c_e \omega &= \frac{GL}{c_M} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{GR}{c_M} \frac{d\omega}{dt} + \frac{R_0 R}{c_M} F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right) + \frac{R_0 L}{c_M} \frac{d\{F(\frac{\omega}{R_0} - V)\}}{dt}; \\ F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right) &= m \frac{dV}{dt} + \Phi(V), \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где  $V$ ,  $\omega$  - соответственно скорость поступательно движения транспортного устройства и частота вращения ротора двигателя (колеса);

$c_e, c_M$  - параметры двигателя;

$R, L$  - активное сопротивление и индуктивности якоря двигателя;

$G$  - момент инерции ротора двигателя вместе с колесом;

$R_0$  - радиус колеса;

$m$  - приведенная масса транспортного устройства.

В (11) введены две нелинейных функции. Первая  $F(\frac{\omega}{R_0} - V)$  определяет зависимость тангенциальной силы в



контакте колеса с рельсом от скольжения  $\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right) = V_{ск.}$ . Здесь

положительное значение скорости  $V$  соответствует случаю, когда сопротивление движению со стороны транспортного устройства препятствует движению. Движение системы с большими отрицательными ускорениями, когда двигатель работает в режиме генератора, не рассматривается. Напомним, что двигатель является обратимой системой. Вторая  $\Phi(V)$  показывает зависимость сопротивления движения транспортного устройства от скорости. Например, если сопротивление движению представимо в виде вязкого трения, то  $\Phi(V) = hV$ . Тогда  $h$  - коэффициент вязкого трения. При раскрытии функции  $\Phi(V)$  необходимо кроме вязкого трения учитывать аэродинамическое сопротивление, трение ведомых колес, трение боковой головки колеса о рельс и пр. Однако эта функция при изменении скорости является монотонной и однозначной. Главное значение при изучении свойств системы (11)

имеет зависимость  $F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right)$ . Дело в том, что многочисленными

исследованиями в транспортной механике показано, что тангенциальные силы, обеспечивающие движение транспортного устройства зависят от скорости скольжения  $V_{ск.}$ . Качественный характер этой зависимости приведен на рис. 10.

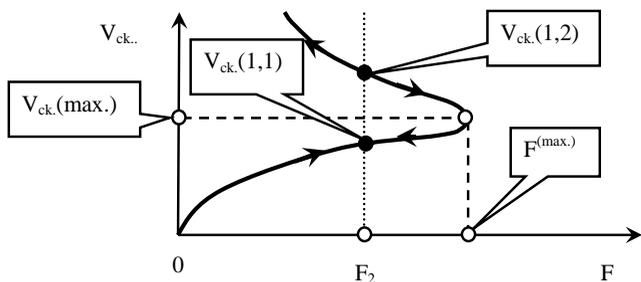
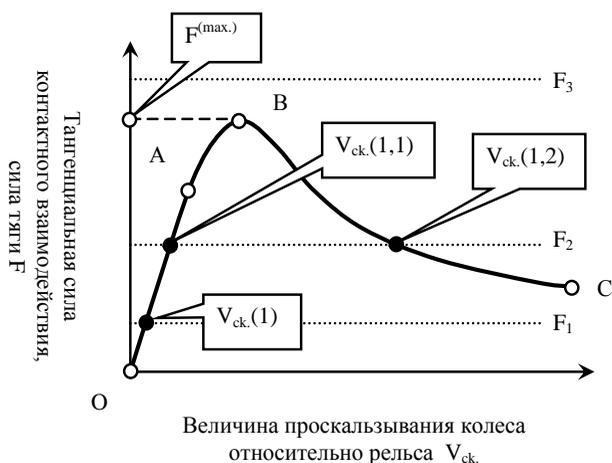


Рис. 10. Тяговая характеристика колесо – рельс «а» и ветвление точек равновесия при варьировании сил сопротивления движению

Дадим характеристику зависимости сил тяги от скорости скольжения колеса относительно рельса. Прежде всего, отметим, что существует максимальное значение тангенциальной силы в контакте колесо – рельс, после которой наблюдается срыв сцепления. На рис. 10 значение этой силы обозначено  $F^{(max.)}$ . От этого значения отходят две ветви тяговой характеристики. Одна (O-A-B) соответствует приращению сил тяги по мере увеличения сопротивления движению. Вторая (B - C) – уменьшению. Причем, ветвь



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

(O-A-B) имеет линейный участок (O - A) и нелинейный (B - C). Линейному участку соответствует работа фрикционного контакта в режиме предварительного смещения. Нелинейному участку соответствует монотонное разрушение фрикционного контакта вплоть до его срыва. Падающему участку (B - C) соответствует переход на режим относительного скольжения.

По мере увеличения внешних сил, зависящих при неизменных прочих условиях от траектории изменения скорости поступательного движения транспортного устройства, наблюдается ветвление точек равновесия системы, аналогичное рассмотренному в предыдущем параграфе. Ограничимся рассмотрением стационарного состояния системы, которому соответствует установившееся постоянное значение скорости движения транспортного устройства. Если скорость  $V = \text{const.}$ , то ей соответствует конкретное значение  $F$ , вычисленное из второго уравнения системы (10). Например, силе  $F_1$  соответствуют два установившихся значения скорости относительного скольжения  $V_{ск. (1,1)}$  и  $V_{ск. (1,2)}$ . Так как  $V = \text{const.}$ , то этим двум скоростям соответствуют две частоты вращения двигателя  $\omega(1,1)$  и  $\omega(1,2)$ . Однако точки равновесия  $V_{ск. (1,1)}$  и  $V_{ск. (1,2)}$ , и соответствующие им  $\omega(1,1)$  и  $\omega(1,2)$  имеют принципиально различные свойства. Не трудно показать, что  $\omega(1,1)$  является асимптотически устойчивой при малых вариациях координат состояния относительно этой точки, а точка  $\omega(1,2)$  - не устойчива.

Для обоснования устойчивости и неустойчивости точек равновесия  $\omega(1,1)$  и  $\omega(1,2)$  рассмотрим уравнение (11) в вари-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

циях относительно этих точек. Для этого сделаем замену переменных  $\omega(t) = \omega(1,1) + \delta\omega(t)$  и  $\omega(t) = \omega(1,2) + \delta\omega(t)$ . Тогда линеаризованное уравнение в вариациях относительно точек равновесия

$$\frac{GL}{c_M} \frac{d^2\delta\omega}{dt^2} + \frac{GR}{c_M} \frac{d\delta\omega}{dt} + \left\{ \frac{R_0 R}{c_M} \frac{\partial F}{\partial \omega} + c_e \right\} \delta\omega = 0. \quad (12)$$

Для точки  $\omega(1,1) \frac{\partial F}{\partial \omega} > 0$ . Поэтому точка равновесия  $\omega(1,1)$

является асимптотически устойчивой. Для точки  $\omega(1,2) \frac{\partial F}{\partial \omega} < 0$  и

при этом  $\left[ \frac{R_0 R}{c_M} \frac{\partial F}{\partial \omega} + c_e \right] < 0$ . Поэтому точка равновесия  $\omega(1,2)$

является неустойчивой. Причем, как это следует из рис. 10, по мере увеличения сопротивления движению транспортного устройства область притяжения асимптотически устойчивой точки равновесия уменьшается и может вырождаться полностью.

Анализируя систему (11) в целом, необходимо отметить, что она в зависимости от сопротивления движению транспортного устройства и начальных условий может в общем случае иметь два стационарных состояния. Одно соответствует тяговому режиму с некоторым постоянным проскальзыванием. Второе буксование, когда колесо вращается в режиме относительного скольжения, при этом движение устройства отсутствует.



### 1.3. Влияние на движение судна гидродинамических сил

Рассмотрим движение судна на подводных крыльях. Упрощенное уравнение его движения по прямой без учета килевой и бортовой качки имеет вид [10]

$$\frac{dv}{dt} = F(v) - S(v), \quad (13)$$

где  $v$  - скорость прямолинейного движения судна;

$F(v)$  - сила тяги винта;

$S(v)$  - сила сопротивления движению.

При неизменном режиме работы двигателя сила тяги по мере увеличения скорости монотонно убывает, а зависимость сопротивления от скорости является немонотонной функцией, как показано на рис. 11. Состояние равновесия в системе, очевидно, определяется условием

$$F(v) = S(v). \quad (14)$$

Если установить режим, при котором зависимости тяги и сопротивления соответствуют схеме, приведенной на рис. 11, то в системе управления движением существуют три стационарных режима ( $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ ). Здесь также в зависимости от тягового режима возможны ветвления стационарных состояний системы. При этом наблюдаются бифуркации стационарного состояния типа вилки. На выделенной кривой тяги точки равновесия  $v_1$  и  $v_3$  являются устойчивыми, а точка  $v_2$  неустойчива. Она характеризует границу сфер влияния устойчивых точек равновесия.

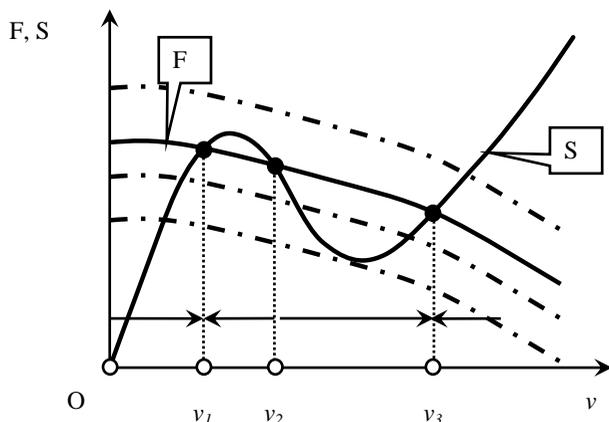


Рис. 11. Тяговая характеристики и характеристика сопротивления по мере изменения скорости

#### 1.4. Система позиционирования электромеханической системы с учетом кулонового трения

Рассмотрим позиционную систему механического узла, исполнительный элемент которого взаимодействует с трением (рис. 12). В области контакта движущегося тела по поверхности формируется трибологическая среда, в которой образуется сила трения, зависящая от траекторий движения: скорости  $V = \frac{dX}{dt}$  и перемещения  $X$ .

В рассматриваемой схематизации связь ротора двигателя с перемещением считается абсолютно жесткой.

Уравнение, связывающее напряжение якоря двигателя  $U$  с вращением ротора  $\omega$  определяется

$$U - c_e \omega = \frac{GL}{c_M} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{GR}{c_M} \frac{d\omega}{dt} + \frac{kR}{c_M} F_T + \frac{kRL}{c_M} \frac{d\{F_T\}}{dt}, \quad (15)$$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

где  $G$  - момент инерции механической части, приведенный к ротору двигателя;

$F_T$  - сила трения, направленная против движения;

$k$  - коэффициент, обратный передаточному отношению редуктора, учитывающий преобразование силы трения в момент, действующий на ротор двигателя;

$R, L$  - активное сопротивление и индуктивность якоря двигателя;

$c_e, c_e$  - параметры двигателя.

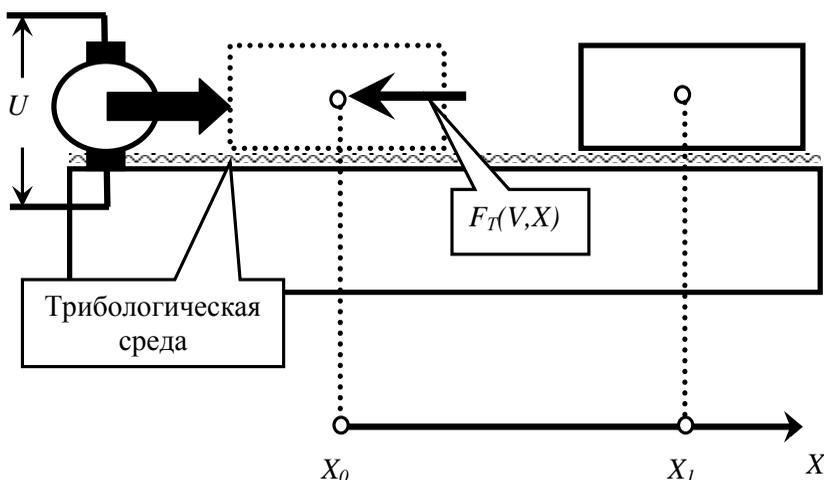


Рис. 12. Упрощенная модель перемещения тела по поверхности

Уравнение (15) можно привести к стандартному виду

$$U_{\omega} - U_M = T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_{\text{ЭМ}} \frac{d\omega}{dt} + \omega, \quad (16)$$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

где  $U_M = \frac{kR}{c_M c_e} \{F_T + T_{\Omega} \frac{dF_T}{dt}\}$  - момент трения, приведен-

ный к частоте вращения ротора двигателя;

$U_{\omega} = \frac{U}{c_e}$  - напряжение якоря, приведенное к частоте вра-

щения ротора двигателя.

Таким образом, частота вращения двигателя зависит от разности двух напряжений  $U_{\omega} - U_M$ . При изучении системы (16) принципиальное значение имеет модель формирования силы трения  $F_T$ . В свою очередь, сила трения, представленная в координатах состояния, зависит от свойств трибосреды. Если трибосреда представляет собой сухое трение, то в самом простом представлении ее можно анализировать в виде (рис. 13)

$$F_T = \begin{cases} -F & \text{при } X > +\Delta X; dX/dt > 0; \\ c_K X & \text{при } X \in (-\Delta X, +\Delta X); \\ +F & \text{при } X < -\Delta X; dX/dt < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь принято во внимание, что при переходе движения через точку, в которой  $dX/dt = 0$  вначале наблюдается предварительное смещение контактируемых поверхностей по закону упругих деформаций. В этом случае сила пропорциональна перемещению с коэффициентом тангенциальной жесткости контакта  $c_K$ . Затем, после предельных значений предварительного смещения наблюдается переход на относительное скольжение с неизменной силой трения  $F$ , знак которой противоположен скорости  $dX/dt = 0$ . Реальный закон изменения сил трения при переходе от трения покоя к трению относительного скольжения существен-

Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

но сложнее. С ним можно познакомиться, например, в работе [11]. Однако закон (17) учитывает главные особенности перехода. В том же случае, когда  $\Delta X = 0$  закон (17) преобразуется в известный закон кулонового трения, то есть

$$F_T = F \operatorname{sign}(dX / dt) \quad . \quad (18)$$

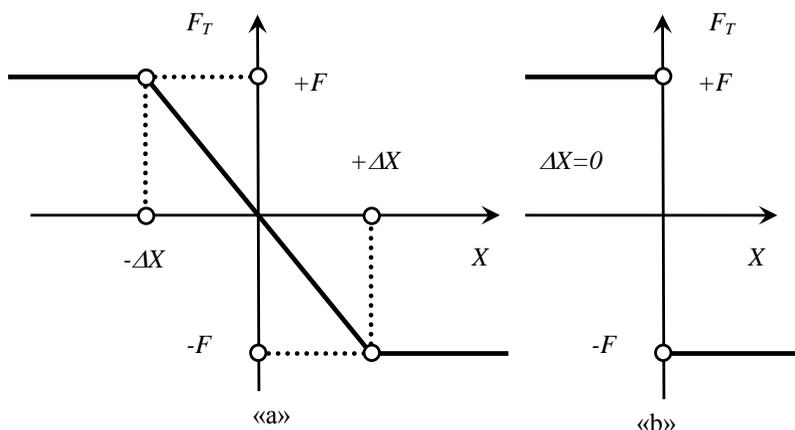


Рис. 13. Модель формирования силы трения с учетом предварительного смещения «а» и без него «b»

Так как механическая часть привода рассматривается абсолютно жесткой, то справедливо  $\omega = k \frac{dX}{dt}$ ,  $\alpha = kX$

(здесь  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ ). Поэтому главное отличие уравнения двигателя от традиционно рассматриваемого определяется функцией



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$U_M(\alpha, \omega) = \frac{kR}{c_M c_e} \left\{ F(\alpha, \omega)_T + T_{\mathcal{D}} \frac{dF_T(\alpha, \omega)}{dt} \right\}. \quad \text{Например, при}$$

начале перемещения массы из точки  $X_0$  с постоянной частотой вращения ротора  $\omega = \omega_0 = const$  путь, пройденный ротором  $\alpha = \omega_0 t$ . Поэтому на участке  $X \langle \Delta X$ , которому соответствует  $\alpha \langle \Delta \alpha$ , справедливо

$$U_M(t) = \frac{kR}{c_M c_e} \{ c_K \omega_0 t + T_{\mathcal{D}} \omega_0 \}. \quad (19)$$

Первое слагаемое в (19) характеризует квазистатическое нарастание силы во времени, второе слагаемое – динамическую составляющую силы сопротивления движению. Заметим, что эта составляющая будет также функцией времени, если  $\omega = \omega(t)$ .

Если же  $\Delta X \Rightarrow 0$ , то

$$U_M(\omega) = \frac{kR}{c_M c_e} \left\{ F \text{sign}(\omega) + T_{\mathcal{D}} F \frac{d \text{sign}(\omega)}{dt} \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, по в зависимости от напряжения якоря за счет формирования момента двигателя имеет место некоторая траектория перемещения ротора в пределах предварительного смещения, которая в зависимости от траектории  $\omega = \omega(t)$  в момент  $t_s$  может приводить к равенству

$$U_{\omega} = \frac{kR}{c_M c_e} \left\{ c_K \int_0^{t_s} \omega(t) dt + T_{\mathcal{D}} \omega(t_s) \right\}, \quad (21)$$

которое характеризует точку равновесия системы. Если эта точка является асимптотически устойчивой, то вращение двига-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

теля прекращается, так как  $U_{\omega} - U_M = 0$ , и в системе устанавливается состояние динамического равновесия в пределах упругих предварительных смещений. Таким образом, далеко не при всех напряжениях якоря возможно относительное скольжение, то есть движение массы от  $X_0$  к  $X_1$ . При подходе к точке  $X_1$ , в зависимости от траектории скорости возможна остановка системы в пределах  $X_1 \pm \Delta X$ . Поэтому необходимо подобрать такой закон изменения напряжения якоря, при котором  $\Delta X \Rightarrow 0$ . Закон взаимодействия системы с трибосредой непосредственно влияет на возможность позиционирования с требуемой точностью. В случае, когда закон трения определяется выражением (18), при подходе к точке равновесия за счет реверсирования знака трения возможно образование автоколебаний.

Все приведенные характеристики и примеры систем объединены единой линией. Они рассматривают свойства устройств, обеспечивающих движение механической системы, взаимодействующей с различными средами: средой, формируемой процессом резания, трибосредой и гидродинамической средой. Во всех случаях учет взаимодействия системы в процессе движения со средой изменяют свойства системы в целом. Рассмотренные примеры являются упрощенными и они не раскрывают всех особенностей изменения свойств системы. В дальнейшем мы их существенно усложним. Однако вначале рассмотрим методы анализа нелинейных систем в фазовом пространстве.



## 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Истоки метода фазового пространства также лежат в работах Анри Пуанкаре. Затем они были существенно развиты А.А. Андроновым и его учениками (например, Ю.И. Неймарком). Понятие фазового пространства и фазовых траекторий в этом пространстве рассмотрены в традиционном курсе по теории автоматического управления. Здесь напомним, что при условии построения фазовых траекторий в этом пространстве при различных начальных условиях вся информация о свойствах системы становится известной. Это относится как к проблеме устойчивости, так и к проблеме качества. Вначале коротко рассмотрим понятие о фазовом пространстве.

### 2.1. Понятие о фазовом пространстве.

Если уравнения системы разрешимы относительно старшей производной, то их всегда можно привести к системе уравнений первого порядка. Пусть система описывается уравнением

$$\frac{d^n X}{dt^n} = F\left\{X, \frac{dX}{dt}, \frac{d^2 X}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}}\right\}. \quad (22)$$

Система (22) имеет одну нелинейную функцию относительно координаты  $X$  и ее  $(n-1)$ -ой производных. Тогда можно ввести в рассмотрение фазовые координаты



$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = X_2; \\ \frac{dX_2}{dt} = X_3; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dX_n}{dt} = F\{X_1; X_2, \dots X_n, t\}. \end{cases} \quad (23)$$

или в компактном виде

$$\frac{dX}{dt} = \Phi\{X\} \quad (24)$$

Где 
$$\frac{dX}{dt} = \left\{ \frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, \dots, \frac{dX_n}{dt} \right\}^T,$$

$\Phi\{X\} = \{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, F[X_1, X_2, \dots, X_n]\}^T$ . Здесь и далее операция  $\{\dots\}^T$  - есть операция транспонирования. Вектор  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$  имеет компоненты, которые называются фазовыми координатами, а пространство, задаваемое этими компонентами, является фазовым пространством.

В систему (24) введем дополнительные связи  $U_1$ , которые в общем случае формируются в функции некоторых фазовых координат. Здесь для упрощения и, не нарушая общности, рассмотрим случай, когда  $U_1 = U_1(X_n - U)$  и обеспечим воздействие от  $U_1$ , например, на координату  $X_2$  по закону суммирования. Тогда система (24) будет системой скалярного управления с обратной связью (рис. 14).

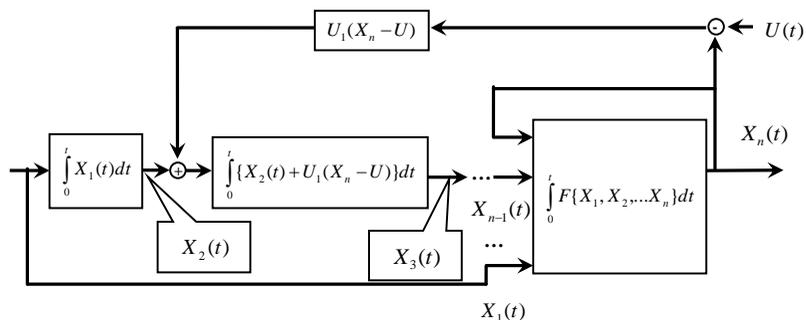


Рис. 14. Структура системы, имеющей обратную связь по выходной координате, в фазовом пространстве

В общем случае можно ввести несколько воздействий и связей. Тогда управляемая система (24) будет системой векторного управления. Для скалярного случая за счет связи  $U_1 = U_1(U - X_n)$  система (24) преобразуется к виду

$$\frac{dX}{dt} = f\{X, U\}, \quad (25)$$

где

$$f\{X\} = \{[X_1 + U_1(U - X_n)], X_2, \dots, X_{n-1}, F[X_1, X_2, \dots, X_n]\}^T.$$

Дадим некоторые основные определения. Пусть задана функция  $U(t)$ . Тогда при заданных начальных условиях ей соответствует решение системы (25)  $\{X_{1,1}(t), X_{2,1}(t), \dots, X_{n,1}(t)\}^T$ . Множеству начальных условий соответствует множество решений. Например совокупности  $i$ -ых начальных условий соответствует решение  $\{X_{1,i}(t), X_{2,i}(t), \dots, X_{n,i}(t)\}^T$ . Каждое решение, представленное в фазовом пространстве, называется фазовой траекторией. Так как система (25) является нелинейной и диссипативной,



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

то согласно теореме Лиувилля все траектории, зависящие от начальных условий при заданной  $U(t)$  притягиваются к некоторой стационарной траектории, которая характеризует притягивающее многообразие, то есть аттрактор. Если нелинейная функция в (25) является монотонной и не имеет зон многозначности, то притягивающее многообразие в системе будет единственным (рис. 15 «а»). Если нелинейная функция является многозначной от фазовых координат, то многообразий может быть множество. Например, если система (25) имеет для каждого момента три решения, то в пространстве состояния будет два притягивающих многообразия и одно отталкивающее (рис. 15 «б»). Отталкивающее многообразие, от которого с течением времени отходят все фазовые траектории, называется сепаратриссой. На рис. 15 «б» сепаратрисса показана пунктирной линией. Наконец, совокупность фазовых траекторий в фазовом пространстве, соответствующая различным начальным условиям, называется фазовым портретом системы.

В том случае, если система дифференциальных уравнений, описывающая динамику системы, имеет второй порядок, то все фазовые траектории располагаются в фазовой плоскости.

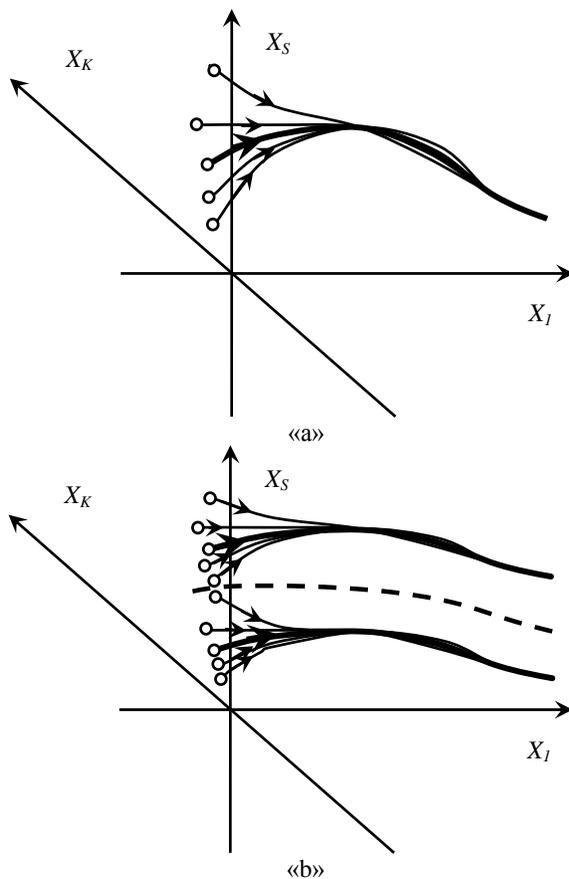


Рис. 15. Фазовые траектории системы, имеющие одно притягивающее многообразие «а» и два притягивающих многообразия «b»

## 2.2. Понятие о фазовой плоскости

Пусть задано уравнение движения механической системы, взаимодействующей с трибосредой, в виде (рис. 16)

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F\left(X, \frac{dX}{dt}\right) + U, \quad (26)$$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

где  $m$ ,  $h$ ,  $c$  - соответственно обобщенная масса, коэффициент демпфирования и жесткости;

$F(X, \frac{dX}{dt})$  - уравнение связи, формируемой трибосредой;

$U$  - внешнее силовое воздействие, являющееся управлением.

Очевидно, что система (26) может быть отнесена к любой управляемой линейной системе, координата состояния которой  $X$  взаимодействует со средой, имеющей уравнение связи  $F(X, \frac{dX}{dt})$ . Будем считать, что в момент  $t = 0$  на систему начинает действовать управление  $U = const$ . Тогда координата будет переходить из одной точки равновесия  $X = 0$  в другую  $X = X_0$ .

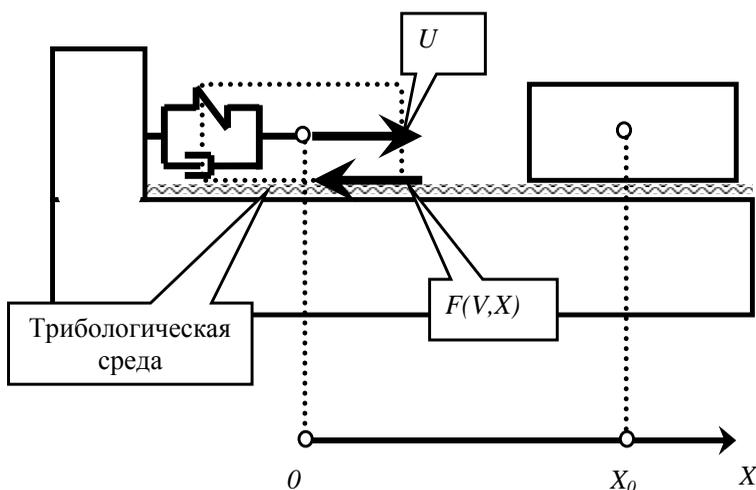


Рис. 16. Схема системы (26)



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Координаты точек равновесия получаем из (26) в предположении, что

$$dX / dt = 0 \text{ и } d^2 X / dt^2 = 0, \text{ то есть для точки } X_0$$

$$cX_0 = F(X_0, 0) + U. \tag{27}$$

Изучение системы (26) удобно рассматривать в вариациях относительно  $X_0$ . Тогда, сделав замену переменных в (26)

$$X(t) = X_0 + x(t), \text{ и вычитая из (26) условие равновесия (25),}$$

получаем уравнение в вариациях

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + cx = \varphi(x, \frac{dx}{dt}), \tag{28}$$

где  $\varphi(x, \frac{dx}{dt}) = F[(X_0 + x(t)), \frac{dx}{dt}] - F(X_0, 0)$  - новая нели-

нейная функция, обладающая свойством  $\varphi(0, 0) \equiv 0$ . Таким образом, после замены переменных точка равновесия находится в начале координат. Система (28) в отличие от (25) является автономной и ее свойства, в общем случае, зависят от  $U = const$ .

Если нелинейная функция  $F(X, \frac{dX}{dt})$  зависит только от скорости,

то ее свойства не зависят от  $U = const$ .

Рассмотрим несколько случаев нелинейной функции

$\varphi(x, \frac{dx}{dt})$ . Вначале будем рассматривать малые значения  $(x, \frac{dx}{dt})$ .

Тогда можно ограничиться первыми членами функции  $\varphi(x, \frac{dx}{dt})$

после ее разложения в ряд Тейлора



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$\varphi(x, \frac{dx}{dt}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi}{\partial (dx/dt)} \frac{dx}{dt} + \varepsilon, \quad (29)$$

где  $\varepsilon \Rightarrow 0$  при  $x \Rightarrow 0$ . Обозначим  $c_T = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  и

$h_T = \frac{\partial \varphi}{\partial (dx/dt)}$ . Эти параметры можно интерпретировать как жесткость и скоростной коэффициент узла трения. Очевидно, что аналогичные рассуждения можно провести для любой линейной системы, взаимодействующей с любой средой (процессом резания, гидродинамической средой и пр.).

Линеаризованную систему (28), то есть рассматривающую малые вариации относительно точки равновесия, можно записать в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + (h - h_T) \frac{dx}{dt} + (c - c_T)x = 0. \quad (30)$$

Рассмотрим следующие варианты.

1).  $h = h_T, c > c_T$ . Для этого случая введем фазовые координаты и запишем систему уравнений по правилу, изложенному в предыдущем параграфе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{(c - c_T)}{m} x, \end{cases} \quad (31)$$

или, исключая время

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(c - c_T)x}{my}. \quad (32)$$

Решением (32) при начальных значениях  $x = x_0$  и  $y = y_0$  будет



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$m\dot{y}^2 + (c - c_T)x^2 = m(y_0)^2 + (c - c_T)(x_0)^2. \quad (33)$$

Таким образом, для каждого сочетания начальных условий мы имеем замкнутую траекторию в фазовой плоскости типа эллипса. Замкнутая траектория в фазовой плоскости называется предельным циклом (рис. 17).

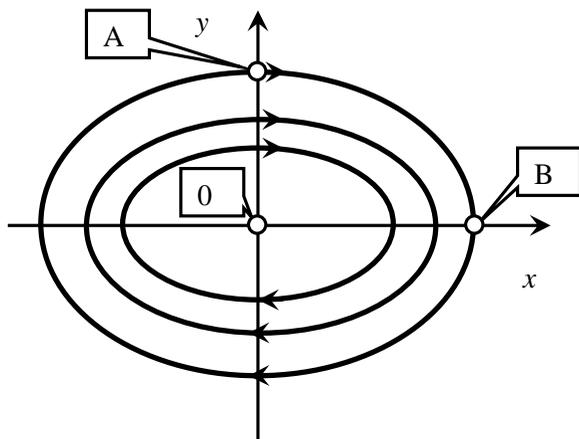


Рис. 17. Совокупность предельных циклов, соответствующих (33)

Отметим следующие свойства фазовых траекторий на примере рис. 17:

- все траектории, находящиеся выше оси абсцисс имеют направления движения слева направо, все фазовые траектории, лежащие ниже оси абсцисс, имеют направление справа налево;

- все фазовые траектории, независимо от уравнения, пересекают ось абсцисс под углом  $90^0$ , так как при пересечении оси абсцисс изменяется направление движения фазовой траектории;

- предельный цикл имеет особую точку типа «центр», так как все фазовые траектории вращаются относительно этой точки



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

(на рис. 17 она обозначена «0»);

- при движении по замкнутому контуру система совершает работу равную нулю. В этом случае энергия системы законсервирована. Она имеет максимальную кинетическую энергию в точке «А». Здесь потенциальная энергия равна нулю. Кинетическая энергия полностью переходит в потенциальную в точке «В».

Очевидно, что в этом случае корни характеристического полинома системы (30) не имеют вещественных значений. Они являются мнимыми и сопряженными. Предельному циклу соответствуют во временной области незатухающие периодические движения. Система (30) в этом случае является консервативной.

2).  $h > h_T, c > c_T$  и  $(h - h_T)^2 > 4m(c - c_T)^2$ . В этом случае характеристический полином системы имеет два вещественных корня. Система является консервативной и коэффициент затухания в системе больше единицы, то есть при движении к точке «0» координаты состояния не имеют колебаний. Переходной процесс в системе апериодический. Систему (30) для этого случая удобно представить в виде

$$(T)^2 \frac{d^2 X}{dt^2} + 2\xi T \frac{dX}{dt} + X = 0, \tag{34}$$

где  $T = \sqrt{\frac{m}{(c - c_T)}}$ ,  $\xi = \sqrt{\frac{(h - h_T)^2}{4m(c - c_T)}}$  - соответственно

инерционная постоянная времени колебательного контура (величина обратная собственной частоте) и коэффициент затухания.

Будем полагать, что коэффициент затухания есть величина большая ( $\xi T \gg T$ ). Тогда первым слагаемым в (34) можно пре-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

небрежь и вычислить уравнение прямой, к которой асимптотически притягиваются все фазовые траектории. Очевидно, это будет прямая (рис. 18)

$$2\xi TY + X = 0. \tag{35}$$

к которой притягиваются все фазовые траектории. В этом случае прямая «M-N» есть притягивающее многообразие, которое называется аттрактором. Однако в рассматриваемом примере терминальным (конечным) состоянием системы является точка «0», находящаяся в начале координат. Она является асимптотически устойчивой точкой равновесия, так как корни характеристического уравнения системы (34) являются вещественными и отрицательными. Поэтому можно считать, что все фазовые траектории вначале асимптотически приближаются к прямой «M-N» (первому притягивающему многообразию), а затем к точке «0» - терминальному притягивающему многообразию. По мере движения системы при этом уравнения, описывающие динамику системы, понижают порядок дифференциального уравнения вначале со второго до первого и, наконец, до нулевого (координаты состояния находятся в точке равновесия).

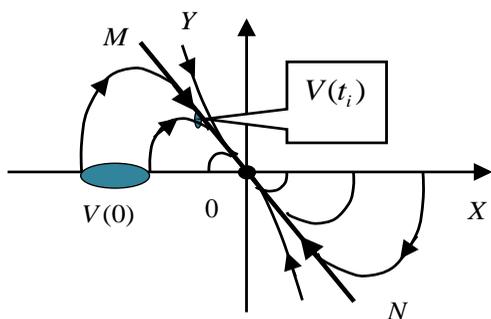


Рис. 18. Пример изменения фазового объема диссипативной системы



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Фазовые траектории на рис. 18 называются фазовыми траекториями типа «узел». Особая точка (точка равновесия) – «устойчивый узел». В данном случае коэффициент затухания системы таков, что при движении к точке равновесия динамические выбеги отсутствуют, а энергия системы полностью поглощается средой. Физическим примером такой системы является движение массы в вязкой жидкости.

3).  $h > h_T, c > c_T$  и  $(h - h_T)^2 < 4m(c - c_T)^2$ . Это случай, когда  $\xi < 1$ . Тогда характеристический полином системы имеет два комплексно сопряженных корня. Движение системы в своем терминальном состоянию будет с колебаниями, то есть в фазовой плоскости формируется траектория типа «устойчивая спираль», а особая точка есть устойчивый фокус (рис. 19). В этом случае притягивающим многообразием является единственная асимптотически устойчивая точка равновесия, находящаяся в начале координат. Однако и в этом случае по мере движения системы имеет место уменьшение фазового объема системы, то есть выполняется условие

$$\operatorname{div} \dot{X} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} < 0. \tag{36}$$

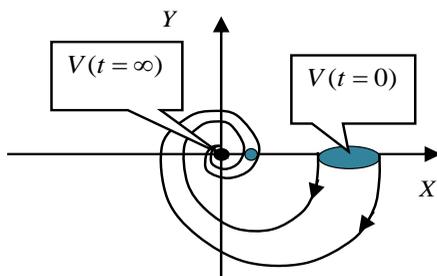


Рис. 19. Пример изменения фазового объема диссипативной системы для случая  $\xi < 1$ .



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Так как с правой части системы в общем случае стоит нелинейная функция, представляющая модель сил, действующих со стороны среды, то возможны некоторые области, в которых

$$\operatorname{div} \dot{X} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} > 0. \tag{37}$$

Это случаи, для которых корни характеристического полинома имеют положительные вещественные части.

4)  $h < h_T, c > c_T$  и  $(h - h_T)^2 < 4m(c - c_T)^2$ . Тогда характеристический полином системы имеет два комплексно-сопряженных корня с положительной вещественной частью. Система имеет фазовую траекторию типа «неустойчивой спирали», а особая точка – есть неустойчивый фокус (рис. 20).

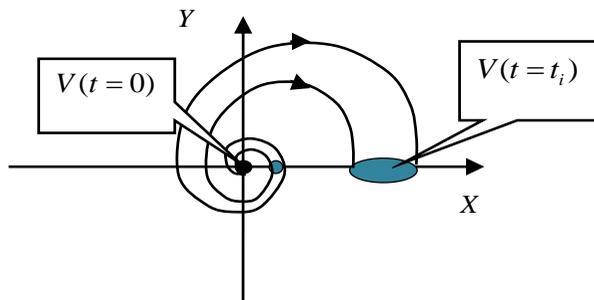


Рис. 20. Пример изменения фазового объема диссипативной системы для случая неустойчивого фокуса.

