



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

# **Синергетика систем управления процессами обработки на металлорежущих станках для магистрантов по направлению**

**«Управление в технических системах»**

Авторы:

В.Л.Заковоротный

В.С. Быкадор

Г.Г. Палагнюк

Ростов-на-Дону, 2012



## Аннотация

Учебное пособие включает анализ типичных примеров управления движением механических систем, взаимодействующих с различными средами (трибологическими, гидродинамическими и средами, формируемыми процессами обработки на металлорежущих станках). Рассматриваются особенности синергетического подхода к созданию систем управления, излагаются основные особенности динамики нелинейных систем. Главное внимание уделяется методам анализа и синтеза синергетических систем управления процессами обработки на металлорежущих станках. Рассматриваются проблемы синтеза желаемых многообразий в пространстве состояния системы и выбора на многообразиях оптимальной траектории. Особое внимание уделяется вопросам синтеза систем управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе синергетической теории управления для моделей обладающих эволюционными свойствами параметров. Рассматриваются вопросы построения систем динамического мониторинга состояния процессов обработки в единстве решения задач наблюдения за координатами состояния процесса резания и предсказания их изменения во времени при заданном управлении.

Учебное пособие предназначено для студентов и магистрантов, изучающих курсы «Синергетические системы управления», «Синергетическая концепция построения управляемых технологических процессов» и «Современные проблемы автоматизации и управления», а также для всех, интересующихся современной теорией управления.

## Авторы:

**В.Л. Заковоротный, д.т.н., проф.**

**В.С. Быкадор, к.т.н**

**Г.Г. Палагнюк, д.т.н., проф**





## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Анализ класса систем, подлежащих рассмотрению в дисциплине.....</b>	<b>10</b>
1.1. Изменение свойств серводвигателя вращения шпинделя за счет реакции со стороны процесса резания.....	10
1.2. Влияние на движение транспортного устройства фрикционных свойств контакта колеса с полотном.....	22
1.3. Влияние на движение судна гидродинамических сил .....	26
<b>Глава 2. Особенности синергетического подхода.....</b>	<b>28</b>
2.1. О системном подходе в науке .....	28
2.2. Системный подход к управлению процессом резания с учетом эволюционных преобразований.....	33
2.3. Основное свойство диссипативных систем.....	39
2.4. Концепция синергетического подхода на примере обработки резанием на металлорежущих станках .....	44
<b>Глава 3. Основы нелинейной динамики управляемых систем. ..</b>	<b>55</b>
3.1. Методы анализа, основанные на изучении фазовых траекторий в фазовом пространстве. ....	55
3.2. Метод разделения движений .....	71
3.3. Асимптотические методы нелинейной динамики .....	77
<b>Глава 4. Основы системного синергетического синтеза на примере построения систем управления процессами обработки на металлорежущих станках .....</b>	<b>83</b>
4.1. Иерархия дифференциальных уравнений движения инструмента относительно заготовки .....	84
4.2. Системный подход к управлению процессами обработки на металлорежущих станках.....	92
4.3. Ограничения на траектории формообразующих движений.....	101
4.4. Построение программного управления процессом точения на основе синергетической концепции .....	112
4.5. Построение программного управления процессом точения изделий сложной геометрической формы.....	128
<b>Глава 5. Методы анализа и синтеза систем управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе</b>	



<b>синергетической теории управления для моделей обладающих эволюционными свойствами параметров.....</b>	<b>139</b>
5.1. Определение программного управления с учетом эволюционных изменений в динамической системе резания .....	142
5.2. Эволюционные изменения и устойчивость.....	149
5.3. Определение оптимальных траекторий на множестве желаемых траекторий с учетом ограничений и эволюции .....	160
<b>Глава 6. Принципы построения наблюдателей в системе резания о координатах текущего состояния процесса и параметрах качества изготовления деталей.....</b>	<b>170</b>
6.1. Коррекция программируемых траекторий за счет дополнительных информационных потоков.....	170
6.2. Коррекция программируемых траекторий за счет введения обратной связи по силам резания .....	173
6.3. Оценивание текущего значения жесткости в процессе обработки	175
6.4. Оценивание текущих характеристик геометрической точности ....	185
<b>Заключение .....</b>	<b>189</b>
<b>Литература.....</b>	<b>190</b>



## ВВЕДЕНИЕ

Настоящий курс входит в программу подготовки магистров по специальности «Управление в технических системах» по научному направлению «Управление сложными нелинейными динамическими объектами. Проблемы анализа и синтеза». Основное содержание курса посвящено проблеме управления движением механических систем, взаимодействующих с различными средами: гидродинамическими; аэродинамическими; трибологическими; средами, формируемыми процессом резания, с которой взаимодействуют подсистемы станка при совершении движений исполнительных элементов в процессе формирования поверхности детали с целью ее изготовления при обеспечении заданных характеристик качества. Основное внимание в курсе уделено управлению сложными, взаимосвязанными, нелинейными механическими объектами, которые совершая движение в пространстве, взаимодействуют с процессами обработки резанием и (или) трением. Динамические связи, формируемые процессами обработки резанием и (или) трением, преобразуют свойства управляемой системы. В данном случае под динамической связью понимается математическое описание изменения сил в области сопряжения система – среда в координатах и траекториях движения. При управлении движением в такой системе естественно учитывать влияние сил, возникающих в области сопряжения система – среда, на движение системы. Эти внутренние силы формируют в координатах состояния дополнительные внутренние регулирующие воздействия, которые, наряду с внешними силами, определяют движение управляемых координат. Согласование (когерентность) внешнего и внутреннего управления, как очевидное условие рационального управления, характеризует взаимное содействие, то есть синергетику, управления.

Поэтому курс лекций посвящен новой синергетической концепции в теории системного анализа и синтеза, который опирается на единство процессов направленной самоорганизации и управления нелинейными системами. Единство процессов самоорганизации (согласованности) и управления характеризует развиваемое в настоящее время перспективное направление анализа и синтеза технических систем широкого класса, которые характеризуются взаимосвязанностью координат в объекте управления, как правило, возможностью осуществления множества каналов управления. К тому же уравнения динамикой в таких объектах являются нелинейными и не представимыми с помощью различных методов линеаризации. Это направление можно назвать системной физикой. Как утверждает С.П. Курдюмов [1] «...синергетика становится не только модной ...она распространяется в виде некоторой ментальной инфекции. Заразившись



синергетикой, почувствовав конструктивность и эвристичность синергетического образа мышления, становится трудно излечиться от этой «синергетической болезни». Все дело в том, что синергетика позволяет выявить некоторые универсальные принципы самоорганизации и эволюции сложных систем. Причем, процессы внутренней самоорганизации и внешнего управления являются взаимосвязанными.

Синергетическая теория управления, сформулированная в последние два десятилетия, прежде всего трудами А.А. Колесникова и его учеников [2-4], опирается на известные работы в области синергетики. Это работы И.Пригожина [5 - 7] и Г. Хакена [8, 9]. Применительно к рассматриваемой области научного направления «Управление сложными нелинейными динамическими объектами. Проблемы анализа и синтеза» магистерской подготовки основные положения системного синергетического подхода созданы работами В.Л. Заковоротного и его учеников [10 - 12]. Таким образом, предлагаемый курс лекций дает магистрантам основные теоретические знания при написании магистерской диссертации по указанному научному направлению. Кроме научных публикаций и монографий по указанному направлению отсутствует методический материал для изучения этого направления анализа и синтеза управляемых движений механических систем. Поэтому предлагаемый курс лекций фактически является первой попыткой систематизации накопленного научного материала.

Для понимания материала, посвященного системному синергетическому анализу и синтезу управления сложными нелинейными объектами, обладающими внутренними, объединяющими подсистемы в одну систему, связями, в курс лекций включены следующие разделы.

1) Анализ класса систем, подлежащих рассмотрению в дисциплине. В этом разделе рассматриваются примеры принципиального изменения свойств управляемой системы за счет учета реакции на систему среды, с которой взаимодействует система. Здесь главное внимание уделено электромеханическим системам, взаимодействующим со средами. Однако приводятся примеры, когда движение осуществляется от иных (не электрических) источников энергии. В этом разделе приводятся математические модели систем и показываются принципиальные изменения их свойств.

2) Особенности синергетического подхода. В данном разделе рассматривается проблема системного подхода к анализу и синтезу, а также излагаются основные положения синергетической теории управления, созданной А.А. Колесниковым, применительно к проблематике управления движением механических систем, взаимодействующих с трибологическими средами и средами, формируемыми процессом обработки резанием на металлорежущих станках. Анализируются свойства диссипативных систем, в том числе вытекающего из положений Лиувилля свойства уменьшения фазового объема координат состояния во времени. Излагается синергети-



ческий подход к анализу и синтезу.

3) Основы нелинейной динамики управляемых систем. Рассматриваемые объекты управления описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Поэтому в курс лекций включен раздел, в котором описываются методы анализа нелинейных систем, в том числе нелинейных систем автоматического управления. Рассматриваются методы анализа систем в фазовом пространстве, метод фазовой плоскости, точечных отображений, в том числе стробоскопических отображений А. Пуанкаре. Приводятся основные положения асимптотических методов анализа на основе метода Ляпунова-Пуанкаре малого параметра, метода асимптотических разложений Крылова\_ Боголюбова – Митропольского, метода асимптотического поведения решений нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих малый параметр при старшей производной Понтрягина- Тихонова. Приводятся примеры использования методов при исследовании конкретных систем. Примеры подобраны таким образом, чтобы проиллюстрировать формирование различных многообразий в окрестности равновесия, в том числе орбитально асимптотически устойчивых предельных циклов, инвариантных торов, странных (хаотических) аттракторов. Рассматривается понятие бифуркации в параметрическом пространстве.

4) Основы системного синергетического синтеза. Формулируется и обосновывается принцип расширения – сжатия пространства состояния, показываются механизмы формирования терминальных многообразий и технологических и (или) функциональных инвариант системы. Раскрываются принципы введения агрегированных координат и общий принцип агрегированного конструирования автоматических регуляторов (АКАР), предложенный А.А. Колесниковым.

5) Методы анализа и синтеза систем управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе синергетической теории управления для детерминированных моделей. На основе принципа расширения пространства состояния приводятся уравнения динамики при управлении процессами обработки на металлорежущих станках. Для уравнений расширенного пространства состояния на основе методов Понтрягина – Тихонова рассматривается вопрос построения иерархии систем дифференциальных уравнений по принципу «медленности» времени. Рассматриваются проблемы устойчивости проектируемых траекторий на всех иерархических уровнях. Анализируются многообразий, формируемые в окрестностях траекторий медленных движений, а том числе орбитально асимптотически устойчивые предельные циклы, инвариантные торы и странные (хаотические) аттракторы. Приводится общая методика системного синтеза управляемого процесса резания, заключающаяся в проектировании требуемого многообразия траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки, определении оптимальной траек-



тории на многообразии, и вычисления функций управления на основе решения обратных задач динамики. При выборе оптимальной траектории на многообразии в качестве оптимизационного функционала рассматривается критерий минимума приведенных затрат на изготовление партии деталей.

6) Методы анализа и синтеза систем управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе синергетической теории управления для моделей обладающих эволюционными свойствами параметров. Вводится понятие эволюционной системы, как системы, параметры динамической связи которой изменяются в зависимости от фазовой траектории работы и мощности необратимых преобразований в области сопряжения. Поэтому параметры системы представляются в виде модернизированных интегральных операторов Вольтера второго рода. Приводится математическое описание динамики эволюционной системы, которое характеризуется интегро - дифференциальными функциональными уравнениями. Обсуждается вопрос решения функциональных интегро – дифференциальных уравнений. Приводится два способа их решений. Приводятся примеры изучения эволюционных изменений системы, в том числе эволюционных бифуркаций. Рассматриваются вопросы учета в функции управления эволюционных изменений.

7) Принципы построения наблюдателей в системе резания о координатах текущего состояния процесса и параметрах качества изготовления деталей. Системный подход к анализу управляемого процесса резания позволяет выделить в системе ограниченное количество координат, которые являются легко наблюдаемыми. Это силы резания, траектории движения исполнительных элементов, колебаний инструмента в процессе обработки (колебания интерпретируются как сигнал виброакустической эмиссии). Ставится задача определения в этих измеримых координатах параметров состояния процесса резания и текущего качества формируемых изделий. Решение этой задачи есть проблема наблюдения. Так как система является эволюционно изменяющейся, то при заданной стратегии управления возможно решение задачи прогнозирования координат состояния процесса резания и параметров качества деталей во времени. Единство задачи наблюдения и прогнозирования интерпретируется как задача динамического мониторинга системы резания.

Все многообразие затронутых в лекционном курсе вопросов объединено единой линией, отличающей рассматриваемые подходы от традиционно-го. Система резания рассматривается как единая взаимосвязанная система, отдельные подсистемы управления исполнительными элементами которой объединяются в единую систему через динамическую связь, формируемую процессом резания. Системный синергетический подход, излагаемый в курсе лекций, обладает большой эвристической основой для совершенствования,





как процессов обработки, так и систем и конструктивных особенностей металлорежущих станков.

При изучении курса магистрант должен обладать знаниями в области анализа и решений систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, основами функционального анализа, основами теории автоматического управления. Кроме этого он должен знать основные принципы построения уравнений динамики механических систем, представленных дискретными пространственными динамическими структурами в объеме курса теоретической механики.

При написании курса лекций автор использовал некоторые материалы более чем тридцати кандидатских и шести докторских диссертаций, защищенных под его руководством. За что автор выражает благодарность своим ученикам. Кроме этого автор признателен заслуженному деятелю науки и техники РФ, д.т.н., проф. Колесникову за рекомендации и советы при подготовке этого курса.



## ГЛАВА 1. АНАЛИЗ КЛАССА СИСТЕМ, ПОДЛЕЖАЩИХ РАССМОТРЕНИЮ В ДИСЦИПЛИНЕ.

Прежде чем переходить к изложению теоретических основ анализа и синтеза синергетических систем управления рассмотрим некоторые примеры нелинейных систем, в которых нелинейная связь формируется в результате взаимодействия серводвигателя, обеспечивающего движение некоторой обобщенной массы со средой.

### 1.1. Изменение свойств серводвигателя вращения шпинделя за счет реакции со стороны процесса резания

Рассмотрим систему, состоящую из двигателя постоянного тока, который обеспечивает вращение шпинделя, жестко связанного с ротором двигателя. Будем считать заданной и неизменной скоростью продольной подачи суппорта. Кроме этого будем считать припуск  $t_{P,0}$  неизменным, а инструмент - недеформируемым (рис.1). Управление частотой вращения шпинделя осуществляется с помощью напряжения якоря. Поток возбуждения двигателя постоянного тока также будем считать постоянным. Тогда уравнение динамики двигателя постоянного тока определяется следующим образом

$$T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = U^{(E)}(t) - U^{(M)}(t) - T_{\text{ЭМ}} \frac{d\omega}{dt} - \omega, \quad (1)$$

где  $U^{(E)} = U / c_e$  - напряжение якоря, приведенное к частоте вращения шпинделя;

$U^{(M)}(t) = R_0 / c_e c_M [M(t) + T_{\text{Э}} dM(t) / dt]$  - момент, действующий на ротор двигателя, приведённый к частоте вращения шпинделя;

$T_{\text{ЭМ}} = GR / c_e c_M$ ,  $T_{\text{Э}} = L / R$  - соответственно электромеханическая и электрическая постоянные времени двигателя;

$R$ ,  $L$  - соответственно момент инерции, приведённый к ротору двигателя, сопротивление и индуктивность цепи якоря двигателя;

$c_e$ ,  $c_M$  - параметры двигателя;

$\omega$  - частота вращения шпинделя;

$R_0$  - радиус заготовки в точке контакта с ней режущего инструмента.

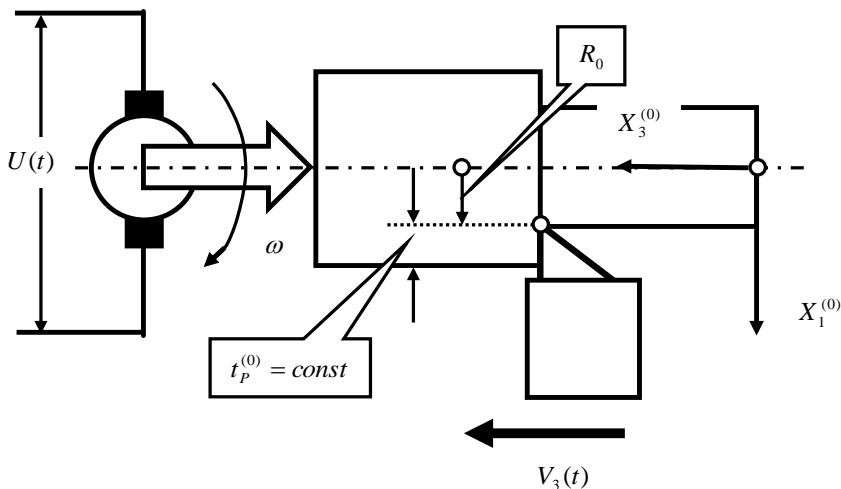


Рис. 1. Схема формирования момента сопротивления вращения шпинделя в координатах состояния динамической системы резания

Обычно при исследовании динамических свойств двигателя и способов управления частотой вращения момент не представляется в координатах состояния или считается заданным и неизменным, что само по себе странно, так как при частоте вращения  $\omega = 0$  момент, действующий на ротор существует. Следовательно, ротор двигателя должен вращаться от этого момента и работать как генератор. Уже это замечание показывает, что представление внешнего момента не в координатах состояния системы является неправомерным. Для полного раскрытия уравнения (1) необходимо представить момент  $M(t)$  в координатах состояния системы резания.