5)  $h > h_T, c < c_T$  и  $(h - h_T)^2 > 4m(c - c_T)^2$ . В этом случае корни характеристического полинома системы положительны и вещественны. Тогда система является неустойчивой и траектории, соответствующие движению от точки  $t=0$  характеризуются расходящимися экспонентами. В этом случае фазовым портретом



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

системы является совокупность седлообразных траекторий (рис. 21). Для этих траекторий точка равновесия является неустойчивой (см. рис. 21). Однако некоторая совокупность фазовых траекторий притягивается к прямым, проходящим через начало координат. Если под терминальным состоянием системы понимать движение по этим прямым, то рассматриваемая система будет удовлетворять заданным требованиям. Однако седлообразные траектории в фазовом пространстве обычно характеризуют границы сфер влияния различных стационарных состояний.

Все рассмотренные примеры определяют типовые фазовые траектории. Если путем варьирования параметров одна типовая фазовая траектория переходит в другую, то значение параметра в этом случае называется точкой бифуркации.

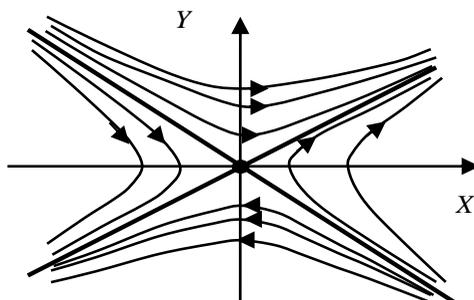


Рис. 21. Пример изменения фазового объема диссипативной системы для случая неустойчивого фокуса.

Рассмотренные выше примеры относятся к системе, линеаризованной в окрестности точки равновесия. В том случае, если точка равновесия является неустойчивой при малых  $X$ , то в зависимости от отклонения траектории от точки  $X=0$  проявляются нелинейные связи, искажающие свойства фазового пространства и



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

изменяющие траектории. Поясним это на конкретном примере. Для трибологических систем известна зависимость сил трения от скорости. Ее в вариациях относительно точки равновесия можно записать в виде []

$$\varphi(x, \frac{dx}{dt}) = h_0 \left\{ \frac{dx}{dt} - \alpha \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 \right\}, \tag{38}$$

где  $\alpha$  - параметр, имеющий размерность  $\left[ \frac{c}{m} \right]^2$ . Тогда

уравнение (28), являющееся уравнением Релея, с учетом (38) имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + (h - h_0) \frac{dx}{dt} + h_0 \alpha \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 + cx = 0. \tag{39}$$

Наибольший интерес представляет случай, когда  $(h - h_0) < 0$ . Проанализируем его подробнее. Точка равновесия

системы (39) равна  $x = 0$ . При малых  $\frac{dx}{dt}$  членом, стоящем в ку-

бе, можно пренебречь, и тогда система будет неустойчивой. Пусть параметры системы таковы, что при этом формируется типовая фазовая траектория типа неустойчивой спирали. Однако по мере увеличения скорости знак при производной меняется и система переходит на движения по фазовой траектории типа устойчивая спираль.

Траектория, при которой  $(h - h_0) \frac{dx}{dt} + h_0 \alpha \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 = 0$

является предельным циклом. Таким образом, фазовая траектория по мере увеличения колебательной скорости переходит от неустойчивой спирали через предельный цикл к устойчивой спирали. В этом случае в окрестности равновесия имеет место увели-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

чение фазового объема системы, которое в дальнейшем переходит к уменьшению фазового объема. Примером такого многообразия является орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл, то есть автоколебания (рис. 22).

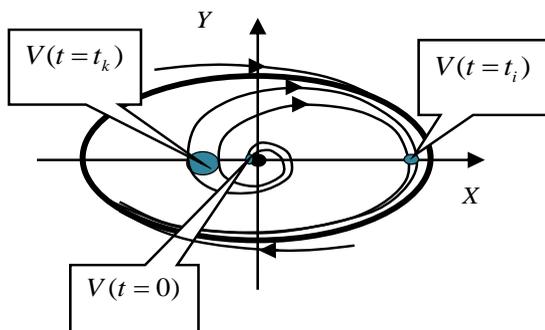


Рис. 22. Пример изменения фазового объема системы и формирование орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла

Здесь понятие орбитально асимптотически устойчивая траектория надо понимать следующим образом. Движение осуществляется по предельному циклу. Поэтому если рассматривать точку, находящуюся на предельном цикле, то она является неустойчивой. Она движется по предельному циклу. Однако все остальные траектории при отклонении от предельного цикла со временем притягиваются к предельному циклу, и фазовый объем системы стремится к нулю, независимо от начальных условий. Орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл называется автоколебаниями. Автоколебания есть состояние равновесия системы, которому соответствуют установившиеся периодические движения, характеризующие притягивающее многообразие.

Рассмотрим качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории в общем случае. Анализ систем в фазо-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

вой плоскости ограничивает анализ систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка. Пусть задана автономная система в общем случае описываемая дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = P(X, Y); \\ \frac{dY}{dt} = Q(X, Y). \end{cases} \quad (40)$$

Уравнения (40) достаточно полно изучены и построена качественная теория дифференциальных уравнений, описывающая динамику такой системы. Если задана система в виде (40), то всегда можно в фазовой плоскости  $(X, Y)$  построить фазовую траекторию, зависящую от начальных условий. Основная задача исследования системы заключается в том, чтобы выяснить качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории или, другими словами, установить топологическую структуру этого разбиения. Под топологической структурой принято понимать все те свойства, которые остаются инвариантными при топологическом преобразовании плоскости в себя. Для выяснения качественной картины для системы второго порядка нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых из них, называемых особыми траекториями. В фазовой плоскости можно выделить следующие особые траектории: точки равновесия; предельные циклы, сепаратрисные кривые. На рис. 23 приведен пример фазового портрета системы. Определим понятие фазового портрета как совокупности фазовых траекторий при изменении начальных условий системы. На фазовом портрете имеются четыре особых точки.

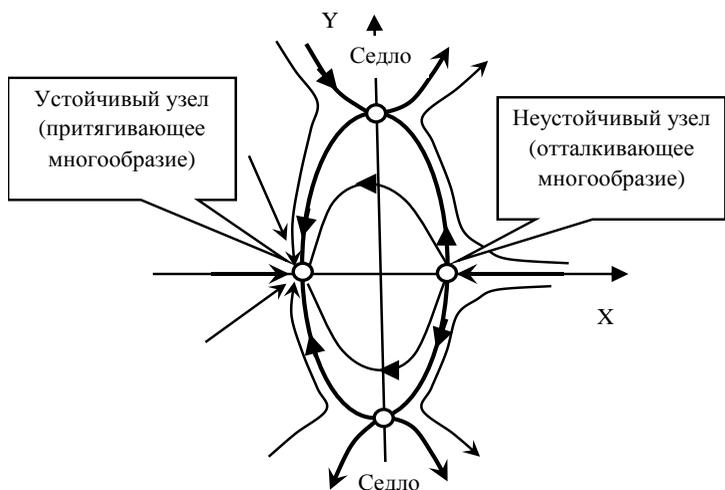


Рис. 23. Пример фазового портрета системы

Однако одна из них (устойчивый узел) является асимптотически устойчивой и характеризует притягивающее многообразие. Верхняя и нижняя седлообразные сепаратриссы делят фазовое пространство на отдельные области и внутри каждой области свойства фазовых траекторий остаются неизменными. Для суждения о свойствах системы достаточно знать особые точки и их свойства.

Приведем еще типичный пример фазового портрета системы (рис. 24). Он имеет два стационарных многообразия. Они характеризуют два предельных цикла. Однако один (A-B-C-D) характеризует притягивающее многообразие, которое определяет автоколебания. Второй (a-b-c-d) – отталкивающее многообразие, которое также является сепаратриссой. В данном случае сепаратрисса делит фазовое пространство на сферы влияния орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла и асимптотически



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

устойчивой точки равновесия при  $(X = 0, Y = 0)$ .

В фазовой плоскости возможно существование следующих многообразий:

- точки равновесия, которая может быть устойчивой и неустойчивой;

- предельного цикла, который также может быть устойчивым и неустойчивым;

- сепаратриссы, которая делит пространство на сферы влияния различных притягивающих многообразий. В диссипативной системе всегда существует притягивающее многообразие, к которому стремятся все фазовые траектории из области их притяжения.

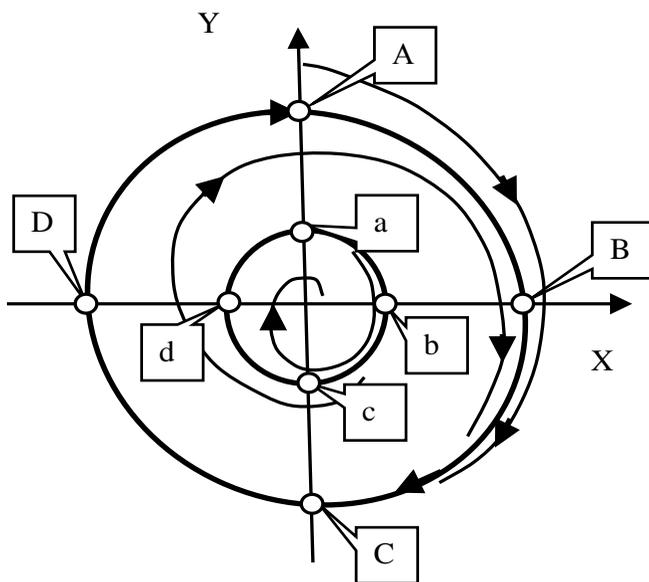


Рис. 24. Пример двух предельных циклов

В том случае, если размерность системы дифференциальных уравнений увеличивается, то в системе могут дополни-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

тельно формироваться многообразия типа инвариантного тора (наложенных друг на друга периодических движений, которые являются орбитально асимптотически устойчивыми). Кроме этого в такой системе могут формироваться странные (хаотические) аттракторы, обладающие уникальными свойствами. По своей структуре они имеют свойства хаотических движений и вместе с тем они являются детерминированными. Две кривые с близкими начальными условиями с течением времени удаляются друг от друга и одновременно они располагаются в ограниченной области и не пересекаются.

### 2.3. Пример формирования хаотического (странного) аттрактора

Приведем пример формирования странных аттракторов в системе, характеризующей колебания режущего инструмента относительно заготовки  $(x_1, x_2)$ , взаимодействующего с процессом резания. Динамическая связь, формируемая процессом резания, вызывает изменение сил в функции суммы деформаций  $(x_1 + x_2)$ . Кроме этого учитывается уравнение формирование сил (последнее уравнение в системе (41)). Уравнение динамики системы вместе со средой описывается следующим образом

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (h_1 + h_1^p) \frac{dx_1}{dt} + h_2^p \frac{dx_2}{dt} + (c_1 + c_1^p)x_1 + c_2^p x_2 = -y(x_1 + x_2); \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + h_1^p \frac{dx_1}{dt} + (h_2 + h_2^p) \frac{dx_2}{dt} + c_1^p x_1 + (c_2 + c_2^p)x_2 = -y(x_1 + x_2); \\ T_p \frac{dy}{dt} + y = (x_1 + x_2)[k_1(x_1 + x_2) + k_2(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt})], \end{cases} \quad (41)$$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

где  $m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ ,  $h = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}$ ,  $c = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$  - соответ-

ственно матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов в подсистемах инструмента и заготовки;

$h_1^p$ ,  $h_2^p$ ,  $c_1^p$ , и  $c_2^p$  - соответственно коэффициенты линеаризованных реакций со стороны процесса резания на скорости и смещения инструмента относительно заготовки;

$T_p$  - коэффициент, определяющий запаздывание сил по отношению к упругим деформационным смещениям;

$k_1, k_2$  - соответственно коэффициент упругости и вязкого трения процесса резания.

Точки равновесия системы (41) определяются из уравнений

$$\begin{cases} (c_1 + c_1^p)x_1 + c_2^p x_2 = -y(x_1 + x_2) \\ c_1^p x_1 + (c_2 + c_2^p)x_2 = -y(x_1 + x_2) \\ y = k_1(x_1 + x_2)^2 \\ \begin{cases} x_1 = \frac{c_2 x_2}{c_1} \\ [c_1^p c_2 + c_1 c_2^p + c_1 c_2 + y(c_1 + c_2)]x_2 = 0 \\ y = k_1(x_1 + x_2)^2 \end{cases} \end{cases} \quad (42)$$

Параметры системы

$m, \text{кгс}^2 / \text{мм}$	$h, \text{кгс} / \text{мм}$	$c, \text{кг} / \text{мм}$
$\begin{bmatrix} 1,67 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 2,0 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 6500 \end{bmatrix}$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Параметры динамической характеристики процесса резания

$$h^p, [\kappaГс / мм] = \begin{bmatrix} 0.0167 & 0.08 \\ 0.0167 & 0.08 \end{bmatrix}; \quad T_p = 0,01, [с];$$

$$k_1 = 10, [\kappaГ / мм^3]; \quad k_2 = 1/30, [\kappaГс / мм^3].$$

Рассмотрим случай  $c_2^p = 2c_1^p$ , будем варьировать  $c_1^p$  в диапазоне  $[-1500 : 0]$ . На рис. 25 дана бифуркационная диаграмма смещения точки равновесия системы при варьировании параметра  $c_1^p$ . Сформулируем понятие бифуркации. Точка бифуркации в параметрическом пространстве есть его значение, при котором изменяется топология фазового пространства.

Из системы (42) видно, что при

$$c_1^p \geq \frac{c_1 c_2}{2c_1 + c_2} = -764.7 = c_{1,*}^p \text{ система (41) имеет асимптотиче-}$$

ски устойчивую в целом стационарную точку – начало координат. Пример пространственной траектории изменения координат состояния системы, соответствующий этому случаю, приведен на рис. 26.

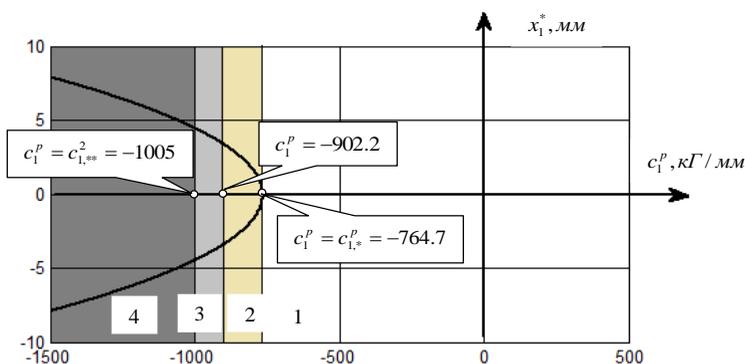


Рис.25. Бифуркационная диаграмма системы (41) при варьировании динамической жесткости  $c_1^p$  процесса резания (1,2,3, 4 – области, соответствующие различной топологии фазового пространства)

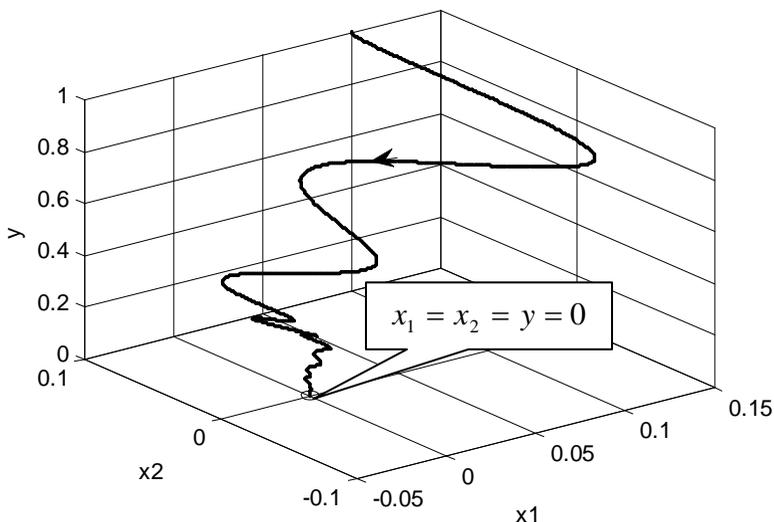


Рис.26. Пример траектории движения динамической системы резания при  $c_1^p = -600, \text{кГ/мм}$ .

Если варьировать коэффициент  $c_1^p$ , то изменяются не только точки равновесия системы, но и ее свойства в вариациях относительно точки равновесия. Для этого достаточно проанализировать диаграмму смещения корней характеристического полинома системы, линеаризованной в окрестности точки равновесия (рис. 27).

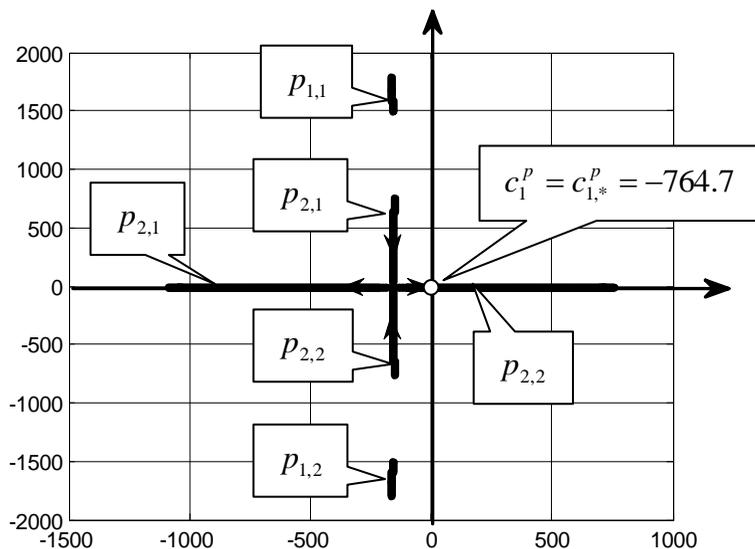


Рис.27. Диаграмма смещения корней характеристического полинома линеаризованной в нулевой стационарной точке системы по мере увеличения параметра  $c_1^P$  в отрицательном направлении от нуля до  $-1500$

Когда  $c_1^P$  переходит через  $c_{1,*}^P$ , то в системе происходит первая бифуркация типа вилки. Нулевая стационарная точка теряет устойчивость и от неё отделяются две новые устойчивые стационарные точки.

$$A^+ = \begin{cases} x_1^* = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^P + c_1 c_2^P + c_1 c_2}{k_1 (c_1 + c_2)}} \\ x_2^* = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^P + c_1 c_2^P + c_1 c_2}{k_1 (c_1 + c_2)}} \\ y^* = -\frac{c_2 c_1^P + c_1 c_2^P + c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \end{cases} \text{ и}$$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$A^- = \begin{cases} x_1^* = -\frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^p + c_1 c_2^p + c_1 c_2}{k_1(c_1 + c_2)}} \\ x_2^* = -\frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^p + c_1 c_2^p + c_1 c_2}{k_1(c_1 + c_2)}} \\ y^* = -\frac{c_2 c_1^p + c_1 c_2^p + c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \end{cases}$$

При этом смещаются корни характеристического полинома линеаризованной системы в вариациях относительно точки равновесия (рис. 28). Соответствующие траектории координат состояния системы в плоскости  $x_1, y$  для различных коэффициентов  $c_1^p$  приведены на рис. 29, рис. 30, рис. 31.

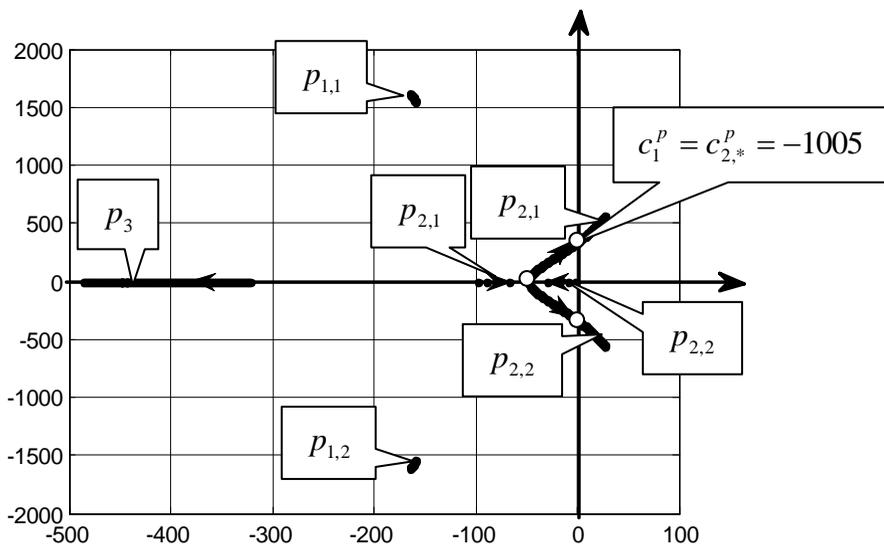


Рис.28. Диаграмма смещения корней характеристического полинома линеаризованной в стационарной точке  $A^+$  системы по мере увеличения параметра  $c_1^p$  в отрицательном направлении от  $c_{1,*}^p$  до 1500.

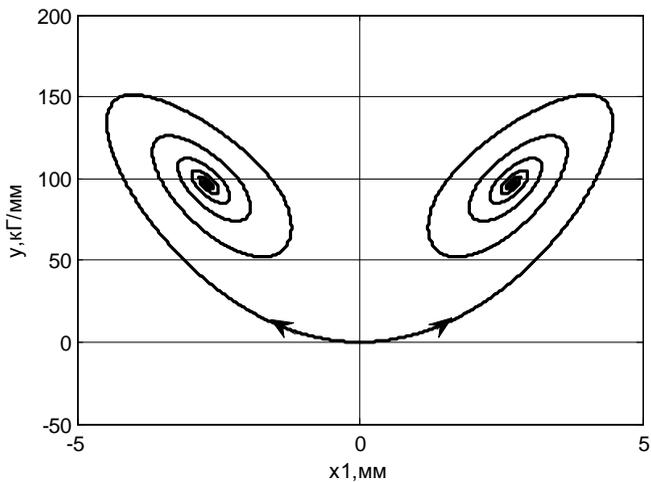


Рис. 29. Диаграмма смещения координат состояния в плоскости

$$x_1, y \text{ при } c_1^p = -850, \text{кГ/мм}$$

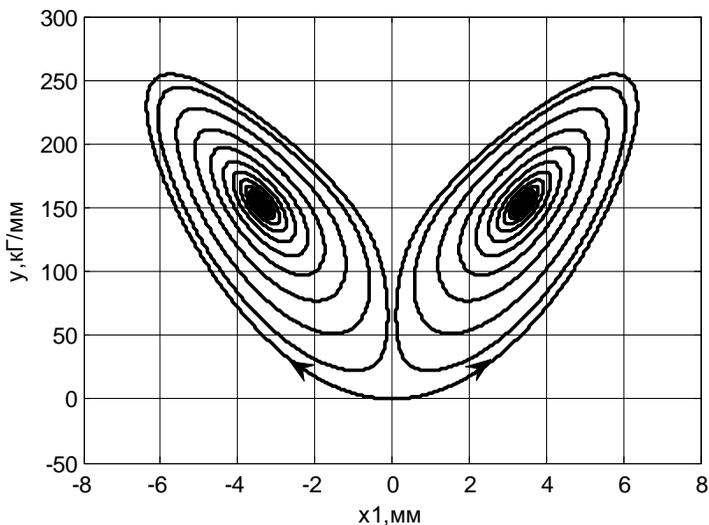
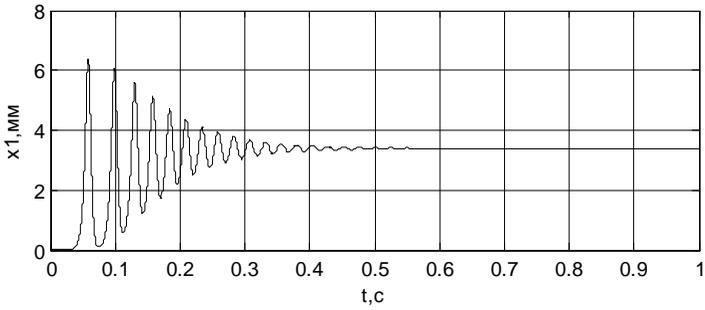


Рис. 30  $c_1^p = -900, \text{кГ/мм}$

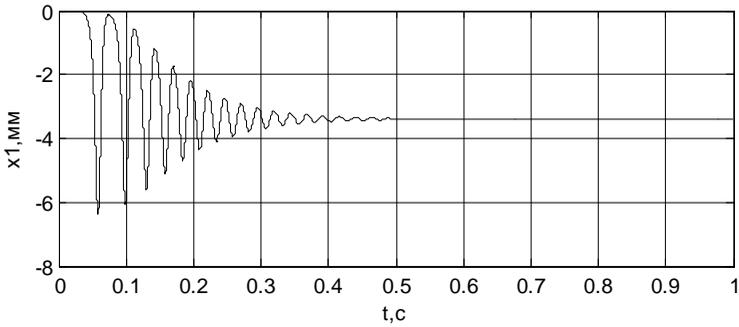
Временные траектории приведены на рис. 31 – 33.



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

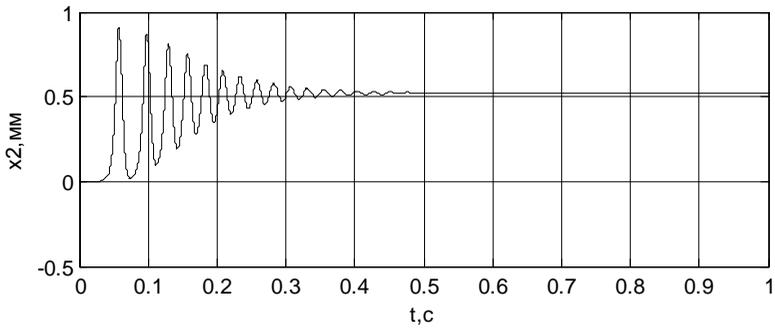


а)



б)

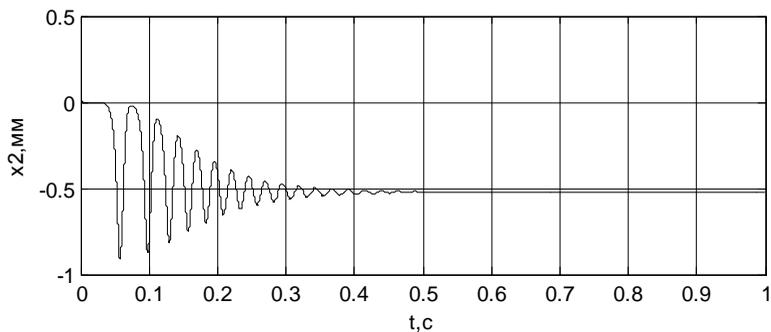
Рис.31. Временные характеристики координат состояния  $x_1$  при  $c_1^p = -900, \text{кГ} / \text{мм}$ .



а)



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления



б)

Рис.32. Временные характеристики координат состояния  $x_2$  при

$$c_1^p = -900, \text{кГ} / \text{мм}.$$

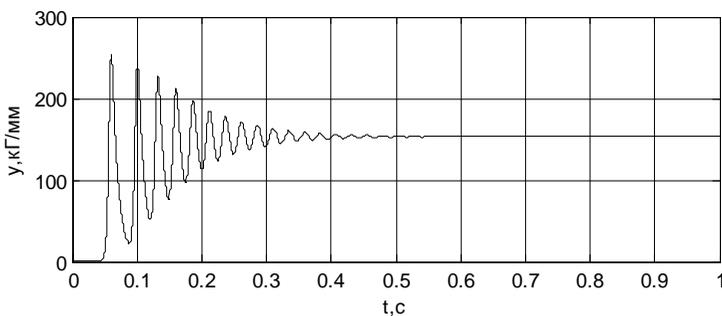


Рис. 33. Временная характеристика координат состояния  $y$  при

$$c_1^p = -900, \text{кГ} / \text{мм}.$$

При дальнейшем увеличении, начиная с  $c_1^p = -902.175, \text{кГ} / \text{мм}$  формируется симметричная сепаратрисная кривая (рис. 34), которая делит пространство состояния на три области. Две области притяжения двух точек равновесия и одна внешняя область характеризуется движением координат состояния от этих точек.

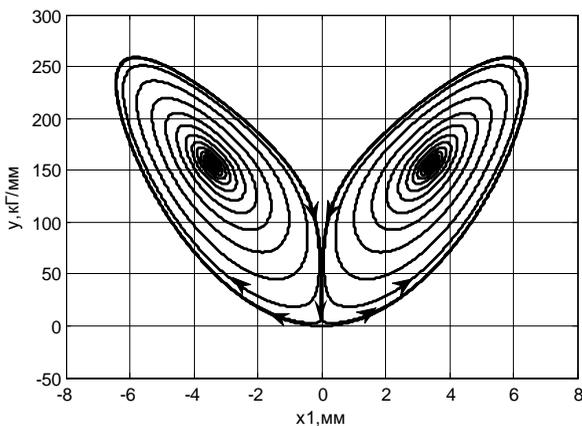


Рис. 34.  $c_1^p = -902.175, \text{кг/мм}$

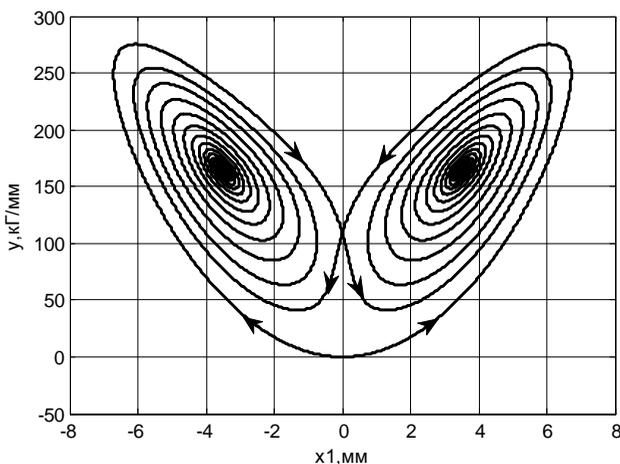


Рис. 35.  $c_1^p = -910, \text{кг/мм}$

Наконец, при  $c_1^p = -1050, \text{кг/мм}$  формируется хаотический аттрактор, который по своим характеристикам приближается к аттрактору Лоренца (рис. 36).

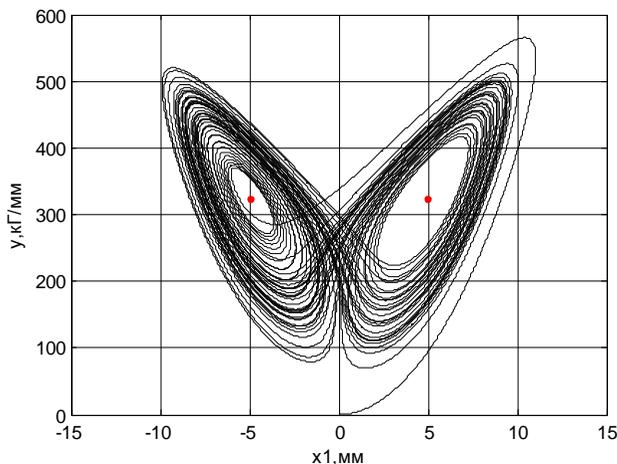


Рис. 36.  $c_1^p = -1050, \text{кг} / \text{мм}$

Аттрактор (рис. 36) характеризуется колебаниями достаточно широкого спектрального состава. Причем, его фрактальная размерность не является целой. Временные диаграммы изменения координат, соответствующие рассматриваемым преобразованиям приведены на рис. 37 - рис.39.

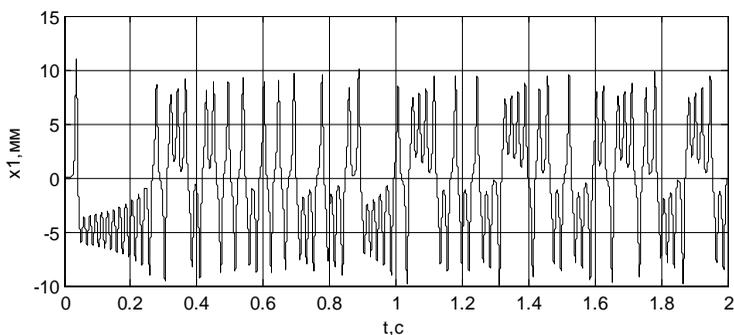


Рис.37. Временная характеристика координат состояния  $x_1$  при

$$c_1^p = -1050, \text{кг} / \text{мм}.$$

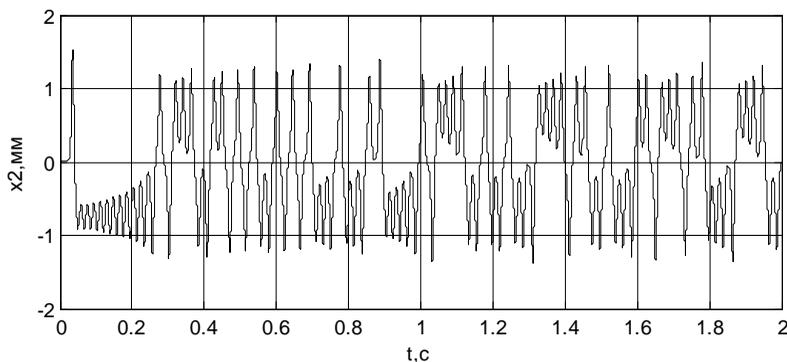


Рис.38. Временная характеристика координат состояния  $x_2$  при  $c_1^p = -1050, \text{кГ} / \text{мм}$ .

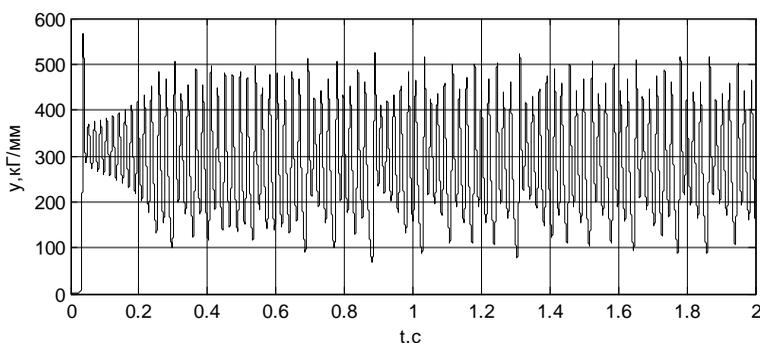


Рис. 39. Временная характеристика координат состояния  $y$  при  $c_1^p = -1050, \text{кГ} / \text{мм}$ .

Приведенный пример изменения свойств системы в зависимости от параметра, и формирование хаотического аттрактора является типичным примером, характеризующим движения инструмента относительно заготовки при использовании синергетической концепции анализа и синтеза систем. Подробнее проблемы



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

нелинейной динамики упругих деформационных смещений инструмента относительно заготовки будут рассмотрены ниже. Приведенный пример – лишь иллюстрация формирования в системе аттрактора, обладающего хаотическими свойствами колебаний.

### 2.4. Понятие о точечных отображениях

При анализе систем в фазовом пространстве необходимо учитывать, что построение фазовых траекторий реально только для систем, описываемых дифференциальными уравнениями не выше третьего порядка, то есть для случая, когда размерность фазового пространства не выше третьей. Если повышается размерность фазового пространства, то построение фазовых траекторий всегда является проблемой. В связи с этим в теории автоматического управления разработаны различные приемы качественного анализа фазовых траекторий. В разработку этих методов внесли большой вклад работы А.Пуанкаре, А.А.Андропова и его учеников.

Рассмотрим один из таких приемов, названных А.А.Андроновым методом точечных отображений. Проиллюстрируем этот метод на примере выявления предельных циклов (рис.40).

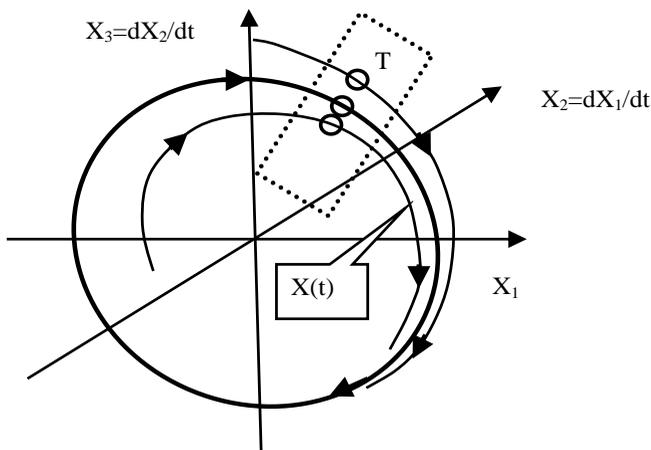


Рис. 40. Схема построения точечных отображений

Пусть задана поверхность «Т», трансверсально расположенная по отношению к фазовым траекториям (рис. 40). Трансверсально расположенная поверхность означает, что все фазовые траектории ее пересекают и при этом ни одна из траекторий ее не касается. Тогда для изучения свойств фазовых траекторий  $X(t)$  можно рассмотреть последовательности  $X(t_1), X(t_2), \dots$ , которые принимает траектория  $X(t)$  в точках ее пересечения с поверхностью «Т». Здесь можно рассмотреть, прежде всего, три случая (рис. 41). Первый случай – последовательности  $X(t_1), X(t_2), \dots$  являются расходящимися. Тогда рассматриваемая траектория характеризует отход от неустойчивой точки равновесия. Система является неустойчивой в целом. Второй случай – последовательности приближаются к некоторой точке. Тогда состояние, соответствующее этой точке является асимптотически устойчивым. Третий случай – последовательности находятся в одной точке. Тогда рассматриваемая траектория соответствует предельному



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

циклу. Мы здесь не рассматриваем другие возможные многообразия, которые могут образовываться в фазовом пространстве.