Вначале ограничимся случаем, когда упругими деформациями инструмента относительно обрабатываемой заготовки можно пренебречь. Кроме того, рассмотрим стационарное состояние системы, когда скорость продольной подачи суппорта есть величина постоянная, а скорость поперечных перемещений суппорта равна нулю. Для определения момента, формируемого процессом резания, воспользуемся связью силы резания с текущим значением площади срезаемого слоя. Тогда в изображениях по Лапласу [11]

$$M(p) = \rho \chi_2 R_0 \frac{1}{p} [1 - \exp(-TP)] V_3(p), \quad (2)$$

где  $\rho$  - давление стружки на переднюю поверхность инструмента;

$R_0$  - радиус детали;



$\chi_2$  - угловой коэффициент, связывающей вектор силы с его проекцией по направлению скорости резания;

$T$  - время одного оборота, величина, обратная частоте вращения шпинделя.

Представим  $\frac{1}{p}[1 - \exp(-TP)]$  в виде ряда Тейлора. Тогда

$$M(p) = R_0 F_2(p) = \chi_2 \rho R_0 t_p^{(0)} \left\{ T - \frac{T^2}{2!} p + \frac{T^3}{3!} p^2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{T^n}{n!} p^{n-1} + \dots \right\} V_3(p). \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда  $V_3 = const$ . Тогда вместо (1) с учетом (3) при ограничении в ряде Тейлора первыми двумя членами имеем

$$T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = U^{(E)}(t) - k_{\omega} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{T_{Э}}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} \right) - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - \omega, \quad (4)$$

где  $k_{\omega} = \chi_2 \rho R_0 t_p^{(0)} / c_e c_M$  - коэффициент, учитывающий влияние скорости вращения шпинделя на момент сопротивления вращения ротора серводвигателя. Он имеет смысл квадрата частоты, определяемой моментом сопротивления в установившемся состоянии. Уравнение (4) принципиально отличается от уравнения двигателя постоянного тока [13], прежде всего, наличием двух нелинейных элементов.

Пусть напряжение, приведенное к частоте вращения двигателя, есть величина постоянная, то есть  $U^{(E)} = const$ . Тогда этому напряжению соответствует два установившегося значения частоты вращения двигателя (рис. 2)

$$\omega_{1,2}^{(0)} = \frac{U^{(E)} \pm \sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_{\omega}}}{2}. \quad (5)$$

Очевидно, что при  $(U^{(E)})^2 < 4k_{\omega}$  не существует управления, которому соответствуют вещественные частоты вращения ротора серводвигателя. При  $(U^{(E)})^2 > 4k_{\omega}$  одному и тому же значению напряжения на якоре двигателя соответствуют два значения точки равновесия системы. Не трудно показать, что верхняя ветвь смещения точки равновесия в зависимости от напряжения якоря соответствует устойчивым точкам равновесия (например, частота  $\omega_0^{(i)}$  на рис. 2). Нижняя ветвь – неустойчивым (например, частота  $\omega_0^{(k)}$  на рис. 2).

Покажем, что верхней ветви соответствуют устойчивые точки равновесия, а нижней – неустойчивые. Для этого согласно теории Ляпунова []



необходимо рассмотреть уравнение в вариациях относительно точки равновесия. Рассмотрим систему (4) в вариациях относительно точки равновесия после замены  $\omega(t) = \omega_0 + \Omega(t)$  и примем во внимание, что  $\Omega(t) \rightarrow 0$ . Тогда в вариациях относительно точки равновесия имеем

$$T_{\text{ЭМ}}T_{\text{Э}} \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \left\{ k_{\omega}T_{\text{Э}} \frac{2\Omega}{(\omega_0)^3} + T_{\text{ЭМ}} \right\} \frac{d\Omega}{dt} + \left( 1 - \frac{k_{\omega}}{(\omega_0)^2} \right) \Omega = 0 . \quad (6)$$

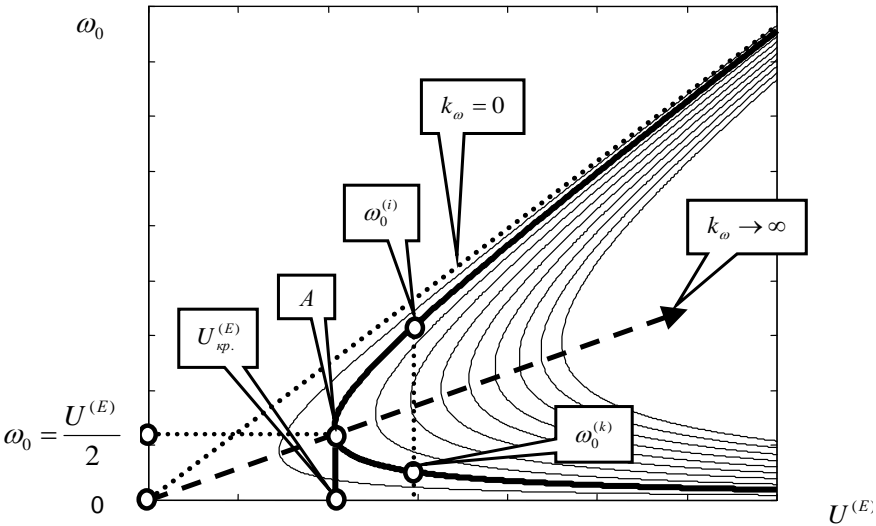


Рис. 2. Диаграммы смещения точек равновесия привода вращения шпинделя в зависимости от напряжения якоря при различных значениях коэффициента  $k_{\omega}$

Очевидно, что система, описываемая уравнением (6) теряет устойчивость равновесия при условии  $\left( 1 - \frac{k_{\omega}}{(\omega_0)^2} \right)$ . Частота  $\omega_0$  определяется соотношениями (5). Поэтому справедливо



$$\left(1 - \frac{k_\omega}{(\omega_0)^2}\right) = \frac{2\sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_\omega} \{ \sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_\omega} \pm U^{(E)} \}}{\{U^{(E)} \pm \sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_\omega}\}^2}. \quad (7)$$

В (7) знаменатель всегда положителен. Поэтому знак (7) определяется знаком числителя. В числителе на рассматриваемых двух ветвях траектории смещения равновесия  $(U^{(E)})^2 - 4k_\omega > 0$ . Поэтому  $\left(1 - \frac{k_\omega}{(\omega_0)^2}\right) > 0$  при условии  $\sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_\omega} + U^{(E)}$ , что соответствует верхней ветви траектории (рис. 2). Если  $\sqrt{(U^{(E)})^2 - 4k_\omega} - U^{(E)}$ , что соответствует нижней ветви траектории на рис. 2, то  $\left(1 - \frac{k_\omega}{(\omega_0)^2}\right) < 0$ . Таким образом, нижняя ветвь соответствует неустойчивому равновесию.

Приведём пример фазового портрета системы для двигателя, имеющего следующие параметры:  $U = 220$  вольт,  $T_{ЭМ} = 0,0482$  с,  $T_{\mathcal{J}} = 0,03642$  с,  $c_e = 0,68; в \cdot с$ ,  $k_\omega = 20000$  (рис. 3).

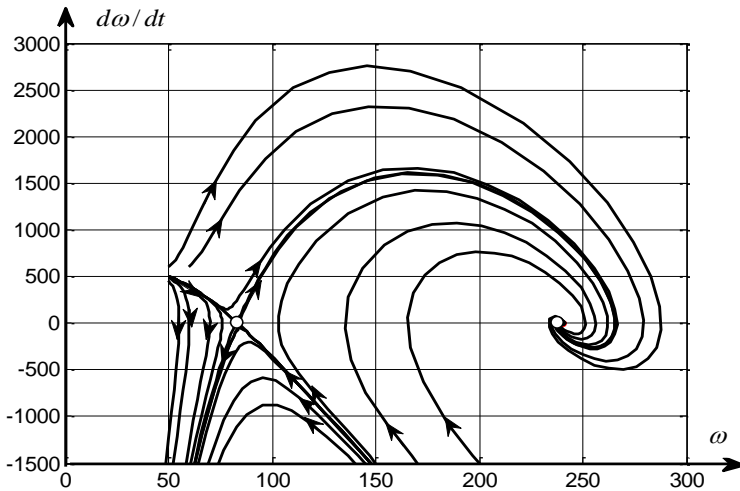


Рис.3. Фазовой портрет системы

Как видно, в рассматриваемом примере система имеет две точки равновесия:  $(O_1)$  и  $(O_2)$ . Первая точка  $O_1$  является неустойчивой. Вторая



точка  $O_2$  - устойчива. Эти точки формируют две области, разделённые сепаратрисной кривой. Причем, одна ветвь сепаратриссы характеризует аттрактор, асимптотически притягивающийся к точке равновесия  $O_2$ . Блок схема программы в программном комплексе Simulink для вычисления фазовых траекторий приведена на рис. 4.

Проанализируем полученный результат. 1. Динамические свойства серводвигателей за счёт реакции со стороны процесса резания могут существенно менять свои свойства. В частности, для традиционной схемы процесса обработки на токарном станке наибольшей чувствительностью к изменениям свойств за счет реакции со стороны процесса резания обладают серводвигатели вращения шпинделя.

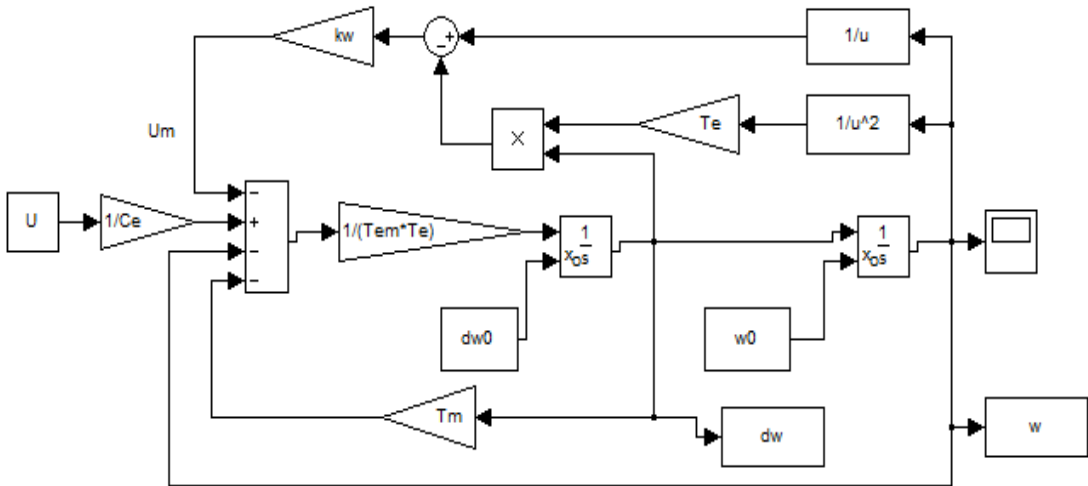


Рис. 4. Структурная схема динамики привода вращения шпинделя с процессом резания в Simulink

2. Реакция со стороны процесса резания на динамические свойства серводвигателя шпинделя определяется обобщённым параметром  $k_{\omega} = \chi_2 \rho R_0 t_P^{(0)} / c_e c_M$ . Он зависит как от параметров процесса резания, влияющих на формирование момента сопротивления, так и от параметров двигателя  $c_e$  и  $c_M$ . Характерно, что по мере уменьшения мощности серводвигателя ( $c_e c_M \rightarrow 0$ ) по сравнению с мощностью процесса резания, зависящего от сил  $\chi_2 \rho R_0 t_P^{(0)}$ , для каждого значения напряжения



якоря существует зона нечувствительности в установлении стационарной скорости его вращения. Кроме этого, для каждого значения напряжения якоря существует две точки равновесия, соответствующего стационарной скорости. Причем, одна из этих точек является неустойчивой. Таким образом, для асимптотически устойчивой точки равновесия существует ограниченная область притяжения.

3. С первого взгляда, существование неустойчивой точки равновесия противоречит физическим представлениям о свойствах серводвигателей. Однако необходимо учитывать, что по мере уменьшения скорости резания (частоты вращения шпинделя) при неизменной скорости подачи существенно возрастает площадь срезаемого слоя. В результате непропорционально быстро увеличивается момент сопротивления, который при недостаточной мощности двигателя вращения шпинделя может превышать момент двигателя. Это один из механизмов формирования заклинивания режущего инструмента, которое особенно актуально при создании оборудования, например, для сверления глубоких отверстий малого диаметра спиральными свёрлами. В связи с этим, при создании систем управления процессами обработки на станках актуальным является согласование мощности двигателя вращения сверла и двигателя его подачи. В частности при увеличении мощности двигателя точка критического напряжения якоря «А» переходим в начало координат, и свойства двигателя вращения шпинделя становятся традиционными. В этом случае двигатель не воспринимает реакцию со стороны процесса резания.

4. Момент, представленный в виде (2) характеризует лишь одну составляющую момента, которая определяется зависимостью сил от текущих значений площади срезаемого слоя. Однако существуют другие физические процессы, оказывающие влияние на момент. Например, при сверлении глубоких отверстий спиральными сверлами кроме составляющих момента, зависящих от площади срезаемого слоя необходимо учитывать накопление стружки в стружкоотводящих канавках. Эта составляющая увеличивается по мере заглупления инструмента в заготовку. Если положить, что накопление стружки и соответственно приращение дополнительного момента  $\Delta M$  пропорционально пути, то

$$\Delta M(t) = k_c t . \quad (7)$$

Следовательно, область притяжения точки равновесия, соответствующая верхней ветви на рис. 2, с течением времени будет уменьшаться и полностью вырождаться. Другими словами в этой системе свойства системы будут двигаться и неизменно достигать такого терминального состояния, при котором процесс резания не существует (хотя бы в связи с заклиниванием инструмента). Именно в связи с этим процесс сверления глубоких отверстий происходит с периодическими выводами инструмента из зоны





резания. Причем, законы переключения циклов обработки зависят от параметров двигателя и свойств процесса резания.

5. По мере увеличения отношения скорости подачи к скорости резания изменяется значение кинематического заднего угла. В результате существенно возрастают силы, действующие на заднюю грань инструмента, которые направлены против скорости подачи. Если реакция со стороны процесса резания на скорость подачи отсутствует, то эти силы начинают превосходить предельные значения из условий прочности инструмента. Поэтому при конкретных параметрах двигателя и мощности процесса резания можно выделить области, в которых процесс резания не существует (рис. 5). Эти области на рис. 5 затемнены. Кроме этого, силы, действующие на заднюю грань инструмента, имеют проекцию, направленную в сторону, противоположную силам, формируемым в области первичной и вторичной пластических деформаций. Они не только уменьшают проекции сил по направлению скорости резания, но и существенно увеличивают силы в направлении скорости подачи. Поэтому для полного описания зависимости и свойств динамической системы привода вращения шпинделя необходимо ввести в рассмотрение дополнительные силы, действующие на заднюю грань инструмента.

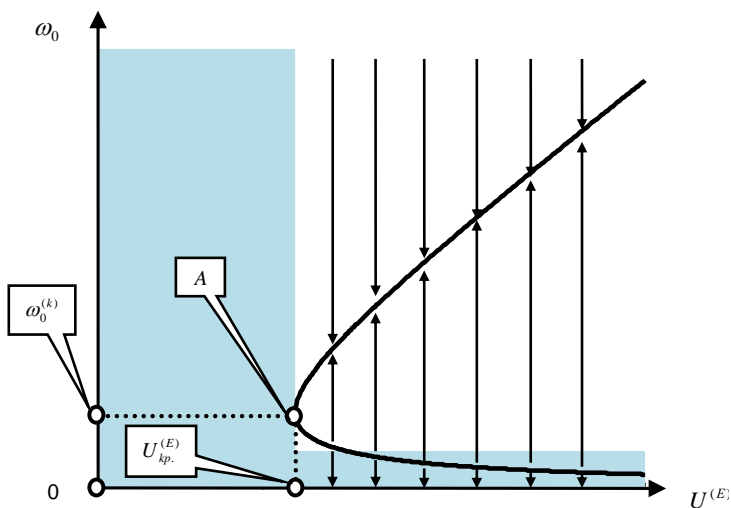


Рис. 5. Диаграммы смещения точек равновесия привода вращения шпинделя в зависимости от напряжения якоря при различных значениях коэффициента  $k_\omega$



Для пояснения влияния сил, формируемых в области контакта задней грани инструмента с обработанной частью заготовки, на динамические свойства привода вращения шпинделя учтем дополнительные силы, действующие на заднюю грань инструмента. Как и ранее будем считать, что упругие деформации инструмента отсутствуют. Тогда дополнительные силы, действующие на инструмент со стороны его задней грани, определяются двумя преобразованиями. Во-первых, зависимостью кинематического заднего угла от отношения скорости подачи к скорости резания, во-вторых, зависимостью сил от сближения задней поверхности инструмента с заготовкой. Важно подчеркнуть, что силы, действующие на заднюю поверхность, непропорционально быстро возрастают по мере уменьшения значения заднего угла. Причем силы, действующие на заднюю поверхность, в основном, формируются от двигателя подачи суппорта. Поэтому значение крутящего момента, действующего на ротор двигателя главного движения с учетом сил, действующих на заднюю поверхность, можно представить в виде двух композиционных составляющих. Эти силы, приведенные к частоте вращения ротора двигателя шпинделя, представляются в виде

$$M_{\omega} = k_{\omega} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{k_3}{\omega^2} \right), \quad (8)$$

где  $k_3$  - коэффициент, учитывающий влияние сил, действующих на заднюю грань инструмента. В выражении (8) принято во внимание, что по мере уменьшения частоты силы, действующие на заднюю грань инструмента, увеличиваются быстрее, чем силы, действующие на переднюю его поверхность. Область определения функции (8) определяется частотным диапазоном  $\omega \in (0, \infty)$ . Поэтому при цифровом моделировании  $M_{\omega} = -\infty$  при  $\omega \searrow 0$ . Тогда уравнение динамики привода вращения шпинделя вместо (3) будет

$$U^{(E)}(t) = T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \left[ k_{\omega} \left( \frac{2k_3}{\omega^3} - \frac{1}{\omega^2} \right) + T_{\text{ЭМ}} \right] \frac{d\omega}{dt} + \omega + k_{\omega} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{k_3}{\omega^2} \right). \quad (9)$$

Прежде всего, рассмотрим точки равновесия системы (9) для напряжения якоря двигателя  $U^{(E)} = \text{const}$ . Для пояснения влияния реакции со стороны процесса резания на равновесия системы удобно воспользоваться графической интерпретацией формирования точек равновесия (рис. 6). Уравнение для определения точки равновесия  $\omega^0$  будет



$$U^{(E)} = \omega^0 + k_\omega \left[ \frac{1}{\omega^0} - \frac{k_3}{(\omega^0)^2} \right]. \quad (10)$$

Очевидно, что свойства равновесия системы определяется коэффициентом  $k_\omega$ . При коэффициенте  $k_\omega \rightarrow 0$  свойство двигателя определяется традиционной пропорциональной зависимостью частоты якоря от напряжения  $U^{(E)}$ . В свою очередь, коэффициент  $k_\omega$ , как показано выше, зависит от отношения мощности двигателя к мощности процесса резания. В частности, если мощность двигателя неограниченно возрастает, то реакция со стороны процесса резания на зависимость точек равновесия от напряжения якоря нивелируется. В том же случае, когда мощность двигателя и процесса резания соизмеримы, то в области малых частот вращения двигателя формируется область неоднозначности в зависимости частоты вращения от напряжения якоря. При этом по мере увеличения напряжения имеют место бифуркации точки равновесия системы типа вилки.