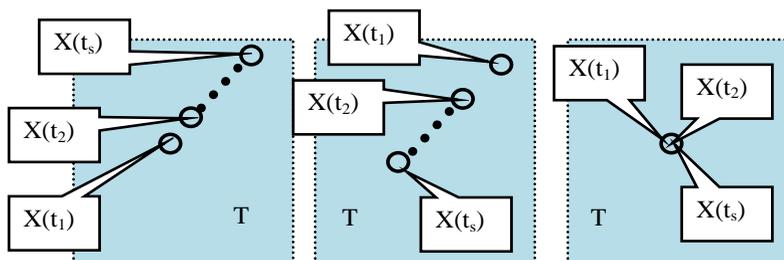


Рис. 41. Различные варианты точечных отображений

Метод точечных отображений позволяет понизить порядок дифференциального уравнения для качественного анализа нелинейных систем. Однако и в этом случае, если рассматривается система, имеющая высокий порядок дифференциальных уравнений, возникают практически не преодолимые сложности.

Особое место в методе точечных отображений занимает стробоскопическое отображение Пуанкаре. Пусть задана траектория  $X(t)$ . Представим ее в виде вектора последовательных отсчетов  $X^{(c)} = \{X(0), X(T), \dots, X(kT)\}^T$ . Здесь  $T$  – период стробоскопического отображения. Разобьем период  $T$  на  $n$  точек так, что  $T = n\Delta T$ . Обозначим отсчеты траектории  $X(t)$  в пределах первого периода  $T$  следующим образом  $\{X(0), X(\Delta T), \dots, X(n\Delta T)\}$ , причем  $T = n\Delta T$ . Тогда мы имеем  $n$  следующих последовательностей



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(c)}(0) = \{X(0), X(T), \dots, X(kT)\}^T; \\ X^{(c)}(\Delta T) = \{X(\Delta T), X(\Delta T + T), \dots, X(\Delta T + kT)\}^T; \\ \dots\dots\dots \\ X^{(c)}(n\Delta T) = \{X(n\Delta T), X(n\Delta T + T), \dots, X(n\Delta T + kT)\}^T. \end{array} \right. \quad (43)$$

Любая траектория в реальном объекте является возмущенной. Поэтому ее можно представить в виде

$$Y(t) = X(t) + \varepsilon(t), \quad (44)$$

где  $\varepsilon(t)$  в данном случае рассматривается как белый шум с математическим ожиданием равным нулю. Пусть мы имеем период  $T$ , равный периоду изменения  $X(t)$ . Наблюдаемой функцией является  $Y(t)$ . Определим математическое ожидание для каждой последовательности  $Y(t)$ , построенной по правилу (43). Тогда после операции среднестатистического усреднения очевидно равенство

$$Y^{(c)}(n\Delta T) = X^{(c)}(n\Delta T), \quad \varepsilon \Rightarrow 0. \quad (45)$$

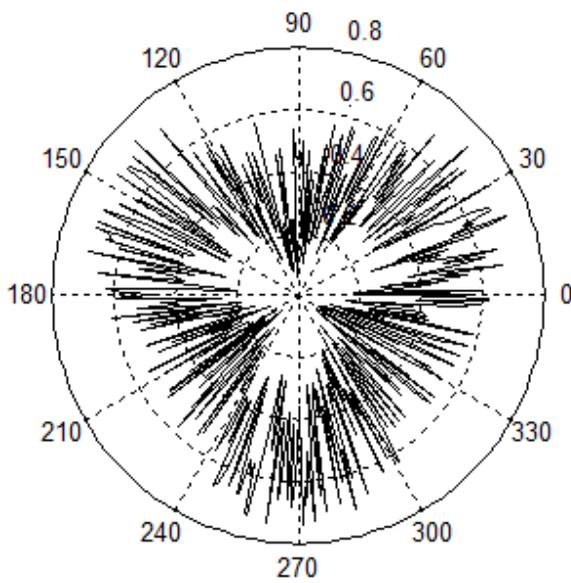
Таким образом, последовательности, составленные из стробоскопических отображений Пуанкаре, позволяют на уровне шума  $\varepsilon(t)$  восстановить периодический сигнал  $X(t)$ .

Во многих задачах практического анализа, например, связанных с диагностированием скрытых периодичностей в наблюдаемом сигнале, статистический анализ последовательностей, построенных по правилу (43), позволяет определить периодические изменения сигнала. Например, в процессах обработки деталей на металлорежущих станках определить погрешность формирования поперечного сечения детали. Приведем пример применения указанного алгоритма для случая обработки на токарном



станке при измерении силы резания (рис. 42).

Здесь скрытая периодичность имеет частоту равную трем частотам вращения шпинделя. Как видно на данном примере уже после 50 – и усреднений четко «высвечивается» скрытая периодичность. Для выявления скрытой периодичности можно использовать и другие статистические алгоритмы обработки данных, построенных по принципам стробоскопического отображения Пуанкаре.



а)

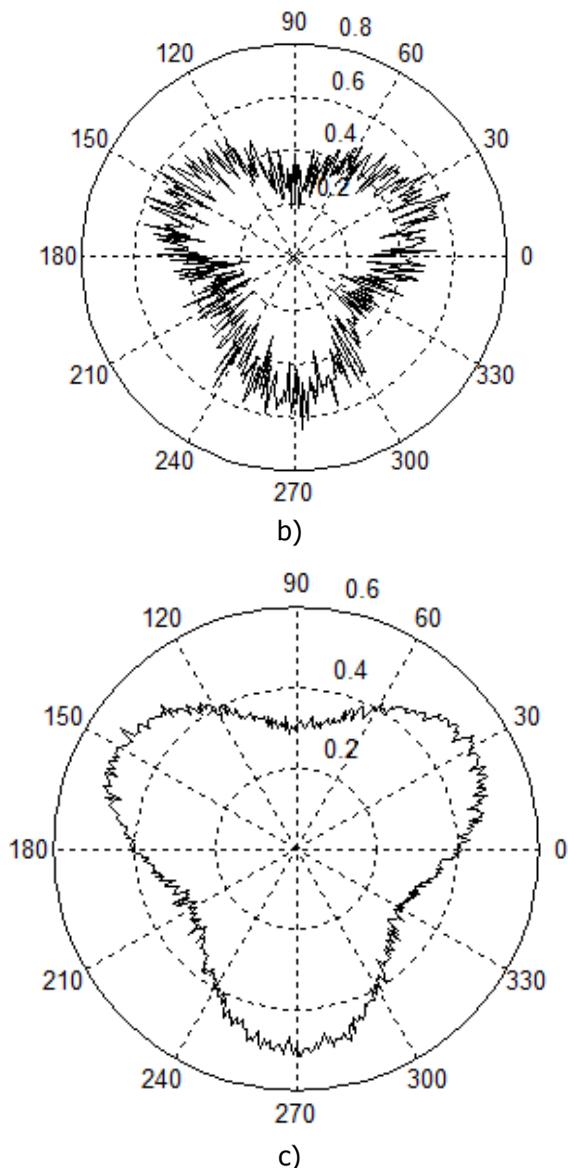


Рис.42. Пример использования операции стробоскопического отображения Пуанкаре для выявления погрешности формы поперечного сечения детали а) - исходная реализация, б), в) - усредненная по мере увеличения числа усреднений  $N = 5$ ,  $N = 50$ .



Качественные методы анализа динамики систем управления методом пространства состояния необходимо дополнить асимптотическими методами анализа.

### **3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

При описании динамики реальных объектов управления в полном объеме необходимо привлекать уравнения достаточно высокого порядка. Например, при построении систем управления процессами обработки на станках токарной группы даже в упрощенном варианте необходимо иметь систему дифференциальных уравнений 27 – го порядка [7]. В связи с этим возникает проблема, каким образом анализировать пространство состояния такой размерности. Такие примеры можно приводить при анализе различных объектов управления. Достаточно привести еще пример. Для описания движения одного твердого тела мы должны иметь дифференциальное уравнение двенадцатого порядка. Если принять во внимание, что схематизация динамической структуры любой машины определяется даже в простом представлении в виде нескольких твердых тел, объединенных некоторыми связями, то проблема прямого анализа и синтеза управления в такой системе становится необозримо сложной.

Проблема анализа и синтеза систем высокого порядка особенно актуальна для нелинейных систем. В данном случае речь идет не столько о точности линейной и нелинейной аппроксимации, а о качественном отличии свойств системы. Именно в нелинейных системах в окрестностях некоторых стационарных



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

траекторий, определяемых управлением, возможно существование различных многообразий. Среди них необходимо выделить орбитально асимптотически устойчивые предельные циклы (то есть автоколебания), формирование  $N$  - мерных инвариантных торов (то есть  $N$  - частотных стационарных состояний), образование странных аттракторов (то есть детерминированных траекторий, имеющих свойства хаотических колебаний). Все эти многообразия формируются исключительно в нелинейных системах. Кроме этого в нелинейных системах свойства системы зависят от рассматриваемых областей в пространстве состояний, а одному и тому же управлению в зависимости от начальных условий могут соответствовать различные траектории и свойства системы.

### **3.1. Асимптотические методы, основанные на анализе систем, имеющих малый параметр при старшей производной (метод Л.С. Понтрягина и А.Н. Тихонова).**

Проблема анализа и синтеза сложных нелинейных систем известна уже с пятидесятих годов прошлого века. В связи с этим в математике, а затем в теории автоматического управления стал развиваться подход, основанный на принципе разделения движений. Основы этого принципа положены в работах А.Н.Тихонова и Л.С.Понтрягина [10]. Применительно к теории автоматического управления принцип разделения движений разработан Геращенко Е.И. [1].

Изложим идеи этого метода элементарным способом. Для этого вновь обратимся к анализу системы общего вида, которую будем считать системой с постоянными параметрами, то есть к



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

системе вида

$$T \frac{dX}{dt} = f(X) + u(X), \tag{46}$$

где  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$  - вектор координат пространства состояния;

$f(X) = \{f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, f_n(X_1, X_2, \dots, X_n)\}^T$  - нелинейные вектор – функции, имеющие необходимо число производных по координатам  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ ;

$T$  - диагональная матрица коэффициентов.

Пусть коэффициенты  $T_i$  принадлежат двум множествам  $\mathfrak{T}^1$  и  $\mathfrak{T}^3$ . Причем, между ними имеется ещё одно множество  $\mathfrak{T}^2$  (рис. 43). При этом выполняется условие  $\mathfrak{T}^1 \subset \mathfrak{T}^2 \subset \mathfrak{T}^3$ . Границы этих множеств обозначим  $T^{0,1}$ ,  $T^{0,2}$  и  $T^{0,3}$ . Кроме этого положим, что справедливо  $T^{0,1} \ll T^{0,2}$ . Перегруппируем систему (46) таким образом, что первые  $k$  уравнений имеют  $T_i \in \mathfrak{T}^1 (i = 1, 2, 3 \dots k)$ , а последние  $n - k$  уравнений имеют  $T_i \in \mathfrak{T}^3$ . На рис. 43 звездами обозначены параметры  $T_i$ , соответствующие этому условию.

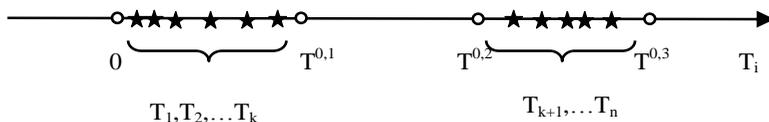


Рис. 43. Распределение множества параметров  $T_i$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Сделаем в (46) замену переменных  $t = T^{0,2}\tau$ , где  $\tau$  - безразмерное время, которое является «медленным» временем. При этом учтем, что  $T^{0,1} \ll T^{0,2}$ . Тогда  $dt = T^{0,2}d\tau$  и в (46) перейдем к безразмерному времени.

$$\frac{T}{T^{0,2}} \frac{dX}{d\tau} = f(X) + u(X), \tag{47}$$

где

$$\frac{T}{T^{0,2}} = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{T^{0,2}} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{T_k}{T^{0,2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T_{k+1}}{T^{0,2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{T_n}{T^{0,2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \varepsilon_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_{k+1}^{(\tau)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & T_n^{(\tau)} \end{bmatrix} = T^{(\tau)}$$

В (47) матрица  $T^{(\tau)}$  является матрицей безразмерных коэффициентов. Уравнение же (47) представлено в безразмерном времени. Проанализируем структуру матрицы  $T^{(\tau)}$ . Так как выполняется условие  $T^{0,1} \ll T^{0,2}$ , то для первых  $k$  уравнений

$$\varepsilon_i = \frac{T_i}{T^{0,2}} \Rightarrow 0, \text{ то есть является малым параметром в «медленном» времени } \tau.$$

Это значит, что в первых  $k$  уравнениях скорости являются малыми величинами и по первому приближению ими можно пренебречь. Тогда из (47) мы получаем порождающее уравнение, порядок которого уже равен  $n - k$ ,



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_1(X_1, X_2, \dots, X_n); \\ \dots \dots \dots \\ 0 = f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_k(X_1, X_2, \dots, X_n); \\ T_{k+1}^{(\tau)} \frac{dX_1}{d\tau} = f_{k+1}(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_{k+1}(X_1, X_2, \dots, X_n); \\ \dots \dots \dots \\ T_n^{(\tau)} \frac{dX_1}{d\tau} = f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_n(X_1, X_2, \dots, X_n). \end{array} \right. \quad (48)$$

Если из первых  $k$  уравнений исключить  $X_1, X_2, \dots, X_k$  путем выражения  $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$  через эти координаты, то мы получаем уравнение «медленных» движений относительно  $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{k+1}^{(\tau)} \frac{dX_{k+1}}{d\tau} = \varphi_{k+1}(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n) + U_{k+1}(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n); \\ \dots \dots \dots \\ T_n^{(\tau)} \frac{dX_n}{d\tau} = \varphi_n(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n) + U_n(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n), \end{array} \right. \quad (49)$$

где  $\varphi_i(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n), U_i(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n), i = k+1, \dots, n$  - новые нелинейные функции.

Уравнение (49) является уравнением «медленных» движений. Пусть решение (49) известно. Обозначим его  $\{X_{k+1,*}(\tau), X_{k+2,*}(\tau), \dots, X_{n,*}(\tau)\}^T$ . Переходя к естественному времени  $t = \frac{\tau}{T^{0,2}}$ , получаем уравнение «быстрых» движений

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \frac{dX_1(t)}{dt} = f_1(X_1, \dots, X_k, X_{k+1,*}, X_{k+2,*}, \dots, X_{n,*}) + u_1(X_1, X_2, \dots, X_{n,*}); \\ \dots \dots \dots \\ T_k \frac{dX_k(t)}{dt} = \varphi_k(X_1, X_2, \dots, X_{n,*}) + u_k(X_1, X_2, \dots, X_{n,*}), \end{array} \right. \quad (50)$$

в котором функции  $X_{k+1,*}(t), X_{k+2,*}(t), \dots, X_{n,*}(t)$  являются



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

заданными медленно меняющимися функциями времени.

Л.С. Понтрягиным показано, что при условии, когда решение (50) является асимптотически устойчивым, то траектории  $X_{k+1,*}(t), X_{k+2,*}(t), \dots, X_{n,*}(t)$  характеризуют притягивающее многообразие, то есть аттрактор. Таким образом, Анализ и синтез управления в системе (46) заменяется исследованием и синтезом управления в подсистеме «медленного» времени с последующим анализом асимптотической устойчивости траекторий в подсистеме «быстрого» времени.

В целом, вместо системы  $n$  - го порядка анализируются две иерархически связанные подсистемы «медленного» и «быстрого» времени соответственно  $k$  - го и  $n - k$  - го порядков. При рассмотрении реальных систем анализ существенно упрощается, так как управляющих воздействий, физически реализуемых, существенно меньше, а взаимосвязь между координатами упрощена. Принципиально, после анализа объекта управления и связи в нем между координатами состояния возможно параметры системы, стоящие при производных, разбивать на несколько групп. Тогда в соответствие исходной системе дифференциальных уравнений можно поставить несколько иерархических уровней подсистем по принципу «медленности» времени.

Приведем пример использования принципа разделения движений для случая управления процессами обработки на металлорежущих станках. Уравнения динамики управляемых формообразующих движений инструмента относительно заготовки можно представить в виде двух взаимосвязанных подсистем. Проанализируем эти подсистемы для случая, когда сервоприводами



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

являются двигатели постоянного тока с независимым возбуждением и якорным управлением. Одна подсистема определяет преобразование напряжений якоря, заданного по программе в функции времени, в координаты пространственных перемещений  $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)} = 0, X_3^{(0)}\}^T$  исполнительных элементов (рис. 44).

Вторая - упругие деформационные смещения вершины режущего инструмента  $X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ , по отношению к движениям исполнительных элементов. В приведённой схематизации деформации заготовки не принимаются во внимание. Уравнения движения исполнительных элементов станка без учета упруго-диссипативных характеристик механической части проводов определяются уравнениями сервоприводов. Для подсистемы преобразования управления в траектории исполнительных элементов станка

имеем [10]

$$T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = (c_e)^{-1} U(t) - (c_e)^{-1} U_M [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}] - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - E\omega, \quad (51)$$

$$\text{где } T_{ЭМ} T_{Э} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)} T_{Э}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)} T_{Э}^{(4)} \end{bmatrix};$$

$$T_{ЭМ} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)} \end{bmatrix} \quad - \text{диагональные матрицы, со-}$$

ставленные из постоянных времени трёх управляемых двигателей постоянного тока;



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{единичная диагональная матрица};$$

$$(c_e)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_e^{(1)})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_e^{(3)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_e^{(4)})^{-1} \end{bmatrix} \quad - \text{матрица, составленная из}$$

коэффициентов противо ЭДС двигателей  $c_e^{(i)}$ ;

$U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  - вектор управления, который может быть задан и в координатах перемещения суппорта, тогда этот вектор определяет программу ЧПУ станка;

$\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  - вектор частот вращения роторов двигателей;

$U_M = \{U_M^{(1)}, U_M^{(3)}, U_M^{(4)}\}^T$  - вектор функция моментов со-противления вращения роторов, приведённых к электрическим частям двигателей;

$$T_{ЭМ}^{(i)} = \frac{J_i R_i}{c_e^{(i)} c_M^{(i)}}, i = 1, 3, 4; \quad T_{Э}^{(i)} = \frac{L_i}{R_i}, i = 1, 3, 4; \quad c_M^{(i)}, R_i, L_i$$

- параметры двигателей;

$J_i$  - моменты инерции приводов, приведённые к роторам двигателей;

$$X(t) = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}^T,$$

$$\frac{X(t)}{dt} = \left\{ \frac{X_1(t)}{dt}, \frac{X_2(t)}{dt}, \frac{X_3(t)}{dt} \right\}^T \quad - \text{векторы упругих деформаций ре-}$$

жущего инструмента относительно суппорта и их скорости.

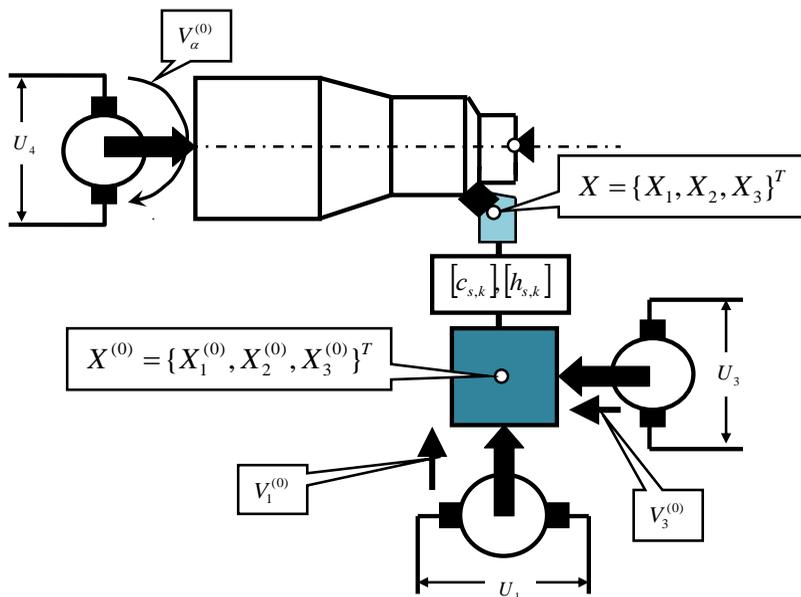


Рис.44. Обобщённая динамическая модель управляемой системы резания при точении

Таким образом, реакция со стороны процесса резания задается функциями  $U_M[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}]$ , значения которых определяются динамической моделью процесса резания [7]. В системе (51) частоты  $\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  отличаются от скоростей перемещения исполнительных элементов  $V^0 = dX^{(0)} / dt = \{V_1^{(0)}, V_3^{(0)}, V_\alpha^{(0)}\}^T$  коэффициентами, определяемыми передаточными отношениями редукторов. Таким образом, например, координата  $X_3^{(0)}$  определяется  $X_3^{(0)} = \int_0^t V_3^{(0)}(t) dt$ .

Причем,  $t = 0$  определяет начало процесса резания. Система (51) определяет три автономные подсистемы при условии, что



$U_M[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}] = 0$ . Это условие зависит от свойств

редуктора, преобразующего вращение в поступательные движения. Здесь необходимо учитывать передаточное отношение редуктора. При большом передаточном отношении реакцией со стороны процесса резания можно пренебречь. Что касается вращения шпинделя, то в большинстве случаев можно считать, что двигатель установлен непосредственно на шпинделе. В этом случае необходимо учитывать силовую реакцию со стороны зоны резания на вращение шпинделя.

Если ограничиться линейным приближением упругих свойств подсистемы инструмента и считать подсистему заготовки недеформируемой, то динамика формирования упругих деформационных смещений вершины инструмента с учетом базовой динамической модели будет описываться следующей системой

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}], \quad (52)$$

где  $m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$ ,  $h = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & h_{3,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & h_{3,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & h_{3,3} \end{bmatrix}$ ,

$c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix}$  - матрицы инерционных, диссипативных и

упругих параметров, которые определяются по правилам, изложенным во второй главе;



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$  - вектор упругих деформационных смещений вершины инструмента;

$$F = F_0[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}] \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$$
 - динамическая характеристика процесса резания.

Для дальнейшего совместного анализа систем (51) и (52) воспользуемся свойствами систем дифференциальных уравнений, имеющих малый параметр при старшей производной [184, 185].

Для этого сделаем замену переменных  $t = \tau \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}$ , то есть введём в рассмотрение безразмерное время  $\tau$ . Кроме этого уравнение в (52) представим в следующем виде

Для этого сделаем замену переменных  $t = \tau \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}$ , то есть введём в рассмотрение безразмерное время  $\tau$ . Кроме этого уравнение в (52) представим в следующем виде

$$(T)^2 \frac{d^2 X}{dt^2} + 2\xi T \frac{dX}{dt} + c^{(\tau)} X = c_0^{-1} F, \tag{53}$$

$$\text{Где } c_0^{-1} = \begin{bmatrix} (c_{1,1})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^{-1} \end{bmatrix};$$

$$(T)^2 = \begin{bmatrix} (T_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (T_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (T_3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{c_{1,1}} & 0; & 0 \\ 0; & \frac{m}{c_{2,2}} & 0 \\ 0; & 0; & \frac{m}{c_{3,3}} \end{bmatrix};$$

$$2\xi T = \begin{bmatrix} 2\xi_{1,1}T_1 & 2\xi_{2,1}T_1 & 2\xi_{3,1}T_1 \\ 2\xi_{1,2}T_2 & 2\xi_{2,2}T_2 & 2\xi_{3,2}T_2 \\ 2\xi_{1,3}T_3 & 2\xi_{2,3}T_3 & 2\xi_{3,3}T_3 \end{bmatrix} = h \cdot c_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{h_{1,1}}{c_{1,1}} & \frac{h_{2,1}}{c_{1,1}} & \frac{h_{3,1}}{c_{1,1}} \\ \frac{h_{1,2}}{c_{2,2}} & \frac{h_{2,2}}{c_{2,2}} & \frac{h_{3,2}}{c_{2,2}} \\ \frac{h_{1,3}}{c_{3,3}} & \frac{h_{2,3}}{c_{3,3}} & \frac{h_{3,3}}{c_{3,3}} \end{bmatrix};$$

$$c^{(\tau)} = c \cdot c_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{2,1}}{c_{1,1}} & \frac{c_{3,1}}{c_{1,1}} \\ \frac{c_{1,2}}{c_{2,2}} & 1 & \frac{c_{3,2}}{c_{2,2}} \\ \frac{c_{1,3}}{c_{3,3}} & \frac{c_{2,3}}{c_{3,3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

После введения безразмерного времени  $\tau$  вместо (51) имеем

$$T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} = (c_e)^{-1} U(\tau) - (c_e)^{-1} U_M [S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, X(\tau), 0] - \frac{T_{\text{ЭМ}}}{\sqrt{T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}}}} \frac{d\omega}{d\tau} - E\omega \quad (54)$$

$$\text{где } T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{\text{ЭМ}}^{(3)} T_{\text{Э}}^{(3)}}{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{\text{ЭМ}}^{(4)} T_{\text{Э}}^{(4)}}{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} \end{bmatrix};$$



$$\frac{T_{ЭМ}}{\sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}} = \begin{bmatrix} \frac{T_{ЭМ}^{(1)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(3)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(4)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} \end{bmatrix};$$

$$(c_e)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_e^{(1)})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_e^{(3)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_e^{(4)})^{-1} \end{bmatrix};$$

$$U_{\Sigma} = \{(U_1 - U_M^{(1)}), (U_3 - U_M^{(3)}), (U_4 - U_M^{(4)})\}^T.$$

Кроме этого, вместо (53) имеем

$$(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} \frac{d^2 X}{d\tau^2} + 2\xi T / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \frac{dX}{d\tau} + c^{(\tau)} X = c_0^{-1} F, \quad (55)$$

где

$$(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} = \begin{bmatrix} (T_1)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & (T_2)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & (T_3)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} \end{bmatrix};$$

$$2\xi T / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 2\xi_{1,1} T_1 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{2,1} T_1 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{3,1} T_1 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \\ 2\xi_{1,2} T_2 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{2,2} T_2 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{3,2} T_2 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \\ 2\xi_{1,3} T_3 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{2,3} T_3 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{3,3} T_3 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \end{bmatrix};$$

$$F = F_0 [S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, X(t), \frac{T_p}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} \frac{dX(t)}{dt}] \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T.$$

В уравнениях (54) и (55) все элементы матриц представляют безразмерные величины. Их можно проанализировать на



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

предмет введения малых параметров. Очевидно, что все элементы матриц  $(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}$  и  $2\xi T / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}$  стремятся к нулю, так как инерционные постоянные времени, по крайней мере, на два порядка меньше, чем электромеханическая и электрическая постоянные времени. Кроме этого все коэффициенты затухания не больше, чем 0,08. Кроме этого величина  $\frac{T_p}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0.5}}$  также является малой, так как  $T_p$  не превышает значений (0,01-0,015).

Согласно изложенному в третьей главе принципу для рассматриваемого класса систем асимптотические свойства при совместном рассмотрении уравнений (54) и (55) определяются уравнением «медленных» движений. Его удобно записать в реальном времени

$$\begin{cases} T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = (c_e)^{-1} U(t) - (c_e)^{-1} U_M [S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, X(t), 0] - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - E\omega; \\ cX = F [S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, X(t), 0]. \end{cases} \quad (56)$$

Пусть при заданном управлении  $U(t)$  определено решение системы (56) в виде  $\omega(t)$ ,  $X^{(0)}(t)$  и  $X^*(t)$ . Первые две функции отличаются коэффициентами, определяемыми передаточными отношениями редукторов. Функция  $X^*(t)$  характеризует установившиеся упругие деформации вершины инструмента, которые являются стационарными решениями уравнения (52). Решения  $\omega(t)$ ,  $X^{(0)}(t)$  и  $X^*(t)$  будут характеризовать притягивающее многообразие в том случае, если уравнение в вариациях относительно  $X^*(t)$  будут асимптотически устойчивыми. Поэтому для



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

анализа кроме уравнения (56) необходимо рассмотреть уравнение в вариациях относительно  $X^*(t)$ . После замены

$X(t) = X^*(t) + x(t)$  из (52) получаем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + cx = \varphi[S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, X^*(t), x(t), T_p \frac{dx(t)}{dt}], \quad (57)$$

где

$$\varphi = F[S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t), X^*(t), x(t), T_p \frac{dx(t)}{dt}] - F[S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t), X^*(t), 0]$$

- вектор- нелинейные функции, рассматривающие вариации сил резания относительно вариаций упругих деформационных смещений в окрестности стационарной траектории  $X^*(t)$ .  $\varphi = 0$  при

$$x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0.$$

Так как на данном этапе системы (57) является не возмущённой траектория  $X^*(t)$ , как и функции  $S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t)$  являются решением системы (56)), то при условии асимптотической устойчивости тривиального решения системы (57) решение (56)  $X^*(t)$  будет аттрактором, к которому притягиваются все траектории (рис.45).

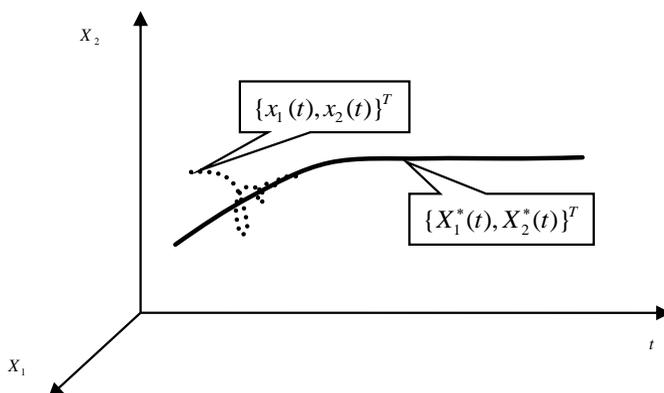


Рис. 45. Представление упругих деформационных смещений в виде Траекторий «медленных» и «быстрых» движений

Траекторию  $X^*(t)$  и соответствующие ей функции изменения сил, площади срезаемого слоя и технологических режимов будем называть стационарным многообразием динамической системы резания или стационарной траекторией деформационных смещений вершины инструмента относительно траекторий исполнительных перемещений суппорта станка. Система (56) является системой «медленных» движений. Система (57), рассматривающая упругие деформационные свойства вершины режущего инструмента относительно траектории «медленных» движений, является системой «быстрых» движений.

### 3.2. Асимптотические методы анализа нелинейных систем (метод Крылова-Боголюбова – Митропольского)

Второе направление анализа нелинейных систем автоматического управления связано с разработанной теорией асимптотических методов нелинейной динамики. Истоки этого метода ле-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

жат в работах А.Пуанкаре и М.А. Ляпунова. Основные положения этого метода сформулированы, развиты и доказаны Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым и Ю.А. Митропольским [10]. Однако необходимо признать, что все идеи метода принадлежат, в основном, Анри Пуанкаре.

Рассмотренные в предыдущем параграфе методы анализа нелинейных систем относятся к таким системам, у которых в системе дифференциальных уравнений удастся выделить несколько уравнений, в которых перед производными стоит «большой» параметр. Именно в этом случае имеется возможность построить иерархию взаимосвязанных дифференциальных уравнений по принципу «медленности» времени.

Второй большой класс нелинейных систем автоматического управления определяется следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = \mathcal{E} \left( X, \frac{dX}{dt} \right), \quad (58)$$

где  $n$  - малые параметры, стоящие перед вектор – функцией

$$f(X) = \{f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, f_n(X_1, X_2, \dots, X_n)\}^n$$

В отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, здесь рассматриваются системы, имеющие малый параметр не при производных, а перед нелинейной функцией. Такие системы называются квазилинейными [10]. Кроме этого рассматриваются системы, состоящие из уравнений второго порядка. Это связано с тем, что при составлении дифференциальных уравнений используются методы Лагранжа или Гамильтона. Нелинейные же функции, зависящие от координат и их производных, вводятся



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

в систему прямым образом. Примером такой системы является следующее скалярное уравнение Ван-дер-Поля, которое по своим свойствам аналогично проанализированному ранее уравнению Релея,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = \varepsilon(1 - X^2) \frac{dX}{dt}. \quad (59)$$

Именно для этого уравнения голландским инженером Ван-дер-Полем предложен метод построения решений, который в дальнейшем был развит Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым и Ю.А. Митропольским. Ими были предложены и доказаны не только условия сходимости решений в виде асимптотических разложений для системы общего виде (58), но и рассмотрены различные случаи, в том числе и случай неавтономной системы, системы, в которой рассматриваются медленные изменения внешнего возмущения и пр.

Вначале проанализируем систему (59). Ее анализ показывает, что при  $X \Rightarrow 0$  значением  $X^2$  можно пренебречь. Тогда в окрестности равновесия  $X = 0$  система становится неустойчивой, так как характеристический полином в этом случае имеет один корень с положительной вещественной частью (или два комплексно сопряженных корня с положительными вещественными частями). Однако по мере отхода координат состояния от точки равновесия непропорционально быстро возрастает влияние  $X^2$ . При этом знак при  $\frac{dX}{dt}$  изменяется. С физической точки

зрения в этом случае отрицательное трение становится положительным. Силы, формируемые скоростным членом, изменяют свое направление, и становятся силами, направленными против скоро-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

сти. В результате в системе всегда формируется устойчивый предельный цикл, то есть автоколебания. Кроме этого, так как при нелинейной функции стоит малый параметр, то при  $\varepsilon = 0$  решением (59) является

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \theta), \quad (60)$$

причем,  $X_0$  и  $\theta$  будут постоянными во времени величинами, зависящими от начальных условий. Для дальнейшего обозначим  $\omega t + \theta = \psi$ .

Наличие нелинейного возмущения при  $\varepsilon \neq 0$  приводит к появлению в решении уравнений обертонов, обуславливает зависимость  $\psi$  от амплитуды и, наконец, может вызывать систематическое увеличение или уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от притока или поглощения энергии возмущающими силами  $f(X, \frac{dX}{dt})$ . В частности для системы (59) по мере увеличения амплитуды возрастает поглощение энергии. Именно поэтому в системе (59) формируется орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл. Все эти эффекты, очевидно, исчезают в предельном случае при  $\varepsilon = 0$ .

Принимая во внимание эти обстоятельства, Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым предложено решение (59) искать в виде следующего асимптотического разложения

$$X(t) = X_0(t) \cos \psi(t) + \varepsilon u_1[X_0(t), \psi(t)] + \varepsilon^2 u_2[X_0(t), \psi(t)] + \varepsilon^3 u_3[X_0(t), \psi(t)] + \dots \quad (61)$$

В (61)  $u_1(X_0, \psi)$ ,  $u_2(X_0, \psi)$ ,  $u_3(X_0, \psi)$ ... являются периодическими функциями  $\psi$ , а  $X_0, \psi$  являются решениями вспомогательных уравнений



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = \varepsilon A_1(X_0) + \varepsilon^2 A_2(X_0) + \dots; \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(X_0) + \varepsilon^2 B_2(X_0) + \dots \end{cases} \quad (62)$$

В частности, если рассматривается только инвариантное многообразие типа устойчивого предельного цикла, то  $\frac{dX_0}{dt} = 0$

и  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ . Тогда решение (59) ищется в виде

$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \theta)$ , где параметры системы есть константы. В этом случае в (58) нелинейные функции  $f_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$  рассматриваются усредненными по периоду колебаний. Этот случай широко используется в теории автоматического управления для вычисления параметров одночастотных автоколебаний. Он носит название метода гармонической линеаризации, который изучался в традиционном курсе по теории автоматического управления. Именно для этого случая сформулирован и доказан критерий определения автоколебаний Гольдфарбом.

В тех случаях, когда рассматривается переходной процесс, то есть  $X_0(t)$  амплитуда есть функция времени, то можно воспользоваться непосредственно методом Ван-дер-Поля. Проиллюстрируем использование этого метода на примере анализа следующей скалярной системы

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \omega^2 X = \varepsilon f\left(X, \frac{dX}{dt}\right), \quad (63)$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр;  $\omega$  - резонансная частота системы при  $\varepsilon = 0$ .

Для системы (63) рассматривается уравнение



$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \omega^2 X = 0, \quad (64)$$

которое называется порождающим. В фазовой плоскости траектория, соответствующая решению (64) есть предельный цикл, параметры которого зависят от начальных условий. При этом решением (64) является

$$X(t) = X_0 \cos \psi, \quad (65)$$

где  $\psi = \omega(t + t_0)$ ;  $X_0 = const$ ,  $t_0 = const$  - параметры, определяемые начальными условиями.

Естественно решение (63) искать в виде (65). Однако за счет  $\mathcal{E}(X, \frac{dX}{dt})$  будет изменяться во времени  $X_0 = X_0(t)$  и  $\psi(t)$ . Причем скорость их изменения мала, так как в правой части (63) перед нелинейной функцией стоит малый параметр. В частности, в пределах периода колебаний  $X_0$  можно считать постоянным. С учетом этого найдем производную

$$\frac{dX(t)}{dt} = -X_0 \omega \sin \psi. \quad (66)$$

Составим теперь дифференциальное уравнение, которому должны удовлетворять функции  $X_0(t)$  и  $\psi(t)$ . Для этого продифференцируем (65) в предположении, что  $X_0(t)$  и  $\psi(t)$  - есть функции времени, то есть

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{dX_0}{dt} \cos \psi - X_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi. \quad (67)$$

Приравнивая приближенное уравнение (66) и (67) получаем первое дифференциальное уравнение относительно  $\frac{dX_0}{dt}$  и  $\frac{d\psi}{dt}$



$$\frac{dX_0}{dt} \cos \psi - X_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi + X_0 \omega \sin \psi = 0 - \quad (68)$$

- это уравнение определяет условие совместимости.

Для понимания этого условия необходимо учитывать два обстоятельства. Во-первых, так как в правой части (63) стоит малый параметр, то отклонение траекторий от (65) являются малыми. Это значит, что амплитуда во времени меняется мало. Поэтому

$\frac{dX_0}{dt} \Rightarrow 0$ . Во-вторых, необходимо учитывать изменение амплитуды во времени.

Дифференцируя далее (68) по времени, получаем

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = -\frac{dX_0}{dt} \omega \sin \psi - \frac{d\psi}{dt} X_0 \omega \cos \psi. \quad (69)$$

Теперь подставим (69) в исходное уравнение (63). В результате получаем еще одно уравнение для определения  $\frac{dX_0}{dt}$  и

$$\frac{d\psi}{dt} - \frac{dX_0}{dt} \omega \sin \psi - \frac{d\psi}{dt} X_0 \omega \cos \psi + \omega^2 X_0 \cos \psi = \varepsilon [X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi]. \quad (70)$$

Таким образом, мы имеем систему, разрешенную относительно  $\frac{dX_0}{dt}$  и  $\frac{d\psi}{dt}$ ,

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} \omega \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} X_0 \omega \cos \psi = \omega^2 X_0 \cos \psi - \varepsilon [X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi]; \\ \frac{dX_0}{dt} \cos \psi - X_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi = -X_0 \omega \sin \psi. \end{cases} \quad (71)$$

Ее легко преобразовать к следующему виду

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = \frac{\Delta_{X_0}}{\Delta} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \sin \psi; \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{\Delta_{\psi}}{\Delta} = \omega - \frac{\varepsilon}{X_0 \omega} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \cos \psi, \end{cases} \quad (72)$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} \omega \sin \psi & X_0 \omega \cos \psi \\ \cos \psi & -X_0 \sin \psi \end{vmatrix} = -X_0 \omega;$$

$$\Delta_{\dot{X}_0} = \begin{vmatrix} \omega^2 X_0 \cos \psi - \mathcal{E}[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] & X_0 \omega \cos \psi \\ -X_0 \omega \sin \psi & -X_0 \sin \psi \end{vmatrix} = \varepsilon X_0 f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \sin \psi;$$

$$\Delta_{\dot{\psi}} = \begin{vmatrix} \omega \sin \psi & \omega^2 X_0 \cos \psi - \mathcal{E}[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \\ \cos \psi & -X_0 \omega \sin \psi \end{vmatrix} = -X_0 \omega^2 + \mathcal{E}[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \cos \psi.$$

Проанализируем систему (72), которая эквивалентна системе (63). Первое уравнение в (72) показывает, что переменное

$X_0$  меняется медленно, так как  $\varepsilon$  - малый параметр ( $\frac{dX_0}{dt} \Rightarrow 0$ ).

Поэтому мы не сделаем большой ошибки, если правые части (72) заменим их средними значениями за период колебаний, то есть

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \tilde{f}_1[X_0]; \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{X_0 \omega} \tilde{f}_2[X_0], \end{cases} \quad (73)$$

$$\text{где } \tilde{f}_1(X_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \sin \psi d\psi;$$

$$\tilde{f}_2(X_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \cos \psi d\psi.$$

Первое уравнение в (73) является уравнением «медленных» движений, так как скорость  $\frac{dX_0}{dt}$  мала (справа стоит малый

параметр) Второе уравнение – есть уравнение быстрых движений, так как справа стоит частота, которая мало меняется за счет второго слагаемого, зависящего от амплитуды. Кроме этого нелинейная функция усредняется по периоду колебаний. С помощью (73) можно исследовать главные особенности поведения квазилиней-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

ных систем во времени. Причем, при исследовании (73) в инженерных приложениях обычно достаточно анализировать первое уравнение, позволяющее вычислить закон изменения амплитуды во времени. Малые вариации частоты обычно не рассматриваются.

В нелинейной динамике уравнения (73) называются укороченными или уравнениями Ван-дер-Поля. Они во своем виде напоминают две составляющих эквивалентной передаточной функции нелинейного элемента в методе гармонической линеаризации. Однако в отличие от метода гармонической линеаризации с помощью (73) можно анализировать не стационарное состояние, а переходные процессы. Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым показано, что уравнения (73) соответствуют тем, которые получаются по первому приближению исходя из разработанной ими теории асимптотических методов анализа нелинейных систем.

Анализируя состояние разработанных методов анализа нелинейных систем, необходимо отметить, что эти методы применимы лишь для анализа одночастотных процессов, в том числе для определения автоколебаний. При анализе двухчастотных процессов (двумерных инвариантных торов) эти методы становятся настолько громоздкими, что практически не используются в практике анализа конкретных систем. При анализе хаотических (странных) аттракторов они не применимы в принципе. Кроме этого эти методы рассматривают квазилинейные системы, то есть системы, в которых при нелинейной функции имеется возможность установить малый параметр. В связи с развитием вычислительной техники для анализа нелинейных систем в настоящее время большее распространение получили методы прямого ин-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

тегрирования уравнений динамики. Однако все приближенные методы интегрирования имеют большой недостаток, заключающийся в том, что нет возможности анализа и оценки точности получаемых результатов. Это относится особенно к тем случаям, когда система обладает большой чувствительностью к вариациям параметров и начальных условий.

### 3.3. Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации позволяет изучать стационарные состояния системы, прежде всего, состояние установившихся периодических движений, в том числе автоколебаний, а также смещение точки равновесия в зависимости от периодических движений. Причем, периодические движения могут быть автоколебаниями и (или) вынужденными колебаниями. Этот метод непосредственно вытекает из метода Крылова – Боголюбова – Митропольского, рассмотренного в предыдущем параграфе. Вначале рассмотрим идею метода. Причем, при изложении идеи метода не будем ориентироваться на приведенные в предыдущем параграфе результаты.

#### 3.3.1. Понятие о гармонической линеаризации

Ограничимся случаем, когда система имеет один нелинейный элемент, представляющий собой нелинейную монотонную функцию относительно некоторой координаты. Причем, нелинейная функция может быть и двузначной (например, реле с зоной

неоднозначности). Тогда систему можно представить в виде линейного и нелинейного блоков (рис.46).

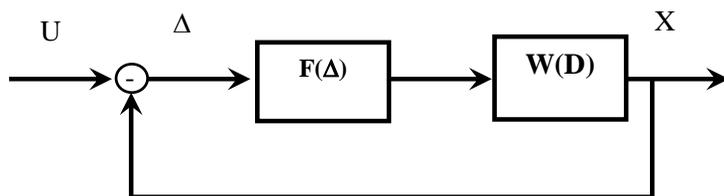


Рис. 46. Представление системы в виде линейного и нелинейного блоков

Будем исследовать в системе рис. 46 периодические движения. Сформулируем обобщенную гипотезу фильтра следующим образом: независимо от количества гармонических составляющих на выходе нелинейного элемента линейная часть с частотной передаточной функцией  $W(j\omega)$  избирает только составляющие с первой гармоникой и постоянной составляющей. В дальнейшем мы обобщим это представление на случай, когда на выходе линейного элемента избирается дискретное конечное множество частот.

Итак, рассмотрим случай, когда стационарным состоянием системы на выходе линейного элемента является

$$X(t) = X_0 + X \sin(\Omega t). \quad (74)$$

Тогда на входе нелинейного элемента при  $U = const$  мы имеем

$$\Delta(t) = U - X_0 - X_1 \sin(\Omega t) = X_U - X_1 \sin(\Omega t). \quad (75)$$

Так как линейная часть системы обладает свойством



фильтра, то

$$F(t) = F_0 + F_1 \sin(\Omega t) + F_2 \cos(\Omega t) + \varepsilon(t), \quad (76)$$

$$\text{где } F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[X_U - X_1 \sin(\Omega t)] d\Omega t;$$

$$F_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[X_U - X_1 \sin(\Omega t)] \sin(\Omega t) d\Omega t;$$

$$F_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[X_U - X_1 \sin(\Omega t)] \cos(\Omega t) d\Omega t;$$

$\varepsilon(t) \Rightarrow 0$  - в силу гипотезы фильтра.

### 3.3.2. Случай симметричных периодических движений

Вначале рассмотрим случай, когда в точке  $\Delta = 0$  нелинейная функция в вариациях относительно  $\Delta$  обладает свойством центральной симметрии. Кроме этого будем полагать, что  $X_U = 0$ . Например, рассматривается нелинейный элемент типа идеального реле (рис. 47). Заметим, что при  $X_U \neq 0$  идеальное реле уже не обладает свойством центральной симметрии, как показано на рис. 47.

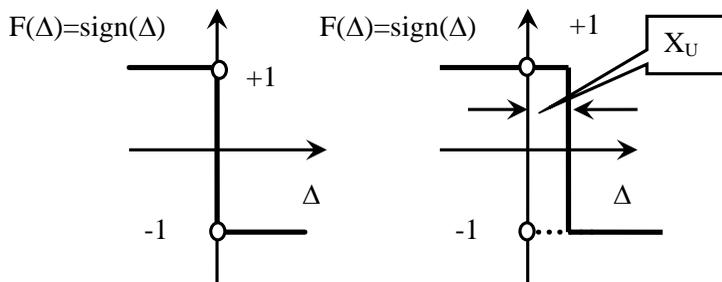


Рис. 47. Представление системы в виде линейного и нелинейного блоков

Для рассматриваемого случая  $F_0 = 0$ , и тогда для установившихся периодических движений с частотой  $\Omega$  справедливо

$$X_1 \sin(\Omega t) + W(j\Omega)\{F_1 \sin(\Omega t) + F_2 \cos(\Omega t)\} = 0. \quad (77)$$

Примем во внимание, что для установившихся периодических движений  $\cos(\Omega t) = j \sin(\Omega t)$ . Тогда

$$1 + W(j\Omega)\{q_1(X_1) + jq_2(X_1)\} = 0, \quad (78)$$

где  $q_1(X_1) = \frac{F_1(X_1)}{X_1}$ ,  $q_2(X_1) = \frac{F_2(X_1)}{X_1}$  - функции влияния амплитуды на входе нелинейного элемента на его выход.

Выражение  $\{q_1(X_1) + jq_2(X_1)\}$  в отечественной литературе называется эквивалентной передаточной функцией нелинейного элемента.

Рассмотрим некоторые важные свойства выражения (78) и свойства эквивалентной передаточной функции.

1) Если бы нелинейный элемент представлялся в линеаризованном виде, то эквивалентная передаточная функция не зависела бы от амплитуды и выражение (78) фактически определяло



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

бы характеристическое уравнение системы в замкнутом состоянии.

2) Пусть нелинейная функция  $F(X_1)$  является однозначной. Тогда в (77)  $F_2(X_1) \equiv 0$  и эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента есть эквивалентный коэффициент усиления  $q_1(X_1)$ , значение которого зависит от амплитуды входного сигнала. Например, в случае идеального реле (левая иллюстрация на рис. 47) вычислим  $F_1(X_1)$

$$F_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign}[X_1 \sin(\Omega t)] \sin(\Omega t) d\Omega t = \frac{4}{\pi}. \text{ Следовательно,}$$

$$q_1(X_1) = \frac{4}{\pi X_1}. \tag{79}$$

Мы видим, что в зависимости от амплитуды значение эквивалентного коэффициента усиления идеального реле изменяется от бесконечности до нуля при увеличении амплитуды на входе нелинейного элемента.

3) Пусть нелинейная функция  $F(X_1)$  является двузначной. Например, рассматривается нелинейный элемент типа реле с зоной неоднозначности или любая гистерезисная нелинейная функция. Тогда в (77)  $F_2(X_1) \neq 0$  и эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента есть эквивалентный комплексный коэффициент усиления  $\{q_1(X_1) + jq_1(X_1)\}$ , вещественная и мнимая части которого зависят от амплитуды входного сигнала. В этом случае связь между входом нелинейного элемента и первой гармонической составляющей на его выходе определя-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

ется не только изменением модуля, но и фазы.

4) Пусть нелинейная функция  $F(X_1, \frac{dX_1}{dt})$  зависит не только от координаты, но и от ее производной. Тогда  $\{q_1(X_1, \Omega) + jq_1(X_1, \Omega)\}$  вещественная и мнимая части в эквивалентной передаточной функции зависят не только от амплитуды, но и от частоты периодических движений. Это самый общий случай. Обычно при рассмотрении типовых нелинейных элементов достаточно ограничиться вторым и третьим случаями.

Гармонически линеаризованное уравнение динамики (78) позволяет эффективно анализировать автоколебания системы. Как это ясно из всего материала, изложенного ранее, для анализа автоколебаний необходимо решать две задачи. **Во-первых**, необходимо определить периодические решения исходной системы. Для нашего случая – это определение частоты  $\Omega$  и амплитуды  $X_1$ , при которых (78) обращается в тождество. Во-вторых, из периодических решений необходимо выбрать орбитально асимптотически устойчивые решения.

Рассмотрим наиболее распространенный графоаналитический способ определения автоколебаний, предложенный Л.С. Гольдфарбом. Для этого представим (78) в виде

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{\{q_1(X_1) + jq_2(X_1)\}}. \tag{80}$$

В том случае, когда нелинейная функция  $F(X)$  зависит только от координаты  $X$ , но не от производных от координаты, то удастся гармонически линеаризованное уравнение представить в виде двух независимых графов: АФЧХ линейной части



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

системы, зависящей от частоты и характеристики обратного частотного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента, зависящего от амплитуды (рис. 49). Тогда точка пересечения годографов (рис. 49 «а») дают параметры периодических решений гармонически линеаризованного уравнения динамики. На приведенной иллюстрации – это точки « $A(X_{1,1}, \Omega_1)$ » и « $B(X_{1,2}, \Omega_2)$ ». **Во-вторых**, из этих точек необходимо выбрать те, для которых периодическое решение является орбитально асимптотически устойчивым. Строго говоря, для этого необходимо воспользоваться теорией Флоке, основные положения которой будут рассмотрены в следующей главе. Однако здесь можно воспользоваться упрощенным условием орбитальной асимптотической устойчивости. Ограничимся случаем, когда по мере изменения амплитуды не меняется частота. Тогда периодическое решение будет устойчивым, если выполняются два условия (рис. 49 «b»). При увеличении амплитуды (приращение  $+\Delta X_j$ ) траектория с течением времени должна уменьшаться. В этом случае комплексный коэффициент усиления тоже должен уменьшаться, так как по отношению к точке  $X=0$  система должна быть устойчивой. Одновременно при уменьшении амплитуды (приращение  $-\Delta X_j$ ) по отношению к точке  $X=0$  система должна быть неустойчивой. Следовательно, эквивалентный комплексный коэффициент усиления должен возрастать. Этой ситуации соответствует верхняя иллюстрация на рис. 49 «b». В противном случае (нижняя иллюстрация на рис. 49 «b») периодическое решение неустойчиво.

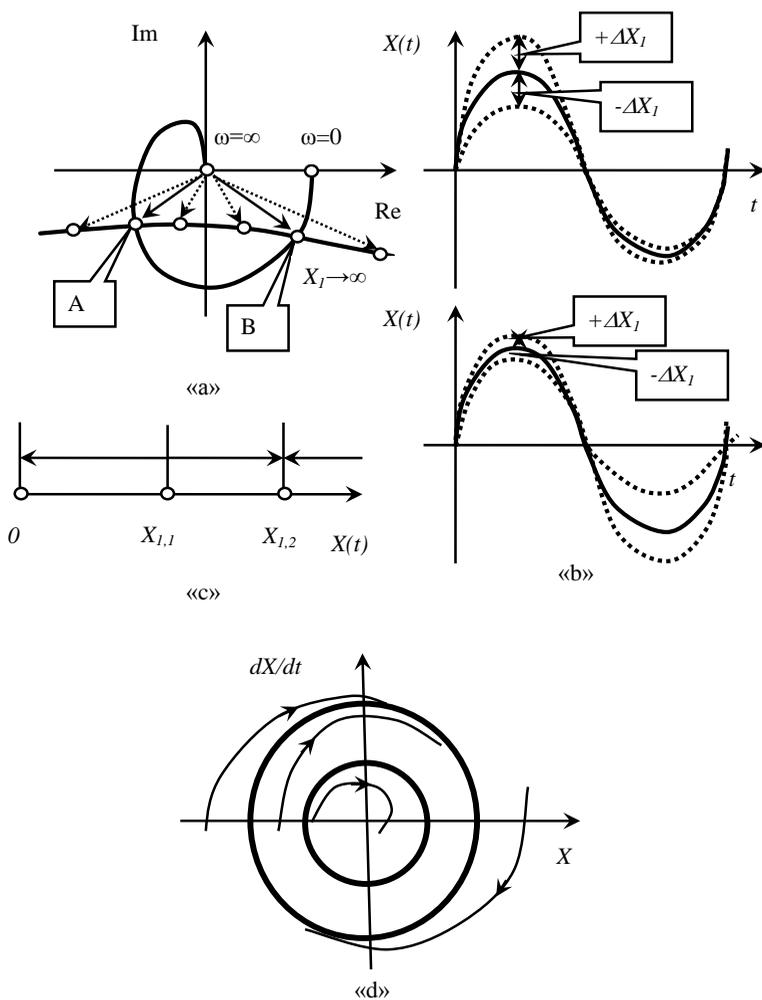


Рис. 49. Иллюстрация критерия Гольдфарба

На рис. 49 «а» приведен годограф обратного отрицательно-комплексного коэффициента нелинейного элемента системы. Поэтому периодическое решение будет устойчивым, если по мере увеличения амплитуды при переходе через точки «А» и



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

«В» модуль обратного комплексного коэффициента усиления дет возрастать. Изменение модуля показано пунктиром.

Следовательно, справедлив следующий критерий определения автоколебаний Гольдфарба. Для определения автоколебаний необходимо определить значения частот и амплитуд в точках пересечения АФЧХ линейной части системы и годографа обратного отрицательного комплексного коэффициента нелинейного элемента. Из этих точек выбрать такие, для которых по мере увеличения амплитуды годограф обратного отрицательного комплексного коэффициента выходит из области, охваченной АФЧХ линейной части системы.

Согласно этому критерию в точке «В» будут автоколебания. Точка же «А» соответствует неустойчивому периодическому решению. На рис. 49 «с» приведена диаграмма областей влияния двух стационарных состояний системы. В данном случае при малых амплитудах все траектории стремятся к точке равновесия (система является устойчивой в «малом»). При больших отклонениях от точки равновесия в системе устанавливается орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл, то есть автоколебания. На рис. 49 «d» приведен фазовый портрет системы. Таким образом, с помощью метода гармонической линеаризации удастся не только определить параметры автоколебаний, но и выяснить общую картину поведения системы в зависимости от начальных условий.

Приведем пример анализа автоколебаний для системы, структурная схема которой показана на рис. 50. Здесь анализируется система в вариациях относительно точки равновесия  $X=0$ . Для определения периодических решений необходимо вы-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

числить АФЧХ линейной части системы

$$W(j\omega) = \frac{-10}{\omega^2 + (1 - \omega^2)^2} - j \frac{(1 - \omega^2)}{\omega^3 + \omega(1 - \omega^2)^2} \text{ и характеристику}$$

обратного отрицательного эквивалентного коэффициента усиления идеального реле

$$q_1(X_1) = -\frac{\pi X_1}{4} \text{ (рис. 51)}$$

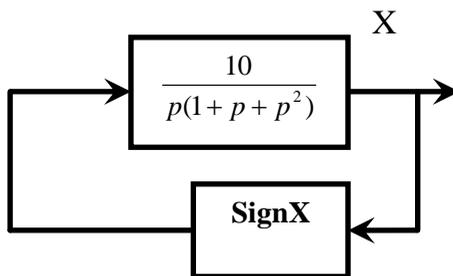


Рис. 50. Структурная схема системы

Точка «А» на рис. 51 соответствует автоколебаниям. Частота автоколебаний определяется из условия  $\text{Im}\{W(j\omega)\} = 0$ .

Следовательно,  $\Omega = 1$ . Сравнивая вещественную часть АФЧХ и

$$q_1(X_1) = -\frac{\pi X_1}{4}, \text{ получаем } X_1 = \frac{4}{\pi}.$$

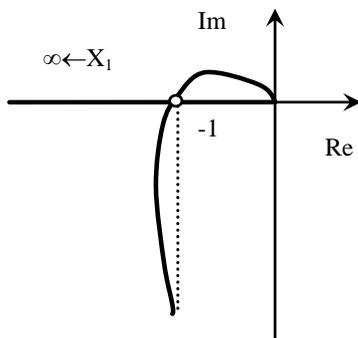


Рис. 51. К расчету автоколебаний

Мы видим, что в рассматриваемой системе всегда существуют автоколебания. Это естественно, так как значение эквивалентного коэффициента усиления идеального реле изменяется от нуля до бесконечности. Нетрудно показать, что в случае, когда реле имеет зону нечувствительности, то формирование автоколебаний зависит от соотношения зоны нечувствительности и коэффициента усиления линейной части системы.

### 3.3.3. Случай несимметричных периодических движений

Если нелинейный элемент не обладает свойством центральной симметрии, например, за счет того, что  $X_U \neq 0$ , то в (76)  $F_0 \neq 0$ . Тогда в периодических движениях  $X(t)$  образуется постоянная составляющая, зависящая от периодических движений, то есть решение системы с учетом гипотезы фильтра необходимо искать в виде

$$X(t) = X_0 + X_1 \sin(\Omega t).$$



(81)

В силу ортогональности тригонометрических функций вместо (77) имеем одновременное выполнение условий баланса по постоянным и переменным составляющим, то есть

$$\begin{cases} X_0 + W(0)\{F_0(X_0, X_1)\} = 0; \\ X_1 \sin(\Omega t) + W(j\Omega)\{F_1(X_0, X_1)\sin(\Omega t) + F_2(X_0, X_1)\cos(\Omega t)\} = 0. \end{cases} \quad (82)$$

Выполняя те же операции, что и ранее, имеем следующее гармонически линейризованное уравнение с точностью до постоянной составляющей и первой гармоники

$$\begin{cases} 1 + W(0)\{q_0(X_0, X_1)\} = 0; \\ 1 + W(j\Omega)\{q_1(X_0, X_1) + jq_2(X_0, X_1)\} = 0, \end{cases} \quad (83)$$

где  $q_0(X_0, X_1) = \frac{F_0(X_0, X_1)}{X_0}$  - эквивалентный коэффициент

усиления по постоянной составляющей, зависящий от постоянной составляющей и амплитуды первой гармоники;

$$q_1(X_0, X_1) + jq_2(X_0, X_1) = \frac{F_1(X_0, X_1)}{X_1} + j \frac{F_2(X_0, X_1)}{X_1} -$$

эквивалентный комплексный коэффициент усиления по первой гармонической составляющей. В отличие от рассмотренного выше случая симметричных периодических движений, здесь элементы эквивалентной передаточной функции зависят от амплитуды периодических составляющих и от постоянного смещения точки равновесия.

Система (83) дает возможность вычисления всех параметров периодических движений (амплитуды  $X_1$ , постоянной составляющей смещения точки равновесия  $X_0$  и частоты  $\Omega$ ). При-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

нимая во внимание, что второе уравнение в (83) является плексным, получаем систему для вычисления этих параметров

$$\begin{cases} 1 + W(0)\{q_0(X_0, X_1)\} = 0; \\ 1 + \operatorname{Re}\{W(j\Omega)[q_1(X_0, X_1) + jq_2(X_0, X_1)]\} = 0; \\ \operatorname{Im}\{W(j\Omega)[q_1(X_0, X_1) + jq_2(X_0, X_1)]\} = 0. \end{cases} \quad (84)$$

В частности, если нелинейная функция однозначна, то

$$\begin{cases} 1 + W(0)\{q_0(X_0, X_1)\} = 0; \\ 1 + \operatorname{Re}\{W(j\Omega)q_1(X_0, X_1)\} = 0; \\ \operatorname{Im}\{W(j\Omega)q_1(X_0, X_1)\} = 0. \end{cases} \quad (85)$$

В (85) уравнение  $\operatorname{Im}\{W(j\Omega)q_1(X_0, X_1)\} = 0$  позволяет вычислить частоту периодических решений. Частота  $\Omega = \Omega_0$  определяется точками пересечения АФЧХ линейной системы оси абсцисс. Тогда  $\operatorname{Re}\{W(j\Omega_0)\} = A = \text{const}$ . Тогда для вычисления  $(X_0, X_1)$  можно воспользоваться системой

$$\begin{cases} q_0(X_0, X_1) = -\frac{1}{W(0)}; \\ q_1(X_0, X_1) = -\frac{1}{A}, \end{cases} \quad (86)$$

решение которой можно выполнить графически или численно.

Что касается устойчивости периодических решений, то для его анализа можно воспользоваться приемом, рассмотренным в предыдущем параграфе. Важно подчеркнуть, что даже при рассмотрении симметричной нелинейной функции (рис. 46) в зависимости от управления  $U$  имеет место смещение точки равновесия, как показано на рис. 47. Поэтому, во-первых, в зависимости



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

от  $U$  изменяются условия самовозбуждения системы. Во вторых на точку равновесия оказывают влияние периодические движения.

Этим отмечается одно из важнейших свойств нелинейной системы: *для них принцип суперпозиции не применим*. Поэтому варьирование, например, периодических движений вызывает изменение соотношений между входом и выходом систем по постоянным составляющим. Отсюда открывается возможность вибрационного управления движением системы. Кроме этого, если внешнее управление формируется блоком  $w_0(D)$ , полоса пропускания которого существенно превышает полосу пропускания линейной части  $w(D)$ , охваченной нелинейным элементом (рис.52), тогда в пределах полосы пропускания  $w(D)$  значения  $X(t)$  можно усреднить по периодам высокочастотных автоколебаний. Тогда в зависимости от амплитуды автоколебаний часть системы, отмеченная пунктиром, может иметь свойства линейного преобразователя.

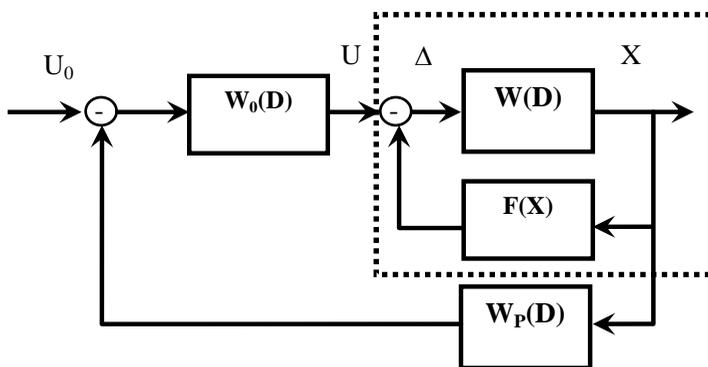


Рис. 52. Структурная схема системы, в которой блоки  $W_0$  и  $W_p$  имеют полосу пропускания, на порядок меньшую, чем полоса пропускания блока  $W(D)$



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

*Эффект линейного проявления свойств нелинейной системы за счет формирования автоколебаний или введения дополнительных вибраций от внешнего источника называется вибрационной линеаризацией нелинейных связей.*

### 3.3.4. Гармоническая линеаризация на дискретном множестве частот

Во многих задачах управления движением механических систем, взаимодействующих со средой, приходится иметь дело с системами, динамика которых описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F(y); \\ T \frac{dY}{dt} + Y = X_1, \end{cases} \quad (87)$$

где  $m$ ,  $h$ ,  $c$  - симметричные положительно определенные матрицы инерционных, диссипативных и упругих характеристик размерности  $2k \otimes 2k$ ;  $Y$  - вспомогательная координата, моделирующая запаздывание изменения силы по отношению к координате  $X_1$ , взаимодействие со средой которой рассматривается;  $F(y) = \{F(y), 0, \dots, 0\}^T$ ;  $F(y)$  - однозначная нелинейная функция.

В этом случае за счет запаздывания, моделируемого аperiodическим звеном, линейная часть системы может несколько раз пересекать вещественную ось. В результате потенциально возможно формирование стационарных периодических движений с  $n$  частотами. На рис. 53 приведен пример формирования АФЧХ

Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

линейной части системы и ее преобразование за счет влияния запаздывания изменения силы, формируемой средой, по отношению к изменению координаты  $X_1$ . Петлеобразность АФЧХ системы без реакции со стороны среды объясняется тем, что в системе проявляются резонансы и антирезонансы (рис. 53 «а»). За счет запаздывания сил возможно существование периодических решений на частотах ( $\Omega_1 - \Omega_5$ ).

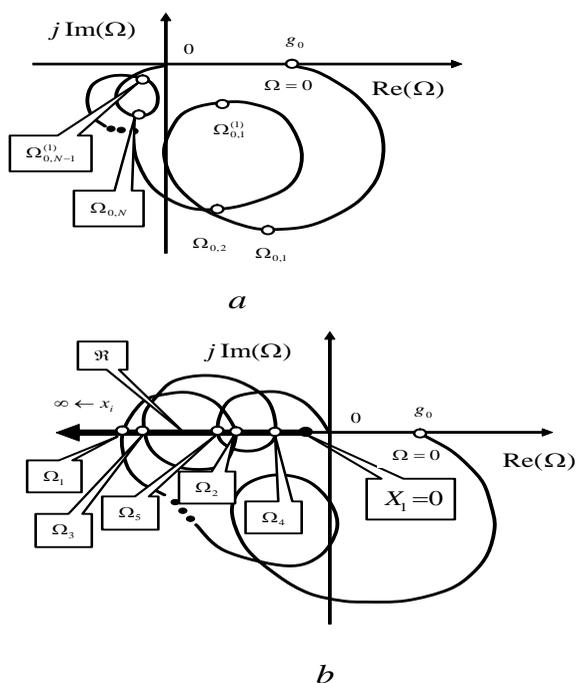


Рис. 53. Преобразование амплитудно-фазочастотных характеристик подсистемы машины, приведенной к среде: а - система без среды; б - амплитудно-фазочастотная характеристика системы со средой, но без нелинейного элемента, определяющего преобразованием агрегированной координаты  $Y$  в силу



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Так как нелинейный элемент однозначен, при изменении параметров периодических движений не происходит изменения фазовых соотношений в гармонических составляющих решений. В общем случае решение (87) будем искать в виде

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{i=k} y_i(t - T_i), \tag{88}$$

где  $y_i(t - T_i)$  - составляющая движений с периодом  $T_i$ . Таким образом, в общем случае рассматриваются почти периодические и гармонизируемые (по Лозэву) детерминированные установившиеся движения, имеющие  $k$  периодических составляющих. Тогда нелинейную функцию  $F[y_0 + \sum_{i=1}^{i=k} y_i(t - T_i)]$

разложим в  $k$  - кратный ряд Фурье. Нелинейная функция в (88) является однозначной и аргумент в этой функции не содержит производных. Поэтому фазовые сдвиги между первыми гармоническими составляющими на входе нелинейного элемента и его выходе отсутствуют, как и отсутствуют косинус преобразования, которые равны нулю. Для анализа стационарных периодических решений обобщим метод гармонической линеаризации на случай, когда линейный оператор

$W(D) = \frac{Q(D)}{P(D)}$  представляет гребенчатый фильтр, то есть

избирает  $k$  частный составляющих. Тогда для базовой динамической модели ( $k = 2$ ) мы имеем в общем случае двух периодический процесс. Тогда нелинейную функцию представим в виде двукратного ряда Фурье

$$F[y_1(t-T_1), y_2(t-T_2)] = \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma,\zeta} e^{j\pi(\frac{2\sigma y_1}{T_1} + \frac{2\zeta y_2}{T_2})}, \quad (89)$$

$$\text{где } c_{\sigma,\zeta} = \frac{1}{4T_1T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{+\frac{T_2}{2}} F[y_1(t-T_1), y_2(t-T_2)] e^{-j\pi(\frac{2\sigma y_1}{T_1} + \frac{2\zeta y_2}{T_2})} dy_1 dy_2.$$

Коэффициенты ряда (89) можно схематически представить в виде последовательности, приведённой на рис. 54. Примем во внимание следующие особенности модели сил контактного взаимодействия в (87). Во-первых, нелинейная функция  $F(y)$  является однозначной и её аргумент не содержит производных. Поэтому фазовые сдвиги между первыми гармоническими составляющими на входе и выходе нелинейного элемента отсутствуют. Во-вторых, варьирование амплитуд двух частотных составляющих не влияет на фазовые соотношения в динамической системе. Фазовые соотношения определяются исключительно свойствами линейного дифференциального оператора  $Q(D)/P(D)$ , состоящего из динамических свойств механической системы и линеаризованных динамических свойств среды, с которой взаимодействует механическая система.

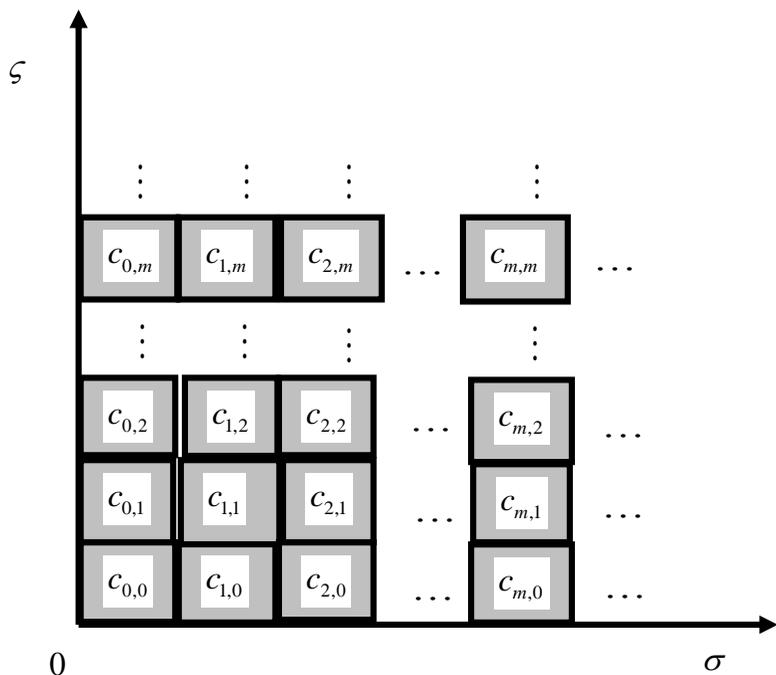


Рис. 54. Последовательность коэффициентов разложения нелинейной функции в двухкратный ряд Фурье

В этом случае в (89) удобно перейти к вещественным аргументам и рассматривать только синус – преобразования Фурье. Обобщим, сформулированную ранее гипотезу фильтра. Будем считать, что линейная часть системы избирает  $n$  частотных составляющих. В нашем случае  $n=2$ . Тогда решение системы будем искать в виде

$$y(t) = y_{0,0} + y_{0,1} \sin \xi_1 + y_{0,2} \sin \xi_2, \quad (90)$$

где  $\xi_1 = \Omega_1 t$ ,  $\xi_2 = \Omega_2 t + \theta$ .

Силовая реакция системы в этом случае представима также в виде первых гармонических составляющих двухкратного ряда



Фурье

$$F(y) = F_{0,0} + F_{0,1} \sin \xi_1 + F_{0,2} \sin \xi_2. \quad (91)$$

Причём, фазовые сдвиги, в силу указанных выше причин, между частотными составляющими первых гармоник на входе и выходе нелинейного элемента отсутствуют.

Если дополнительно рассматривать случай, когда нелинейная функция в вариациях относительно точки равновесия обладает свойством центральной симметрии, то  $y_{0,0} = 0$  и  $F_{0,0} = 0$ . Тогда, в силу ортогональности тригонометрических функций, для стационарных периодических движений справедливо

$$\begin{cases} \frac{Q(j\Omega_1)}{P(j\Omega_1)} = \frac{1}{y_{0,1}F_{0,1}(y_{0,1}, y_{0,2})} = q_1(y_{0,1}, y_{0,2}); \\ \frac{Q(j\Omega_2)}{P(j\Omega_2)} = \frac{1}{y_{0,2}F_{0,2}(y_{0,1}, y_{0,2})} = q_2(y_{0,1}, y_{0,2}), \end{cases} \quad (92)$$

где

$$F_{0,1}(y_{0,1}, y_{0,2}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F[y_{0,1} \sin(\Omega_1 t) + y_{0,2} \sin(\Omega_2 t)] \sin(\Omega_1 t) d(\Omega_1 t) d(\Omega_2 t);$$

$$F_{0,2}(y_{0,1}, y_{0,2}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F[y_{0,1} \sin(\Omega_1 t) + y_{0,2} \sin(\Omega_2 t)] \sin(\Omega_2 t) d(\Omega_1 t) d(\Omega_2 t).$$

Таким образом, вычисление частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  установившихся периодических движений осуществляется из выражения (это уравнение частот)

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left\{\frac{Q(j\Omega_1)}{P(j\Omega_1)}\right\} = 0; \\ \operatorname{Im}\left\{\frac{Q(j\Omega_2)}{P(j\Omega_2)}\right\} = 0, \end{cases} \quad (93)$$

так как в правой части стоит вещественная функция амплитуд.

Для определения амплитуд необходимо воспользоваться системой

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left\{\frac{Q(j\Omega_1)}{P(j\Omega_1)}\right\} + q_1(y_{0,1}, y_{0,2}) = 0; \\ \operatorname{Re}\left\{\frac{Q(j\Omega_2)}{P(j\Omega_2)}\right\} + q_2(y_{0,1}, y_{0,2}) = 0. \end{cases} \quad (94)$$

В (94) принят во внимание знак при силах контактного взаимодействия. Причём, функции  $q_1(y_{0,1}, y_{0,2})$  и  $q_2(y_{0,1}, y_{0,2})$  зависят от соотношения частот, определяемых ранее по выражению (93).