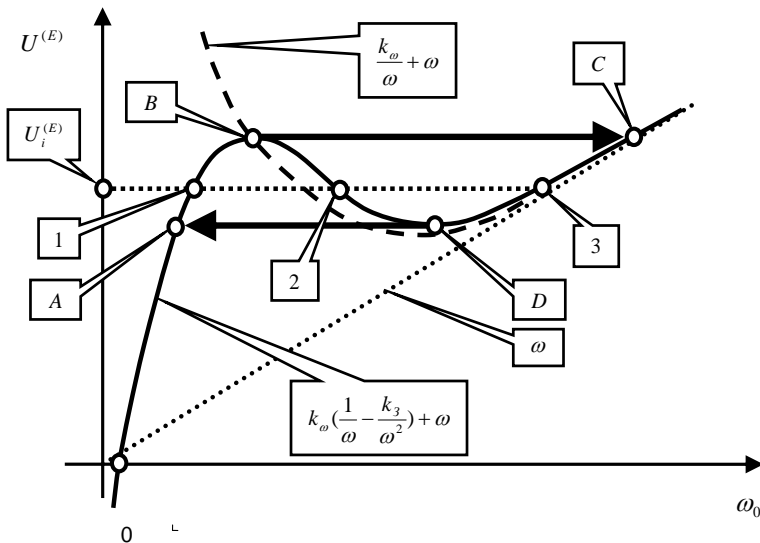


Рис. 6. Диаграммы смещения точек равновесия привода вращения шпинделя в зависимости от напряжения якоря



Например, для напряжения  $U_i^{(E)}$  соответствуют три точки равновесия: «1», «2» и «3». Причем, как нетрудно показать, равновесие, соответствующее точке «2», является неустойчивым. Неустойчивыми являются все точки равновесия, находящиеся на кривой «В-D». Таким образом, при возрастании напряжения траектория смещения точек равновесия соответствует кривой «А-В-С», при уменьшении – кривой «С-D-А».

Для этого случая также приведём пример фазового портрета системы (рис. 7). Здесь система имеет три точки равновесия  $O^{(1)}$ ,  $O^{(2)}$  и  $O^{(3)}$ . Причем, точка  $O^{(2)}$  является неустойчивой. Из этой точки выходят сепаратрисные кривые, которые делят фазовое пространство на две области притяжения точек равновесия  $O^{(1)}$  и  $O^{(3)}$ . Другими словами точки  $O^{(1)}$  и  $O^{(3)}$  характеризуют притягивающие многообразия, к которым асимптотически притягиваются все фазовые траектории в зависимости от вариаций скорости и ускорения вращения ротора двигателя вращения шпинделя.

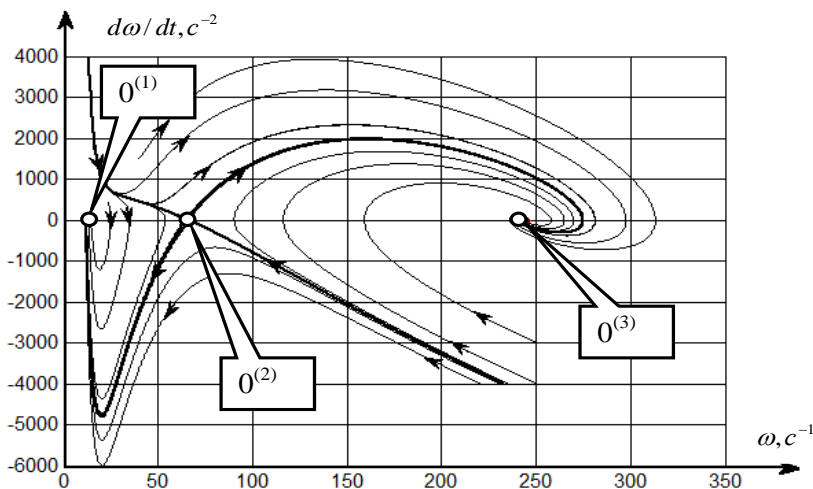


Рис.7. Фазовой портрет динамической системы привода вращения шпинделя с процессом резания



Структурная схема модели в Simulink приведена на рис. 8.

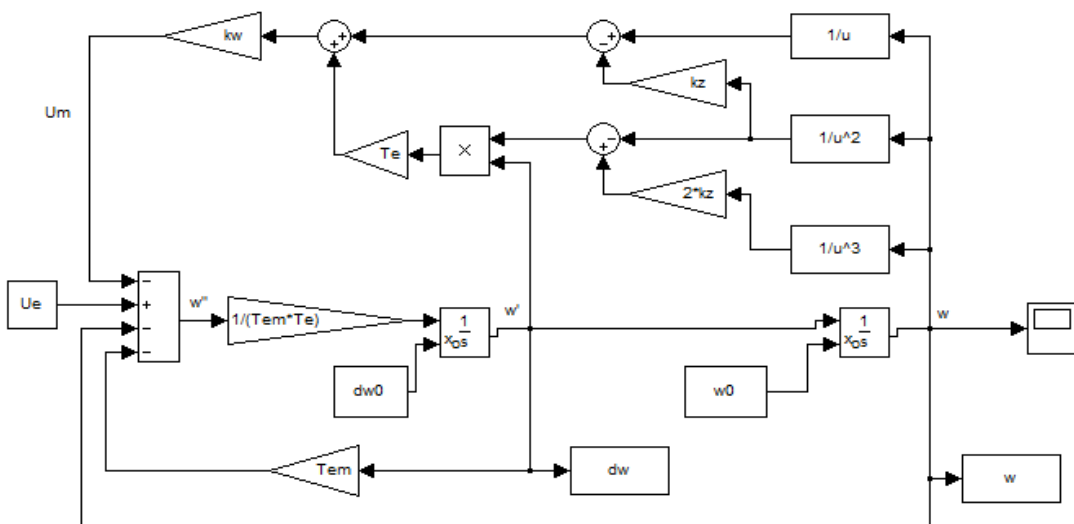


Рис.8. Структурная схема модели динамики привода вращения шпинделя с процессом резания в Simulink

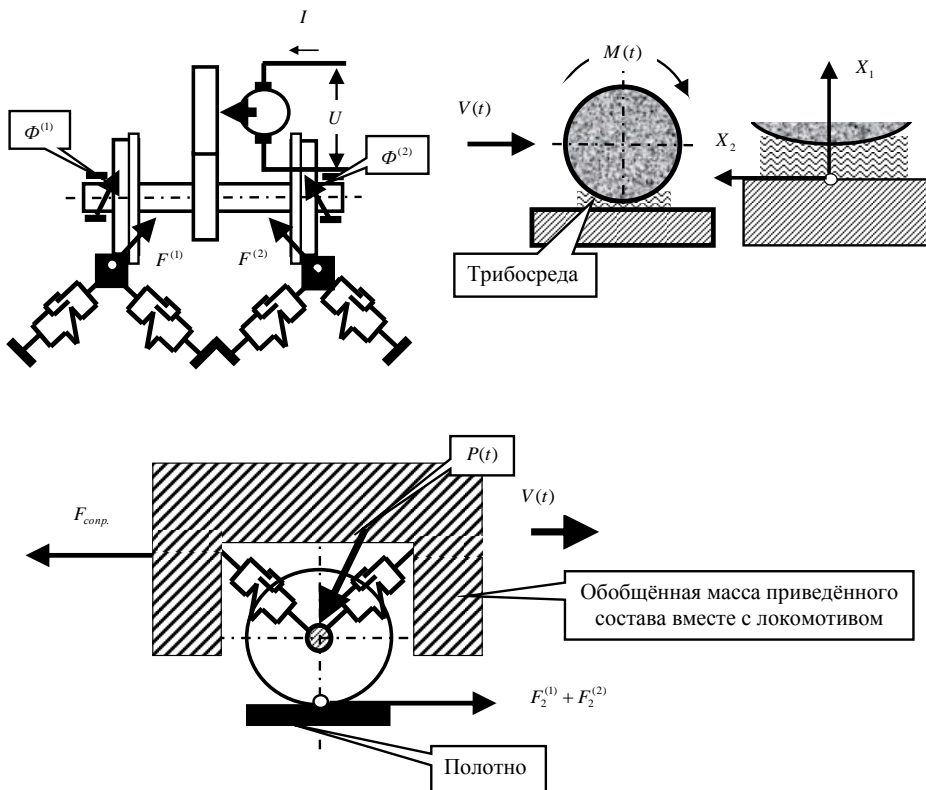
Приведённый материал показывает, что для подсистемы, определяющей стационарную траекторию движения инструмента относительно заготовки, необходимо учитывать реакцию со стороны процесса резания. Если определить многообразие траекторий формообразующих движений и соответствующие им траектории движения исполнительных элементов станка, то этим траекториям исполнительных элементов будет соответствовать изготовление деталей заданного качества. Однако эти траектории должны быть асимптотически устойчивыми в вариациях относительно этих траекторий. Уравнение в вариациях относительно траектории «медленных» движений характеризуют подсистему «быстрых» движений. Вопрос



обеспечения асимптотической устойчивости траекторий формообразующих движений будет рассмотрен ниже.

## 1.2. Влияние на движение транспортного устройства фрикционных свойств контакта колеса с полотном

Не нарушая общности, а также учитывая методические аспекты понимания взаимодействия систем со средой, рассмотрим упрощенную динамическую модель транспортного устройства, движение которого определяется двигателем постоянного тока. Рассмотрим упрощенную модель транспортного устройства на примере железнодорожного транспорта (рис. 9). Более подробное описание динамической модели можно найти в нашей книге [14].



Здесь для упрощения анализа с целью акцентирования внимания на главной проблеме будем считать полотно недеформируемым. Кроме этого упругими деформациями колесной пары относительно тележки, тележки относительно корпуса транспортного устройства и других элементов устройства будем пренебрегать. Также будем считать ротор двигателя жестко связанным с колесом. Тогда для описания движения необходимо



рассмотреть систему (1), которую мы дополним уравнением поступательных движений транспортного устройства в виде следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} U - c_e \omega = \frac{GL}{c_M} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{GR}{c_M} \frac{d\omega}{dt} + \frac{R_0 R}{c_M} F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right) + \frac{R_0 L}{c_M} \frac{d\left\{F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right)\right\}}{dt}; \\ F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right) = m \frac{dV}{dt} + \Phi(V), \end{cases} \quad (11)$$

где  $V$ ,  $\omega$  - соответственно скорость поступательно движения транспортного устройства и частота вращения ротора двигателя (колеса);

$c_e, c_M$  - параметры двигателя;

$R, L$  - активное сопротивление и индуктивности якоря двигателя;

$G$  - момент инерции ротора двигателя вместе с колесом;

$R_0$  - радиус колеса;

$m$  - приведенная масса транспортного устройства.

В (11) введены две нелинейных функции. Первая  $F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right)$

определяет зависимость тангенциальной силы в контакте колеса с рельсом

от скольжения  $\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right) = V_{ск.}$ . Здесь положительное значение скорости  $V$

соответствует случаю, когда сопротивление движению со стороны транспортного устройства препятствует движению. Движение системы с большими отрицательными ускорениями, когда двигатель работает в режиме генератора, не рассматривается. Напомним, что двигатель является обратимой системой. Вторая  $\Phi(V)$  показывает зависимость сопротивления движения транспортного устройства от скорости. Например, если сопротивление движению представимо в виде вязкого трения, то  $\Phi(V) = hV$ . Тогда  $h$  - коэффициент вязкого трения. При раскрытии функции  $\Phi(V)$  необходимо кроме вязкого трения учитывать аэродинамическое сопротивление, трение ведомых колес, трение боковой головки колеса о рельс и пр. Однако эта функция при изменении скорости является монотонной и однозначной. Главное значение при изучении свойств системы (11) имеет зависимость

$F\left(\frac{\omega}{R_0} - V\right)$ . Дело в том, что многочисленными исследованиями в транспортной механике показано, что тангенциальные силы, обеспечивающие



движение транспортного устройства зависят от скорости скольжения  $V_{ск.}$ . Качественный характер этой зависимости приведен на рис. 10.

Дадим характеристику зависимости сил тяги от скорости скольжения колеса относительно рельса. Прежде всего, отметим, что существует максимальное значение тангенциальной силы в контакте колесо – рельс, после которой наблюдается срыв сцепления. На рис. 10 значение этой силы обозначено  $F^{(max.)}$ . От этого значения отходят две ветви тяговой характеристики. Одна (O-A-B) соответствует приращению сил тяги по мере увеличения сопротивления движению. Вторая (B - C) – уменьшению. Причем, ветвь (O-A-B) имеет линейный участок (O - A) и нелинейный (B - C). Линейному участку соответствует работа фрикционного контакта в режиме предварительного смещения. Нелинейному участку соответствует монотонное разрушение фрикционного контакта вплоть до его срыва. Падающему участку (B - C) соответствует переход на режим относительного скольжения.

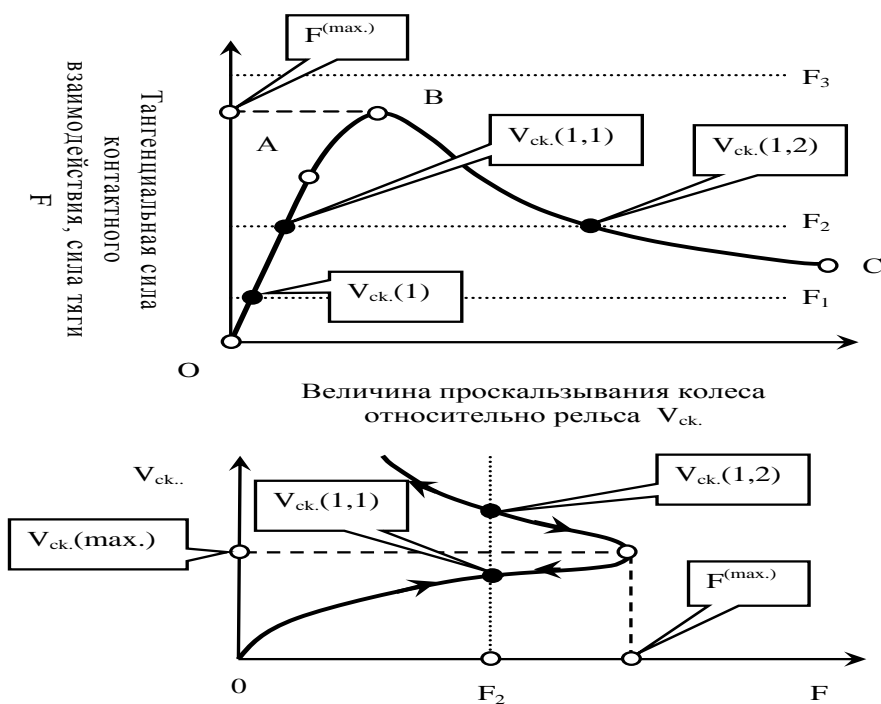


Рис. 10. Тяговая характеристика колесо – рельс «а» и ветвление точек равновесия при варьировании сил сопротивления движению





По мере увеличения внешних сил, зависящих при неизменных прочих условиях от траектории изменения скорости поступательного движения транспортного устройства, наблюдается ветвление точек равновесия системы, аналогичное рассмотренному в предыдущем параграфе. Ограничимся рассмотрением стационарного состояния системы, которому соответствует установившееся постоянное значение скорости движения транспортного устройства. Если скорость  $V = \text{const.}$ , то ей соответствует конкретное значение  $F$ , вычисленное из второго уравнения системы (10). Например, силе  $F_1$  соответствуют два установившихся значения скорости относительного скольжения  $V_{ск.}(1,1)$  и  $V_{ск.}(1,2)$ . Так как  $V = \text{const.}$ , то этим двум скоростям соответствуют две частоты вращения двигателя  $\omega(1,1)$  и  $\omega(1,2)$ . Однако точки равновесия  $V_{ск.}(1,1)$  и  $V_{ск.}(1,2)$ , и соответствующие им  $\omega(1,1)$  и  $\omega(1,2)$  имеют принципиально различные свойства. Не трудно показать, что  $\omega(1,1)$  является асимптотически устойчивой при малых вариациях координат состояния относительно этой точки, а точка  $\omega(1,2)$  - не устойчива.

Для обоснования устойчивости и неустойчивости точек равновесия  $\omega(1,1)$  и  $\omega(1,2)$  рассмотрим уравнение (11) в вариациях относительно этих точек. Для этого сделаем замену переменных  $\omega(t) = \omega(1,1) + \delta\omega(t)$  и  $\omega(t) = \omega(1,2) + \delta\omega(t)$ . Тогда линеаризованное уравнение в вариациях относительно точек равновесия

$$\frac{GL}{c_M} \frac{d^2 \delta\omega}{dt^2} + \frac{GR}{c_M} \frac{d\delta\omega}{dt} + \left\{ \frac{R_0 R}{c_M} \frac{\partial F}{\partial \omega} + c_e \right\} \delta\omega = 0. \quad (12)$$

Для точки  $\omega(1,1) \frac{\partial F}{\partial \omega} > 0$ . Поэтому точка равновесия  $\omega(1,1)$  является

асимптотически устойчивой. Для точки  $\omega(1,2) \frac{\partial F}{\partial \omega} < 0$  и при этом

$\left[ \frac{R_0 R}{c_M} \frac{\partial F}{\partial \omega} + c_e \right] < 0$ . Поэтому точка равновесия  $\omega(1,2)$  является неустойчи-

вой. Причем, как это следует из рис. 10, по мере увеличения сопротивления движению транспортного устройства область притяжения асимптотически устойчивой точки равновесия уменьшается и может вырождаться полностью.

Анализируя систему (11) в целом, необходимо отметить, что она в зависимости от сопротивления движению транспортного устройства и



начальных условий может в общем случае иметь два стационарных состояния. Одно соответствует тяговому режиму с некоторым постоянным проскальзыванием. Второе буксование, когда колесо вращается в режиме относительного скольжения, при этом движение устройства отсутствует.

### 1.3. Влияние на движение судна гидродинамических сил

Рассмотрим движение судна на подводных крыльях. Упрощенное уравнение его движения по прямой без учета килевой и бортовой качки имеет вид [15]

$$\frac{dv}{dt} = F(v) - S(v), \quad (13)$$

где  $v$  - скорость прямолинейного движения судна;

$F(v)$  - сила тяги винта;

$S(v)$  - сила сопротивления движению.

При неизменном режиме работы двигателя сила тяги по мере увеличения скорости монотонно убывает, а зависимость сопротивления от скорости является немонотонной функцией, как показано на рис. 11. Состояние равновесия в системе, очевидно, определяется условием

$$F(v) = S(v). \quad (14)$$

Если установить режим, при котором зависимости тяги и сопротивления соответствуют схеме, приведенной на рис. 11, то в системе управления движением существуют три стационарных режима ( $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ ). Здесь также в зависимости от тягового режима возможны ветвления стационарных состояний системы. При этом наблюдаются бифуркации стационарного состояния типа вилки. На выделенной кривой тяги точки равновесия  $v_1$  и  $v_3$  являются устойчивыми, а точка  $v_2$  неустойчива. Она характеризует границу сфер влияния устойчивых точек равновесия.

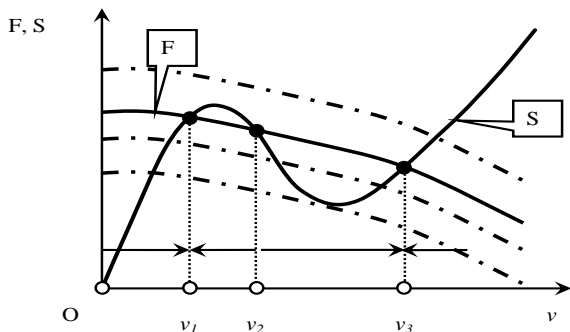


Рис. 11. Тяговая характеристики и характеристика сопротивления по мере изменения скорости

Все приведенные характеристики и примеры систем объединены единой линией. Они рассматривают свойства устройств, обеспечивающих движение механической системы, взаимодействующей с различными средами: средой, формируемой процессом резания, трибосредой и гидродинамической средой. Во всех случаях учет взаимодействия системы в процессе движения со средой изменяют свойства системы в целом. Рассмотренные примеры являются упрощенными и они не раскрывают всех особенностей изменения свойств системы. В дальнейшем мы их существенно усложним.



## ГЛАВА 2. ОСОБЕННОСТИ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА.

Синергетический подход базируется, прежде всего, на рассмотрении системы в целом. Поэтому остановимся на системном подходе в науке.

### 2.1.0 системном подходе в науке

Система в самом общем виде может рассматриваться как множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом. Они образуют определенную целостность, единство. При изучении и описании системы в ходе становления научного знания сформировалось два подхода.

**Первый**, редуccionистский подход, согласно которому свойства целого объясняются свойством частного, то есть характеристики целого полностью определяются некоторой суммой характеристик его элементарных составляющих. Редуccionистская парадигма естествознания, берущая начало от Платона, нашла успешное воплощение в научном методе Галилея, который был затем обоснован и принципиально развит Ньютоном. Наконец он использован в выдающихся теориях механики, в частности, в работах Лагранжа и Гамильтона. Именно такой подход позволил создать современные технологии и машины, разработать методы их анализа и синтеза. Фундаментальными понятиями в редуccionистской картине мира является материя и ее движение. Использование этой парадигмы основано на расчленении, как отмечает О. Тоффлер, «...целого на части, а именно в разложении целого на мельчайшие компоненты». И это «позволяет нам пренебречь сложными взаимосвязями между интересующей нас проблемой и прочей частью Вселенной» [5]. Если рассматривать машину, как единую систему, то такой подход позволяет расчленить машину на отдельные элементы, например, выделить в машине узел трения. В дальнейшем свойства этого узла анализировать независимо, например, на машине трения. Таким образом, все узлы трения, работающие в разных машинах и узлах машины должны описываться одними и теми же закономерностями. «В частном отображается целое» [2]. Поэтому изучение частного позволяет судить о свойствах целого.

**Второй**, берущий начало в работах Аристотеля, утверждает, что целое важнее его составляющих. Это так называемый холистический, то есть глобальный, подход к анализу и синтезу системы в целом. Этот подход уделяет большое внимание связям и взаимодействию между частями целого как некоторой системы [17 - 18]. Благодаря свойствам связей целое лишь частично содержит свойства взаимодействующих подсистем. Именно



взаимодействия подсистем, осуществляющееся через связи, как правило, нелинейные, могут принципиально изменять свойства системы в целом [2,3]. Причем, свойства связей являются информационными, в нашем представлении это означает, что имеется некоторое математическое описание свойств взаимодействия подсистем [8,9]. Таким образом, целое, лишь частично зависит от свойств расчлененных подсистем, но и существенно отличается от свойств его элементов. Причем, их отличие определяется законами взаимодействия между подсистемами, изменяющими свойства системы в целом. Причем, законы взаимодействия обладают свойством эволюционной изменчивости.

Не смотря на то, что первый подход до второй половины XX века занимал господствующее положение, многие направления биологии, техники, экономики и пр. пришли к кризисному состоянию, так как не могла объяснить с редукционистских позиций многие явления, имеющие системную природу. Нас, прежде всего, интересуют проблемы техникотехнологического знания, а техническое устройство второй половины XX века уже представляло сложную управляемую систему, в которой, как правило, дополнительно анализируются не только силовые, тепловые и другие потоки, но и информационные, например, в задачах мониторинга состояния. Возникли проблемы анализа машины как единой управляемой системы, в которой свойства взаимодействия между подсистемами становятся принципиально важными. В связи с этим сформировались две науки: вначале кибернетика [17.18], а затем синергетика, или ее техническое приложение – синергетическая теория управления [2 - 4]. Кибернетика изучает общие законы управления системой, независимо от ее природы. Это технические, искусственно созданные системы, это физические и химические системы, наконец, это системы живых организмов, это системы социальные и пр. Синергетика изучает законы взаимодействия подсистем и на основе этого рассматривает законы эволюции и самоорганизации.

Следуя синергетической парадигме, отметим, что для описания взаимодействия необходимо рассматривать обмен между подсистемами энергии, вещества, информации и др. При анализе таких систем И.Пригожин ввел понятие открытых систем, то есть таких физических систем, через которые могут протекать потоки энергии и энтропии. Открытые, не изолированные системы, взаимодействуют со средой (средами). При достаточно больших потоках в таких системах могут возникать явления нелинейной самоорганизации. Причем, системы должны находиться вдали от состояния равновесия, то есть через границу раздела система – среда должен постоянно проходить поток энергии. Именно неравновесное в термодинамическом плане состояние вызывает приток энергии в область взаимодействия система – среда. В этом случае за счет нелинейности описания взаимодействий в открытой системе формируются диссипативные структуры, а си-



стема в целом начинает обладать эволюционными свойствами. Причем эволюционирует система, как правило, в направлении рационального взаимодействия со средой, например, в направлении минимизации энергетических потерь в области взаимодействия [11 - 12].

Указанные свойства справедливы для любой системы: физической, химической, биологической, экономической, социальной. Таким образом, - это общесистемные свойства. Анализ эволюционных преобразований в таких системах позволил выявить удивительные, никак не вытекающие из редукционистского подхода, свойства. Во-первых, развитие системы существует в окрестности некоторого аттрактора, область притяжения которого ограничена и характеризует некоторую ограниченную трубку фазовых траекторий [19, 20]. Причем, таких аттракторов может быть множество. Поэтому существует множество не предсказуемых траекторий эволюции системы. Однако, после точки бифуркаций, при выходе траекторий на некоторый аттрактор, дальнейшее развитие системы вполне предсказуемо до очередной точки бифуркаций. Причем, предсказание эволюции возможно для координат в пространстве состояния, находящихся в пределах области притяжения аттрактора. Во-вторых, в таких системах, динамика которых описывается детерминированными уравнениями, возможно образование странных (хаотических) аттракторов, обладающих удивительными свойствами (нецелая фрактальная размерность, ограниченность в фазовом пространстве, монотонное удаление друг от друга двух траекторий с близкими начальными условиями и одновременная ограниченность их расположения в фазовом пространстве и пр.) [21]. Таким образом, в детерминированной системе формируются стационарные многообразия по своим свойствам, близкие к хаосу. Наконец, для реальных природных, технических, социальных систем и пр., то есть систем любой природы, характерно забывание начальных условий после выхода траекторий на соответствующий аттрактор и, как следствие, понижение порядка дифференциальных уравнений, описывающих динамику. Это свойство характерно для диссипативных систем, у которых по мере движения имеет место уменьшение фазового объема траекторий, то есть они неизменно двигаются по направлению некоторых притягивающих многообразий, имея различные начальные состояния. Такие системы не являются обратимыми (изменение знака времени не позволяет восстановить траекторию). Именно необратимость в таких системах является источником изменения, в том числе связанного с уменьшением энтропии состояния.

Ниже в курсе лекций будут рассматриваться механические управляемые системы ограниченного класса, относящегося к обработке материалов резанием на металлорежущем станке. Этот класс является лишь примером, в котором проявляются общесистемные свойства, относящиеся к механическим системам практически любого назначения. Главной особенностью



стью металлорежущего станка, вытекающей из его функциональных назначений, является процесс обработки. Одновременно процесс обработки можно рассматривать как некоторую среду, с которой взаимодействуют подсистемы со стороны режущего инструмента и обрабатываемой заготовки. То есть рассматриваемые подсистемы по отношению к процессу обработки являются открытыми. Свойства взаимодействия подсистем с процессом обработки можно математически описать, если представить силы взаимодействия в координатах пространства состояния всех подсистем (координат, описывающих движения инструмента (инструментов) и заготовки). Аналогичный подход справедлив и для любых механических систем, в которых осуществляется управление движением некоторых элементов, взаимодействующих со средами. К этому классу относятся и системы, рассмотренные в первой главе.

Подчеркнем, что в механике, начиная с Ньютона, всякое взаимодействие моделируется через силы. Вместе с тем, процесс резания является типично диссипативным процессом. Все физические явления, сопутствующие процессу обработки, сопровождаются необратимыми преобразованиями энергии механической системы. Эти преобразования поддерживаются большими энергетическими потерями, а точнее большим уровнем энергии механической системы, которая преобразуется в зоне резания в другие виды. Здесь уместно подчеркнуть, что энергия не исчезает, она может переходить из одного вида в другой. Таким образом, для описания динамики диссипативных систем, строго говоря, необходимо дополнительно знать закону преобразования энергии механической системы в другие ее формы.

Вновь вернемся к редукционистской парадигме современной механики. Она базируется на законах обратимости. Все законы и выдающиеся достижения механики от Галилея - Ньютона до Лагранжа – Гамильтона основаны на парадигме обратимости. Более того, необратимость противоречит этим законам, так как требует раскрытия преобразования энергии механической системы в другие виды. Во-первых, возникает вопрос в какую энергию. Обычно рассматривается вопрос преобразования энергии механической системы во внутреннюю энергию, то есть в производство тепла. Однако этого при рассмотрении, например, процесса обработки резанием недостаточно. Во-вторых, не ясен механизм преобразования. По-видимому, поэтому при необходимости учета диссипативных потерь в уравнения систем силовым образом вводятся диссипативные функции, которые оцениваются на основе экспериментальных результатов. Это, прежде всего, диссипативная функция Релея, позволяющая наиболее просто в линейном приближении описывать, например процессы затухания колебаний в линейном колебательном контуре. Существуют и другие формы введения свойств диссипации в динамическую систему [22]. В связи с этим приведем слова И.Пригожина из его знаменитой книги[6]. «От каких



предпосылок классической науки удалось избавиться современной науке? Как правило, от тех, которые были сосредоточены вокруг основополагающего тезиса, согласно которому на определенном уровне мир устроен просто и подчиняется обратимым во времени фундаментальным законам. Подобная точка зрения представляется нам сегодня чрезвычайным упрощением...Мы обнаружили, что в природе существенную роль играет далеко не иллюзорная, а вполне реальная необратимость, лежащая в основе большинства процессов самоорганизации» [6]. Подчеркнем, что необратимость никак не вытекает из законов механики Ньютона-Лагранжа-Гамильтона. Для описания поглощения энергии она вводится искусственно. Поэтому на основе парадигмы классической механики никак не объяснимы такие явления как эволюция связей в сопряжении система – среда. На основе законов классической механики не объяснимо формирование различных многообразий в окрестностях стационарных траекторий эволюционирующей системы и пр.

Приведенный чрезвычайно короткий обзор системного подхода в науке определяет новые проблемы, стоящие перед анализом и синтезом сложных технических систем. Заметим, что практически любая современная машина является сложной системой, в которой через различные среды (аэродинамическую, гидродинамическую, трибологическую, технологическую и пр.) взаимодействуют подсистемы. Г.Хакен назвал синергетику как науку о взаимодействиях [8]. Поэтому чрезвычайно важной проблемой, стоящей перед наукой о сложных системах является раскрытие законов взаимодействия между подсистемами и на основе этого изучение новых, не специфичных для подсистем свойств. Эти законы не могут описываться в парадигме классической механики Ньютона-Лагранжа-Гамильтона. Имеется много причин, позволяющих высказать это утверждение. Например, зависимость законов взаимодействия от потоков энергии, проходящих через сопряжение система - среда. Во всех случаях через узлы сопряжения система – среда протекают большие потоки энергии, изменяющие свойства сопряжений, и, следовательно, законов взаимодействия. Поэтому текущие взаимодействия подсистем изменяются в ходе функционирования, формируя сложную динамическую перестройку системы в целом. Именно за счет эволюционно изменяющихся законов взаимодействия подсистем изменяются свойства системы в целом. Типичным примером эволюционного изменения связей в системе является связь, формируемая процессом трения. В частности, явления самоорганизации, заключающиеся в формировании избирательного переноса в узле трения, приводящие к эффекту безызносности [10 - 12]. Это типичный пример реализации направленной самоорганизации в узле трения. На процесс самоорганизации оказывают влияние свойства взаимодействующих подсистем. Он не существует без взаимодействующих подсистем, и изменение параметров взаимодействующих





подсистем вызывает изменение направлений самоорганизации и эволюции.

В рассматриваемой предметной области главное внимание будет уделено управлению движением взаимодействующих подсистем через процесс обработки на металлорежущих станках. Однако общий подход к анализу и синтезу остается справедливым для любых сред (трибологических, гидродинамических, аэродинамических и пр.). В связи с этим остановимся коротко на понятии система обработки резанием на металлорежущем станке.

## **2.2. Системный подход к управлению процессом резания с учетом эволюционных преобразований**

Характерным для современного станка является: управление от ЭВМ или программируемого контроллера; существование разветвленной системы интерфейсов, в том числе предназначенных для осуществления различных обратных связей (по положению исполнительного элемента, по скорости); достаточно высокая жесткость несущей системы. Современные станки с ЧПУ оснащаются системами диагностики и адаптивного управления с использованием различных информационных каналов, обеспечивающими точность, гибкость, производительность, работоспособность в условиях минимального вмешательства оператора [10]. Важно подчеркнуть, что в современном станке, как правило, устанавливается индустриальная микро ЭВМ, позволяющая в реальном времени применять достаточно сложные алгоритмы обработки наблюдаемых временных последовательностей. Даже локальные системы управления конкретными технологическими операциями зачастую приводят к необходимости применения достаточно сложных алгоритмов управления от ЭВМ или от микроконтроллеров. В современных станках на приведенную стоимость практически не влияет стоимость ЭВМ или, тем более, контроллера. Основная стоимость складывается из стоимости механической части и оборудования, а также затраченного интеллектуального труда для разработки математических моделей, программ и принципов.