Приведённую схему вычисления периодических движений для системы можно обобщить и на общий случай, когда линейный оператор  $Q(D)/P(D)$  избирает  $k$  частотных составляющих. В данном случае под термином избирает понимается свойство линейного оператора в комплексной плоскости  $k$  раз пересекать отрицательную вещественную ось в области определения функций влияния  $q_1(y_{0,1}, y_{0,2})$  и  $q_2(y_{0,1}, y_{0,2})$  при  $y_{0,1} \in (0, \infty)$  и  $y_{0,2} \in (0, \infty)$ . В этом случае нелинейную функцию  $F(y)$  необходимо разложить в  $k$  - кратный ряд Фурье, то есть

$$F(y_1, \dots, y_k) = \sum_{i=1}^{i=k} c_i \cdot \exp[j\pi(\Omega_i t)], \quad (95)$$

где

$$c_i = \frac{1}{2\pi^k} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(y_1, y_2, \dots, y_k) \sin(\Omega_i t) d\Omega_1 t d\Omega_2 t \dots d\Omega_k t, i = 1, 2, \dots, k$$

Анализ периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений всегда имеет два аспекта. Первый связан с поиском периодических решений, второй – анализом их устойчивости. Если колебания являются  $T$  - периодическими, то для анализа их устойчивости можно воспользоваться теорией Флоке. Короткое изложение этой теории дано в следующей главе. Для почти периодических процессов исследование устойчивости всегда является проблемой. Получены лишь общие свойства фундаментальной матрицы для этого случая.

При анализе торов рассматривается два случая. Первый относится к случаю, когда частоты периодических движений являются кратными некоторому периоду  $T_0$ . Тогда стационарные траектории на торе все являются замкнутыми. Для технических приложений – это наиболее важный случай. На рис. 55 приведён пример двумерного инвариантного тора в пространстве, представляющий замкнутую траекторию на торе. Там же тонкими линиями показаны траектории движения к тору с начальными условиями  $y_{1,0} + \Delta y_1$  и  $y_{1,0} - \Delta y_1$ .

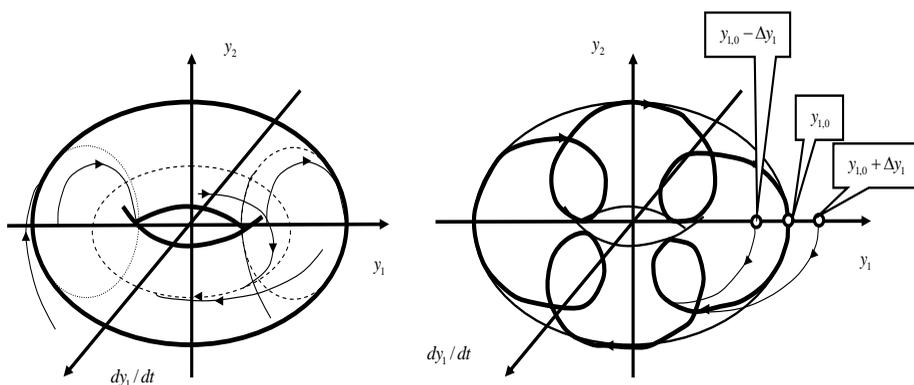


Рис. 55. Формирование двумерного инвариантного тора для случая, когда колебания представляют два периодических процесса с периодами  $T$  и  $4T$

Второй случай относится к случаю, когда частоты периодических движений не являются кратными, например, один из периодов представляет иррациональное число. В этом случае траектории на торе при  $t \rightarrow \infty$  плотно описывают поверхность тора, но эти траектории на торе не пересекаются и не являются замкнутыми. Этот случай имеет скорее теоретическое значение.

Поэтому, имея ввиду инженерные приложения, будем рассматривать первый случай. Прежде всего, сформулируем понятие устойчивости инвариантного тора. Инвариантный тор является орбитально устойчивым, если для заданной малой его окрестности  $\varepsilon$  все траектории, ей принадлежащие, с течением времени не выходят за её пределы. Он является орбитально асимптотически устойчивым, если при  $t \rightarrow \infty$  все траектории в окрестности  $\varepsilon$  асимптотически стремятся к тору.

Рассмотрим вначале случай  $T$  - периодического процесса.



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Следуя теории Флоке можно утверждать, что в этом случае периодический процесс будет орбитально асимптотически устойчивым, если мультипликаторы системы  $\lambda_i$  (комплексно сопряжённые числа) удовлетворяют требованию  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$  ( $\lambda_1, \lambda_2$  - два комплексно-сопряжённых числа) и все остальные -  $|\lambda_i| < 1$ , то есть два комплексно-сопряжённых мультипликатора находятся на единичной окружности, а остальные – внутри её. Если для анализа стационарных периодических колебаний применять метод гармонической линеаризации, то необходимо учитывать, что из всех компонент фундаментальной матрицы решений системы с периодическими параметрами, получаемой на основе линеаризации системы в вариациях относительно периодического решения, именно компонента для  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$  определяет стационарные колебания, получаемые исходя из условия баланса по модулю и фазе. Остальные асимптотически стремятся к нулю, обеспечивая орбитальную асимптотическую устойчивость.

Отображением Пуанкаре на секущей гиперповерхности  $\Pi$ , проведённой трансверсально к предельному циклу для всех траекторий окрестности  $\varepsilon$ , в этом случае будет последовательность, асимптотически приближающаяся к точке отображения предельного цикла (рис. 56) в себя  $y_0$  (затемнённая точка). В системах, описываемых уравнениями (87) при малых вариациях координат состояния от предельного цикла в случае его асимптотической устойчивости траектории пересекают



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

поверхность трансверсально расположенную к предельному циклу не только асимптотически приближаясь к точке  $y_0$ , но и двигаются по прямой. Исключение составляет случай, когда динамическая характеристика среды учитывает зависимость запаздывания от вариации координаты состояния от стационарной траектории.

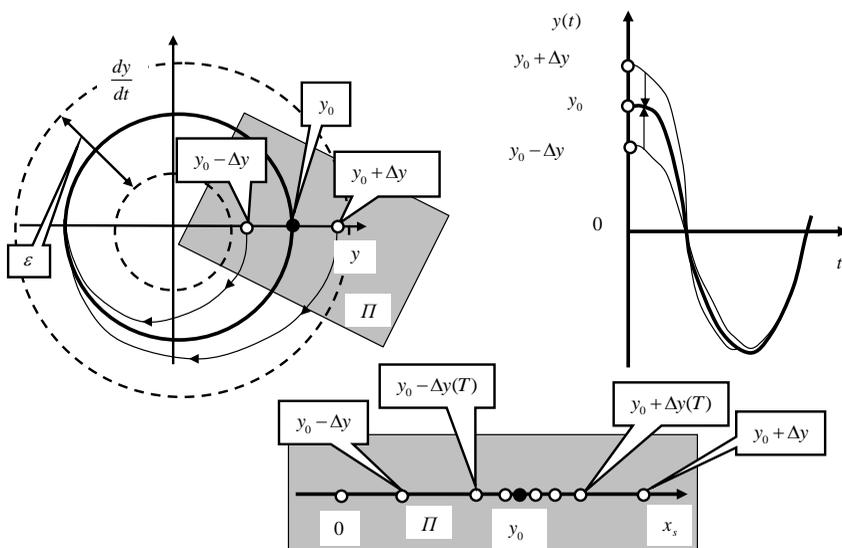


Рис. 56. Определение устойчивости предельного цикла

Если рассматривать гармонически линеаризованную систему, то этими свойствами будет обладать система, удовлетворяющая следующим особенностям:

- при увеличении амплитуды  $y_0 + \Delta y$  гармонически линеаризованная система должна перейти в область



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

устойчивости, т. е.  $+\Delta y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ;

- при уменьшении амплитуды  $y_0 - \Delta y$  гармонически линеаризованная система должна перейти в область неустойчивости, то есть  $-\Delta y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Это известное условие определения устойчивости периодического решения, сформулированное, например, в форме критерия Гольдфарба, рассмотренное ранее. Этот критерий широко используется для анализа автоколебаний по методу гармонической линеаризации и справедлив для широкого класса  $T$  - периодических процессов. Он фактически является аналогом анализа устойчивости систем с периодически изменяющимися параметрами, которые получаются при рассмотрении уравнения в вариациях относительно предельного цикла.

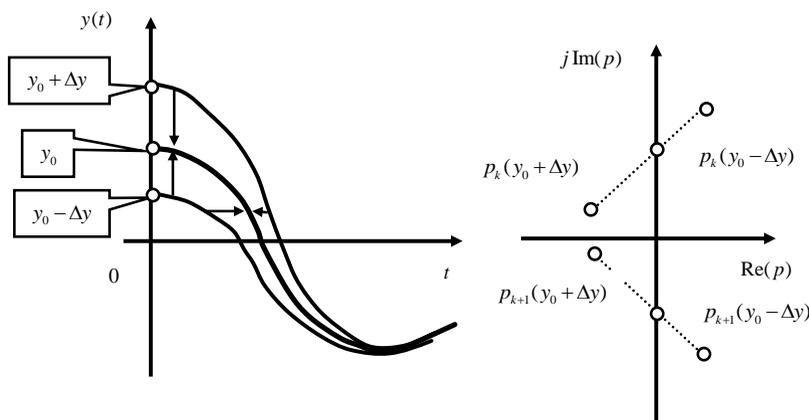


Рис. 57. Связь устойчивости периодических решений со смещениями корней характеристического полинома гармонически линеаризованной системы в случае функции влияния нелинейного элемента, зависящей от амплитуды и частоты

Очевидно, что для корней характеристического полинома гармонически линейризованного уравнения в случае устойчивого предельного цикла должны соответствовать следующие условия (рис. 57):

- параметрам стационарных периодических решений соответствует нахождение пары комплексно сопряжённых корней гармонически линейризованного уравнения динамики на мнимой оси, остальные корни должны располагаться в левой комплексной полуплоскости;

- увеличению амплитуды должно соответствовать такое приращение пары корней, лежащих на мнимой оси, за счёт изменения функций влияния, при котором они переходят в левую комплексную полуплоскость. Одновременно при уменьшении амплитуды - они должны смещаться в правую комплексную полуплоскость. Схема смещения корней показана на рис. 57. Причём, это свойство в равной мере относится и для гармонически линейризованной функции влияния, которая зависит не только от амплитуды, но и от частоты.

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая, когда анализируется устойчивость тора. Для иллюстрации ограничимся случаем двумерного инвариантного тора, который можно хорошо представить графически. Этот тор будет орбитально асимптотически устойчивым, если два мультипликатора уравнения в вариациях равны по модулю



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

единице (находятся на единичной окружности), а остальные по модулю меньше единице (находятся внутри единичного круга мультипликаторов). Снова прибегнем к упрощённому методу анализа устойчивости периодических решений, полученных по методу гармонической линеаризации на основе замены нелинейной функции функцией влияния, полученной после её разложения в двукратный ряд Фурье (в общем случае  $N$  - кратный). Если система дифференциальных уравнений записана в виде (87), то нелинейная функция не вызывает фазовых сдвигов и частоты в преобразовании  $y$  в силу, соответствующие стационарным периодическим решениям, остаются неизменными. Поэтому для анализа устойчивости достаточно рассматривать преобразования функций влияния  $q_1(y_{0,1}, y_{0,2})$ ,  $q_2(y_{0,1}, y_{0,2})$  и соответствующих им гармонически линеаризованных частотных характеристик системы в целом при варьировании амплитуд периодических решений (рис. 58). В данном случае могут быть следующие ситуации.

1. АФЧХ линейной части системы  $Q(j\Omega)/P(j\Omega)$  не пересекает область определения  $\Re$  функций влияния  $q_1(y_{0,1}, y_{0,2})$ ,  $q_2(y_{0,1}, y_{0,2})$  (на рис. 58 область определения при варьировании  $(y_{0,1}, y_{0,2})$  показана жирной линией на вещественной оси). В этом случае периодических решений нет, и точка равновесия является асимптотически устойчивой.

2. Имеется одна точка пересечения АФЧХ линейной части системы  $Q(j\Omega)/P(j\Omega)$  с функцией влияния  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2})$ .



Заметим, что всегда выполняется условие  $\left|q_i(y_{0,1}, y_{0,2})\right| \gg \left|q_i(y_{0,1}, 0)\right|$ . Поэтому имеет место одночастотный периодический режим, устойчивость которого анализируется традиционными для методов гармонической линеаризации методами. В рассматриваемом случае периодический режим устойчив и в системе устанавливаются автоколебания с частотой, соответствующей точке пересечения.

3. Имеется две точки пересечения АФЧХ линейной части системы  $Q(j\Omega) / P(j\Omega)$  с функциями влияния  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2})$ . Этот случай показан на рис. 58. Здесь возможен двухчастотный периодический режим, которому соответствует двумерный инвариантный тор. Этот режим будет не вырожденным, если он устойчив. Для этого необходимо выполнение следующего условия. При увеличении одной из амплитуд два корня гармонически линеаризованного уравнения должны одновременно смещаться в комплексную полуплоскость с отрицательными вещественными составляющими, а при уменьшении – в полуплоскость с положительными вещественными корнями. Гармонически линеаризованное уравнение справедливо лишь для частот  $\Omega_{0,1}$  и  $\Omega_{0,2}$ . В этом случае для вещественных составляющих справедливо

$$\begin{cases} [q_1(y_{0,1}, y_{0,2})]^{-1} \operatorname{Re}\left\{\frac{Q(j\Omega_{0,1})}{P(j\Omega_{0,1})}\right\} = -1; \\ [q_2(y_{0,1}, y_{0,2})]^{-1} \operatorname{Re}\left\{\frac{Q(j\Omega_{0,2})}{P(j\Omega_{0,2})}\right\} = -1. \end{cases} \quad (96)$$

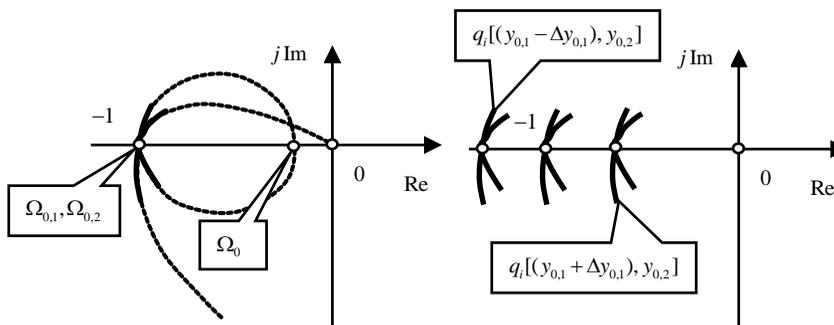


Рис. 58. Смещения гармонически линеаризованной АФЧХ системы в случае двухчастотных периодических решений при варьировании одной из амплитуд, соответствующие устойчивому двумерному инвариантному тору

АФЧХ системы показана пунктиром, так как условие (96) справедливо лишь в окрестности  $\{\Omega_{0,1}, \Omega_{0,2}\}$ . Однако сформулированное выше требование, проиллюстрированное на рис. 58, будет справедливо, если в точках  $\Omega_{0,1}$  и  $\Omega_{0,2}$  на рис. 55 «б» увеличению одной из амплитуд соответствует движение годографов  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2})$  таким образом, что они выходят из областей, охваченных АФЧХ линейной частью системы. Причём,



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

для второй частоты годограф АФЧХ линейной части при  $q_i(y_{0,1} - \Delta y_{0,1}, y_{0,2})$  охватывает точку дважды, вращаясь на суммарный угол  $4\pi$ .

4. Имеется три точки пересечения АФЧХ линейной части системы  $Q(j\Omega)/P(j\Omega)$  с функциями влияния  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2})$ . Это исключительный случай, не представляющий практического интереса, так как  $\partial F / \partial y_{при: y \rightarrow 0} = \dot{F}_0$  есть величина, ограниченная сверху, а точка  $\Omega_0$  близка к антирезонансу. Однако и в этом случае, как нетрудно видеть, точке  $\Omega_0$  соответствует неустойчивый периодический режим. Он всегда вырождается в двухчастотный режим с параметрами, соответствующими частотам  $\Omega_{0,1}$  и  $\Omega_{0,2}$ .

Приведённые рассуждения показывают, что при рассмотрении многочастотного режима существенно расширяется разнообразие ситуаций. Например, одно периодическое решение может быть асимптотически устойчивым, а второе – неустойчивым. Это хорошо известный случай вырождения двумерного инвариантного тора в предельный цикл. В общем случае если на некотором множестве амплитуд  $\{y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,N}\}^T$  существует такое значение функции влияния  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,N}), i = 1, 2, \dots, N$ , что гармонически линеаризованное уравнение имеет  $N$  периодических решений, то гармонически линеаризованный характеристический полином будет иметь  $N$  корней, находящихся на мнимой оси. Все  $N$



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

решений будут устойчивы, если при увеличении одной из амплитуд функция влияния  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,N}), i = 1, 2, \dots, N$  перестраивается таким образом, что все корни характеристического полинома переходят в левую комплексную полуплоскость, как показано на рис. 59. При этом одновременно при уменьшении одной из амплитуд корни двигаются в направлении, противоположном. Это общий случай, для двумерного тора. Все остальные корни в диапазоне варьирования амплитуды, принадлежащем области притяжения рассматриваемого многочастотного периодического решения, должны находиться в левой комплексной полуплоскости.

Возможен второй вариант. Варьирование одной из амплитуд может смещать траекторию таким образом, что она продолжает находиться на торе (рис. 60 «b»). В этом случае многообразии, формируемое  $i$ -ой частотной составляющей, будет устойчиво в том случае, когда лишь пара комплексно-сопряжённых корней гармонически линеаризованного характеристического полинома при увеличении амплитуды смещается в левую комплексную полуплоскость корней, а уменьшение – в правую. Остальные корни, находившиеся ранее на мнимой оси, не смещаются. В этом случае для того, чтобы сделать вывод об устойчивости тора необходимо варьировать другие амплитуды и изучать устойчивость соответствующих многообразий. Второй вариант является скорее исключением, чем правилом, так как функция влияния  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,N}), i = 1, 2, \dots, N$ , как правило, монотонно зависит

от каждой из варьируемых амплитуд.

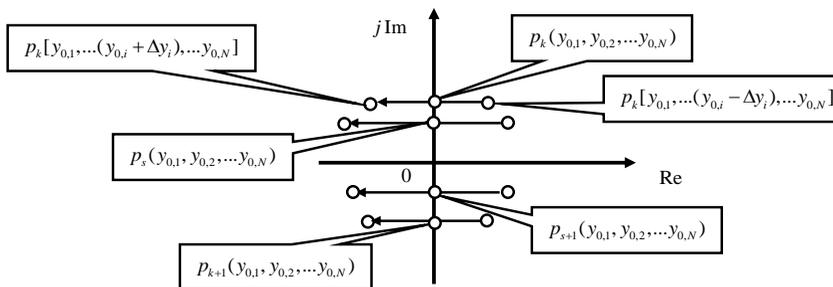


Рис. 59. Направление смещения корней характеристического полинома при варьировании одной из амплитуд в случае асимптотически

Устойчивого инвариантного тора

Важно подчеркнуть, что значения функций влияния нелинейного элемента  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,N}), i = 1, 2, \dots, N$  зависят от соотношения частот и для того, чтобы сделать вывод о свойствах системы предварительно необходимо знать частоты анализируемой совокупности периодических решений. Положение существенно упрощается для большинства нелинейных функций, являющихся монотонными и однозначными, которые используются для моделирования нелинейного преобразования координаты в силы резания, так как области определения  $q_i(y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,N}) \in \mathfrak{R}$  и  $q_i(y_{0,1}, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{R}$  совпадают. Одновременность смещения корней характеристического полинома гармонически линейризованной системы определяется тем, что траектория не может одновременно принадлежать и не принадлежать поверхности



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

тора. Кроме этого если принцип одновременности не обеспечивается и корни, соответствующие периодическим решениям, начинают двигаться в разные стороны, то возможно два варианта:

- одно из периодических решений вырождается и двумерный тор преобразуется в предельный цикл;

- инвариантного тора нет, а существует седловой предельный цикл, также свидетельствующий о вырождении тора в какое-то новое многообразие;

- трудно представить такую ситуацию, что вариации координат состояния в окрестности тора одновременно происходят во внутреннюю и внешнюю части тора, если тор является устойчивым (рис. 60).

Кроме этого, для рассматриваемого класса нелинейных функций условие баланса по фазе на каждой частотной составляющей достигается в точках пересечения АФЧХ линейной части системы с отрицательной ветвью вещественной оси, так как нелинейные функции являются однозначными, и они зависят только от координат, но не от их производных. Поэтому для стационарных периодических движений всегда имеет место нулевой фазовый сдвиг между переменными составляющими сил и колебаний.

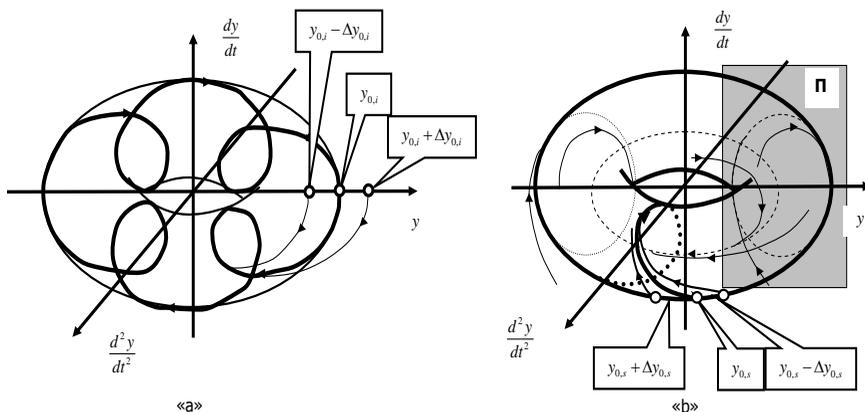


Рис. 60. Определение устойчивости двумерного инвариантного тора при варьировании одной из амплитуд

Приведенное обобщение метода гармонической линеаризации является достаточно сложным. Поэтому при решении конкретной проблемы необходимо сочетать его с методом прямого цифрового моделирования системы.

## 4. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.

### 4.1. Понятие устойчивости

Впервые проблема устойчивости была сформулирована Лагранжем в следующей упрощенной форме. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (97)$$

где  $A$ ,  $B$  - соответственно матрицы постоянных коэффициентов размерности  $n \otimes n$ ;



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$  - вектор координат состояния системы;

$u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$  - вектор управления, среди компонент

которого могут быть и нули.

Таким образом, рассматривается линейная система с постоянными параметрами. Пусть задано ограниченное управление  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ , требуется определить условия (матрицы  $A$  и  $B$ ), при которых  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$  также ограничено сверху. В этом случае система будет устойчивой. При анализе нелинейных систем, как это будет ясно из материала, изложенного ниже, необходимо анализировать линеаризованные уравнения с переменными параметрами. В этом принципиальное отличие анализа нелинейных от линейных систем.

Современная постановка проблемы устойчивости, которая используется при анализе нелинейных систем, принадлежит А.М. Ляпунову, опубликованная в его фундаментальной работе: «Общая задача устойчивости движения». (Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. – М.: ОНТИ, 1935). Необходимо отметить, что понятие устойчивости и сформулированные и доказанные основные теоремы имеют фундаментальный характер и они справедливы и в настоящее время. Они справедливы для линейных и нелинейных систем, для систем с постоянными и (или) переменными параметрами. Здесь ограничимся случаем системы, динамика которой описывается системой

$$\frac{dX}{dt} = f^{(1)}(X) + f^{(2)}(u), \quad (98)$$

где  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ ,



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$dX/dt = \{dX_1/dt, dX_2/dt, \dots, dX_n/dt\}^T$  -  $n$  - векторы состояния динамической системы;

$$f^{(1)}(X) = \{f_1^{(1)}(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2^{(1)}(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, f_n^{(1)}(X_1, X_2, \dots, X_n)\}^T;$$

$f^{(2)}(u) = \{f_1^{(2)}(u_1, u_2, \dots, u_n), f_2^{(2)}(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, f_n^{(2)}(u_1, u_2, \dots, u_n)\}^T$  - вектор функции управления, которые в данном случае не зависят от  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ .

Рассматриваются только такие системы, правые части которых непрерывны по всем аргументам пространства состояния и имеют непрерывные частные производные по зависимым переменным  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ . В этом случае выполняются условия теоремы существования и единственности, то есть при любых начальных условиях  $t_0, X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}$  существует и притом единственное решение

$X^*(t, X_0, u) = \{X_1^*(t, X_0, u), X_2^*(t, X_0, u), \dots, X_n^*(t, X_0, u)\}^T$ , соответствующее  $f^{(2)}(u)$  и начальным значениям  $X_0 = \{X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}\}^T$ . Причем  $X^*(t_0, X_0, u) = X_0$ .

Тогда система будет устойчивой по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$  и  $t_0$ , что любое решение  $X^{(*,i)}(t)$ , для которого при  $t = t_0$  выполняется неравенство  $|X^{(*,i)}(t_0) - X^*(t_0)| < \delta$ , удовлетворяет неравенству  $|X^{(*,i)}(t) - X^*(t)| < \varepsilon$  при  $t_0 \leq t < \infty$ .



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Это означает, что все решения, находящиеся при  $t = t_0$  в ограниченной области  $\delta$ , не выходят при  $t_0 \leq t < \infty$  за пределы другой окрестности  $\varepsilon$  (рис. 61). Наконец, если при  $t \Rightarrow \infty$  окрестность  $\varepsilon \Rightarrow 0$ , то система будет асимптотически устойчивой. Таким образом, понятия устойчивости по Лагранжу и Ляпунову принципиально совпадают, но понятие устойчивости по Ляпунову имеет большее обобщение и оно сформулировано для любых систем, в том числе нелинейных.

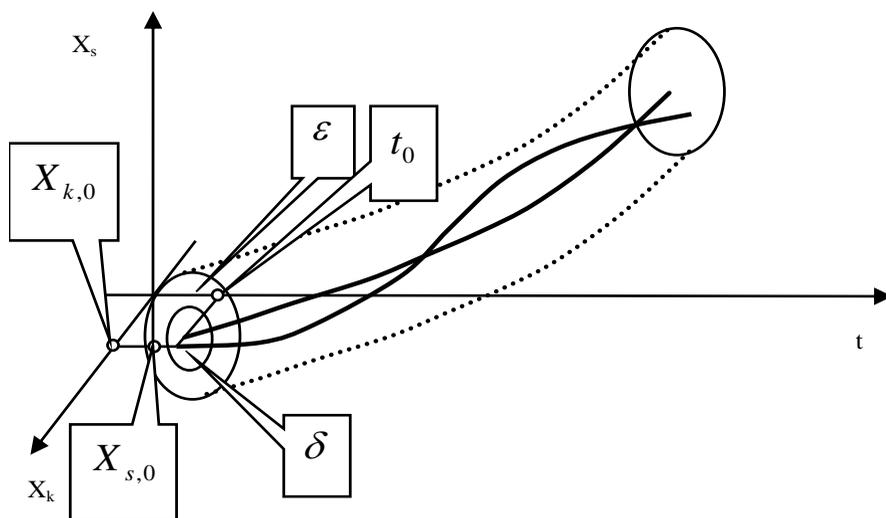


Рис. 61. Геометрическая интерпретация понятия устойчивой по Ляпунову системы

Для исследования устойчивости конкретной траектории  $X^*(t, X_0, u) = \{X_1^*(t, X_0, u), X_2^*(t, X_0, u), \dots, X_n^*(t, X_0, u)\}^T$ , определяемой для данной системы дифференциальных уравнений управлением и начальными условиями, согласно теории М.А. Ля-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

пунова, необходимо анализировать уравнение в вариациях, получаемое после замены  $X(t) = X^*(t, X_0, u) + x(t)$ . Здесь  $x(t)$  - малые вариации координат состояния. Тогда, принимая во внимание (98), получаем следующее уравнение в вариациях относительно рассматриваемой траектории

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x), \tag{99}$$

где  $\varphi(x) = f^{(1)}(X^* + x) - f^{(1)}(X^*)$  - новая нелинейная вектор- функция, для которой справедливо  $\varphi(0) = 0$ .

Подчеркнем, что (99) справедливо для данной конкретной траектории

$$X^*(t, X_0, u) = \{X_1^*(t, X_0, u), X_2^*(t, X_0, u), \dots, X_n^*(t, X_0, u)\}^T.$$

М.А.Ляпуновым доказано, что система (99) устойчива, если устойчива соответствующая ей линеаризованная система

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} x. \tag{100}$$

Здесь необходимо рассматривать три случая.

1) Рассматриваемая траектория есть точка равновесия, то

есть  $X^* = const$ . Тогда  $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$  есть матрица с постоянными ко-

эффициентами. Для этого случая теория устойчивости разработана практически исчерпывающе. Доказано, что условиям устойчивости соответствует распределение корней характеристического полинома в левой комплексной полуплоскости. Причем, система в этом случае является асимптотически устойчивой. Именно на этом основании разработаны алгебраические критерии устойчивости (Рауса, Гурвица и др.), а также частотные критерии (Ми-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

хайлова, Найквиста). На этой же основе Ю.И. Наймарком созданы методы выделения областей устойчивости (метод D - разбиения).

Очевидно, что матрица  $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$  имеет постоянные коэффициенты

и в случае, когда область определения рассматриваемой траектории находится в диапазоне линейности вектор - функций  $f^{(1)}(X)$ . Именно этот случай входит во все курсы теории автоматического управления, изучаемый в вузах. Он обычно рассматривается и при решении практических задач. Мы останавливаться на этом вопросе не будем.

2) Уравнение в вариациях относительно стационарной траектории имеет периодически изменяющиеся параметры. В этом случае для анализа устойчивости необходимо воспользоваться теорией Флоке.

3) Уравнение в вариациях относительно стационарной траектории имеет параметры в функции времени, заданной произвольным законом. В этом случае необходимо воспользоваться методом функций Ляпунова.

Так как первый случай изучен в традиционном курсе по теории автоматического управления, то на нем мы останавливаться не будем. Поэтому перейдем к рассмотрению основных положений теории Флоке.

### 4.2. Основы теории Флоке

Траектория  $X^*(t)$  есть периодическая функция времени, изменяющаяся с периодом  $T$ , то есть



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$X^*(t) = X^*(t + kT), k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . В технических приложениях такие случаи встречаются достаточно часто. Например, если рассматривается предельный цикл и необходимо анализировать устойчивость этой траектории. Приведем еще пример. Если рассматривается проблема управления точностью обработки на металлорежущем станке, обрабатываемая деталь в котором установлена с эксцентриситетом, то параметры динамической связи, формируемой процессом резания, являются периодически изменяющимися, и др. В этом случае матрица

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = A(t) = A(t + kT), k = 0, 1, 2, \dots$$

В этом случае для анализа устойчивости необходимо использовать теорию Флоке. Изложим коротко идею теории Флоке, которая обычно в традиционных курсах по теории управления не рассматривается. Система (77) для этого случая представляется в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{101}$$

где  $A(t) = A(t + T)$  - квадратная матрица размерности  $n \otimes n$ ,  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T$ . Пусть задана фундаментальная матрица решения (101) в виде

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A(t)\varphi(t), \tag{102}$$

тогда

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)\varphi(T), \tag{103}$$

где  $\varphi(T)$  - матрица монодромии, собственные числа



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  которой называются мультипликаторами. Флоке доказано, что при условии, что все  $|p_i| \leq 1$ , то система является устойчивой по Ляпунову. Если  $|p_i| < 1$ , то она – асимптотически устойчива. Таким образом, если определены мультипликаторы, то их расположение в комплексной плоскости дает исчерпывающую информацию об устойчивости системы с периодически изменяющимися параметрами (рис. 62). В зависимости от параметров системы, определяющих матрицу  $A(t)$ , имеет место смещение мультипликаторов (переход от расположения на рис. 62 «а» к расположению на рис. «б»), при этом система асимптотически устойчивая преобразуется к неустойчивой.

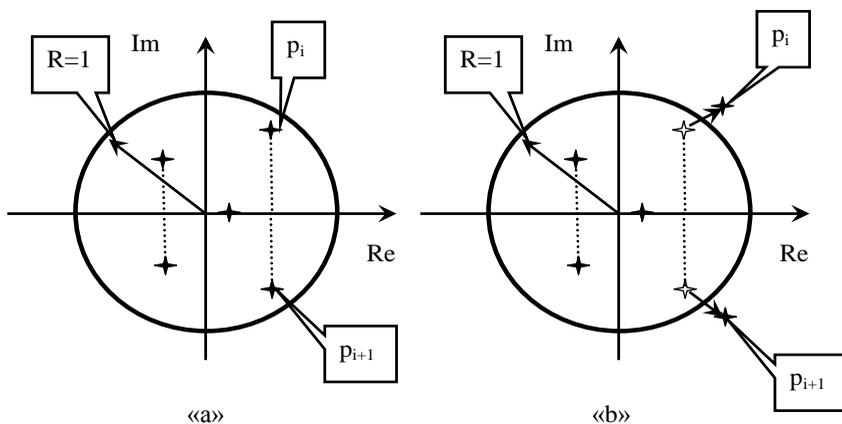


Рис. 62. Распределение мультипликаторов в комплексной плоскости в случае устойчивой системы («а») и неустойчивой «б»



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Главная сложность анализа систем с переменными параметрами заключается в определении мультипликаторов системы. Приведем алгоритм решения этой задачи численными методами.

1). Для каждого  $i$ -го начального условия  $X_0^{(i)} = \{0, 0, \dots, 1^{(i)}, \dots, 0\}^T$  найти численными методами решение системы (102)  $X^{(i)} = \{X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}\}^T$ . В результате получим

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} X_1^{(1)}(t) & X_2^{(1)}(t) & \dots & X_n^{(1)}(t) \\ X_1^{(2)}(t) & X_2^{(2)}(t) & \dots & X_n^{(2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{(n)}(t) & X_2^{(n)}(t) & \dots & X_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}. \tag{104}$$

2). Проинтегрировав (102), получим

$$\int_0^t \frac{d\varphi}{\varphi} \Rightarrow \varphi(t) = \exp\left\{\int_0^t A(t) dt\right\}, \tag{или}$$

$$\varphi(t) \approx \exp\left\{\sum_{k=0}^{k=n} A(t_k)(t_k - t_{k-1})\right\}, \tag{105}$$

где  $A(t_k)$  - постоянные матрицы.

Для определения  $\exp\{At\}$  используется разложение Сильвестра

$$\exp\{At\} = \sum_{i=1}^{i=n} \exp(\lambda_i t) * \prod_{j=1, j \neq i}^{j=n} \frac{A - \lambda_j E}{\lambda_i - \lambda_j}. \tag{106}$$

Выражения (105, 106) позволяют определить мультипликаторы системы. Существуют и другие алгоритмы вычисления мультипликаторов системы. Однако сейчас, в связи с развитием средств вычислительной техники, и методов и программ для численного интегрирования уравнений зачастую проще анализиро-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

вать системы путем прямого численного интегрирования.

В том случае, когда мультипликаторы выходят за пределы единичной окружности (рис. 62) в системе образуется параметрическое самовозбуждение. Приведем пример условий параметрического самовозбуждения системы. Рассмотрим систему, уравнение в вариациях которой описывается следующими уравнениями

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + c(1 + \mu \sin \omega t)x = -c_p y; \\ T \frac{dy}{dt} + y = x, \end{cases} \quad (107)$$

где  $c_p$  - жесткость среды;  $T$  - постоянная времени, определяющая запаздывание изменения сил, действующих со стороны среды. Система (107) характеризует взаимодействие, например, механического колебательного контура со средой, в частности, - с процессом резания.

Уравнение (107) при  $T = 0$  - есть уравнение Матье - Хилла. В отличие от этого уравнения система при  $\mu = 0$  может потерять устойчивость равновесия в зависимости от соотношения параметров  $T$  и  $c_p$  (рис. 63). Рассмотрим случай, когда при этих параметрах, но при  $\mu = 0$ , система является асимптотически устойчивой. Как и при исследовании уравнения Матье – Хилла, введем в рассмотрение дополнительный безразмерный параметр  $\eta = \omega / \omega_0$ , где  $\omega_0 = \sqrt{(c + c_p) / m}$  - собственная частота консервативной системы при  $\mu = 0$ .

Аналогом системы (107) является динамическая система обработки резанием схематизированная следующим образом.



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Рассматривается система заготовки, представленная в виде колебательного звена, взаимодействующая с процессом резания. Периодическое изменение жесткости в данном случае обусловлено законом изменения жесткости заготовки, закрепленной в трехкулачковом патроне. Со стороны инструмента система считается абсолютно жесткой. Таким образом, изменения параметра жесткости заготовки связано с периодически изменяющимся его значением, синхронизированным с круговой частотой вращения шпинделя. Частота вращения шпинделя считается неизменной.

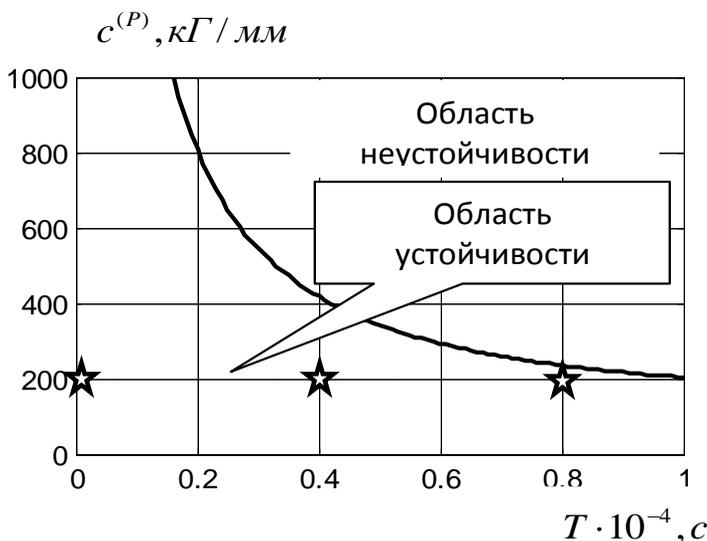


Рис.63. Область устойчивости в плоскости параметров  $(T, c_p)$  при

$$\mu = 0$$



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

На рис. 64 (см. ниже) приведен пример изменения областей устойчивости в плоскости  $(\mu, \eta)$ , позволяющий определить в зависимости от  $\mu$  критические диапазоны частот вращения шпинделя, при которых система теряет устойчивость за счет параметрического возбуждения. Области неустойчивости на приведенной иллюстрации отмечены точечными кривыми (рис. 64).