Рассматривая общую тенденцию совершенствования станков, отметим усложнение систем управления, снабжение её системой прогнозирования и диагностики и совершенствование компоновки станков. Для направления конструктивного совершенствования станков в последние годы стали использоваться приводы с линейными двигателями, которые улучшают динамические характеристики и снижают стоимость за счет отсутствия механических передач. Если проследить тенденцию совершенствования систем числового программного управления станками, то можно выделить несколько поколений. В системах ЧПУ первого поколения программа записывалась, например, на магнитную ленту. При записи



программы не применялось никакое кодирование. Задание на перемещение отображалось, например, фазой аналогового сигнала. Второе поколение систем ЧПУ (системы NC- numerical control) позволяли решать задачи интерполяции, ввода управляющей программы, управления контурной скоростью и пр. В этих системах функционирование задано структурно и оно не поддается оперативным изменениям. Эти системы позволяют с помощью клавиатуры расширить функции управления, например, вводить некоторые заранее оговоренные коррекции. Развитие микропроцессорной техники приводит к постепенному сближению машины и микро ЭВМ. Это в равной мере относится и к металлорежущим станкам. Поэтому третье поколение построено по принципу CNC (Computerized numerical control). Системы CNC обеспечивают унификацию средств управления, то есть являются многоцелевыми. Такие системы строятся на основе промышленных ЭВМ, обладают памятью достаточного объема, и являются гибкими. Функциональные возможности таких систем постепенно расширяются. Формируются системы самоконтроля функционирования управляющих систем. Однако основное их назначение - обеспечение функционирования станка как системы, обеспечивающей заданные траектории исполнительных элементов. Четвертым поколением можно считать системы DNC (Direct numerical control). Они построены по иерархическому принципу. На верхнем уровне такой системы стоит ЭВМ, на нижнем - управляющие промышленные ЭВМ числового программного управления (УЧПУ). Обычно функции ЭВМ верхнего уровня (рис.11) определяются следующим: формирование управляющих программ и передача их в системы ЧПУ нижнего уровня; диспетчеризация и оптимизация общесистемного технологического процесса; контроль и диагностика и др. На нижнем иерархическом уровне находится многоцелевая система ЧПУ, построенная на основе промышленной ЭВМ. Однако имеются примеры, когда на нижнем уровне находятся системы класса NC. Такие системы предназначены, прежде всего, для работы в составе гибкого автоматизированного производства (ГАП) наиболее эффективного в мелкосерийном производстве, которым является типичное предприятие авиационной промышленности.

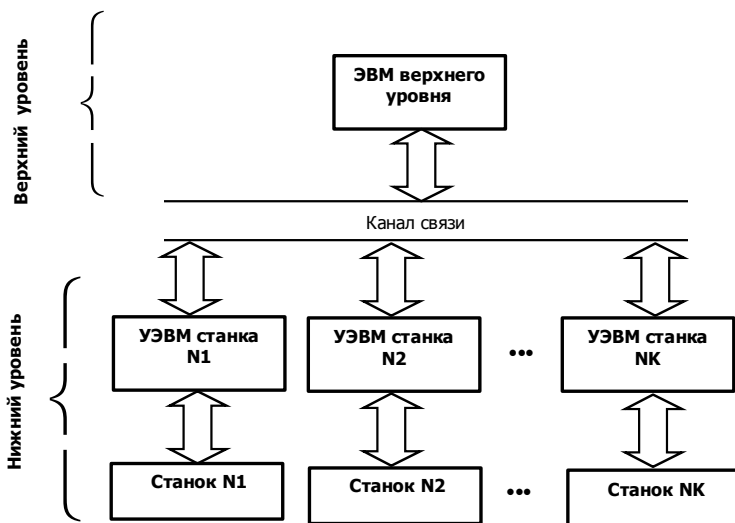


Рис. 11. Структура управления интегрированным производством.

Информационный обмен между подсистемами верхнего и нижнего уровней позволяет рационально распределить вычислительные ресурсы системы управления интегрированным производством и одновременно, за счёт диагностики качества передаваемой информации, повысить надёжность и гибкость (способность к переналаживанию) функционирования. Типовой состав такого производства приведён на рис. 12. Однако уровень интеграции может быть различен. Интергрированное производство обычно используется в тех случаях, когда необходимо уменьшить затраты и увеличить надёжность системы при частой смене управляющих программ. Здесь не будем обсуждать состояние и направление развития систем управления станками. С ними можно познакомиться в цитированной выше литературе, а также в работах [23 - 29].

Важнейшим этапом обеспечения функционирования интегрированного автоматизированного производства является создание принципов управления процессом обработки на станках с ЧПУ, в том числе, программы ЧПУ для обеспечения заданных движений. Отметим главные особенности создания программы ЧПУ, влияющие на идеологию построения самих станочных систем [26]. В основу программы положены два основных набора данных:

- геометрический образ детали, но не его динамические характеристики, например, изменение матриц жёсткости в контакте инструмента с деталью;



– технологические требования и ограничения, которые определяют диапазоны режимов резания, но не учитывают эволюционные преобразования системы резания, например, связанные с развитием износа режущего инструмента.

Таким образом, современный подход к управлению процессом резания, базирующийся на принципе подчинения траекторий движений исполнительных элементов программе ЧПУ или управления, не позволяет учесть особенностей динамики процесса резания, и станка в ходе его функционирования. Однако при анализе точности изготовления деталей на станках с ЧПУ приходится считаться с тем, что погрешность их изготовления существенно (на порядок, иногда и более) превышает погрешность траекторий исполнительных элементов станка. Это связано, прежде всего, с тем, что траектории исполнительных элементов станка отличаются от траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки. На основе выполненного анализа можно выделить следующие факторы, связанные с особенностью динамики процесса резания, и вызывающие принципиальное отклонение траекторий формообразующих движений от траекторий движений исполнительных элементов даже при обработке на идеальном станке.



Управление в технических системах

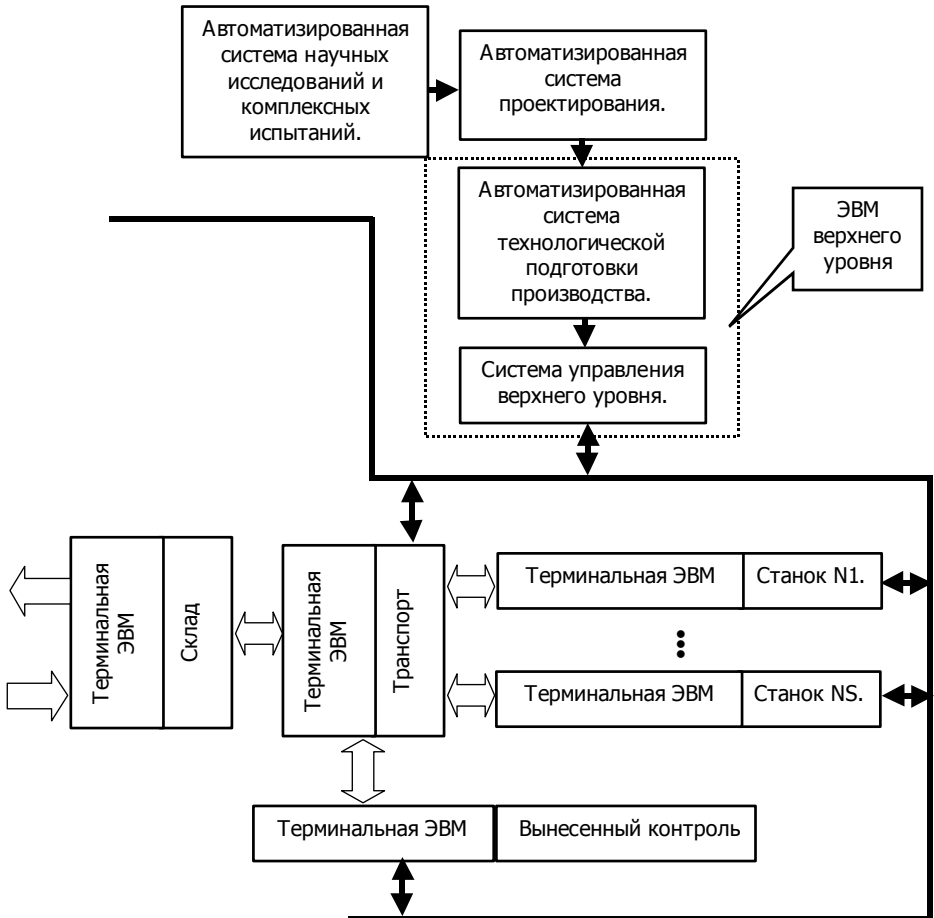


Рис.12. Типовая схема функционирования гибкого автоматизированного производства (пример интегрированной производственной системы).

- На отклонение траекторий от программы ЧПУ оказывают влияние упругие деформации инструмента и заготовки. Это влияние особенно актуально при изготовлении деталей, в которых матрицы жёсткости меняются вдоль траекторий движения исполнительных элементов.

- При обработке изделий сложной геометрической формы, особенно на участках характеризующихся значительными изменениями направления суммарного вектора скорости исполнительных перемещений, формируется погрешность, обусловленная изменениями условий обработки, в том числе



вариациями геометрии инструмента. На траектории исполнительных элементов в этом случае оказывает влияние не идентичность динамических свойств регулируемых приводов.

-На траектории оказывает динамическая связь, формируемая процессом резания. В результате не только смещаются траектории формообразующих движений, но в вариациях относительно этих траекторий в пространстве состояния могут формироваться стационарные многообразия, влияющие на выходные характеристики процесса резания.

- Процесс обработки на станках является эволюционным, проявляющимся, например, в развитии износа инструмента. Эволюция проявляется и в изменениях закономерностей преобразования траекторий исполнительных элементов в траектории формообразующих движений, что отображается в развивающихся изменениях показателей качества деталей.

Таким образом, одной из актуальных задач повышения точности, производительности и надежности MPC является разработка методов анализа и синтеза управления динамической системой резания с учетом его эволюционных преобразований и самоорганизации, основанных на объективных критериях функционирования в пространстве состояния в единой динамической системе. Подчеркнем следующие особенности системного подхода.

1. Все подсистемы управления траекториями движения исполнительных элементов рассматриваются в современной парадигме как автономные. Однако приведенный выше анализ показал, что все исполнительные элементы в станке предназначены для осуществления процесса резания. Поэтому они являются по существу системами связанного (векторного) управления. Эта связь осуществляется через динамическую связь, формируемую процессом резания.

2. Траектории исполнительных элементов отличаются от траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки. Причем, в силу конечности упругих свойств подсистем приводов и особенностей формирования сил при резании эти отличия могут быть существенными. Поэтому, во-первых, необходимо выяснить закономерности преобразования траекторий исполнительных элементов в траектории формообразующих движений. Во-вторых, при определении функции управления необходимо ориентироваться на все преобразования от управления (например, программы ЧПУ) через траектории движения исполнительных элементов к траекториям формообразующих движений.

3. Динамическая связь, формируемая процессом резания, является эволюционно изменяющейся. Поэтому при построении управления необходимо принимать во внимание изменения параметров динамической связи, которая влияет на указанные преобразования траекторий.

4. Металлорежущий станок как объект управления характеризует сложную нелинейную систему, внутрен-



характеризуются уравнениями взаимодействия между подсистемами станка и процессом резания. Поэтому при рассмотрении этой системы скалярное представление об управлении должно замениться на векторное.

5. На траектории формообразующих движений оказывают влияние не только управления и их структура, но и параметры и свойства всех взаимодействующих подсистем, включая динамическую связь, формируемую процессом резания. Другими словами, для обеспечения требуемых траекторий формообразующих движений необходимо станок рассматривать как единую динамическую систему и синтезировать ее не только в плане выбора управления (программы ЧПУ), но и в плане выбора конструктивных элементов, в том числе параметров и свойств режущего инструмента.

В настоящее время для системного подхода к анализу и синтезу наиболее перспективным является использование синергетической теории управления [2 -4]. Особенности применения синергетической теории управления раскром ниже. Если не принимать во внимание введение обратных связей и ограничиться общесистемным подходом к построению программы ЧПУ, то при ее создании необходимо учитывать внутренние связи, формируемые процессом резания, и влияющие на траектории формообразующих движений инструмента относительно заготовки. Кроме этого необходимо учитывать, что все системы управления исполнительными элементами станка объединяются в единую систему за счет того, что все траектории движения исполнительных элементов изменяют силы резания, которые влияют на траектории движения исполнительных элементов. Таким образом, парадигма скалярного управления каждым исполнительным элементом должна быть заменена на анализ векторного управления с учетом влияния сил резания, представляемых в координатах состояния системы.

Прежде чем переходить к синергетической концепции при управлении процессом обработки остановимся на свойствах диссипативных систем.

### 2.3. Основное свойство диссипативных систем

Пусть задана система

$$dX / dt = F(X), \quad (15)$$

для которой в можно выделить начальный фазовый объем фазовых траекторий  $V$ . Если в фазовом пространстве динамической системы рассмотреть скорость изменения фазового объема  $V$ , то, как известно, скорость изменения фазового объема определяется производной Ли

$$\frac{1}{V} dV / dt = \sum_{i=1}^{i=N} \partial \dot{X}_i / \partial X_i = \sum_{i=1}^{i=N} \partial F_i / \partial X_i, \quad (16)$$



где  $\dot{X}_i, X_i$  - соответственно скорость и координата пространства состояния динамической системы резания.

В том случае, если дивергенция  $div\dot{X} = divF(X)$

$$div\dot{X} = \sum_{i=1}^{i=N} \partial F_i(X) / \partial X_i = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0, \quad (17)$$

то мы имеем консервативную систему. Для обычных систем характерным является условие

$$div\dot{X} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \ll 0. \quad (18)$$

Система, удовлетворяющая условию (17) является консервативной. Это такая система, у которой фазовый объем остается неизменным. Типичным примером консервативной системы является колебательный контур, у которого коэффициент затухания равен нулю. Действительно, автономные движения консервативного колебательного контура определяются уравнением

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX = 0, \quad (19)$$

или в фазовой плоскости

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y; \\ \frac{dY}{dt} = -\Omega^2 X, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$  - собственная частота колебательного контура.

Уравнение фазовых траекторий в соответствии с (20)

$$\frac{dX}{dY} = -\frac{Y}{\Omega^2 X}, \quad (21)$$

решение которого есть фазовая траектория

$$\Omega^2 X^2 + Y^2 = \Omega^2 (X_0)^2 + (Y_0)^2, \quad (22)$$

где  $X_0, Y_0$  - начальные условия. Если рассмотреть множество начальных условий, то мы имеем некоторый начальный фазовый объем (рис. 13), который, как это очевидно не изменяется.



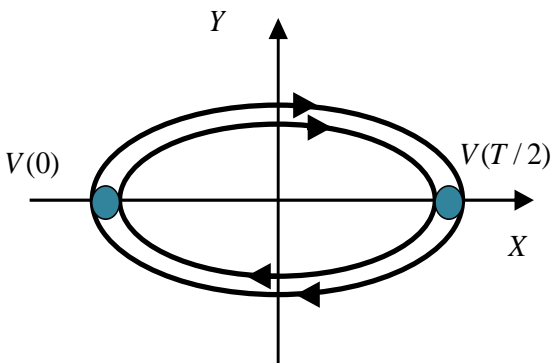


Рис. 13. Пример изменения фазового объема консервативной системы

Теперь введем в систему диссипативный член в форме Релея, то есть в форме вязкого трения

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = 0, \quad (23)$$

или

$$(T)^2 \frac{d^2 X}{dt^2} + 2\xi T \frac{dX}{dt} + X = 0, \quad (24)$$

где  $\xi, T$  - соответственно коэффициент затухания и инерционная постоянная времени колебательного контура (величина обратная собственной частоте).

Будем полагать, что коэффициент затухания есть величина большая ( $\xi T \gg T$ ). Тогда можно вычислить уравнение прямой, к которой асимптотически притягиваются все фазовые траектории. Очевидно, это будет прямая (рис. 14)

$$2\xi T Y + X = 0. \quad (25)$$

к которой притягиваются все фазовые траектории. В этом случае прямая «M-N» есть притягивающее многообразие, которое называется аттрактором. Однако в рассматриваемом примере терминальным (конечным) состоянием системы является точка «0», находящаяся в начале координат. Она является асимптотически устойчивой точкой равновесия. Поэтому можно считать, что все фазовые траектории вначале асимптотически приближаются к прямой «M-N» (первому притягивающему многообразию), а затем к точке «0» - терминальному притягивающему многообразию. По мере движения системы при этом уравнения, описывающие дина-



мику системы, понижают порядок дифференциального уравнения вначале со второго до первого и, наконец, до нулевого (координаты состояния находятся в точке равновесия).

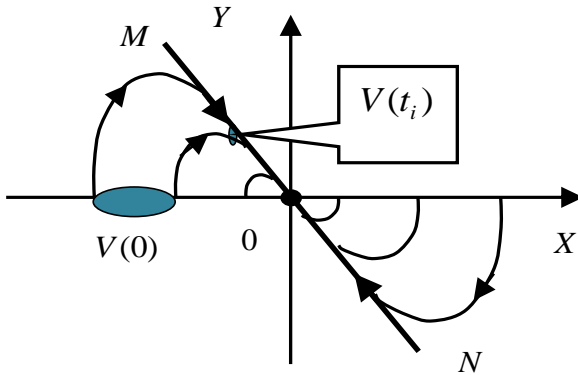


Рис. 14. Пример изменения фазового объема диссипативной системы

Очевидно, что при условии, когда  $\xi < 1$  в фазовой плоскости формируется траектория типа устойчивый фокус (рис. 15). В этом случае притягивающим многообразием является единственная асимптотически устойчивая точка равновесия, находящаяся в начале координат. Однако и в этом случае по мере движения системы имеет место уменьшение фазового объема системы, то есть выполняется условие (18).