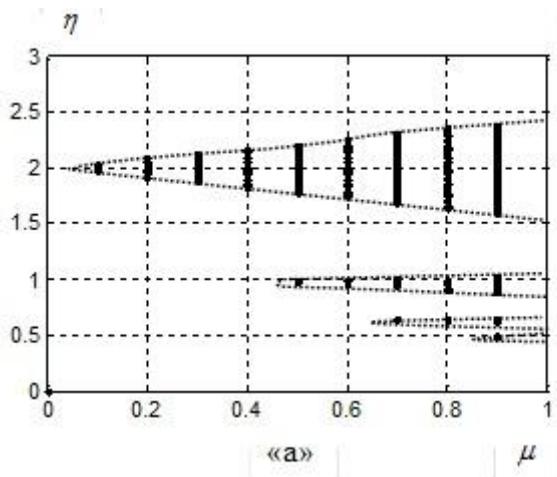
Приведенные три диаграммы отличаются значениями постоянной времени стружкообразования  $T$ , которые показаны на рис. 15 звездами. Если  $\mu = 0$ , то при всех рассматриваемых параметрах система является устойчивой. Однако по мере приближения параметров к границе области устойчивости, области параметрического возбуждения системы расширяются и формируются новые лепестки неустойчивости в области низких частот вращения шпинделя. Таким образом, области неустойчивости системы за счет параметрического возбуждения зависят не только от частоты вращения шпинделя и модуляции жесткости, определяемой коэффициентом  $\mu$ , но и от параметров динамической характеристики процесса обработки. Частоты первых форм колебаний шпиндельных узлов токарных станков лежат в диапазоне (120 – 180) Гц. Например, при собственной частоте первой формы колебаний шпинделя, равной  $\omega_0 = 120 \text{ Гц}$ , на частоте вращения шпинделя 2400 об/мин система потеряет устойчивость за счет параметрического возбуждения по мере увеличения  $T$  соответственно при  $\mu = 0,5$ ,  $\mu = 0,38$  и  $\mu = 0,24$ . В том случае, если учитывать динамические свойства подсистемы инструмента и принимать во внимание только первую гармоническую состав-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

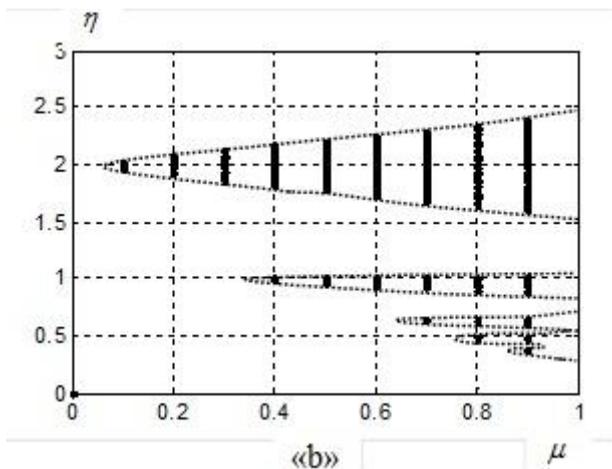
ляющую вариаций припуска, то области неустойчивости расширяются еще в большей степени (рис. 65).

Здесь  $\mu_1, \mu_2$  - коэффициенты параметрической модуляции соответственно первой и третьей гармонических составляющих. Матрицы коэффициентов подсистем инструмента и заготовки приведены в таблицах. Параметры динамической характеристики процесса резания:  $c_0 = 200 \text{ кг} / \text{мм}$ ;  $\rho = 300, \text{ кг} / \text{мм}^2$ ;  $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T = \{0.50, 0.70, 0.51\}^T$ . Частота первой формы колебаний, соответствующая подсистеме заготовки, равна  $120 \text{ с}^{-1}$ .





Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления



Таблица

$m \cdot 10^{-3}, \text{кГс}^2 /$	$h, \text{кГс} / \text{мм}$	$c, \text{кГ} / \text{мм}$
$\begin{bmatrix} 0.079 & 0 \\ 0 & 0.079 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0159 & 0.0032 \\ 0.0032 & 0.0225 \\ 0.0021 & 0.011 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1000 & 200 \\ 200 & 2100 \\ 120 & 310 \end{bmatrix}$

Таблица

$m, \text{кГс}^2 / \text{мм}$	$h, \text{кГс} / \text{мм}$	$c, \text{кГ} / \text{мм}$
$\begin{bmatrix} 0.041 & 0 \\ 0 & 0.041 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0159 & 0.0032 \\ 0.0032 & 0.0225 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 400 & 0.0 \\ 0.0 & 400 \end{bmatrix}$

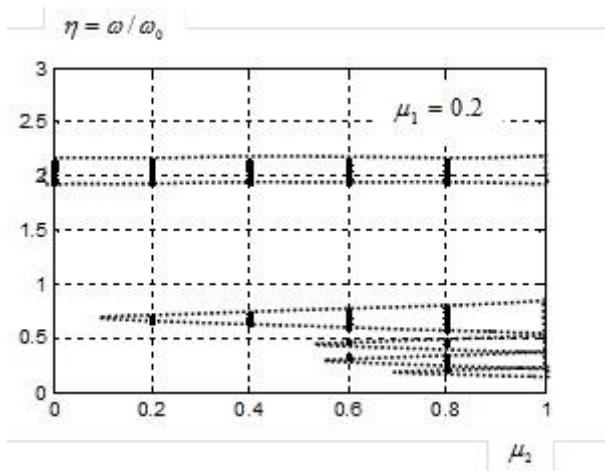
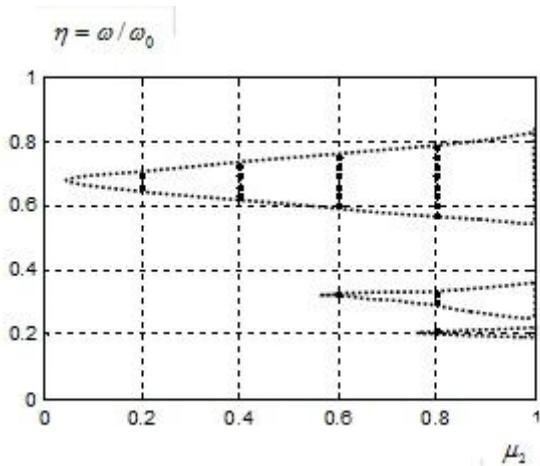


## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Как видно, область параметрического возбуждения колебаний и потери устойчивости стационарной траектории существенно расширяется, и она смещается в сторону низких частот. Этот механизм потери устойчивости до настоящего времени в рассматриваемой предметной области не принимался во внимание. Кроме этого, необходимо отметить, что при изучении кинематических возмущений, действующих на систему, необходимо учитывать, что эти возмущения всегда вызывают изменение параметров системы. Поэтому изучение параметрических явлений позволяет объяснить ряд известных экспериментально фактов, например, увеличение вибраций после возрастания частоты вращения шпинделя выше некоторого критического значения. Приведенные результаты имеют принципиальное значение особенно в тех случаях, когда рассматривается скоростная обработка резанием. Приведенные результаты также показывают, что уменьшение точности станка, связанного, например, с радиальными биениями шпинделя, расширяют область неустойчивого резания.

Таким образом, для систем с периодически изменяющимися коэффициентами в уравнениях в вариациях характерно параметрическое возбуждение колебаний.

Для интересующихся студентов можно ее изучить, например, по учебнику: Данжело г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974. Здесь отметим, что устойчивые периодические траектории формируют притягивающее многообразие в пространстве состояния.



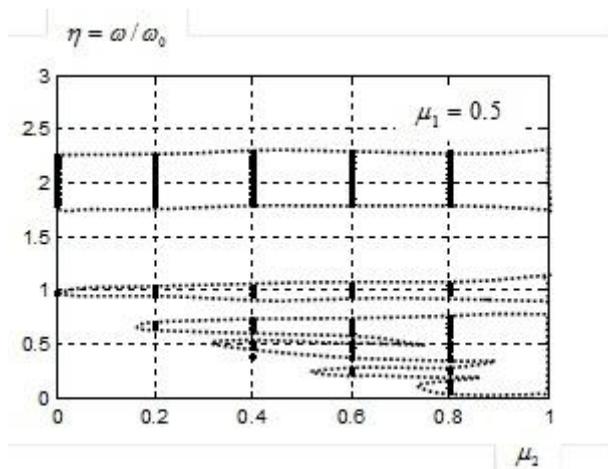


Рис.65. Области параметрического возбуждения системы при учёте деформационных смещений инструмента и вариаций пропуска.

### 4.3. Использование метода функций Ляпунова

Траектория  $X^*(t)$  есть некоторая не периодическая функция времени. Здесь исчерпывающе рассмотрены только некоторые частные случаи. Многие вопросы, имеющие чисто математическую формулировку для этого случая решены. Большой вклад в формулирование и доказательство некоторых вопросов теории внесли А. Андронов, Р. Беллман, А. Пуанкаре и др. С основными положениями этих теорий можно познакомиться в учебнике Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.- 469 с.

Обобщая приведенный материал, можно заметить, что теория устойчивости систем автоматического управления в настоящее время разработана полностью для линейных систем с постоянными и периодическими параметрами, когда параметры имеют один период повторения. В том же случае, когда рассмат-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

ривается неавтономная системы, параметры которой изменяются в функции времени в общем случае, то для анализа устойчивости необходимо воспользоваться методом функций Ляпунова. Изложим этот метод без доказательства. Пусть задана система в вариациях относительно точки равновесия в виде

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, \dots, X_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (108)$$

или в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t). \quad (109)$$

Так как уравнения (108) и (109) рассматривают динамику системы в вариациях относительно стационарной траектории, то точка  $X = 0$ . Правая часть в (108) и (109) явно зависит от времени. Например, некоторые параметры системы есть функции времени. Система, которая описывается такими уравнениями, называется неавтономной. Это самый общий случай уравнения в вариациях.

Решение (109) при начальном условии  $X(t_0) = X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}\}^T$  обозначим  $X(X^{(0)})$ , то есть справедливо  $X^{(0)} = X(X^{(0)})$ . Рассмотрим функцию Ляпунова  $V(X, t)$ , введение которой в каждом конкретном случае достаточно произвольно. Однако она является квадратичной формой относительно координат состояния системы и может быть в силу уравнения (109) положительно определенной, отрицательно определенной и отрицательно полуопределенной. Производная по времени относительно этой функции, вычисленная на траектори-



ях системы (109), имеет вид

$$\frac{dV(X, t)}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V(X, t)}{\partial X_i} X_i(X, t) + \frac{\partial V(X, t)}{\partial t}. \quad (110)$$

Об этой функции говорят, что она является полной производной по времени от функции  $V(X, t)$  в силу уравнения (109).

Тогда справедливы две фундаментальные теоремы, доказанные А.М. Ляпуновым [3, 4], которые здесь мы примем без доказательства.

**Теорема 1.** Положение равновесия  $X = 0$  неавтономной системы является устойчивым по Ляпунову, если существует положительно определенная функция  $V(X, t)$  такая, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной.

**Теорема 2.** Положение равновесия  $X = 0$  неавтономной системы является асимптотически устойчивым, если существует положительно определенная функция  $V(X, t)$ , допускающая бесконечно малый верхний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной.

При анализе устойчивости на основе использования функций Ляпунова главная задача заключается в построении этой функции. Рассмотрим конкретный пример. Пусть задана система в вариациях относительно точки равновесия

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = -\exp[-t]X_1 + \exp[-2t]X_2; \\ \frac{dX_2}{dt} = -2\exp[-2t]X_1 - (X_2)^3. \end{cases} \quad (111)$$



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Функцию Ляпунова будем искать в виде  $V(X) = (X_1)^2 + \alpha(X_2)^2$  ( $\alpha > 0$ ).

Производная по времени от этой функции в силу заданных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV(X)}{dt} &= 2X_1 \frac{dX_1}{dt} + 2\alpha X_2 \frac{dX_2}{dt} = \\ &= -2(X_1)^2 \exp(-t) + 2X_1 X_2 \exp(-2t) - 4\alpha X_2 X_1 \exp(-2t) - 2\alpha(X_2)^4. \end{aligned}$$

Например, если положить  $\alpha = 0,5$ , то

$$\frac{dV(X)}{dt} = -2(X_1)^2 \exp(-t) - (X_2)^4. \quad (112)$$

Очевидно, что (112) является отрицательно определенной функцией. Следовательно, на основе второй теоремы Ляпунова положение равновесия системы является асимптотически устойчивым.

## 5. ОСНОВЫ СИНТЕЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Нелинейные связи, существующие в системах автоматического управления, могут, как ухудшать свойства системы (ее устойчивость и показатели качества), так и улучшать их. Например, в системе управления с усилителями, имеющими нелинейность типа ограничение и линейное корректирующее звено, происходит затягивание переходного процесса во времени. Переходной процесс существенно сокращается, если в системе применено нелинейное корректирующее устройство, в которое введен дополнительный усилитель с нелинейностью также типа на-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

сыщения, но уровень насыщения согласован с уровнем основного усилителя. В системах автоматического управления с люфтами в механических передачах могут возникать незатухающие колебания, для устранения которых применяются нелинейные корректирующие звенья. Нелинейные законы управления всегда имеют место при решении задач оптимального управления, например, при синтезе систем оптимальных по быстродействию используются релейные законы управления, обеспечивающие переключения траекторий движения системы в фазовом пространстве. Если дополнительно ставится задача синтеза системы оптимальной по быстродействию при обеспечении заданной точности позиционирования, то в систему вводится дополнительная связь, увеличивающая демпфирование в зависимости от отклонения от терминального состояния системы. Нелинейные корректирующие устройства уменьшают уровень помех, действующих в системах и пр. Наконец, в нелинейной системе не справедлив принцип суперпозиции. Поэтому открываются новые, не существующие в линейных системах, принципы управления. Например, методы вибрационного управления, принципы вибрационного сглаживания нелинейных элементов, возможность параметрического управления динамикой системы, движения в которой лежат далеко за полосой пропускания управляющего устройства. Другими словами, нелинейные связи, вводимые в систему и (или) существующие в ней естественным образом, значительно расширяют направления совершенствования систем управления, как в направлении повышения ее устойчивости, так и показателей качества.

Вначале рассмотрим классификацию нелинейных законов



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

управления. Эта классификация взята из известной монографии, опубликованной под ред. академика АН СССР Е.П.Попова (Нелинейные системы автоматического управления. / Под ред. Е.П. Попова.// М. Машиностроение, 1970).

### 5.1. Нелинейные законы управления.

Нелинейные законы управления можно разделить на пять достаточно больших групп (рис.66). В свою очередь, каждую из этих групп можно разбить на ряд классов. Вначале рассмотрим нелинейные корректирующие звенья (элементы). Как известно, корректирующие звенья – это специально вводимые динамические связи, предназначенные для повышения устойчивости и качества систем управления. Линейные звенья обладают одним важным недостатком. В них амплитудночастотные и фазочастотные характеристики являются взаимосвязанными. Причем, введение дополнительного затухания, например, в низкочастотной области, вызывает одновременное смещение фазочастотной характеристики системы также в низкочастотную область, что затрудняет, например, обеспечивать устойчивость системы при заданной частоте среза. Последняя, как известно, влияет на быстродействие системы (время переходного процесса).

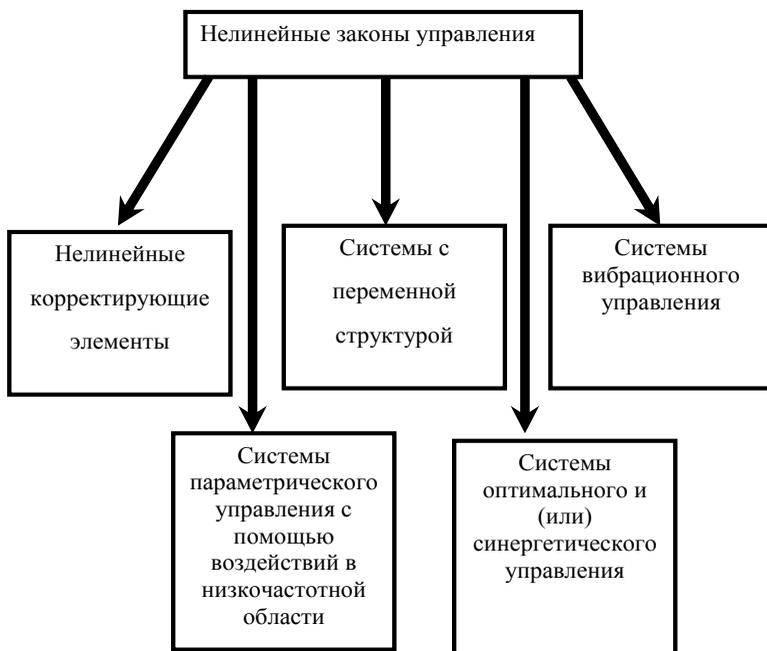


Рис. 66. Укрупненная классификация нелинейных законов управления

Для устранения этого недостатка можно использовать корректирующие устройства, названные псевдолинейными (рис. 67). Это последовательное корректирующее устройство. В таких корректирующих звеньях амплитудночастотная (верхняя ветвь) и фазочастотная (нижняя ветвь) характеристики формируются независимо. При рассмотрении свойств системы необходимо использовать метод гармонической линеаризации. На приведенной схеме амплитудночастотная характеристика определяется звеном с передаточной функцией  $W_1(p)$ , а фазочастотная характеристика – звеном с передаточной функцией  $W_2(p)$ . Выходные элементы, ха-

Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

характеризующие изменение модуля и фазы перемножаются. Тем самым формируется общая АФЧХ системы, рассматриваемая в гармонически линеаризованном представлении.

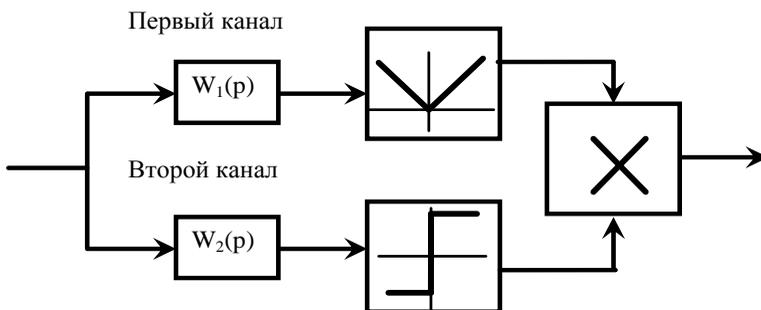


Рис. 67. Псевдолинейное последовательное корректирующее устройство

Для повышения качества системы во многих случаях целесообразно изменять общий коэффициент усиления системы в зависимости от отклонения от точки равновесия. При управлении движением механической системы такой точкой является точка терминального состояния системы. Как правило, при приближении к терминальной точке коэффициент усиления системы должен уменьшаться. Такой закон управления можно реализовать с помощью нелинейной отрицательной обратной связи (рис. 68). Здесь необходимо учитывать, что при увеличении коэффициента усиления в обратной связи общий коэффициент усиления системы уменьшается.

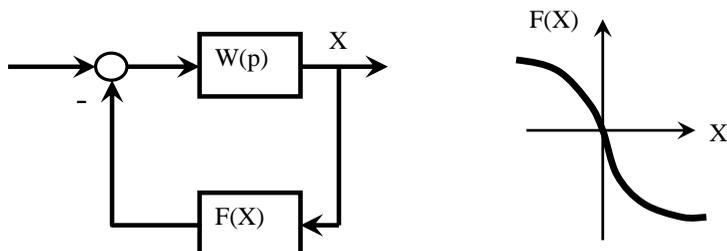


Рис. 68. Корректирующее звено, изменяющее коэффициент усиления системы в зависимости от отклонения от точки равновесия  $X=0$

При управлении системой, отдельный элемент которой взаимодействует со средой, необходимо учитывать, что линеаризованные свойства динамической связи в окрестности стационарной траектории, задаваемой внешним управлением, зависят от траектории. В этом случае обычно полоса пропускания блока  $W_0(p)$  существенно ниже полосы пропускания управляемыми свойствами системы, состоящей из  $W(p)$  и нелинейной обратной связи, формируемой средой  $F(X, dX/dt)$  (рис. 69/ В этом случае, во-первых, строится иерархия дифференциальных уравнений по принципу «медленности» времени. При этом используется рассмотренный ранее метод разделения движений. Во-вторых, управление свойствами системы  $W(p)$ , охваченной обратной связью  $F(X, dX/dt)$ , осуществляется на основе изменения параметров  $F(X, dX/dt)$  в окрестности стационарной траектории, задаваемой внешним управлением  $U(t)$ . Этот принцип будет подробно проанализирован в последней главе настоящего курса лекций.

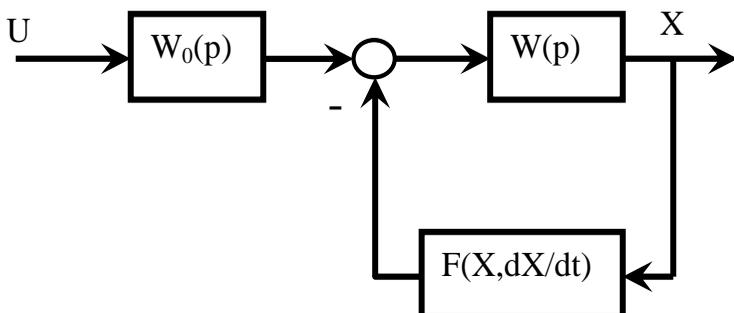


Рис. 69. Принцип параметрического управления системой  $W(p)$ , охваченной обратной связью  $F(X, dX/dt)$

В последние годы большое распространение получили системы, имеющие переменную структуру. Причем, изменение структуры управления формируется в координатах состояния системы (рис. 70). В этом случае изменение структуры управления реализуется с помощью различных логических элементов на основе использования микропроцессорной техники. На приведенном примере управление с передаточной функцией  $W_1(p)$  при  $|X| > |X_0|$  переключается на управление с передаточной функцией  $W_2(p)$  при  $|X| < |X_0|$ . Например, при подходе к точке равновесия система должна иметь апериодический переходной процесс для того, чтобы в терминальной точке координата подходила без перерегулирования. При  $|X| > |X_0|$  к системе предъявляются требования быстродействия. Для этого коэффициент усиления может быть большим, и система не должна быть задемпфированной. Принципиально закон переключения может формироваться в траекториях всего фазового пространства.

При синтезе систем, обеспечивающих минимизацию некоторого функционала, практически всегда формируется нелиней-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

ный закон управления. Синтез оптимальных систем рассмотрен в специальном курсе, поэтому в данном параграфе лишь укажем на то, что практически все оптимальные системы формируют нелинейный закон управления. Это в равной мере относится и к синтезу систем на основе синергетической теории управления. Это самостоятельный класс нелинейных законов управления.

Наконец, системы вибрационного управления основаны на том, что при введении на вход нелинейного элемента периодически изменяющегося сигнала параметры нелинейного элемента изменяются. Это связано с тем, как показано выше, что гармонически линеаризованная эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента зависит от параметров периодических движений. Поэтому динамические свойства системы становятся зависящими от параметров периодических движений.

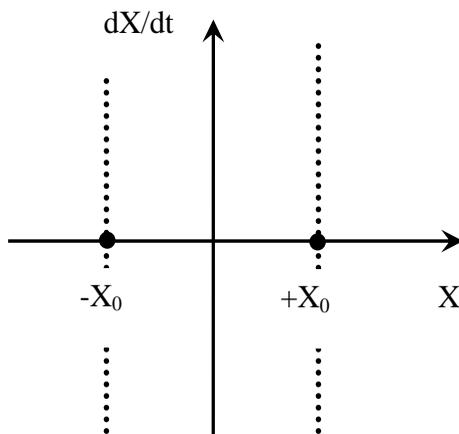
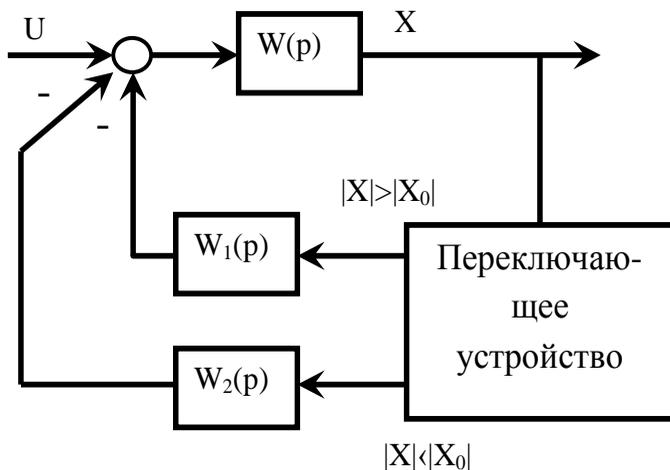


Рис. 70. Принцип формирования нелинейного закона управления с переменной структурой

Приведенный перечень нелинейных законов управления далеко не исчерпывает возможности улучшения и управления



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

свойствами системы на основе использования закономерностей нелинейной динамики систем. В каждом конкретном случае при анализе и синтезе систем необходимо использовать методы фазового пространства и (или) асимптотические методы нелинейной динамики. Приведем пример коррекции нелинейной системы в фазовой плоскости.

### 5.2. Коррекция свойств релейной системы управления с помощью конструирования линии переключения

Рассмотрим конкретную систему (рис. 71). Для определенности, влияющей на понимание материала, будем считать, что приведенная схема относится в позиционной системе управления перемещением с помощью двигателя постоянного тока с якорным управлением, в котором электрической постоянной времени можно пренебречь. Выполним подробный анализ этой системы и способы коррекции ее динамических свойств на основе формирования линии переключения в фазовой плоскости.

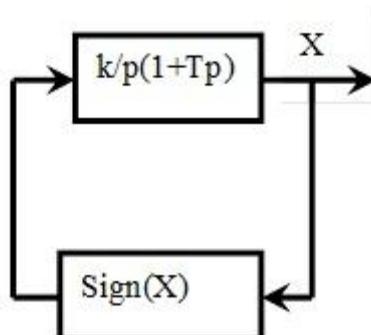


Рис. 71. Структурная схема релейной системы управления

Динамика системы (рис. 71) описывается следующим уравнением



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$T \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dX}{dt} = -k \operatorname{sign} X. \tag{113}$$

Для построения фазовых траекторий системы (113) в фазовой плоскости введем в рассмотрение фазовую координату  $\frac{dX}{dt} = Y$ . Тогда вместо (113) имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y; \\ \frac{dY}{dt} = \frac{1}{T} \{-k \operatorname{sign} X - Y\}. \end{cases} \tag{114}$$

Или, исключая время, в координатах фазовой плоскости

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{TY} \{-k \operatorname{sign} X - Y\}. \tag{115}$$

Примем во внимание, что  $-\operatorname{sign} X = \begin{cases} +1 & \text{при } X < 0; \\ -1 & \text{при } X > 0. \end{cases}$  Тогда

Фазовые траектории будем строить на двух листах. При  $X < 0$ , это первый лист, он соответствует полуплоскости, расположенной левее оси ординат. При  $X > 0$ , - это второй лист, он соответствует полуплоскости, расположенной правее оси ординат. Ось ординат в этом случае есть линия переключения фазовых траекторий. Проинтегрируем систему (115) для случая  $-\operatorname{sign} X = +1$ , то есть для первого листа фазовой плоскости с начальными значениями координаты и скорости соответственно  $X_0$  и  $Y_0$ .

$$T \int_{Y_0}^Y \frac{Y}{k - Y} dY = \int_{X_0}^X dX. \tag{116}$$

В результате получаем уравнение для фазовой траектории первого листа



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$X = X_0 + Y_0 - Y - k \ln\left\{\frac{Y - k}{Y_0 - k}\right\}. \quad (117)$$

Для  $- \text{sign}X = -1$  получаем

$$X = X_0 + Y_0 - Y + k \ln\left\{\frac{Y + k}{Y_0 + k}\right\}. \quad (118)$$

Анализ (117) и (118) показывает, что все фазовые траектории, в зависимости от знака управления, притягиваются к двум прямым, параллельным оси абсцисс и проходящим через точки  $+k$  или  $-k$  в зависимости от знака управления (рис.72). Эти прямые есть притягивающие многообразия, то есть аттракторы, к которым притягиваются все фазовые траектории, имеющие различные начальные условия, при условии, что переключения отсутствуют. Они выделены на рис. 72 жирными линиями. Для физической модели движения электромеханической системы это имеет четкое физическое содержание. После подачи напряжения на якорь двигателя после переходных процессов устанавливается постоянная и неизменная скорость, определяемая общим коэффициентом усиления системы  $k$ .

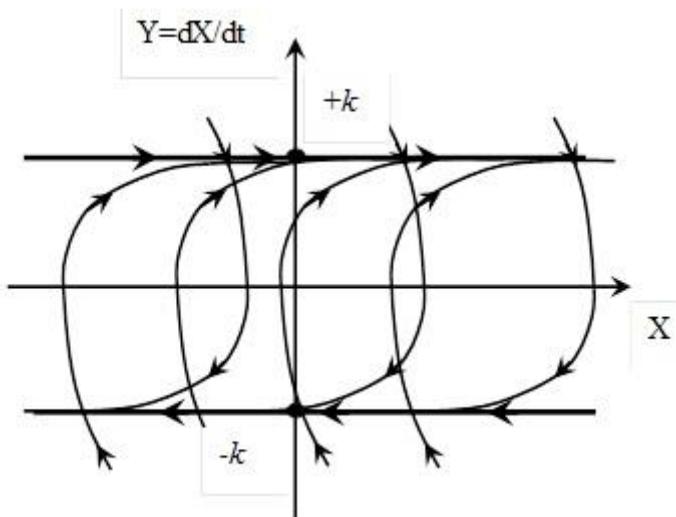


Рис. 72. Фазовые портреты системы при управлениях +1 и -1.

Если линия переключения фазовых траекторий соответствует оси ординат, то фазовая траектория системы строится на основе присоединения конца фазовой траектории в точке  $X=0$ , соответствующей одному знаку управления к фазовой траектории другого знака. Причем начальные условия для фазовой траектории другого знака соответствуют концу фазовой траектории предыдущего знака. Пример такой фазовой траектории приведен на рис. 73 «а». Так как реле в рассматриваемой схеме является идеальным, то точка равновесия  $X=0, Y=0$  характеризует притягивающее многообразие. В отличие от линейной системы движение координаты  $X(t)$  к нему осуществляется с частотой, возрастающей до бесконечности при  $X \rightarrow 0$ .

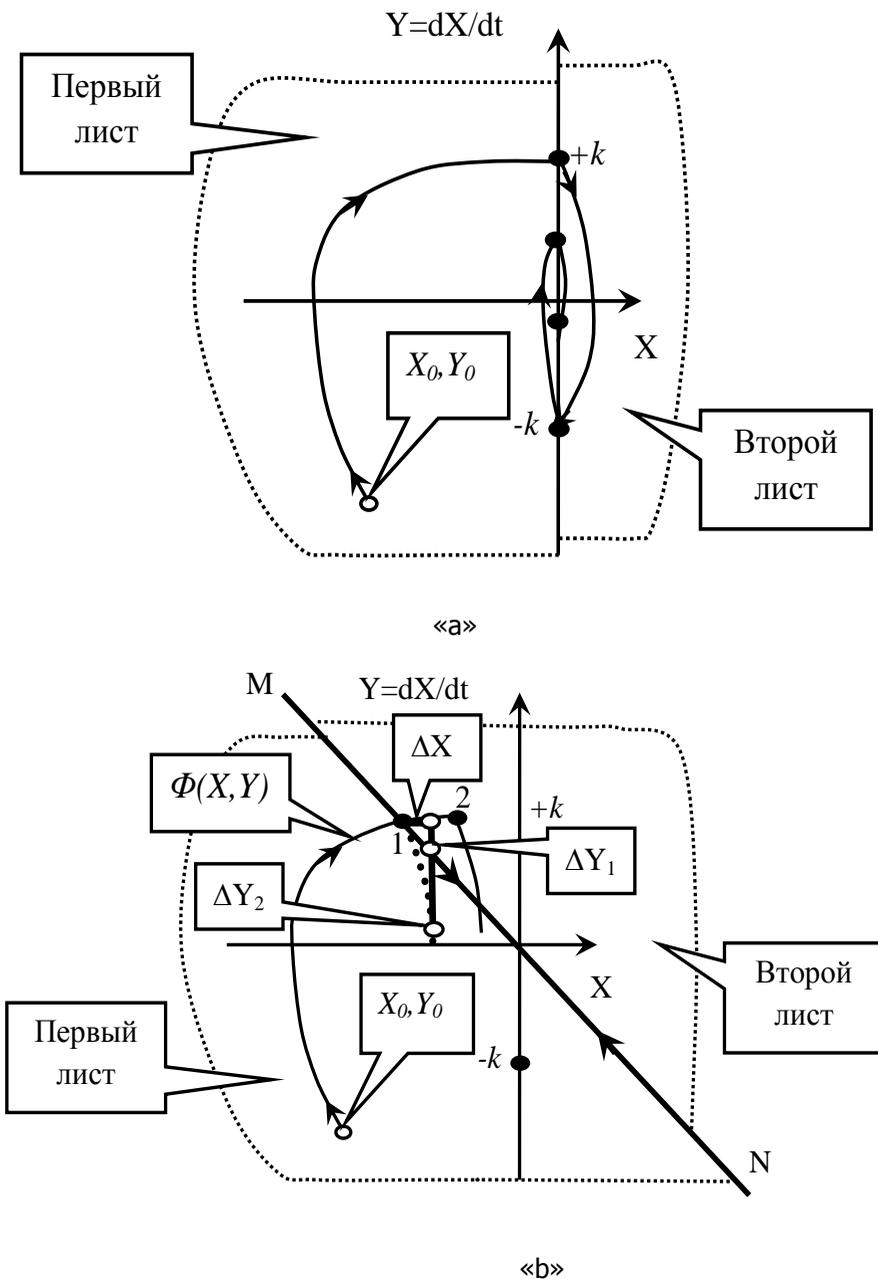


Рис. 73. Преобразование фазовых траекторий при смещении линии переключения от оси координат «а» к прямой MN «б»



Введем в систему дополнительную линейную связь, которая трансформирует линию переключения по прямой MN (рис. 73 «b»). Пусть уравнение этой прямой определяется выражением  $Y + k_0 X = 0$ , то есть  $\partial Y / \partial X = -k_0 = const$ . Пусть в точке «1», находящейся на линии переключения MN, координаты которой равны  $X(1)$ ,  $Y(1)$ , выполняется требование: при приращении  $\Delta X$  приращение  $\Delta Y_1$ , соответствующее приращению линии переключения, будет меньше приращения  $\Delta Y_2$ , соответствующего приращению фазовой траектории второго листа. Тогда фазовая траектория второго листа будет пересекать линию переключения. На рис. 73 «b» расстояние «1-2» обращается в ноль. Таким образом, при надлежащем выборе  $\partial Y / \partial X = -k_0$  в уравнении линии переключения фазовая траектория будет скользить по линии MN к началу координат, то есть к точке равновесия. В этом случае скорость движения к точке равновесия будет пропорциональной величине отклонения. Этот режим работы релейной системы называется *скользящим режимом работы релейной системы*. Уникальность этого режима заключается в том, что траектория движения в фазовом пространстве определяется исключительно линией переключения. При этом она не меняется при вариациях параметров модели, при выполнении указанного выше требования. В этом случае релейная система при подходе к точке равновесия не имеет динамических выбегов. Более того зависимость скорости от отклонения в окрестности точки равновесия определяется уравнением линии переключения  $k_0(X)$ .

Аппаратная реализация этого режима также не вызывает



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

сложностей, так как координата  $dX/dt$  существует в рассматриваемом объекте. Она находится на входе интегрирующего звена (рис. 74). Тогда линия переключения, определяемая из условия равенства нулю сигнала на входе релейного элемента, определяется линейным выражением  $Y + k_0X = 0$ . Очевидно, что в диапазоне изменения  $k_0$ , удовлетворяющем указанным выше требованиям, коэффициент может быть и функцией координаты  $X$ . Он может моделироваться также как в функции координаты  $X$ , так и скорости  $Y$ .

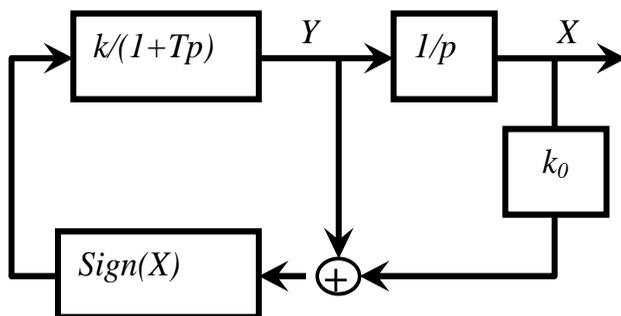


Рис. 74. Структурная схема релейной системы, реализующая скользящий режим управления

В частности, если линию переключения в фазовой плоскости обеспечить по фазовой траектории противоположного знака управления, то все траектории будут притягиваться к этой линии переключения (рис. 75). Тогда, во-первых, эта линия переключения (линия MN на рис. 75 «а») является аттрактором, во-вторых, система, реализующая этот закон, будет системой, оптимальной по быстродействию. Из (117) и (118) уравнения линии переключения на участке «M0» будет

$$X + Y - k \ln \left\{ \frac{Y + k}{k} \right\} = 0, \text{ а на}$$



участке «ON» -  $X + Y + k \ln \left\{ \frac{Y - k}{-k} \right\} = 0$ . Таки образом, уравнение линии переключения  $\aleph(X, Y) = 0$  можно представить следующим образом

$$\aleph(X, Y) = \begin{cases} X + Y - k \ln \left\{ \frac{Y + k}{k} \right\} = 0, & \text{при } X < 0; \\ X + Y + k \ln \left\{ \frac{Y - k}{-k} \right\} = 0, & \text{при } X > 0. \end{cases} \quad (119)$$

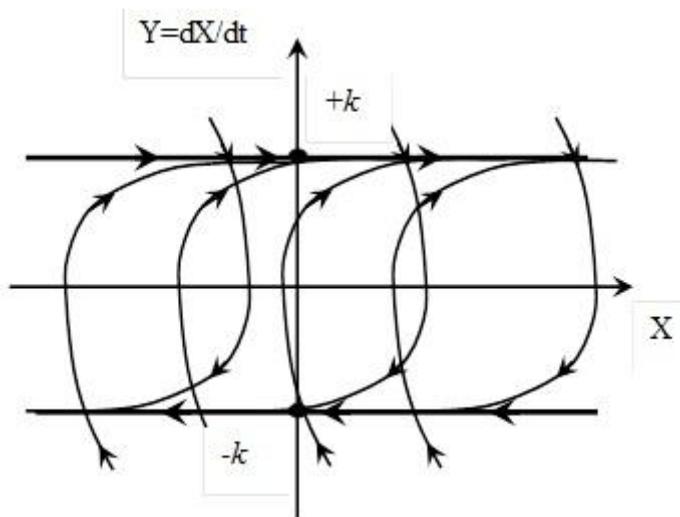
Уравнение (119) непосредственно вытекает из принципа максимума Л.С. Понтрягина. Однако для этого конкретного случая условие (119) получается непосредственно из постановки задачи синтеза систем, оптимальных по быстродействию.