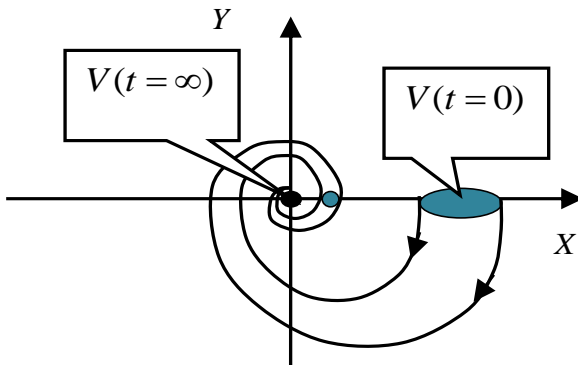


Рис. 15. Пример изменения фазового объема диссипативной системы для случая  $\xi < 1$ .



Так как с правой части системы в общем случае стоит нелинейная функция, представляющая модель сил, действующих со стороны среды, то возможны некоторые области, в которых

$$\operatorname{div} \dot{X} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} > 0. \quad (26)$$

В этом случае в рассматриваемой области имеет место увеличение фазового объема системы. Однако и в этом случае в реальной физической системе всегда существует терминальное многообразие, которое является притягивающим. Примером такого многообразия является орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл, то есть автоколебания (рис. 16).

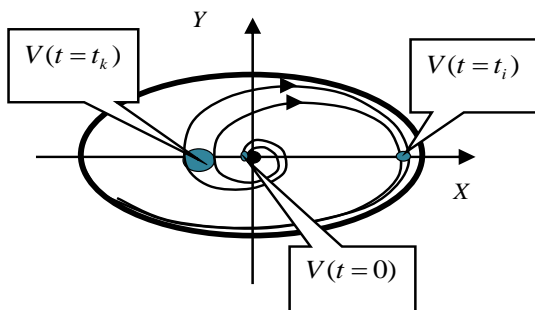


Рис. 16. Пример изменения фазового объема диссипативной системы для случая  $\xi < 1$ .

Здесь по мере движения системы вначале имеет место увеличение фазового объема, а затем в связи с нелинейными свойствами системы фазовый объем системы уменьшается в пределе до нуля. Такие притягивающие многообразия, формируемые в системах естественным образом, могут иметь самую разнообразную конфигурацию: предельные циклы, инвариантные торы, которым соответствуют естественно существующие орбитально асимптотически устойчивые многочастотные стационарные колебания, наконец, хаотические (странные) аттракторы [21].

В заключении этого параграфа отметим главное свойство реальных систем, которыми необходимо управлять. Они всегда в пространстве состояния имеют некоторые притягивающие многообразия, то есть аттракторы. В задачи синергетического управления входит формирование таких связей, формируемых в координатах состояния, которые удовлетворяют цели управления и одновременно образуют в пространстве состояния притягивающие многообразия, то есть аттракторы. Это фундаментальное свойство положено в основу синергетической теории управления. Раскроем



концепцию использования синергетической теории на примере управления процессами обработки на металлорежущих станках.

## 2.4. Концепция синергетического подхода на примере обработки резанием на металлорежущих станках

Управляемый процесс обработки можно представить схемой (рис.17). При использовании синергетической теории управления необходимо использовать два принципа [2 – 4, 10].

**Первый принцип**, основанный на расширении размерности пространства состояния, заключается в том, что в динамические системы, связывающие управление и координаты исполнительных элементов, включаются дополнительные упругие элементы и связи, преобразующие траектории движения исполнительных элементов в траектории формообразующих движений вершины инструмента относительно заготовки. На токарном станке мы имеем три исполнительных элемента: движения поперечного и продольного суппортов, а также вращение шпинделя (рис.17, рис. 18). Главная связь, объединяющая подсистемы, и влияющая на преобразование траекторий исполнительных элементов в траектории формообразующих движений является связь, формируемая процессом резания. Строго говоря, существуют и дополнительные связи, объединяющие движения исполнительных элементов в единую систему. Например, связи, формируемые в узлах трения исполнительных элементов по направляющим станка. Однако с методических позиций влияние этих связей в данном разделе рассматривать не будем.



Управление в технических системах

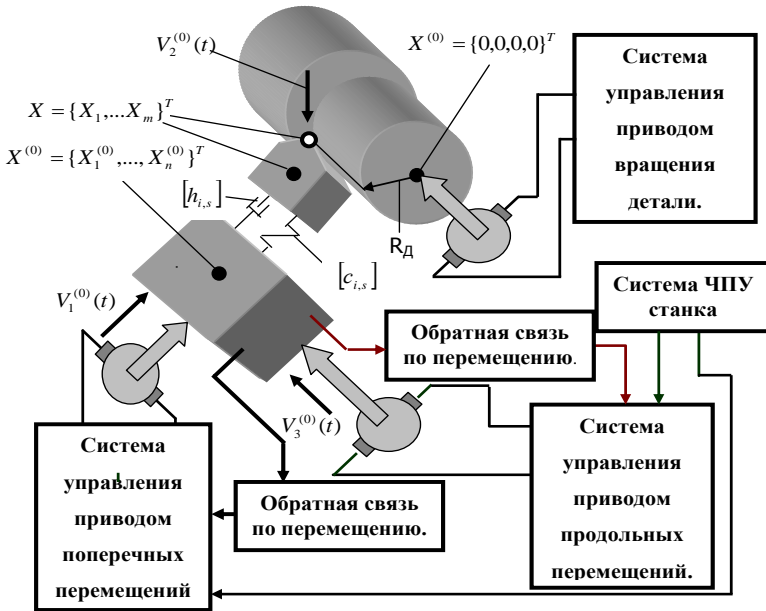


Рис.17. Схема управления формообразующими движениями инструмента относительно заготовки при токарной обработке

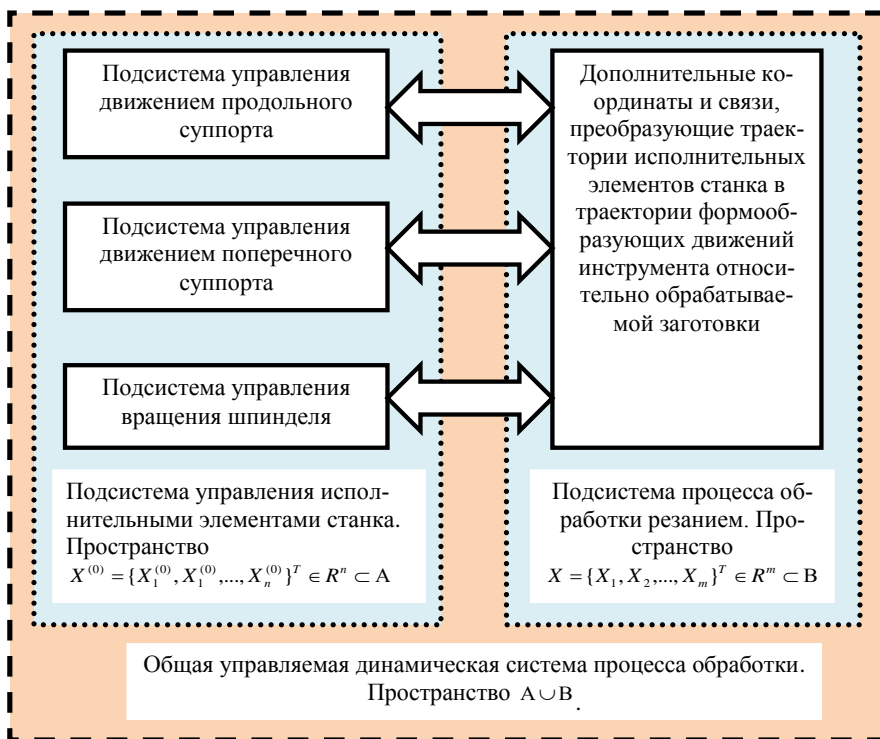


Рис. 17. Обобщённая схема преобразования динамических подсистем станка в процессе расширения пространства состояния на примере обработки на токарном станке

**Второй принцип**, всегда справедливый, как отмечено в предыдущем параграфе, для диссипативных систем, заключается в том, что траектории фазового пространства всегда выходят на движения по некоторым притягивающим многообразиям – аттракторам. Если система спроектирована таким образом, что аттракторы формообразующих движений инструмента относительно заготовки являются желаемыми исходя из требований точности изготовления и состояния процесса резания, то дополнительные связи выступают в роли внутренних регуляторов, действие которых определяются целью функционирования системы. Именно согласование внешнего управления с внутренними, существующими естественным образом регуляторами, характеризуют когерентность управляющих воздействий, то есть характеризуют синергетику управляемой системы. Кроме этого такой анализ преобразует скалярный подход к управлению



исполнительными элементами станка к анализу системы связанного (векторного) управления. При математическом моделировании, характеризующем этап расширения пространства состояния, стоит задача моделирования динамических свойств подсистем со стороны режущего инструмента и обрабатываемой заготовки. Здесь, прежде всего, необходимо ввести дополнительные координаты, учитывающие деформационные смещения режущего инструмента относительно заготовки и динамическую связь, формируемую процессом резания.

Будем считать, что управление движением суппорта продольных и поперечных перемещений, а также вращения шпинделя осуществляется от управляемых двигателей постоянного тока с якорным управлением. Координаты, характеризующие состояние этих приводов, определим как  $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}\}^T \in R^n \subset A$ . Введём в рассмотрение дополнительные координаты  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}^T \in R^m \subset B$ , характеризующие преобразование координат исполнительных элементов станка в координаты движения инструмента относительно заготовки. Эти дополнительные координаты вводятся в связи с процедурой расширения пространства состояния. Тогда уравнение динамики управляемых движений исполнительных элементов можно записать в стандартном виде

$$\frac{dX^{(0)}}{dt} = AX^{(0)} + BU + \Phi(X^{(0)}, X), \quad (27)$$

где  $A = [A_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, \dots, n$  -  $n \otimes n$  квадратная матрица постоянных коэффициентов;  $B$  - матрица-столбец;  $U$  - вектор управления, который может быть задан в функции времени, а также в координатах  $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}\}^T \in R^n \subset A$ ;  $\Phi(X^{(0)}, X)$  - нелинейные функции раскрывающие влияние координат пространства  $B$  на координаты пространства  $A$ . Таким образом, система (27) есть линейная система с постоянными коэффициентами при условии, что  $\Phi(X^{(0)}, X) = 0$ . Кроме этого матрицы  $A$  и  $B$  являются блочными. Таким образом, при  $\Phi(X^{(0)}, X) = 0$  система (27) распадается на некоторое количество автономных подсистем, зависящее от количества управляемых исполнительных элементов. Именно в таком представлении в настоящее время рассматривается динамика приводов исполнительных перемещений металлорежущих станков.

Дополним систему (27) подсистемой пространства  $B$ , динамика координат которой определяется системой вида



$$\varepsilon \frac{dX}{dt} = CX + F(X^{(0)}, X), \quad (28)$$

где  $\varepsilon$  - вектор малых параметров;  $F(X^{(0)}, X)$  - нелинейные функции, раскрывающие формирование сил, действующих на упругие деформационные смещения, в координатах  $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}\}^T \in R^n \subset A$  и  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}^T \in R^m \subset B$ .

Таким образом, совместное рассмотрение (28) и (29) при условии  $\Phi(X^{(0)}, X) \neq 0$  изменяет свойства управляемой системы: - совместные системы становятся системами связанного (векторного) управления; - при совместном анализе систем можно воспользоваться асимптотическими свойствами решения систем дифференциальных уравнений, имеющих малый параметр при производной. Возможность введения малого параметра обусловлена тем, что полоса пропускания при рассмотрении деформационных смещений лежит в частотном диапазоне, ограниченном единицами килогерц, а полоса пропускания приводов перемещений исполнительных элементов станка ограничена сверху частотой не большей, чем 10 Гц.

Так как  $\varepsilon$  - вектор малых параметров, то асимптотические свойства системы определяются исходя из рассмотрения вместо (1.2) уравнения [30,31]

$$CX + F(X^{(0)}, X) = 0. \quad (29)$$

Пусть из (29) определена зависимость  $X = \Theta(X^{(0)})$ . Тогда для вычисления  $X^{(0)}(t)$  можно воспользоваться системой

$$\frac{dX^{(0)}}{dt} = AX^{(0)} + BU + \Phi_0(X^{(0)}), \quad (30)$$

где  $\Phi_0(X^{(0)}) = \Phi[X^{(0)}, \Theta(X^{(0)})]$ . Стационарное решение (30) обозначим  $X^{(*,0)}(t)$  и будем интерпретировать его как некоторое многообразие в пространстве «медленных» движений. Будем считать многообразие  $X^{(*,0)}(t)$  асимптотически устойчивым. Система (30) уже не распадается на несколько автономных подсистем. Кроме этого, если из (30) определена функция  $X^{(0)}(t)$ , то ей соответствует функция  $X^{(*)}(t)$ , характеризующая стационарное решение системы. Система (29), как известно, определяет систему «медленных» движений [30]. Система (30) – есть подсистема «быстрых» движений. Представление динамической системы управления формообразующими движениями в виде этих двух подсистем есть представление динамики в виде двух иерархических подсистем по критерию





медленности времени.

Траектория формообразующих движений  $X^{(\phi)}(t)$  складывается из двух траекторий: траектории движения исполнительных элементов станка  $X^{(0)}(t)$  и траектории упругих деформационных смещений вершины инструмента относительно заготовки, то есть  $X^{(\phi)}(t) = X^{(0)}(t) + X(t)$ . Пусть задано множество траекторий формообразующих движений, которому соответствуют требуемые показатели качества изготовления деталей и требуемые параметры состояния процесса резания  $\aleph$ . Под параметрами качества понимаются традиционно рассматриваемые характеристики. Параметры состояния процесса характеризуют интенсивность изнашивания режущего инструмента, значения сил, действующих на инструмент, в том числе циклических и пр. На все эти параметры наложены ограничения. Тогда при условии  $X^{(\phi)}(t) \in \aleph$  процесс резания будет удовлетворять своему функциональному назначению. Обозначим множество таких траекторий  $X_{\aleph}^{(\phi)}(t)$ . Тогда задача синергетического синтеза заключается в том, чтобы подобрать  $U(t)$  таким образом, чтобы  $X_{\aleph}^{(*,0)}(t)$  и, соответствующая ей  $X_{\aleph}^{(*)}(t)$ , обеспечивали условие  $X_{\aleph}^{(\phi)}(t) \in \aleph$ .

Пусть на основе выбора управления  $U(t)$  сформирована такая траектория  $X_{\aleph}^{(*,0)}(t)$ , которая характеризует стационарное притягивающее многообразие. Ей соответствует траектория  $X_{\aleph}^{(*)}(t)$ . Траектории  $X_{\aleph}^{(*,0)}(t)$ ,  $X_{\aleph}^{(*)}(t)$  и  $X_{\aleph}^{(\phi)}(t)$  определим как интегральные многообразия. Чтобы определить, является ли траектория  $X_{\aleph}^{*}(t)$  притягивающим многообразием, необходимо написать уравнение в вариациях относительно  $X_{\aleph}^{*}(t)$ . Будем полагать, что  $F_0(X^{(0)})$  имеет необходимое число производных  $\partial F_0(X^{(0)})/\partial X^{(0)}$ . Тогда после замены  $X^{(0)}(t) = X_{\aleph}^{(*,0)}(t) + x^{(0)}(t)$  получаем следующее линеаризованное уравнение в вариациях относительно стационарной траектории, характеризующей многообразие  $X_{\aleph}^{(*,0)}(t)$ ,

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = Ax^{(0)} + \Phi_{\Delta} x^{(0)}, \quad (30)$$

где  $\Phi_{\Delta} = [\partial\{\Phi_0^{(s)}(X_{\aleph}^{(*,0)} + x) - \Phi_0^{(s)}(X_{\aleph}^{(*,0)})\} / \partial x_k^{(0)}]$ ,  $s, k = 1, 2, \dots, n$  - матрица линеаризованных реакций со стороны динамической связи, формируемой процессом резания, имеющая в данном случае смысл



динамической жёсткости процесса резания в окрестности многообразия  $X_N^{(*,0)}(t)$ . Первое условие существования траектории  $X_N^{(*,0)}(t)$  является её асимптотическая устойчивость.

Второе условие обусловлено требованием асимптотической устойчивости уравнения в вариациях относительно определённой и заданной траектории  $X_N^{(*)}(t)$ . Для определения асимптотической устойчивости подсистемы «быстрых» движений необходимо рассмотреть следующее уравнение «быстрых» движений в вариациях относительно  $X_N^{(*)}(t)$  после замены  $X(t) = X_N^{(*)}(t) + x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \{C + F_{\Delta}\}x, \quad (31)$$

где  $F_{\Delta} = \left[ \partial \{F^{(s)}[X_N^{(*,0)}, (X_N^{(*)} + x)] - F^{(s)}(X_N^{(*,0)}, X_N^{(*)})\} / x_k \right]$  - матрица линеаризованных реакций в окрестности многообразий  $X_N^{(*,0)}(t)$  и  $X_N^{(*)}(t)$ . В общем случае матрица  $F_{\Delta}$  имеет элементы, являющиеся

функциями времени, так как функции  $\varphi^{(s)}(x) = F^{(s)}[X_N^{(*,0)}, (X_N^{(*)} + x)] - F^{(s)}(X_N^{(*,0)}, X_N^{(*)})$  являются нелинейными, а  $x$  - функция времени. Однако, как правило, траектория «медленных» движений обладает такими свойствами, что в пределах импульсной реакции системы изменениями параметров системы (31) можно пренебречь.

Тогда элементы матрицы  $F_{\Delta}$  можно считать постоянными, что существенно упрощает анализ устойчивости системы (31). При этом необходимо учитывать весь набор параметров матрицы  $F_{\Delta}$  в рассматриваемом

временном диапазоне траектории «медленных» движений, и система (31) должна быть асимптотически устойчивой для всего набора параметров. Важный класс линеаризованных уравнений в вариациях представляет уравнение с периодически изменяющимися коэффициентами. Особенности анализа устойчивости таких систем будут рассмотрены ниже.

Если подсистемы являются асимптотически устойчивыми, то многообразие  $X_N^{(\phi)}(t)$  является притягивающим как для «быстрых», так и для «медленных» движений, тогда проектируемая траектория является глобальным аттрактором. При этом, как показано в работах Л.С. Понтрягина и А.Н. Тихонова [30, 31], решение системы (30) практически не отличается от решения совместных систем (27) и (28). При этом динамическая связь,



формируемая процессом резания в управляемой системе, наряду с внешним управлением, играет роль внутреннего регулятора. Его действие направлено на обеспечение требуемой траектории формообразующих движений, определяющих многообразию  $X_{\Sigma}^{(\phi)}(t)$ . Заметим, что все приведённые выше положения справедливы в равной мере и для случая, когда управление формируется не в функции времени, а в координатах состояния.

Таким образом, приведённая схема является схемой системного синергетического синтеза. Решение задачи системного синтеза включает следующие этапы.

1. Определить уравнения, описывающие динамику управляемой системы в расширенном пространстве состояния.

2. Построить иерархию систем дифференциальных уравнений на основе разделения движений на «медленные» и «быстрые».

3. На основе анализа подсистемы «медленных» движений определить управление, которому соответствует многообразию  $X_{\Sigma}^{(\phi)}(t)$ , и обеспечить асимптотическую устойчивость траекторий в подсистемах «быстрого» и «медленного» времени.

4. Определить область притяжения многообразия  $X_{\Sigma}^{(\phi)}(t)$ . Для этого необходимо проанализировать уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Cx + \varphi(x) \quad (32)$$

при больших отклонениях от стационарной траектории «медленных» движений.

Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемая система является принципиально диссипативной и нелинейной. Поэтому в пространствах «медленных» и «быстрых» движений всегда существует ограниченное множество притягивающих многообразий, разделённых сепаратрисными кривыми или репеллерами [21].

Таким образом, при решении поставленной задачи системного синергетического синтеза имеют место следующие преобразования размерности анализируемых пространств (рис. 18). Подпространства  $R^{(ni)}$  исполнительных элементов станка, которые имеют достаточно малую размерность, за счёт процедуры расширения пространства состояния преобразуются в

пространство большой размерности  $R^{\{\sum_{i=1}^{i=k} ni+s\}}$ . Так как в расширенном пространстве состояния существует ограниченное множество притягивающих

многообразий ( $\{\sum_{i=1}^{i=k} ni+s\}l$ ), то размерность пространства, составлен-



ного из притягивающих многообразий, существенно ниже. В этом смысл сжатия пространства состояния. Подчеркнём, что все траектории расширенного пространства состояния с течением времени притягиваются к указанным многообразиям. Таким образом, для множества начальных условий в силу механизма уменьшения фазового объема, показанного в предыдущем параграфе, все траектории ложатся на проектируемое притягивающее многообразие и в дальнейшем от этого многообразия не отходят. Ограничение рассмотрения лишь притягивающих многообразий, во-первых, приводит к тому, что анализируются асимптотические свойства системы. Во-вторых, этот переход позволяет преодолеть по образному определению Н.Винера «проклятие размерности» сложных динамических систем при их анализе и синтезе [17].

Выполненный выше анализ, который носит скорее роль постановки проблемы, позволяет сформулировать понятие системности синергетического синтеза. Оно включает в себя три момента. Во-первых, необходимо синтезировать функцию управления (для станков с ЧПУ – программу ЧПУ). Во-вторых, необходимо выбрать параметры динамических подсистем, технологических режимов, параметров инструмента и пр., при которых формируемые в расширенном пространстве состояния многообразия являются притягивающим и область их притяжения должна быть достаточной с учетом возмущений, действующих на систему. При этом учитывается, что траектории «медленных» формообразующих движений влияют на уравнения в вариациях относительно этой траектории в подсистеме «быстрых» движений. В-третьих, формируемые в расширенном пространстве состояния притягивающие многообразия должны соответствовать требуемым многообразиям по условиям точности изготовления деталей.

При этом желательно обеспечить требование минимума приведённых затрат на изготовление партии деталей. В последнем случае впервые формулируется проблема синтеза систем по критерию биоптимальности, то есть одновременно по критерию качества и минимизации приведённых затрат.

Схема анализа, рассмотренная выше, не принимает во внимание важное свойство рассматриваемой динамической системы: свойство эволюционного изменения параметров динамической связи, формируемой процессом резания. Внешнее проявление эволюционных изменений хорошо известно. Это развитие износа инструмента, изменение шероховатости поверхности обрабатываемых деталей, изменения параметров точности и пр. Однако раскрытие внутренней структуры этих изменений требует рассмотрения эволюционных изменений параметров.

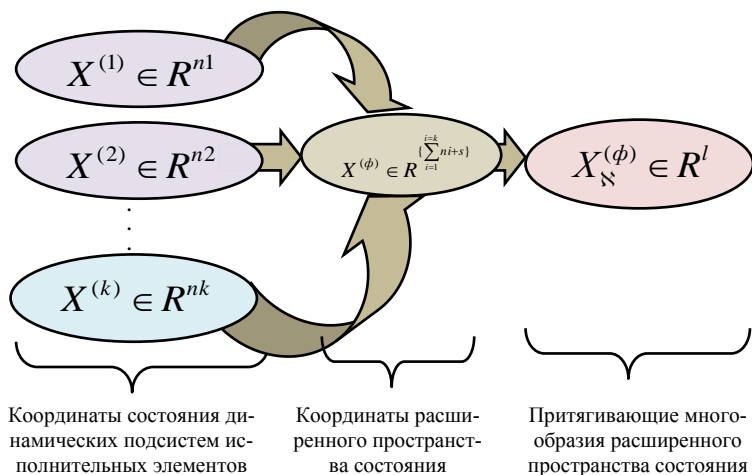


Рис. 18. Схема расширения-сжатия пространства состояния динамической системы

Пусть вектор – функция  $F(X, p)$ , определяющая свойства динамической связи, формируемой процессом резания, имеет эволюционно изменяющиеся параметры  $p = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ . Очевидно, что в общей постановке эта вектор-функция характеризует связь, формируемую в зоне сопряжения система – среда. Тогда уравнение системы описывается следующим классом дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU + F(X, p). \quad (33)$$

В дальнейшем принято еще одно фундаментальное положение о том, что эволюционные изменения параметров зависят от фазовой траектории изменения мощности необратимых преобразований  $N(A)$  совершенной работе  $A$ . Это согласуется, например, с общей энергетической концепцией развития износа инструмента, как одного из факторов эволюционных изменений. Тогда

$$p_i = p_{i,0} + \sum_{s=1}^{s=n} a_{i,s} \int_0^A w_s(\xi, A) N_s(\xi) d\xi, \quad (34)$$

где  $p_{i,0}$  - исходное значение параметра;  $a_{i,s}$  - коэффициенты;  $w_s(\xi, A)$  - ядра интегральных операторов, определяющие конкретный эволюционный процесс;  $n$  - количество рассматриваемых эволюционных



процессов, влияющих на параметр  $p_{i,0}$ . Ядра интегральных операторов и структура выражения (34), а также метод исследования будут рассмотрены ниже.

Наконец, для того, чтобы закончить рассмотрение общего синергетического подхода к управлению процессами обработки на металлорежущих станках, отметим, что управляемая динамическая система процесса резания является единой системой. В такой системе все координаты состояния являются взаимосвязанными. Поэтому имеется возможность построения наблюдателей за координатами, характеризующими состояние процесса резания и качества изготовления деталей на основе анализа отображений этих координат в доступных измерению координатах управляемой системы. Так как параметры динамической связи являются эволюционно изменчивыми, то, принимая во внимание (34), имеется возможность не только оценивать текущие координаты состояния процесса резания и текущего качества изделий, но и определять значения этих координат в будущем. Решение проблемы наблюдения и предсказания в единстве интерпретируется как решение проблемы динамического мониторинга. Если решена проблема динамического мониторинга, то имеется возможность коррекции программы, построенной на основе применения синергетической концепции, на основе оценивания текущей информации о процессе и возможных ее изменениях в будущем.

Все приведенные этапы системного синергетического подхода будут конкретизированы и уточнены ниже. Однако прежде остановимся на главных особенностях анализа нелинейных систем.



## ГЛАВА 3. ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ.

Нелинейной теории управления и нелинейной динамике посвящена обширная литература. Поэтому в этом параграфе остановимся лишь на главных аспектах этой теории, необходимых нам для дальнейшего. При анализе и синтезе систем, динамика которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, сложилось два направления. Первое связано с качественным исследованием нелинейных систем в фазовом пространстве. Второе основано на использовании различных асимптотических методов и методов линеаризации. Вначале остановимся на первом направлении.

### 3.1. Методы анализа, основанные на изучении фазовых траекторий в фазовом пространстве.

Истоки метода фазового пространства также лежат в работах Анри Пуанкаре. Понятие фазового пространства и фазовых траекторий в этом пространстве рассмотрены в традиционном курсе по теории автоматического управления. Здесь напомним, что при условии построения фазовых траекторий в этом пространстве при различных начальных условиях вся информация о свойствах системы становится известной. Это относится как к проблеме устойчивости, так и к проблеме качества.

Вначале рассмотрим качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории. Анализ систем в фазовой плоскости ограничивает анализ систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка. Пусть задана автономная система в общем случае описываемая дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = P(X, Y); \\ \frac{dY}{dt} = Q(X, Y). \end{cases} \quad (35)$$

Уравнения (35) достаточно полно изучены и построена качественная теория дифференциальных уравнений, описывающая динамику такой системы. Если задана система в виде (35), то всегда можно в фазовой плоскости  $(X, Y)$  построить фазовую траекторию, зависящую от начальных условий. Основная задача исследования системы заключается в том, чтобы выяснить качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории или, другими словами, установить топологическую структуру этого разбиения. Под топологической структурой принято понимать все те свойства, которые остаются инвариантными при топологическом преобразо-



вании плоскости в себя. Для выяснения качественной картины для системы второго порядка нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых из них, называемых особыми траекториями. В фазовой плоскости можно выделить следующие особые траектории: точки равновесия; предельные циклы, сепаратрисные кривые. На рис. 19 приведен пример фазового портрета системы. Определим понятие фазового портрета как совокупности фазовых траекторий при изменении начальных условий системы. На фазовом портрете имеются четыре особых точки.

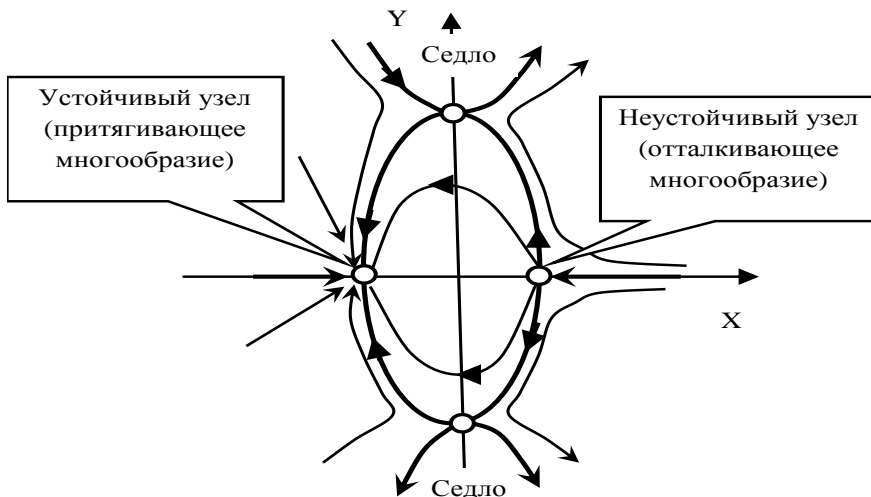


Рис. 19. Пример фазового портрета системы

Однако одна из них (устойчивый узел) является асимптотически устойчивой и характеризует притягивающее многообразие. Верхняя и нижняя седлообразные сепаратриссы делят фазовое пространство на отдельные области и внутри каждой области свойства фазовых траекторий остаются неизменными. Для суждения о свойствах системы достаточно знать особые точки и их свойства.

Приведем еще типичный пример фазового портрета системы (рис. 20). Он имеет два стационарных многообразия. Они характеризуют два предельных цикла. Однако один (A-B-C-D) характеризует притягивающее многообразие, которое определяет автоколебания. Второй (a-b-c-d) – отталкивающее многообразие, которое также является сепаратриссой. В данном случае сепаратрисса делит фазовое пространство на сферы влияния орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла и асимптотически устойчивой точки равновесия при  $(X = 0, Y = 0)$ .



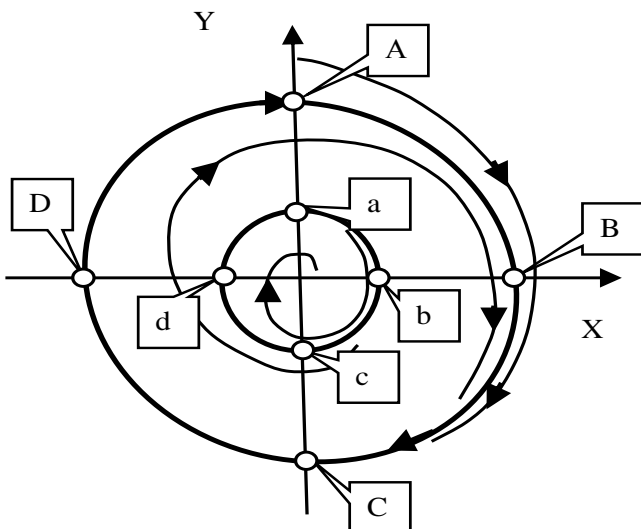


Рис. 20. Пример двух предельных циклов

В фазовой плоскости возможно существование следующих многообразий: точки равновесия, которая может быть устойчивой и неустойчивой; предельного цикла, который также может быть устойчивым и неустойчивым; сепаратриссы, которая делит пространство на сферы влияния различных притягивающих многообразий. В диссипативной системе всегда существует притягивающее многообразие, к которому стремятся все фазовые траектории из области их притяжения.

В том случае, если размерность системы дифференциальных уравнений увеличивается, то в системе могут дополнительно формироваться многообразия типа инвариантного тора (наложенных друг на друга периодических движений, которые являются орбитально асимптотически устойчивыми). Кроме этого в такой системе могут формироваться странные (хаотические) аттракторы, обладающие уникальными свойствами. По своей структуре они имеют свойства хаотических движений и вместе с тем они являются детерминированными. Две кривые с близкими начальными условиями с течением времени удаляются друг от друга и одновременно они располагаются в ограниченной области и не пересекаются.

Приведем пример формирования странных аттракторов в системе, характеризующей колебания режущего инструмента относительно заготовки  $(x_1, x_2)$ , взаимодействующего с процессом резания. Динамическая связь, формируемая процессом резания, вызывает изменение сил в функции суммы деформаций  $(x_1 + x_2)$ . Кроме этого учитывается уравнение



формирование сил (последнее уравнение в системе (36)). Уравнение динамики системы вместе со средой описывается следующим образом

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (h_1 + h_1^p) \frac{dx_1}{dt} + h_2^p \frac{dx_2}{dt} + (c_1 + c_1^p)x_1 + c_2^p x_2 = -y(x_1 + x_2); \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + h_1^p \frac{dx_1}{dt} + (h_2 + h_2^p) \frac{dx_2}{dt} + c_1^p x_1 + (c_2 + c_2^p)x_2 = -y(x_1 + x_2); \\ T_p \frac{dy}{dt} + y = (x_1 + x_2)[k_1(x_1 + x_2) + k_2(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt})], \end{cases} \quad (36)$$

где  $m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ ,  $h = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}$ ,  $c = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$  - соответственно

матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов в подсистемах инструмента и заготовки;

$h_1^p$ ,  $h_2^p$ ,  $c_1^p$ , и  $c_2^p$  - соответственно коэффициенты линеаризованных реакций со стороны процесса резания на скорости и смещения инструмента относительно заготовки;

$T_p$  - коэффициент, определяющий запаздывание сил по отношению к упругим деформационным смещениям;

$k_1, k_2$  - соответственно коэффициент упругости и вязкого трения процесса резания.

Точки равновесия системы (36) определяются из уравнений

$$\begin{cases} (c_1 + c_1^p)x_1 + c_2^p x_2 = -y(x_1 + x_2) \\ c_1^p x_1 + (c_2 + c_2^p)x_2 = -y(x_1 + x_2) \\ y = k_1(x_1 + x_2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c_2 x_2}{c_1} \\ [c_1^p c_2 + c_1 c_2^p + c_1 c_2 + y(c_1 + c_2)]x_2 = 0 \\ y = k_1(x_1 + x_2)^2 \end{cases} \quad (37)$$



Параметры системы

$m, \text{кгс}^2 / \text{мм}$	$h, \text{кгс} / \text{мм}$	$c, \text{кг} / \text{мм}$
$\begin{bmatrix} 1,67 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 2,0 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 6500 \end{bmatrix}$

Параметры динамической характеристики процесса резания

$$h^p, [\text{кгс} / \text{мм}] = \begin{bmatrix} 0,0167 & 0,08 \\ 0,0167 & 0,08 \end{bmatrix}; \quad T_p = 0,01, [c];$$

$$k_1 = 10, [\text{кг} / \text{мм}^3]; \quad k_2 = 1/30, [\text{кгс} / \text{мм}^3].$$

Рассмотрим случай  $c_2^p = 2c_1^p$ , будем варьировать  $c_1^p$  в диапазоне  $[-1500; 0]$ . На рис. 21 дана бифуркационная диаграмма смещения точки равновесия системы при варьировании параметра  $c_1^p$ . Сформулируем понятие бифуркации. Точка бифуркации в параметрическом пространстве есть его значение, при котором изменяется топология фазового пространства.