Напомним, каким образом формулируется задача синтеза системы, оптимальной по быстродействию для данного примера.

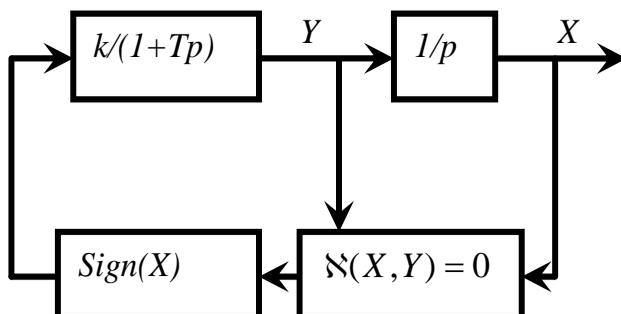
1). Задано уравнение движения системы в виде (114)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y; \\ T \frac{dY}{dt} + Y = U. \end{cases} \quad (120)$$

2). Заданы ограничения на управление  $|U| \leq U_0$ . 3) Найти управление  $U$  такое, что время движения из любой точки фазового пространства в точку терминального состояния было минимально. Уравнение (120) записано в отклонениях от точки терминального состояния, которое в данном случае находится в начале координат.



«a»



«b»

Рис. 75. Система, оптимальная по быстродействию: а – фазовый портрет системы; б – структурная схема

Ограничение  $|U| \leq U_0$  в данном случае приводит к требованию  $k = \max$ . Так как время движения из любой точки в начало координат должно быть минимальным, то средняя скорость движения должна быть максимальной. Например, при движении



из точки  $X_0$  в  $X=0$   $\int_{X_0}^0 Y(X)dX = \max$  . Кроме этого при движении

в точке  $X=0$  система не должна проходить дополнительный путь, то есть динамические выбеги должны отсутствовать. Этим условиям отвечает управление по закону идеального реле, а линия переключения должна находиться на кривой (119). Структурная схема, реализующая такое управление, приведена на рис. 75 «b». Как видно, такая система формирует существенно нелинейный закон управления, причем, для реализации закона в систему введено два нелинейных элемента.

В приведенном в данном параграфе материале на простом примере показана возможность существенного и разнообразного улучшения показателей качества систем на основе использования релейных законов управления с соответствующей коррекцией линии переключения в фазовой плоскости. Обобщая материал, изложенный в данной главе, отметим, что нелинейные законы управления не только расширяют возможности улучшения качества систем, но и открывают новые направления построения корректирующих устройств и синтеза нелинейных законов управления.



## **6. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ, ВОЗМУЩЕННЫМИ СТАЦИОНАРНЫМ ШУМОМ**

При анализе возмущенного движения линейной системы обычно используется корреляционно спектральная теория, позволяющая определить реакцию координат состояния системы на внешний шум, моделируемый как стационарный случайный процесс. Так как для линейной системы справедлив принцип суперпозиции, то реакция системы на детерминированное воздействие (например, управление) и стационарный шум анализируется как сумма двух независимых суперпозиций.

При анализе нелинейных систем такой подход не справедлив, так как в нелинейной системе принцип суперпозиции не является справедливым. В зависимости от траектории, определяемой управлением, изменяется и реакция на внешний шум, даже удовлетворяющий гипотезам стационарности. Таким образом, при рассмотрении прохождения стационарного случайного сигнала через линейное звено применяются методы усреднения по времени (корреляционные функции и спектральные плотности), то для нелинейных звеньев основой являются методы усреднения по множеству, то есть законы распределения на входе и выходе. Например, если рассматривается случайный процесс с математическим ожиданием равным нулю, и он проходит через линейное звено, то на выходе мы имеем также математическое ожидание равное нулю. В нелинейном звене, не обладающим свойством центральной симметрии, на выходе математическое ожидание уже не равно нулю. Более того, если рассматривается сумма



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

управления и возмущения, то в зависимости от управления, как указано выше, нелинейная функция, обладающая свойством центральной симметрии, за счет смещения, вызванного управлением, уже не будет обладать таким свойством.

Таким образом, математическое ожидание от шума на выходе изменяется в зависимости от траектории управления. Таким образом, методы исследования прохождения случайного сигнала через нелинейное звено существенно отличаются от методов исследования линейных систем. Они сложнее и разнообразнее. При этом из-за сложности и, порой, невозможности получения точных решений, наибольшее распространение получили приближенные методы. Они зависят от типа нелинейного элемента (однозначный, двузначный), его инерционности, наличия в системе обратных связей и пр. Вначале рассмотрим преобразование плотности распределения в безинерционном нелинейном звене.

### 6.1. Преобразование плотности распределения в безинерционном нелинейном звене. Вычисление моментов первого и второго порядка на выходе нелинейного звена

Рассмотрим безинерционное нелинейное звено (рис. 76), имеющее монотонную нелинейную характеристику  $Y(X)$ . Пусть на его вход подается сигнал, имеющий ансамбль  $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}^T$  реализаций. Тогда на его выходе будем иметь следующий ансамбль  $Y(t) = \{Y_1[X_1(t)], Y_2[X_2(t)], \dots, Y_n[X_n(t)]\}^T$ . Зафиксируем время  $t = t_*$ . Для него на входе нелинейного преобразователя имеем плотность распределения  $p_1(X)$ , а на выходе -  $p_2(X)$  (рис. 76). Сравним два процесса, отличающиеся на входе математическим

ожиданием  $M(X)$ .

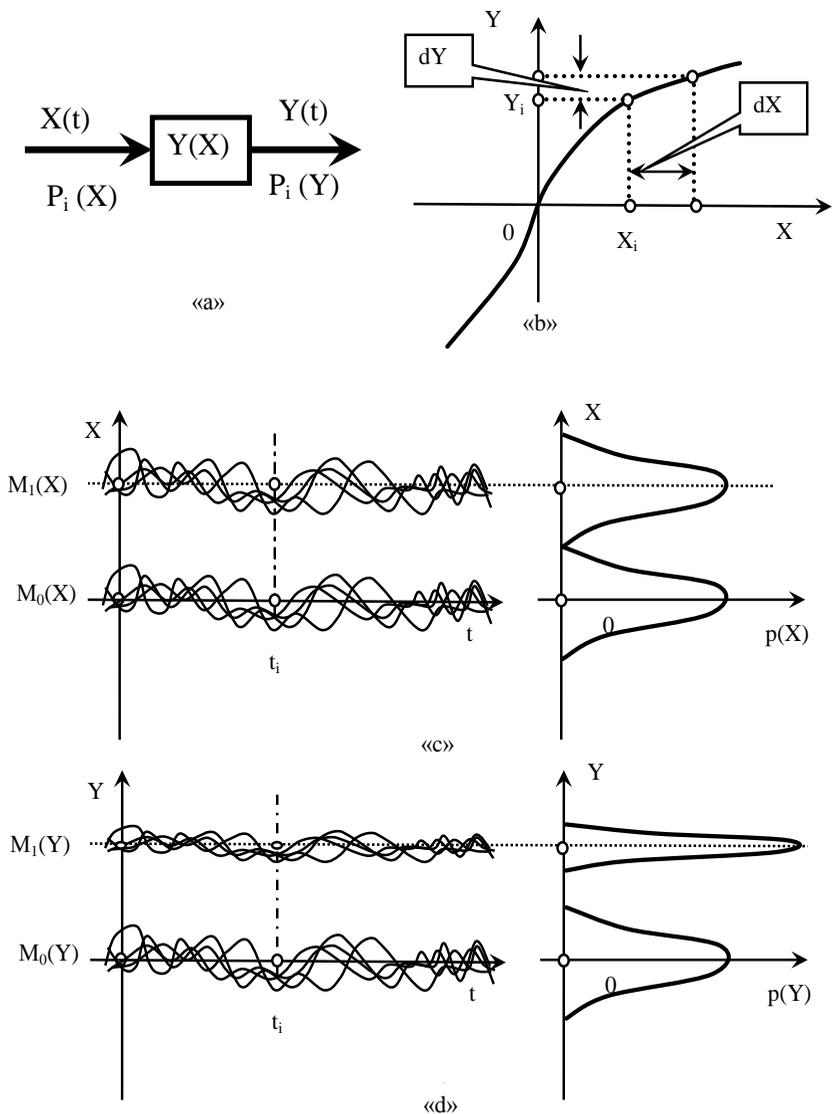


Рис. 76. Преобразование плотности распределения реализаций случайного процесса в фиксированном сечении нелинейной однозначной функции



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Уже поверхностный анализ показывает, что функции распределения у этих процессов различны, так как в нелинейном элементе отличаются линеаризованные коэффициенты влияния входа на выход. В этом случае плотность распределения  $p_i(Y)$  на выходе в фиксированный момент может быть определена из условия равенства вероятностей принадлежности сигнала на входе в области  $(X_i+dX)$  и сигнала на выходе в области  $(Y_i+dY)$  (рис. 76

«b»). Кроме этого очевидно  $dY = (\frac{dY}{dX})dX$ , тогда

$$p(Y)dY = p(X)dX, \tag{121}$$

или

$$p(Y) = (\frac{dX}{dY})p(X(Y)). \tag{122}$$

Это выражение дает возможность вычислить  $p_i(Y)$  на основе знания  $Y(X)$  и плотности распределения  $p_i(X)$ .

Поясним методику вычисления на конкретном примере. Пусть  $X(t)$  имеет равномерное распределение во всех сечениях случайного процесса на отрезке  $\pm a$  (рис. 77), то есть

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{при } |X| < a; \\ 0 & \text{при } |X| > a, \end{cases} \tag{123}$$

так как функция распределения вероятности должна удовлетворять условиям нормировки, то есть  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \equiv 1$ .

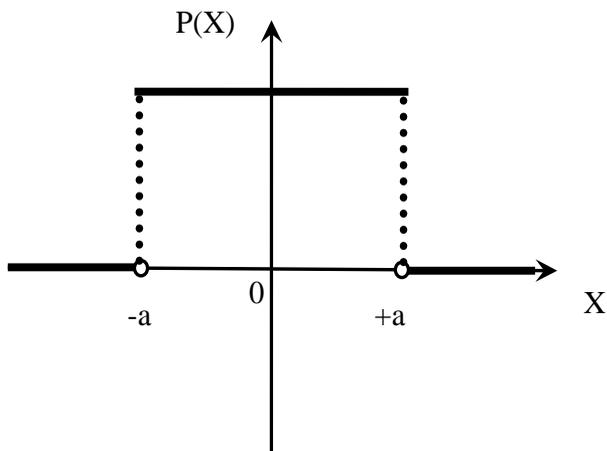


Рис. 77. Функция распределения на входе нелинейного элемента

Нелинейное звено имеет симметричную относительно  $X=0$  характеристику вида  $Y=X^3$  или  $X=Y^{1/3}$ . Требуется определить функцию распределения на выходе нелинейного звена  $p(Y)$ . На основании (122) для области  $X = \pm a$ , или для  $Y = \pm a^3$ , имеем

$$p(Y) = \frac{1}{2a} \frac{dX}{dY} = \frac{1}{6a} Y^{-\frac{2}{3}}. \quad (124)$$

Для области  $|X| > a$ , очевидно,  $p(Y) = 0$ . Графики  $p(Y)$  и  $Y(X)$  приведены на рис. 78.

При условии, что на вход нелинейного звена дополнительно подается постоянная составляющая, смещающая центр группирования от нуля, то на выходе нелинейного элемента функция распределения вероятности существенно измениться. Таким образом, в общем случае, когда на вход нелинейного элемента подается некоторый детерминированный сигнал и стационарный случайный шум с нулевым математическим ожидани-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

ем, то функция распределения вероятности на выходе  
ного элемента становится зависящей от траектории детерминиро-  
ванного сигнала. В линейной системе функция распределения на  
выходе не зависит от этого сигнала. В этом принципиальное от-  
личие преобразования функции распределения вероятностей в  
нелинейной системе.

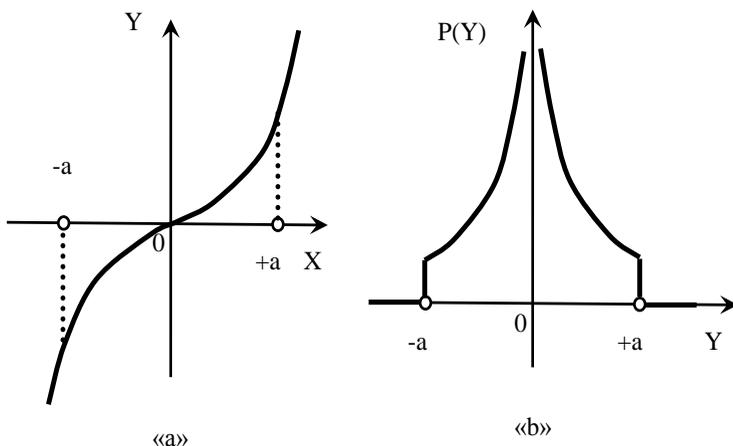


Рис. 78. График нелинейного звена «а» и функция распределения вероятности на его выходе «б»

Если задана функция распределения вероятности на вы-  
ходе нелинейного звена, то принципиально вычисление моментов  
первого и второго порядков на его выходе не представляет слож-  
ности. Для момента первого рода, то есть математического ожи-  
дания  $\bar{Y}$ , очевидно, справедливо

$$\bar{Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y p(Y) dY = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(X) p(Y) dX. \quad (124)$$



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Момент первого порядка на входе системы определен

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} Xp(X)dX .$$

Поэтому определена и связь между моментами

первого рода на входе и выходе нелинейного преобразователя. Аналогичным образом определяется момент второго порядка, то есть дисперсия

$$\sigma_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^2 p(Y)dY = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^2(X)p(Y)dX.$$

(125)

Таким образом, знание функций распределение вероятности позволяет определить главные оценки случайного процесса на входе и выходе нелинейного элемента.

### 6.2. Понятие о статистической линейзации нелинейных звеньев

Ранее при определении периодических режимов в нелинейных системах было введено понятие о гармонической линейзации, которое, в конечном счете, позволяет заменить нелинейное звено некоторой функцией влияния. Причем эта функция (гармонически линейризованная эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента) учитывает главные особенности нелинейного звена: зависимость связи сигналов на входе и выходе не только от частоты, но и от амплитуды периодических движений. Аналогичным образом при рассмотрении случайных процессов в нелинейных системах можно ввести в рассмотрение некоторые функции влияния, в основу построения которых ставится рас-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

смотрение статистических характеристик на входе и выходе нелинейных звеньев. В качестве основных вероятностных характеристик в этом случае ставятся их математические ожидания и величина дисперсии.

Приведем один из способов получения статистически линейризованных коэффициентов влияния математических ожиданий и дисперсий на входе нелинейного элемента на его выход (рис. 79). Пусть задано нелинейное звено  $Y(X)$ . Кроме этого, пусть задан случайный процесс на входе нелинейного звена  $X(t)$ . Тогда на его выходе мы имеем реализацию  $Y(t)$ , которую можно вычислить, так как функция  $Y(X)$  известна. Рассмотрим реализации этих процессов на конечном отрезке  $T$ , для которого рассмотрим отсчеты с дискретностью  $\Delta t$ . Дискретность  $\Delta t$  определяется верхней частотой анализируемого процесса, длительность  $T$  определяется нижней частотой на основании теоремы Котельникова. Рассмотрим случай, когда  $Y(X=0)=0$ . Подадим на вход нелинейного блока случайный процесс. Пусть он является стационарным случайным процессом с заданным математическим ожиданием. Это эквивалентно подачи на вход нелинейного элемента детерминированной постоянной составляющей и центрированного случайного процесса

$$X(t) = X_0 + X^{(C)}(t), \quad (126)$$

где  $X_0$  - постоянная составляющая, в том числе математическое ожидание случайного процесса;  $X^{(C)}(t)$  - стационарный случайный процесс, характеризующийся при нулевом математическом ожидании величиной дисперсии  $\sigma_X$ . Тогда на выходе мы



имеем

$$Y(t) = Y_0(X_0, \sigma_X) + Y^{(C)}(X_0, \sigma_X), \quad (127)$$

где  $Y_0$  - постоянная составляющая, величина которой зависит от  $(X_0, \sigma_X)$ ;  $Y^{(C)}(t)$  - случайный процесс, характеризующийся также величиной дисперсии  $\sigma_Y(X_0, \sigma_X)$ . Процесс  $Y(t)$  уже не является стационарным случайным, так как функции распределения его в сечениях не имеют нормального распределения. Это условие показано выше.

Рассмотрим оценки (127) в окрестности  $X_{0,0}, \sigma_{X,0}$ . Тогда при заданных  $X_0, \sigma_X$  мы имеем оценки на выходе

$$\begin{cases} Y_0[(X_0 + \Delta X_0), (\sigma_X + \Delta \sigma_X)] = Y_0[(X_0 + 0), (\sigma_X + 0)] + \frac{\partial Y_0}{\partial \Delta X_0} \Delta X_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial \Delta \sigma_X} \Delta \sigma_X; \\ \sigma_Y[(X_0 + \Delta X_0), (\sigma_X + \Delta \sigma_X)] = \sigma_Y[(X_0 + 0), (\sigma_X + 0)] + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta X_0} \Delta X_0 + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta \sigma_X} \Delta \sigma_X, \end{cases} \quad (128)$$

где  $\frac{\partial Y_0}{\partial \Delta X_0} = k_{M,M}$ ,  $\frac{\partial Y_0}{\partial \Delta \sigma_X} = k_{\sigma,M}$  - коэффициенты статистической

линеаризации влияния математического ожидания и дисперсии на входе нелинейного элемента на значение математического ожидания на его выходе;

$\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta X_0} = k_{M,\sigma}$ ,  $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta \sigma_X} = k_{\sigma,\sigma}$  - коэффициенты статистической

линеаризации влияния математического ожидания и дисперсии на входе нелинейного элемента на значение дисперсии на его выходе.



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Для получения оценок  $\frac{\partial Y_0}{\partial \Delta X_0}$ ,  $\frac{\partial Y_0}{\partial \Delta \sigma_X}$ ,  $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta X_0}$ ,  $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta \sigma_X}$

можно воспользоваться методом наименьших квадратов в процессе статистических исследований входа и выхода нелинейного

блока, то есть оценки  $\frac{\partial Y_0}{\partial \Delta X_0} = k_{M,M}$ ,  $\frac{\partial Y_0}{\partial \Delta \sigma_X} = k_{\sigma,M}$ ,

$\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta X_0} = k_{M,\sigma}$ ,  $\frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Delta \sigma_X} = k_{\sigma,\sigma}$  определяются по критерию мини-

мума неувязок реальных значений дисперсии и математического ожидания и линеаризованных оценок, определяемых коэффициентами статистической линеаризации. Важно подчеркнуть, что линеаризованные оценки, как математического ожидания, так и дисперсии зависят одновременно от вариаций математических ожиданий и дисперсии на входе нелинейного элемента (рис. 79). Причем, эти оценки, строго говоря, изменяются при смещении на входе математического ожидания и дисперсии.

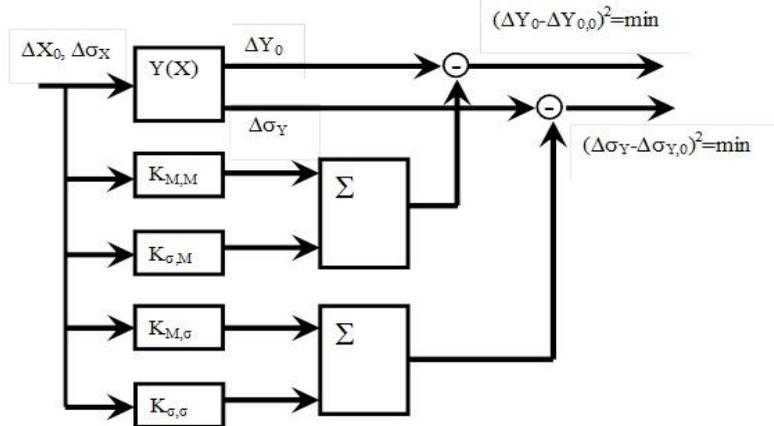


Рис. 79. Схема определения коэффициентов статистической линеаризации



С другими схемами статистической линеаризации можно познакомиться в соответствующей литературе. Здесь ограничимся идеей метода и основными его закономерностями.

## **7. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ОБРАБОТКИ НА МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКАХ**

При построении систем управления процессами обработки на металлорежущих станках приходится считаться со следующими проблемами.

1) Процесс обработки и, соответственно, формирование геометрии детали осуществляется на основе управления движением исполнительными элементами станка. Для станка токарной группы исполнительными элементами являются продольные и поперечные перемещения суппорта и частота вращения шпинделя. В свою очередь, движение вершины инструмента зависят, как от внешнего управления, так и от сил резания, формируемых в траекториях движения исполнительных элементов. Для дальнейшего анализа удобно ввести в рассмотрение траектории формообразующих движений инструмента относительно заготовки, которые отличаются от траекторий исполнительных элементов, по крайней мере, на величину упругих деформационных смещений инструмента относительно суппорта и заготовки от идеальной оси ее вращения. Поэтому необходимо управлять не траекториями исполнительных элементов, а траекториями формообразующих



движений.

2) Траектории формообразующий движений определяются внешним управлением, заданным, например, программой ЧПУ, и силами резания, зависящими от этих траекторий. Так как все исполнительные движения влияют на силы резания, то при рассмотрении динамики системы необходимо использовать векторное представление об управляемом объекте. Таким образом, скалярные системы управления исполнительными элементами преобразуются за счет реакции со стороны процесса резания в векторное управление. Все системы становятся связанными.

3) Связь сил резания с траекториями формообразующих движений является нелинейной. В связи с этим при анализе и синтезе системы управления процессами обработки на станках необходимо привлекать методы анализа нелинейных систем управления.

4) Частотный состав движений инструмента относительно заготовки лежит в диапазоне, существенно превышающим полосу пропускания приводов исполнительными элементами. Поэтому с помощью приводов исполнительных элементов можно управлять лишь состоянием равновесия подсистемы инструмента и свойствами подсистемы в вариациях относительно точки равновесия.

Отмеченные особенности характеризуют процесс обработки на станках как сложный нелинейный объект, на примере анализа которого можно рассмотреть все указанные выше методы анализа нелинейных систем.



## 7.1. Принцип разделения движений.

Рассмотрим проблему управления процессами обработки на металлорежущих станках на примере токарной обработки (рис. 80). Будем считать, что все приводы движения исполнительных элементов осуществляют управляемые движения от двигателей постоянного тока с якорным управлением. Будем считать, что все механические элементы приводов являются абсолютно жесткими, и они не имеют кинематических погрешностей. Кроме этого прием во внимание, что имеют место упругие деформационные смещения вершины инструмента относительно суппорта, а также заготовки относительно идеальной оси ее вращения. Кроме этого, не нарушая общности, на данном этапе не будем учитывать все возможные обратные связи в приводах исполнительных элементов, включенные в систему управления исполнительными элементами. В этом случае динамическую систему резания можно схематизировать, как показано на рис. 81.



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

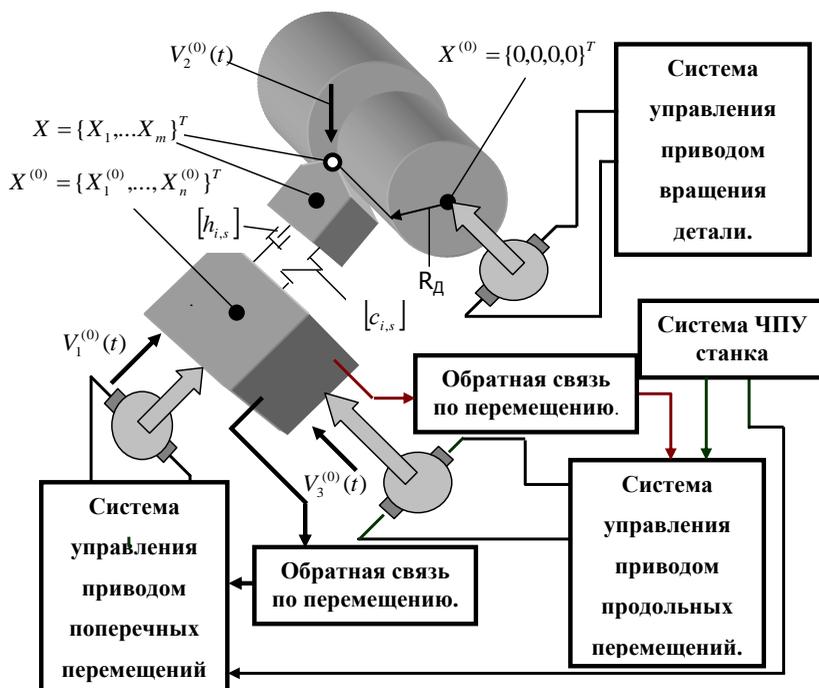


Рис.80. Схема управления формообразующими движениями инструмента относительно заготовки при токарной обработке

Рассмотрим общее уравнение динамики системы (рис. 81), состоящее из уравнений движений исполнительных элементов станка и уравнений упругих деформационных смещений инструмента и заготовки. Эти уравнения частично рассмотрены в главе 3.

Движения исполнительных элементов станка определяются системой дифференциальных уравнений

$$T_{ЭМ}T_{Э} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = (c_e)^{-1}U(t) - (c_e)^{-1}U^*(t) - (c_e)^{-1}U_M(\omega, X) - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - E\omega$$



,(129)

$$\text{где } T_{ЭМ} T_{Э} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)} T_{Э}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)} T_{Э}^{(4)} \end{bmatrix};$$

$$T_{ЭМ} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)} \end{bmatrix} - \text{диагональные матрицы, составлен-}$$

ные из постоянных времени трёх управляемых двигателей постоянного тока;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{единичная диагональная матрица;}$$

$$(c_e)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_e^{(1)})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_e^{(3)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_e^{(4)})^{-1} \end{bmatrix} - \text{матрица, составленная}$$

из коэффициентов противо ЭДС двигателей  $c_e^{(i)}$ ;

$$T_{ЭМ}^{(i)} = \frac{J_i R_i}{c_e^{(i)} c_M^{(i)}}, i = 1, 3, 4; \quad T_{Э}^{(i)} = \frac{L_i}{R_i}, i = 1, 3, 4; \quad c_M^{(i)}, R_i, L_i -$$

параметры двигателей;

$J_i$  - моменты инерции приводов, приведённые к роторам двигателей;

$\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  - вектор частот вращения роторов двигателей, отличающих от скоростей исполнительных элементов



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

станка  $V = \frac{dX^{(0)}}{dt} = \{V_1, V_3, V_4\}^T$  коэффициентами, определяемыми передаточными отношениями редукторов, то есть  $V_i = k_p^{(i)} \omega_i, i = 1, 3, 4$ ;  $U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  - вектор управления (напряжений якоря), который может быть задан и в координатах перемещения суппорта, тогда этот вектор определяет программу ЧПУ станка;

$U^*(t) = \{U_1^*(t), U_1^*(t), U_1^*(t)\}^T$  - вектор моментов сопротивления вращений роторов без резания, определяемые конструктивными особенностями шпиндельной группы и свойствами подшипниковых узлов. Они являются известными. Будем считать, что  $U^*(t) = const$ ;

$U_M = \{U_M^{(1)}, U_M^{(3)}, U_M^{(4)}\}^T$  - вектор моментов сопротивления, определяемых процессом резания, приведённых к электрическим частям двигателей, являющихся известными функциями частот вращения роторов двигателей  $\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  и упругих деформаций подсистемы инструмента  $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}^T$ .





Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

резания. Аналогичным образом можно представить и моменты, действующие от сил резания и приведенные к роторам всех серводвигателей. При этом необходимо учитывать дополнительно передаточные отношения редукторов. Эти моменты необходимо представить в координатах состояния системы.

Для этого необходимо раскрыть связь между силами резания и траекториями формообразующих движений инструмента относительно заготовки. Реакция со стороны процесса резания задается функциями  $U_M[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}]$ , значения которых определяются динамической моделью процесса резания. Частоты  $\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  отличаются от скоростей перемещения исполнительных элементов  $V^0 = dX^{(0)} / dt = \{V_1^{(0)}, V_3^{(0)}, V_\alpha^{(0)}\}^T$  коэффициентами, определяемыми передаточными отношениями редукторов. Причем,  $t = 0$  определяет начало процесса резания. Система (130) определяет три автономные подсистемы при условии, что  $U_M[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}] = 0$ . Это условие зависит от свойств редуктора, преобразующего вращение в поступательные движения. Если ограничиться линейным приближением упругих свойств подсистемы инструмента и считать подсистему заготовки недеформируемой, то динамика формирования упругих деформационных смещений вершины инструмента с учетом базовой динамической модели будет описываться следующей системой

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}], \quad (131)$$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Где 
$$m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & h_{3,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & h_{3,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & h_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix}$$
 - матрицы инерционных, диссипативных и уп-

ругих параметров;

$X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$  - вектор упругих деформационных смещений вершины инструмента;

$$F = F_0[S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, X(t), T_p \frac{dX(t)}{dt}] \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$$
 - динами-

ческая характеристика процесса резания.

Таким образом, динамика управляемой системы процесса резания описывается взаимосвязанными через процесс обработки системами (129) и (131). Даже в таком упрощенном виде без учета упругих деформационных смещений заготовки и динамической структуры механической части приводов исполнительных элементов, динамика управляемой системы описывается системой дифференциальных уравнений двенадцатого порядка. Анализ системы такого порядка вызывает сложности. В связи с этим для дальнейшего анализа можно воспользоваться рассмотренным выше принципом разделения движений и на этой основе построить иерархию дифференциальных уравнений по принципам медленности времени.

Для этого сделаем замену переменных  $t = \tau \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}$ , то есть введём в рассмотрение безразмерное время  $\tau$ . Кроме этого

уравнение в (131) представим в следующем виде

$$(T)^2 \frac{d^2 X}{dt^2} + 2\xi T \frac{dX}{dt} + c^{(\tau)} X = c_0^{-1} F, \quad (132)$$

$$\text{где } c_0^{-1} = \begin{bmatrix} (c_{1,1})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^{-1} \end{bmatrix};$$

$$(T)^2 = \begin{bmatrix} (T_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (T_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (T_3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{c_{1,1}} & 0; & 0 \\ 0; & \frac{m}{c_{2,2}} & 0 \\ 0; & 0; & \frac{m}{c_{3,3}} \end{bmatrix};$$

$$2\xi T = \begin{bmatrix} 2\xi_{1,1}T_1 & 2\xi_{2,1}T_1 & 2\xi_{3,1}T_1 \\ 2\xi_{1,2}T_2 & 2\xi_{2,2}T_2 & 2\xi_{3,2}T_2 \\ 2\xi_{1,3}T_3 & 2\xi_{2,3}T_3 & 2\xi_{3,3}T_3 \end{bmatrix} = h \cdot c_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{h_{1,1}}{c_{1,1}} & \frac{h_{2,1}}{c_{1,1}} & \frac{h_{3,1}}{c_{1,1}} \\ \frac{h_{1,2}}{c_{2,2}} & \frac{h_{2,2}}{c_{2,2}} & \frac{h_{3,2}}{c_{2,2}} \\ \frac{h_{1,3}}{c_{3,3}} & \frac{h_{2,3}}{c_{3,3}} & \frac{h_{3,3}}{c_{3,3}} \end{bmatrix};$$

$$c^{(\tau)} = c \cdot c_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{2,1}}{c_{1,1}} & \frac{c_{3,1}}{c_{1,1}} \\ \frac{c_{1,2}}{c_{2,2}} & 1 & \frac{c_{3,2}}{c_{2,2}} \\ \frac{c_{1,3}}{c_{3,3}} & \frac{c_{2,3}}{c_{3,3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

После введения безразмерного времени  $\tau$  вместо (129) имеем



$$T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} = (c_e)^{-1} U(\tau) - (c_e)^{-1} U_M [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(\tau), 0] - \frac{T_{ЭМ}}{\sqrt{T_{ЭМ} T_{Э}}} \frac{d\omega}{d\tau} - E\omega$$

, (133)

$$\text{где } T_{ЭМ} T_{Э} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(3)} T_{Э}^{(3)}}{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(4)} T_{Э}^{(4)}}{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \end{bmatrix};$$

$$\frac{T_{ЭМ}}{\sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}} = \begin{bmatrix} \frac{T_{ЭМ}^{(1)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(3)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(4)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} \end{bmatrix}$$

;

$$(c_e)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_e^{(1)})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_e^{(3)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_e^{(4)})^{-1} \end{bmatrix};$$

$$U_{\Sigma} = \{(U_1 - U_M^{(1)}), (U_3 - U_M^{(3)}), (U_4 - U_M^{(4)})\}^T.$$

Кроме этого имеем

$$(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} \frac{d^2 X}{d\tau^2} + 2\xi T / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \frac{dX}{d\tau} + c^{(\tau)} X = c_0^{-1} F, (134)$$

где

$$(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} = \begin{bmatrix} (T_1)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & (T_2)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & (T_3)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} \end{bmatrix};$$

$$2\xi T / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 2\xi_{1,1} T_1 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{2,1} T_1 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{3,1} T_1 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \\ 2\xi_{1,2} T_2 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{2,2} T_2 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{3,2} T_2 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \\ 2\xi_{1,3} T_3 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{2,3} T_3 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 2\xi_{3,3} T_3 / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \end{bmatrix}$$

$$F = F_0[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), \frac{T_P}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} \frac{dX(t)}{dt}] \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T.$$

В уравнениях (133) и (134) все элементы матриц представляют безразмерные величины. Их можно проанализировать на предмет введения малых параметров. Очевидно, что все элементы матриц  $(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}$  и  $2\xi T / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}$  стремятся к нулю, так как инерционные постоянные времена, по крайней мере, на два порядка меньше, чем электромеханическая и электрическая постоянные времена. Кроме этого все коэффициенты затухания не больше, чем 0,08. Кроме этого величина  $\frac{T_P}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}}$  также является малой, так как  $T_P$  не превышает значений (0,01-0,015).

Как показано ранее, для рассматриваемого класса систем асимптотические свойства при совместном рассмотрении уравнений (133) и (134) определяются уравнением «медленных» движений. Его удобно записать в реальном времени



$$\begin{cases} T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = (c_e)^{-1} U(t) - (c_e)^{-1} U_M [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), 0] - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - E\omega; \\ cX = F[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), 0]. \end{cases} \quad (135)$$

Пусть при заданном управлении  $U(t)$  определено решение системы (135) в виде  $\omega(t)$ ,  $X^{(0)}(t)$  и  $X^*(t)$ . Решения  $\omega(t)$ ,  $X^{(0)}(t)$  и  $X^*(t)$  будут характеризовать притягивающее многообразие в том случае, если уравнение в вариациях относительно  $X^*(t)$  будут асимптотически устойчивыми. Поэтому для анализа кроме уравнения (135) необходимо рассмотреть уравнение в вариациях относительно  $X^*(t)$ . После замены  $X(t) = X^*(t) + x(t)$  получаем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + cx = \varphi[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X^*(t), x(t), T_P \frac{dx(t)}{dt}], \quad (136)$$

где

$$\varphi = F[S_P^{(0)}(t), t_P^{(0)}(t), X^*(t), x(t), T_P \frac{dx(t)}{dt}] - F[S_P^{(0)}(t), t_P^{(0)}(t), X^*(t), 0]$$

- вектор - функции, рассматривающие вариации сил резания относительно упругих деформационных смещений в окрестности траектории  $X^*(t)$ .  $\varphi = 0$  при  $x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0$ .

Так как на данном этапе системы (135) является не возмущённой, то траектория  $X^*(t)$ , как и функции  $S_P^{(0)}(t)$ ,  $t_P^{(0)}(t)$ , являются решением системы, то при условии асимптотической ус-



тойчивости решения системы (135) решение  $X^*(t)$  будет аттрактором, к которому притягиваются все траектории.

Таким образом, исходная система дифференциальных уравнений заменяется на две подсистемы. Подсистему «медленных» движений и подсистему «быстрых» движений.

## 7.2. Свойства подсистемы «медленных» движений. Определение функции управления

Система (135) характеризует подсистему «медленных» движений. В ней главное значение имеют выражения для момента сопротивления соответствующего двигателя исполнительных перемещений станка. Например, для двигателя вращения шпинделя, ротор которого совмещен со шпинделем,  $M_C^{(4)}(t)$  определяется следующим преобразованием

$$M_C^{(4)}(t) = R_0 \Phi \left\{ R_0(t) \int_{t-1/\omega_4}^t [k_3 \omega_3(\xi) - v_3(\xi)] d\xi - \int_{t-1/\omega_4}^t \int_0^t [k_3 \omega_3(\xi) - v_3(\xi)] [k_1 \omega_1(\xi) - v_1(\xi)] d\xi d\zeta \right\} \quad (137)$$

- момент сопротивления, зависящий от скоростей  $V_1(t) = k_1 \omega_1(t)$ ,  $V_3(t) = k_3 \omega_3(t)$  движения суппортов продольных и поперечных перемещений, а также скоростей упругих деформационных смещений вершины инструмента относительно суппорта  $v_1(t)$ ,  $v_3(t)$ ;  $R_0(t)$  - радиус детали в рассматриваемой точке, соответствующей моменту  $t$  (рис. 81).

В (137) принято во внимание, что главная составляющая силы резания (сила, действующая в направлении скорости резания) зависит от текущих значений величины подачи и припуска



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

при неизменной скорости резания. В частности, если следовать гипотезе, что силы пропорциональны площади срезаемого слоя, то

$$M_C^{(4)}(t) = \chi_2 R_0 \rho \{ R_0(t) \int_{t-1/\omega_4}^t [k_3 \omega_3(\xi) - v_3(\xi)] d\xi - \int_{t-1/\omega_4}^t \int_0^t [k_3 \omega_3(\xi) - v_3(\xi)] [k_1 \omega_1(\xi) - v_1(\xi)] d\xi d\zeta \} , \quad (138)$$

где  $\rho$  - давление стружки на переднюю поверхность инструмента;

$\chi_2$  - угловой коэффициент, определяющий проекцию силы на направление  $X_2$ . В общем случае три проекции силы определяются следующими угловыми коэффициентами  $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ ;

$k_1, k_3$  - коэффициенты, определяемые передаточным отношением редукторов преобразования частот вращения серводвигателей в соответствующие линейные скорости движения суппортов продольных и поперечных перемещений.

Кроме этого в (137) и (138) принято, что текущие значения величины подачи  $S_p(t)$  и глубины резания  $t_p(t)$  определяются соотношениями

$$\left\{ \begin{aligned} S_p(t) &= \int_{t-T}^t [V_3(\xi) - v_3(\xi)] d\xi; \\ t_p(t) &= \int_0^t [V_1(\xi) - v_1(\xi)] d\xi, \end{aligned} \right. , \quad (139)$$

где  $V_1(t) = k_1 \omega_1(t)$ ,  $V_3(t) = k_3 \omega_3(t)$  - скорости продольно-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

го и поперечного движения суппорта;  $v_1(t) = \frac{dX_1}{dt}$ ,  $v_3(t) = \frac{dX_3}{dt}$

- соответственно скорости упругих деформационных смещений вершины инструмента относительно суппорта.

Тогда второе уравнение в (135) в развернутом виде можно представить следующей системой

$$\begin{cases} c_{1,1}X_1(t) + c_{2,1}X_2(t) + c_{3,1}X_3(t) = \chi_1\rho\left\{\int_{t-T}^t [V_3(\xi) - v_3(\xi)]d\xi\right\}\{R_0(t) - \int_0^t [V_1(\xi) - v_1(\xi)]d\xi\} \\ c_{1,2}X_1(t) + c_{2,2}X_2(t) + c_{3,2}X_3(t) = \chi_2\rho\left\{\int_{t-T}^t [V_3(\xi) - v_3(\xi)]d\xi\right\}\{R_0(t) - \int_0^t [V_1(\xi) - v_1(\xi)]d\xi\} \\ c_{1,3}X_1(t) + c_{2,3}X_2(t) + c_{3,3}X_3(t) = \chi_3\rho\left\{\int_{t-T}^t [V_3(\xi) - v_3(\xi)]d\xi\right\}\{R_0(t) - \int_0^t [V_1(\xi) - v_1(\xi)]d\xi\} \end{cases}$$

(140)

где  $R_0(t)$  - известная функция изменения радиуса заготовки до обработки;

$\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$  - вектор угловых коэффициентов ориентации сил;

$v_1(t)$  и  $v_3(t)$  скорости упругих деформаций подсистемы инструмента в продольном и поперечном направлениях;

$T = 1/\omega_4$  - время одного оборота вращения шпинделя;

$c = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$  - матрица жесткости подсистемы инструмента

Упругие деформационные смещения в (140) есть величины малые, поэтому квадратичными членами в этом интегральном преобразовании можно пренебречь. Тогда выражения в (140) можно выразить через текущие значения величин подачи и глу-

бины

$$\begin{cases} c_{1,1}X_1(t) + c_{2,1}X_2(t) + c_{3,1}X_3(t) = \chi_{1\rho}[S_p^{(0)}(t)t_p^{(0)}(t) - S_p^{(0)}(t)X_1(t) - t_p^{(0)}(t)X_3(t) + t_p^{(0)}X_3(t-T)]; \\ c_{1,2}X_1(t) + c_{2,2}X_2(t) + c_{3,2}X_3(t) = \chi_{2\rho}[S_p^{(0)}(t)t_p^{(0)}(t) - S_p^{(0)}(t)X_1(t) - t_p^{(0)}(t)X_3(t) + t_p^{(0)}X_3(t-T)]; \\ c_{1,3}X_1(t) + c_{2,3}X_2(t) + c_{3,3}X_3(t) = \chi_{3\rho}[S_p^{(0)}(t)t_p^{(0)}(t) - S_p^{(0)}(t)X_1(t) - t_p^{(0)}(t)X_3(t) + t_p^{(0)}X_3(t-T)], \end{cases}$$

(141)

где  $S_p^{(0)}(t) = \int_{t-1/\omega_4}^t V_3(\xi)d\xi$  - величина подачи на оборот без

упругих деформаций;  $t_p^{(0)}(t) = R_0(t) - \int_0^t V_1(\xi)\xi$  - величина при-

пуска без учета упругих деформаций. Обозначим

$$\int_{t-1/\omega_4}^t V_3(\xi)d\xi = \phi_{S_p}[\omega_3(t), \omega_4(t)],$$

$$R_0(t) - \int_0^t V_1(\xi)\xi = \phi_{t_p}[R_0(t), \omega_1(t)], \text{ тогда технологические режи-}$$

мы определяются следующей системой

$$\begin{cases} S_p^{(0)}(t) = \phi_{S_p}[\omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)]; \\ t_p^{(0)}(t) = \phi_{t_p}[R_0(t), \omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)]; \\ V_p(t) = R(t)\omega_4(t), \end{cases} \quad (142)$$

где  $V_p(t)$  - скорость резания;

$R(t)$  - текущее значение радиуса детали.

Подчеркнем, что траектории исполнительных элементов станка задают в (141) текущие значения технологических режимов, которые с учетом матриц жесткости определяют дефор-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

мационные смещения. Например, при варьировании скорости продольной подачи происходит перераспределение упругих формационных смещений, влияющих на подачу, и величины подачи, определяемой по величине скорости продольных перемещений. Поэтому стационарное состояние при переходе от одной скорости подачи к другой, или при врезании инструмента в заготовку, определяется из условия  $X_3(t) \equiv X_3(t - T)$ .

Таким образом, из систем (135, 141) можно поставить задачу вычисления траекторий  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_3(t)$  и  $\omega_4(t)$ , или соответствующих им траекторий  $V_1(l)$ ,  $V_3(l)$  и  $\omega_4(l)$ , при которых обеспечивается требование к точности изготовления детали. Траектория формообразующих движений вершины инструмента относительно заготовки, определяющая геометрию формируемой детали, складывается из траектории движений исполнительных элементов станка и упругих деформаций, то есть  $X^{(\phi)}(t) = X^{(0)}(t) + X(t)$ . Показатели микрорельефа и другие характеристики, зависящие от траекторий исполнительных элементов, учтем в ограничениях.

В частности, для случая продольного точения вала (например, обработка на участках А-В и С-Д (см. рис. 81) при управлении процессом необходимо обеспечить постоянство диаметра детали, тогда управление выбирается исходя из требования

$$\psi = R^{(жс)}(l) - X_1^{(0)}(l) + X_1(l) = 0 \quad (143)$$

где  $R^{(жс)}(l)$  - заданное требуемое по чертежу значение радиуса детали в точке  $l$ ;



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$X_1^{(0)}(l)$  - программно задаваемое значение положение суппорта по направлению, нормальному к оси вращения заготовки;

$X_1(l)$  - вычисленные значения упругих деформационных смещений вершины инструмента.

Для случая точения детали сложной геометрической формы, например, обработка точением участка В-С (рис. 81), который допускает линейную интерполяцию, при управлении необходимо поддерживать такое соотношение скоростей продольного и поперечного перемещения, чтобы траектория движения суппортов соответствовала заданной траектории. Кроме того обеспечить постоянство заданных по условиям точности упругих деформаций инструмента в направлении, нормальном к оси вращения шпинделя. В данном случае инвариантное многообразие выбирается следующим образом

$$\begin{cases} \psi_1 = \omega_3(l) - k_p \omega_1(l) = 0 \\ \psi_2 = R^{(ж)}(l) - X_{1,0}(l) + X_1(l) = 0 \end{cases} \quad (144)$$

где  $k_p$  - коэффициент пропорциональности скоростей подачи;  $\psi = \{\psi_1, \psi_2\}^T$ .

Таким образом, задача синтеза сводится к определению вектора  $U(l) = \{U_1(l), U_3(l), U_4(l)\}^T$  так, чтобы координаты вершины инструмента относительно заготовки двигались по многообразию  $\psi$ , или из начального состояния (в некоторой допустимой области) притягивались к многообразию  $\psi$ , и в дальнейшем двигались по этому направлению. Таким образом, многообразию  $\psi$  должно быть аттрактором, то есть асимптотическим устойчи-



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

вым как для подсистемы «медленных» движений, так для подсистемы «быстрых» движений.

Если существует множество траекторий «медленных» движений исполнительных элементов станка  $\omega(l) = \{\omega_1(l), \omega_3(l), \omega_4(l)\}^T$ , обеспечивающих движения вершины инструмента относительно заготовки по многообразию  $\psi$ , и ему соответствует множество управлений  $U(l) = \{U_1(l), U_3(l), U_4(l)\}^T \in \mathfrak{R}_U$ , то именно на этом множестве строится программа ЧПУ для обработки рассматриваемого изделия. В производстве на конкретном оборудовании при изготовлении конкретной детали, как правило, имеется справочник, который рекомендует выбрать технологические режимы для обеспечения заданного качества детали, поэтому введем рассмотрение множество технологических режимов  $\{S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, V_p\}^T \in \mathfrak{R}_T$ , при котором обеспечивается заданное качество детали.

Таким образом, определение функции управления  $U(t)$  выполняется в несколько этапов.

**На первом этапе** определяются множество технологических режимов  $\{S_p^{(0)}(l), t_p^{(0)}(l), V_p(l)\}^T$ , обеспечивающих заданное геометрическое качество детали. Если существует решение  $\{S_p^{(0)}(l), t_p^{(0)}(l), V_p(l)\}^T$ , то ему соответствуют желаемые траектории движений исполнительных элементов станка  $\{\omega_1(l), \omega_3(l), \omega_4(l)\}^T$ . Траектории  $\{\omega_1(l), \omega_3(l), \omega_4(l)\}^T$  легко перечисляются в функции времени  $\omega(t) = \{\omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)\}^T$ .

**На втором этапе** определяется функция управления



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  на основе прямой постановки  $\omega(t) = \{\omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)\}^T$  в систему (135).

При определении множества траекторий  $\omega(t) = \{\omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)\}^T$  и соответствующего ему множества управления  $U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  необходимо обеспечить условия  $U(t) \in \Theta_U$ , где  $\Theta_U$  - множество допустимых управлений, которое учитывает физически допустимые вариации напряжений якорей двигателей. Кроме того полученная функция управления  $U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  должна обеспечить асимптотическую устойчивость траекторий. Необходимо отметить, что в зависимости от требований к показателям геометрического качества на данном оборудовании многообразия  $\mathcal{M}$  могут не существовать.

Проектируемые таким образом траектории, как уже указано должны быть устойчивыми как для подсистемы «медленных» движений, так и для подсистемы «быстрых» движений. Поэтому остановимся на проблеме устойчивости подсистемы «быстрых» движений. Что касается подсистемы «медленных» движений, то обеспечение ее устойчивости осуществляется традиционными способами на основе введения соответствующих обратных связей по положению и скорости исполнительных элементов.

### 7.3. Обеспечение устойчивости подсистемы «быст-



## рых» движений

Рассмотрим уравнение подсистемы «быстрых» движений в общем виде

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F[X, \frac{dX}{dt}, S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t)], \quad (145)$$

где  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}^T$  - упругие деформации (координаты состояния);

$F[X, \frac{dX}{dt}, S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t)]$  - вектор-функция, раскрывающая зависимость сил резания от координат состояния и технологических режимов;

$m, h, c$  - положительно определённые симметричные матрицы размерности  $6 \times 6$  соответственно обобщенных масс, коэффициентов демпфирования и жесткости.

В уравнении (145)  $S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t)$  функции изменения технологических режимов, задаваемые траекториями управляемых исполнительных элементов станка. Здесь эти функции считаются заданными. Этим функциям соответствуют траектории формообразующих движений инструмента относительно заготовки, состоящая из траектории движения исполнительных элементов станка  $X^{(0)}(t), dX^{(0)}(t)/dt$  и траектории упругих деформационных смещений  $X^*(t)$ . Траектория  $X^*(t)$  названа стационарной траекторией, являющаяся траекторией «медленных» движений.



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Пусть задана траектория  $X^*(t)$ , определяемая установившейся реакцией на  $S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t)$  невозмущенной системы (145). Тогда для вариаций  $x(t)$ , т. е.  $X(t) = X^*(t) + x(t)$ , имеем систему

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + cx = \varphi(X^*, x, \frac{dx}{dt}), \tag{146}$$

где  $\varphi(X^*, x, \frac{dx}{dt})$  - новые нелинейные функции, причем  $\varphi(X^*, 0, 0) = 0$ .

Если следовать классической терминологии теории устойчивости, то  $X^*(t)$  - есть невозмущенная установившаяся реакция подсистемы «медленных» движений. Свойства (146) в вариациях относительно  $X^*(t)$  определяются

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma} x = 0, \tag{147}$$

где  $m = [m_{s,k}]$ ;  $h_{\Sigma} = \left[ h_{s,k} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial (dx_k / dt)} \right]$ ;

$c_{\Sigma} = \left[ c_{s,k} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial (x_k)} \right]$ ,  $s, k = 1, 2, \dots, 6$ .

Причем в (147) матрица инерции  $m = [m_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, \dots, 6$  в общем случае характеризуется тензорными свойствами. Однако во многих случаях матрицу инерции можно представить в диагональном виде. Тогда обобщенные массы  $m_1$  с координатами  $x_1, x_2, x_3$  и  $m_2$  с координатами  $x_4, x_5, x_6$  характеризуют про-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

странственные упругие деформационные смещения соответственно инструмента и заготовки. В частности, если обрабатываемая заготовка не имеет деформаций, то со стороны инструмента с

массой  $m_1$   $h^{(P)} = [\frac{\partial \varphi_s}{\partial(dx_k / dt)}], s, k = 1, 2, 3$  и

$c^{(P)} = [\frac{\partial \varphi_s}{\partial(x_k)}], s, k = 1, 2, 3$  - соответственно матрицы скоростных

коэффициентов и динамической жесткости процесса резания.

Подчеркнем, что  $\frac{\partial \varphi_s}{\partial(dx_k / dt)}$  и  $\frac{\partial \varphi_s}{\partial(x_k)}$  зависят от траектории  $X^*(t)$ ,

технологических режимов и динамической характеристики про-

цесса резания  $\varphi(X^*, x, \frac{dx}{dt})$  в вариациях относительно этой тра-

ектории.

Исходные динамические подсистемы без процесса резания, задаваемые матрицами  $m, h, c$  (левые части в (146)), как правило, имеют постоянные параметры. Эти матрицы являются положительно определенными и симметричными, так как динамическая структура станка, как правило, является неизменной, а силовые и диссипативные функции обладают потенциальными свойствами. Напомним, что диссипативная функция при моделировании динамики машин вводится в форме Релея. Однако при переходе к (147) суммарные матрицы  $h_\Sigma$  и  $c_\Sigma$  уже не обладают

симметричными свойствами, так как в общем случае  $\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} \neq \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_s}$  и

$\frac{\partial \varphi_s}{\partial(dx_k / dt)} \neq \frac{\partial \varphi_k}{\partial(dx_s / dt)}$ . Поэтому свойства (147) в результате



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

влияния сил резания принципиально меняются. Во-первых,  $X^*(t)$  в общем случае есть функция времени, поэтому коэффициенты

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} = c_{s,k}^{(P)}(t) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial (dx_k / dt)} = h_{s,k}^{(P)}(t)$$

также зависят от времени. Эти коэффициенты не только соизмеримы, но и, как правило, превышают коэффициенты жесткости и диссипации подсистем станка без процесса резания. Они постоянны лишь при условии, что в (146)  $S_p^{(0)}(t) = const$ ,  $t_p^{(0)}(t) = const$ . Во-вторых, матрицы  $c_\Sigma$  и  $h_\Sigma$  не являются симметричными, т. е.

$$c_\Sigma = c_\Sigma^{(c)} + c_\Sigma^{(k)}; \quad h_\Sigma = h_\Sigma^{(c)} + h_\Sigma^{(k)}, \quad (148)$$

где  $c_\Sigma^{(c)} = \frac{1}{2}[c_\Sigma + (c_\Sigma)^T]$ ,  $h_\Sigma^{(c)} = \frac{1}{2}[h_\Sigma + (h_\Sigma)^T]$  - симметричные части матриц жёсткости и диссипации, отвечающие за потенциальные свойства;

$$c_\Sigma^{(k)} = \frac{1}{2}[c_\Sigma - (c_\Sigma)^T], \quad h_\Sigma^{(k)} = \frac{1}{2}[h_\Sigma - (h_\Sigma)^T] \quad \text{- кососимметричные}$$

матрицы, имеющие структуру  $c_\Sigma^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -c_{\Sigma,s,k}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{\Sigma,s,k}^{(k)}; & \dots & 0 \end{bmatrix}$  и

$$h_\Sigma^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -h_{\Sigma,s,k}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{\Sigma,s,k}^{(k)}; & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Характерной особенностью сил, формируемых матрицей  $h_\Sigma^{(k)}$ , является то, что их работа при движении координат состояния по замкнутому контуру относительно стационарной траекто-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

рии (на виртуальных перемещениях) равна нулю. Силы же, формируемые матрицей  $h_{\Sigma}^{(c)}$ , если она является положительно определенной, всегда направлены против движения и совершают работу. Сама же матрица  $h_{\Sigma}^{(c)}$  связана с диссипативной функцией Релея, которая, как известно, определяет мощность сил диссипации. Несмотря на то, что силы, определяемые матрицей  $h_{\Sigma}^{(k)}$ , не совершают работу, они могут способствовать стабилизации точки равновесия, так как они характеризуют гироскопические силы. Что касается матриц  $c_{\Sigma}^{(c)}$  и  $c_{\Sigma}^{(k)}$ , то силы, формируемые их элементами, совершают работу при движении по замкнутому контуру матрицами  $c_{\Sigma}^{(k)}$  и не совершают работу матрицами  $c_{\Sigma}^{(c)}$ . Более того, если матрица  $c_{\Sigma}^{(c)}$  является положительно определенной, то за счет элементов  $c_{\Sigma}^{(k)}$  система может потерять устойчивость движения.

Отметим следующие преобразования динамической характеристики процесса резания, непосредственно влияющие на потерю устойчивости стационарной траектории  $X^*(t)$ .

**Первый случай**, наиболее важный для технических приложений, соответствует неизменным внешним условиям функционирования систем резания, то есть  $S_p^{(0)}(t) = const$ ,  $t_p^{(0)}(t) = const$ . Значению  $S_p^{(0)} = const$ ,  $t_p^{(0)} = const$  соответствует  $X^* = const$  - точка равновесия в пространстве состояния динамической системы резания. Координаты этой точки рассматриваются в подвижной системе координат, задаваемой траекто-



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

риями «медленных» движений исполнительных элементов. Матрицы динамической жесткости  $c^{(P)}$  и скоростных коэффициентов  $h^{(P)}$  процесса резания есть постоянные. Здесь на примере базовой динамической системы процесса резания, введённой в рассмотрение во второй главе, остановимся на влиянии кососимметрических матриц на устойчивость точки равновесия. Для этого рассмотрим динамическую систему (147) для  $N = 2$  и выделим в ней симметричные и кососимметричные члены

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma}^{(c)} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma}^{(c)} x + h_{\Sigma}^{(k)} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma}^{(k)} x = 0 \quad (149)$$

и выясним влияние кососимметричных членов на устойчивость точки равновесия.

В качестве стационарной траектории рассмотрим точку  $X^* = \{X_1^*, X_2^*\}^T$ . Поэтому матрицы  $m, h_{\Sigma}, c_{\Sigma}$  имеют постоянные параметры. Устойчивость точки равновесия зависит от матриц  $h_{\Sigma}^{(c)}, c_{\Sigma}^{(c)}, h_{\Sigma}^{(k)}, c_{\Sigma}^{(k)}$ . Для определения влияния динамической характеристики процесса резания на устойчивость  $X^*$  вначале проанализируем свойства (149) в предположении, что  $h_{\Sigma}^{(k)} = 0, c_{\Sigma}^{(k)} = 0$ . Тогда силовая функция процесса резания должна обладать потенциальными свойствами. Пусть матрица  $c_{\Sigma}^{(c)}$  является положительно определенной. Тогда для анализа устойчивости равновесия можно ввести в рассмотрение функцию энергии

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \frac{dx}{dt} m \frac{dx}{dt} + xc x \right\},$$

но с учётом того обстоятельства, что  $m$  и  $c$  являются



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

симметричными и их элементы есть постоянные величины, ведливо

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + cx \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \left\{ m \frac{d^2x}{dt^2} + cx \right\}.$$

Следовательно, для автономного случая с учетом сделанного предположения  $h_{\Sigma}^{(k)} = 0, c_{\Sigma}^{(k)} = 0$  справедливо

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx = -h \frac{dx}{dt}, \text{ т. е.}$$

$$-\frac{dx}{dt} h \frac{dx}{dt} \leq 0 - \tag{150}$$

- условие устойчивости системы по Ляпунову и  $-\frac{dx}{dt} h \frac{dx}{dt} < 0$  - условие асимптотической устойчивости. При доказательстве устойчивости не наложено никаких ограничений на порядок дифференциального уравнения. Поэтому это условие является общим для рассматриваемого класса систем. Кроме этого при определении условий устойчивости не было наложено ограничений на элементы матрицы  $h$ . Получаем достаточно простое условие асимптотической устойчивости равновесия динамической системы резания. Если матрицы  $m$  и  $c$  являются симметричными и положительно определенными с постоянными коэффициентами, то динамическая система резания имеет положение равновесия асимптотически устойчивым, если матрица  $h$  является положительно определенной на всем наблюдаемом временном отрезке.

Условие (150) является интуитивно понятным, так как при



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$-\frac{dx}{dt} h \frac{dx}{dt} < 0$  во время движения в систему вводится дополни-

тельный источник поглощения энергии. Сами же диссипативные силы не способны «раскачать» динамическую систему даже в том случае, если переменная составляющая их вариаций совпадает с собственной частотой системы. В связи с этим отметим, что при равенстве нулю диссипативных сил динамическая система резания не может быть асимптотически устойчивой, а лишь устойчи-

вой по Ляпунову. Кроме того требование  $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$  является

известным условием Стокса, консервативных свойств системы, если в системе  $h = 0$ . Поэтому добавление в систему диссипативных составляющих (зависимых или независимых от времени), но удовлетворяющих (150) при всех значениях времени преобразует устойчивую, по Ляпунову, систему в асимптотически устойчивую.

Мы получим два важных условия. 1). Если за счет влияния динамической связи, формируемой процессом резания, симметричная суммарная матрица упругости системы становится отрицательно определенной, то любые вариации матрицы скоростных коэффициентов не могут стабилизировать равновесие. 2). Если за счет влияния динамической связи симметричная матрица скоростных коэффициентов стала отрицательно определенной, то любые вариации матрицы упругости также не могут стабилизировать точку равновесия.

Если  $h_{\Sigma}^{(c)} = 0, c_{\Sigma}^{(k)} = 0, h_{\Sigma}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0; & h \\ -h; & 0 \end{bmatrix}$  и матрицы

$m, c_{\Sigma}^{(c)}$  положительно определенные, то система, не смотря на



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

наличие коэффициентов при первых производных, остаётся устойчивой по Ляпунову, но не асимптотически устойчивой. Покажем это на простом примере для  $N = 2$ . Очевидно, что характеристическое уравнение в этом случае представляет выражение

$$m^2 p^4 + (m \cdot (c_{1,1,\Sigma}^{(c)} + c_{2,2,\Sigma}^{(c)}) + h^2) p^2 + (c_{1,1,\Sigma}^{(c)} c_{2,2,\Sigma}^{(c)} - c_{1,2,\Sigma}^{(c)} c_{2,1,\Sigma}^{(c)}) = 0$$

,

для которого справедливо  $c_{1,1,\Sigma}^{(c)} c_{2,2,\Sigma}^{(c)} - c_{1,2,\Sigma}^{(c)} c_{2,1,\Sigma}^{(c)} > 0$ ,

$$(m \cdot (c_{1,1,\Sigma}^{(c)} + c_{2,2,\Sigma}^{(c)}) + h^2)^2 - 4(c_{1,1,\Sigma}^{(c)} c_{2,2,\Sigma}^{(c)} - c_{1,2,\Sigma}^{(c)} c_{2,1,\Sigma}^{(c)}) \cdot m^2 =$$

$$= m^2 (c_{1,1,\Sigma}^{(c)} - c_{2,2,\Sigma}^{(c)})^2 + 4c_{1,2,\Sigma}^{(c)} c_{2,1,\Sigma}^{(c)} m^2 + h^2 (h^2 + 2m(c_{1,1,\Sigma}^{(c)} - c_{2,2,\Sigma}^{(c)})) > 0, \text{ т. е. ха-}$$

рактеристический полином имеет два мнимых комплексно сопряжённых корня. Причем это утверждение справедливо и для квазилинейных систем, когда матрица  $h_{\Sigma}^{(k)} = h_{\Sigma}^{(k)}(x, t)$ . Следовательно, гироскопические силы не могут преобразовать устойчивую по Ляпунову систему в асимптотически устойчивую. Приведённые здесь положения, включенные в формулировку задачи устойчивости, принципиально не содержат новой информации в задачах устойчивости систем. Однако они используются в дальнейшем при изучении механизмов потери устойчивости подсистемы «быстрых» движений.

**Второй случай.** Будем считать, что

$S_p^{(0)} = S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)} = t_p^{(0)}(t)$ . Тогда  $X^* = X^*(t)$ . Следовательно,

$h_{\Sigma} = h_{\Sigma}(t)$  и  $c_{\Sigma} = c_{\Sigma}(t)$ . Тогда для анализа устойчивости необ-

ходимо рассматривать систему

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma}(t) \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma}(t)x = 0 \tag{151}$$



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

Система (151) имеет матрицы скоростных коэффициентов и упругости с переменными параметрами. В этом случае для анализа устойчивости необходимо использовать теорию устойчивости решений систем с переменными параметрами. Для рассматриваемой области важно рассмотреть случай  $t_p(t) = t_p^{(0,0)} + t_p^{(0)}(t + kT), k = 1, 2, \dots$ . Тогда мы имеем систему с периодически изменяющимися коэффициентами. Например, обрабатывается заготовка, установленная в зажимном приспособлении с эксцентриситетом. Существуют и другие факторы формирования периодически изменяющихся коэффициентов.

Тогда

$$c_{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} c_{1,1} + c_{1,1}^{(p)} + c_{1,1}^{(p,0)} \sin \Omega t & c_{2,1} + c_{2,1}^{(p)} + c_{2,1}^{(p,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,1}^{(c)}) \\ c_{1,2} + c_{1,2}^{(p)} + c_{1,2}^{(p,0)} \sin(\Omega t + \theta_{1,2}^{(c)}) & c_{2,2} + c_{2,2}^{(p)} + c_{2,2}^{(p,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,2}^{(c)}) \end{bmatrix}$$

и

$$h_{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} h_{1,1} + h_{1,1}^{(p)} + h_{1,1}^{(p,0)} \sin \Omega t & h_{2,1} + h_{2,1}^{(p)} + h_{2,1}^{(p,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,1}^{(h)}) \\ h_{1,2} + h_{1,2}^{(p)} + h_{1,2}^{(p,0)} \sin(\Omega t + \theta_{1,2}^{(h)}) & h_{2,2} + h_{2,2}^{(p)} + h_{2,2}^{(p,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,2}^{(h)}) \end{bmatrix}$$

. Для инженерных приложений наибольшее значение имеет случай, который удовлетворяет следующим требованиям. 1). Вариации припуска на порядок меньше глубины срезаемого слоя. 2). Частотный состав вариаций припуска на порядок меньше первой собственной частоты подсистемы режущего инструмента. Тогда справедливо

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} c_{1,1} + c_{1,1}^{(p)} (1 + \varepsilon_{1,1}^{(c,0)} \sin \Omega t) & c_{2,1} + c_{2,1}^{(p)} (1 + \varepsilon_{2,1}^{(c,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,1}^{(c)})) \\ c_{1,2} + c_{1,2}^{(p)} (1 + \varepsilon_{1,2}^{(c,0)} \sin(\Omega t + \theta_{1,2}^{(c)})) & c_{2,2} + c_{2,2}^{(p)} (1 + \varepsilon_{2,2}^{(c,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,2}^{(c)})) \end{bmatrix}; \\ h_{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} h_{1,1} + h_{1,1}^{(p)} (1 + \varepsilon_{1,1}^{(h,0)} (\sin \Omega t + \theta_{1,1}^{(h)})) & h_{2,1} + h_{2,1}^{(p)} (1 + \varepsilon_{2,1}^{(h,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,1}^{(h)})) \\ h_{1,2} + h_{1,2}^{(p)} (1 + \varepsilon_{1,2}^{(h,0)} \sin(\Omega t + \theta_{1,2}^{(h)})) & h_{2,2} + h_{2,2}^{(p)} (1 + \varepsilon_{2,2}^{(h,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,2}^{(h)})) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (152)$$

где  $\varepsilon$  с соответствующими индексами есть малые параметры. В этом случае систему (4.7) можно представить в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma} x = -\varepsilon^{(h)} h^{(p)} \frac{dx}{dt} - \varepsilon^{(c)} h^{(c)} x, \quad (153)$$

где  $h_{\Sigma}$ ,  $c_{\Sigma}$  - соответственно матрицы скоростных коэффициентов и упругости с постоянными параметрами;

$$\varepsilon^{(h)} h^{(p)} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{(p)} \varepsilon_{1,1}^{(h,0)} \sin(\Omega t + \theta_{1,1}^{(h)}) & h_{2,1}^{(p)} \varepsilon_{2,1}^{(h,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,1}^{(h)}) \\ h_{1,2}^{(p)} \varepsilon_{1,2}^{(h,0)} \sin(\Omega t + \theta_{1,2}^{(h)}) & h_{2,2}^{(p)} \varepsilon_{2,2}^{(h,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,2}^{(h)}) \end{bmatrix};$$

$$\varepsilon^{(c)} c^{(c)} = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(p)} \varepsilon_{1,1}^{(c,0)} \sin \Omega t & c_{2,1}^{(p)} \varepsilon_{2,1}^{(c,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,1}^{(c)}) \\ c_{1,2}^{(p)} \varepsilon_{1,2}^{(c,0)} \sin(\Omega t + \theta_{1,2}^{(c)}) & c_{2,2}^{(p)} \varepsilon_{2,2}^{(c,0)} \sin(\Omega t + \theta_{2,2}^{(c)}) \end{bmatrix}.$$

Следуя асимптотическим методам, изложенным ранее, с учетом принятых допущений система (153) будет асимптотически устойчивой, если устойчива порождающая система

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma}^{(0)} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma}^{(0)} x = 0, \quad (154)$$

где  $h_{\Sigma}^{(0)}$ ,  $c_{\Sigma}^{(0)}$  - значения матриц  $h_{\Sigma}$  и  $c_{\Sigma}$  при  $\varepsilon = 0$ .

В критических случаях, когда корни характеристического полинома, соответствующего системе (154) расположены слева от мнимой оси, но близки к ней, необходимо рассматривать множества корней на отрезках изменения параметров



Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

$$c_{\Sigma} \in \left[ \begin{array}{cc} c_{1,1} + c_{1,1}^{(p)}(1 + \varepsilon_{1,1}^{(c,0)}) & c_{2,1} + c_{2,1}^{(p)}(1 + \varepsilon_{2,1}^{(c,0)}) \\ c_{1,2} + c_{1,2}^{(p)}(1 + \varepsilon_{1,2}^{(c,0)}) & c_{2,2} + c_{2,2}^{(p)}(1 + \varepsilon_{2,2}^{(c,0)}) \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} c_{1,1} + c_{1,1}^{(p)}(1 - \varepsilon_{1,1}^{(c,0)}) & c_{2,1} + c_{2,1}^{(p)}(1 - \varepsilon_{2,1}^{(c,0)}) \\ c_{1,2} + c_{1,2}^{(p)}(1 - \varepsilon_{1,2}^{(c,0)}) & c_{2,2} + c_{2,2}^{(p)}(1 - \varepsilon_{2,2}^{(c,0)}) \end{array} \right]$$

и

$$h_{\Sigma} \in \left[ \begin{array}{cc} h_{1,1} + h_{1,1}^{(p)}(1 + \varepsilon_{1,1}^{(h,0)}) & h_{2,1} + h_{2,1}^{(p)}(1 + \varepsilon_{2,1}^{(h,0)}) \\ h_{1,2} + h_{1,2}^{(p)}(1 + \varepsilon_{1,2}^{(h,0)}) & h_{2,2} + h_{2,2}^{(p)}(1 + \varepsilon_{2,2}^{(h,0)}) \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} h_{1,1} + h_{1,1}^{(p)}(1 - \varepsilon_{1,1}^{(h,0)}) & h_{2,1} + h_{2,1}^{(p)}(1 - \varepsilon_{2,1}^{(h,0)}) \\ h_{1,2} + h_{1,2}^{(p)}(1 - \varepsilon_{1,2}^{(h,0)}) & h_{2,2} + h_{2,2}^{(p)}(1 - \varepsilon_{2,2}^{(h,0)}) \end{array} \right]$$

В том случае, если указанные предположения не справедливы, то для анализа устойчивости необходимо воспользоваться теорией Флоке, основные положения которой изложены ранее.

Изложенные в главе материалы позволяют сделать следующие заключения о направлениях анализа и синтеза систем управления процессами обработки на металлорежущих станках.

1). При анализе и синтезе необходим системный подход. Он заключается в том, что станок вместе с процессом обработки рассматривается как единая система. Система станка включает подсистемы приводов исполнительных элементов, а также динамическую связь, формируемую процессом резания в траекториях формообразующих движений инструмента относительно заготовки.

2). При анализе и синтезе системы целесообразно использовать принцип разделения движений, основанный на асимптотических свойствах систем дифференциальных уравнений, имеющих малый параметр при старшей производной. В этом случае система представляется в виде иерархии двух взаимосвязанных подсистем. Подсистемы «медленных» и «быстрых» движений.

3). В задачу синтеза входит определение управления (программы ЧПУ), которое строится по многообразию траекторий исполнительных элементов, обеспечивающих такие траектории



## Основы анализа и синтеза нелинейных систем управления

формообразующих движений инструмента относительно заготовки, которые формируют деталь, имеющей требуемые показатели точности.

4). Проектируемые траектории должны быть аттракторами, то есть характеризовать притягивающие многообразия, как для подсистемы «медленного», так и «быстрого» времени.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реальные объекты управления являются нелинейными и их свойства часто существенно отличаются от свойств линейных систем. Именно за счет нелинейных связей в системах управления возможно существование стационарных состояния (притягивающих многообразий), которые принципиально не существуют в линейных системах. Это многообразия тапа предельных циклов, инвариантных торов, странных (хаотических) аттракторов. Таким образом, нелинейные системы имеют существенно более разнообразные свойства по сравнению с линейными. Кроме этого нелинейные законы управления позволяют формировать свойства системы, не существующие в линейных системах. Например, практически все оптимальные законы управления приводят к нелинейным законам управления. Все это показывает, что изучение нелинейных систем необходимо, не столько для повышения точности моделирования и исследования систем управления, сколько для изучения новых свойств систем управления не существующих в линейных системах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. М.: Физматлит, 2007. Т.1. – 336 с., т.2. – 440 с.
2. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: «Лань», 2009, - 496 с.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: «Лань», 2012, - 480 с.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: «Лань», 2012, - 336 с.
5. Хрущева И.В., Щербачев В.И., Леванова Д.С. Основы математической статистики и теории случайных процессов. М.: «Лань», 2009, - 336 с.
6. Заковоротный В.Л., Флек М.Б. Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов н/Д: «Терра», 2006. – 876 с.
7. Заковоротный В.Л., Лукьянов А.Д., Нгуен Донг Ань, Фам Динь Тунг. Синергетический системный синтез управляемой динамики металлорежущих станков с учетом эволюции связей. Ростов н/Д: изд-во ДГТУ, 2008. – 324 с.
8. Колесников А.А. Прикладная синергетика: основы системного синтеза. Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. – 384 с.
9. Синергетика и проблемы теории управления. / Под ред. А.А. Колесникова. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
10. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: «Наука», 1969. -379 с.
11. Заковоротный В.Л., Блохин В.П., Алексейчик М.И. Введение в динамику трибосистем. Ростов н/Д : ИнфоСервис, 2004. – 680 с.