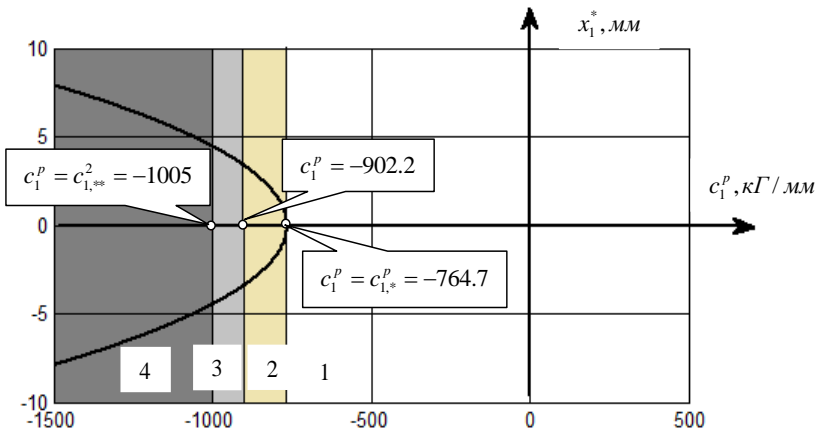


Рис.21. Бифуркационная диаграмма системы (36) при варьировании динамической жесткости  $c_1^p$  процесса резания (1,2,3, 4 – области, соответствующие различной топологии фазового пространства)



Из системы (37) видно, что при  $c_1^p > \frac{c_1 c_2}{2c_1 + c_2} = -764.7 = c_{1,*}^p$  систе-

ма (36) имеет асимптотически устойчивую в целом стационарную точку – начало координат. Пример пространственной траектории изменения координат состояния системы, соответствующий этому случаю, приведен на рис. 22.

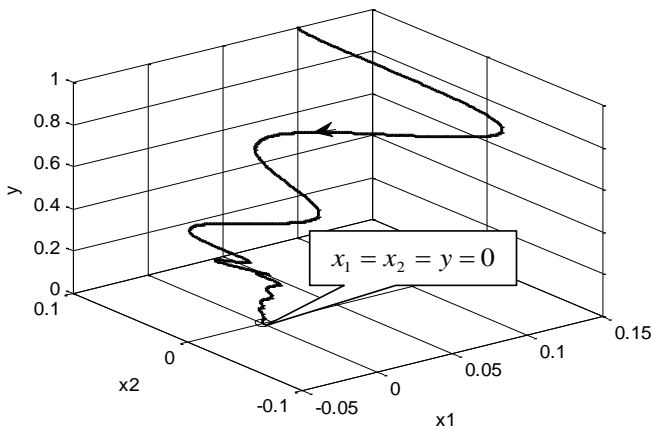


Рис.22. Пример траектории движения динамической системы резания при  $c_1^p = -600, \text{кГ} / \text{мм}$ .

Если варьировать коэффициент  $c_1^p$ , то изменяются не только точки равновесия системы, но и ее свойства в вариациях относительно точки равновесия. Для этого достаточно проанализировать диаграмму смещения корней характеристического полинома системы, линейризованной в окрестности точки равновесия (рис. 23).

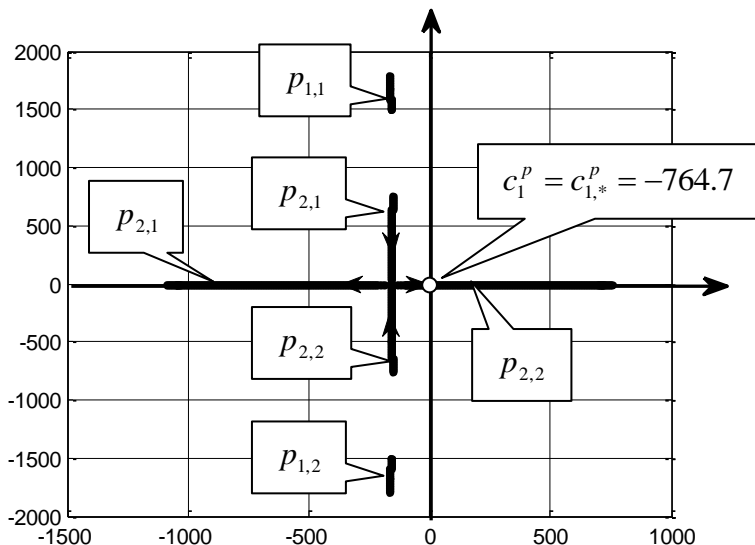


Рис.23. Диаграмма смещения корней характеристического полинома линеаризованной в нулевой стационарной точке системы по мере увеличения параметра  $c_1^P$  в отрицательном направлении от нуля до  $-1500$ .

Когда  $c_1^P$  переходит через  $c_{1,*}^P$ , то в системе происходит первая бифуркация типа вилки. Нулевая стационарная точка теряет устойчивость и от неё отделяются две новые устойчивые стационарные точки.

$$A^+ = \begin{cases} x_1^* = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^P + c_1 c_2^P + c_1 c_2}{k_1(c_1 + c_2)}} \\ x_2^* = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^P + c_1 c_2^P + c_1 c_2}{k_1(c_1 + c_2)}} \\ y^* = -\frac{c_2 c_1^P + c_1 c_2^P + c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \end{cases} \quad \text{и}$$



$$A^- = \begin{cases} x_1^* = -\frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^p + c_1 c_2^p + c_1 c_2}{k_1 (c_1 + c_2)}} \\ x_2^* = -\frac{c_2}{c_1 + c_2} \sqrt{-\frac{c_2 c_1^p + c_1 c_2^p + c_1 c_2}{k_1 (c_1 + c_2)}} \\ y^* = -\frac{c_2 c_1^p + c_1 c_2^p + c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} \end{cases}$$

При этом смещаются корни характеристического полинома линеаризованной системы в вариациях относительно точки равновесия (рис. 24). Соответствующие траектории координат состояния системы в плоскости  $x_1, y$  для различных коэффициентов  $c_1^p$  приведены на рис. 25, рис. 26, рис. 27.

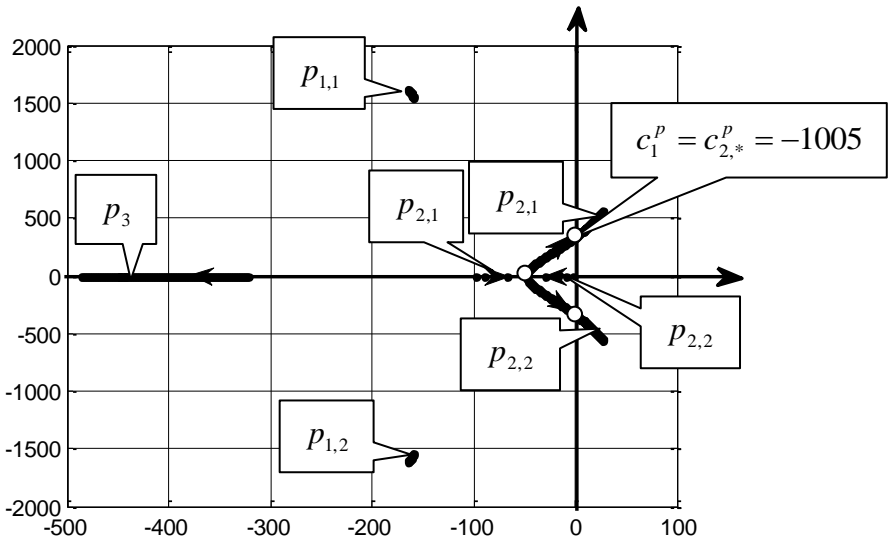


Рис.24. Диаграмма смещения корней характеристического полинома линеаризованной в стационарной точке  $A^+$  системы по мере увеличения параметра  $c_1^p$  в отрицательном направлении от  $c_{1,*}^p$  до 1500.

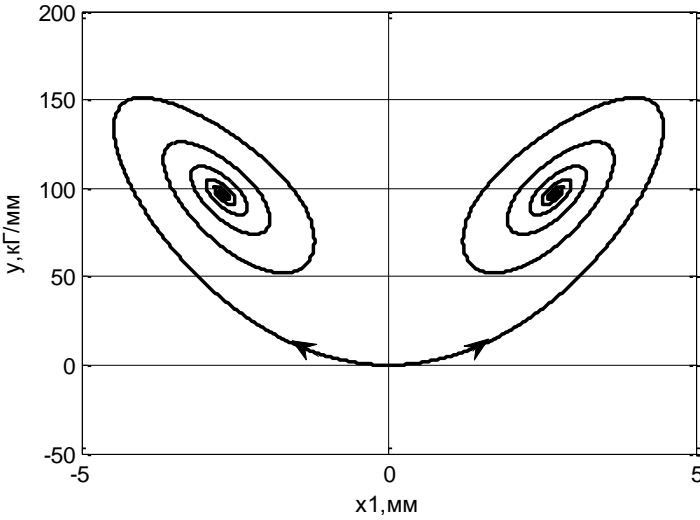


Рис. 26. Диаграмма смещения координат состояния в плоскости  $x_1, y$  при  $c_1^p = -850, \text{кГ/мм}$

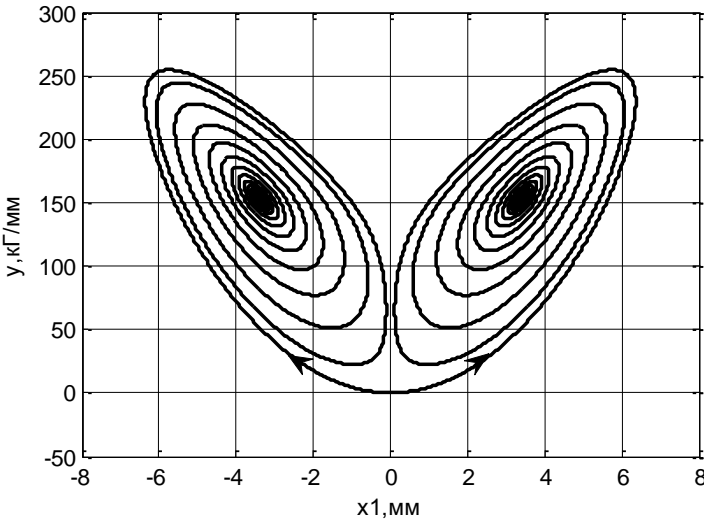
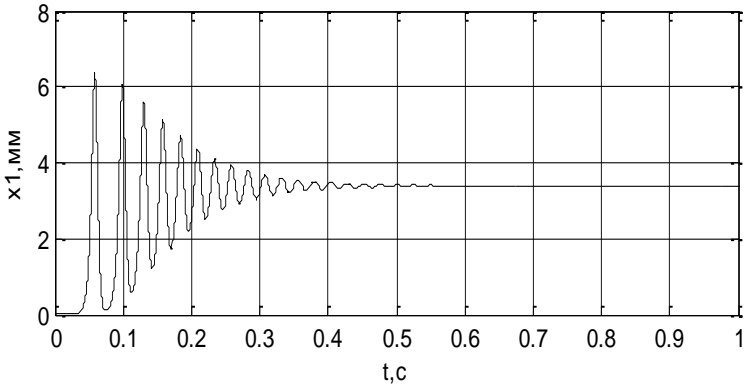
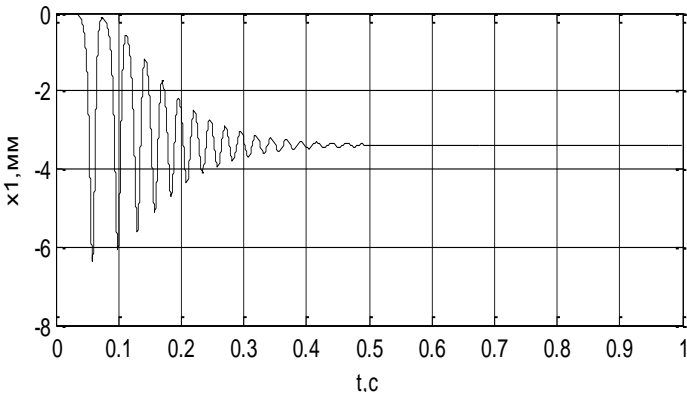


Рис. 27  $c_1^p = -900, \text{кГ/мм}$

Временные траектории приведены на рис. 28 – 30.



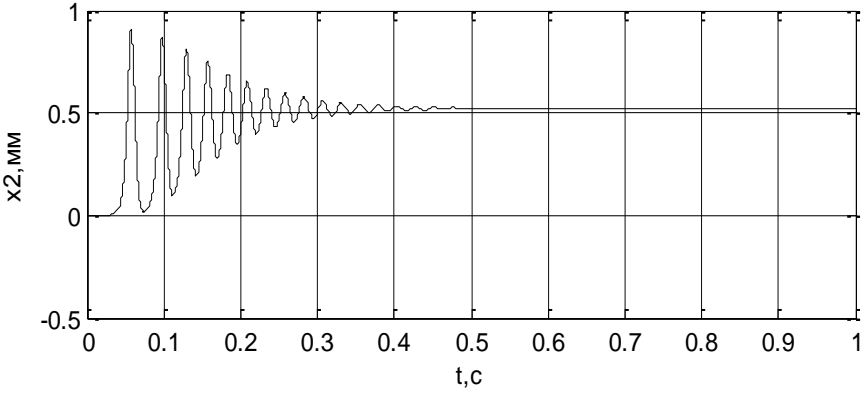
а)



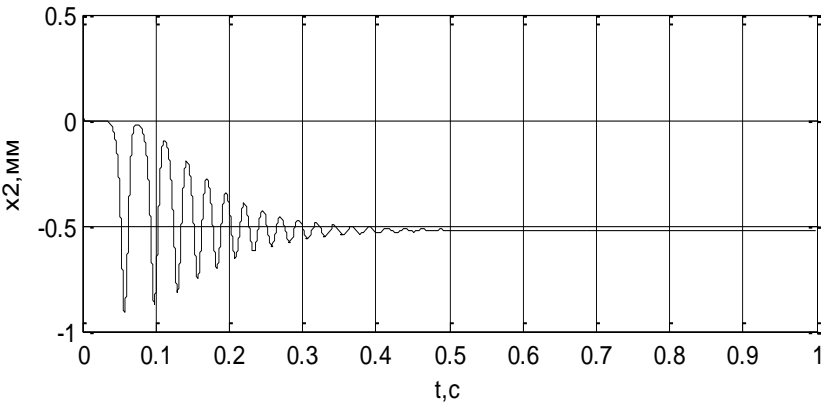
б)

Рис.28. Временные характеристики координат состояния  $x_1$  при  $c_1^p = -900, \text{кГ} / \text{мм}$ .





а)



б)

Рис.29. Временные характеристики координат состояния  $x_2$  при  $c_1^P = -900, \text{кГ} / \text{мм}$ .

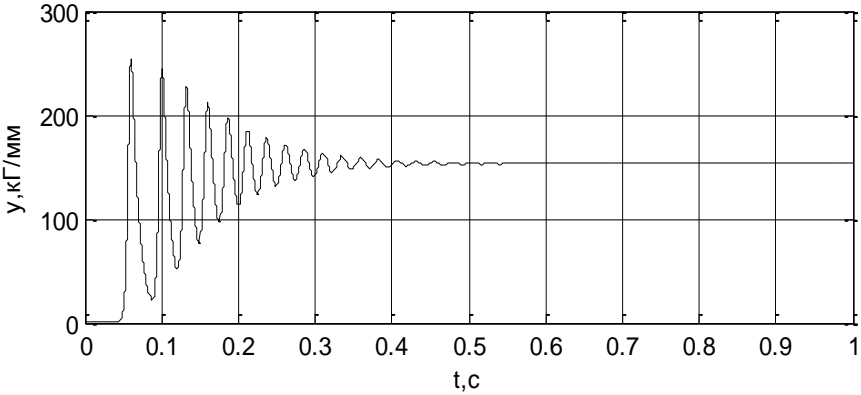


Рис. 30. Временная характеристика координат состояния  $y$  при  $c_1^P = -900, \text{кг} / \text{мм}$ .

При дальнейшем увеличении, начиная с  $c_1^P = -902.175, \text{кг} / \text{мм}$  формируется симметричная сепаратрисная кривая (рис. 31), которая делит пространство состояния на три области. Две области притяжения двух точек равновесия и одна внешняя область характеризуется движением координат состояния от этих точек.

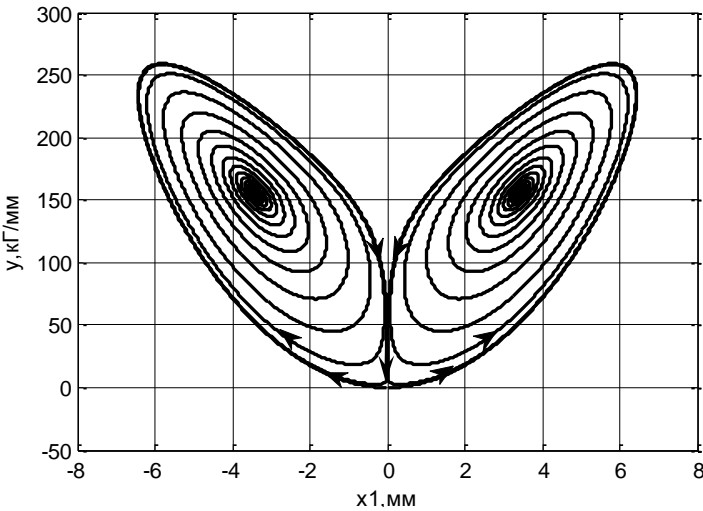


Рис. 31.  $c_1^P = -902.175, \text{кг} / \text{мм}$

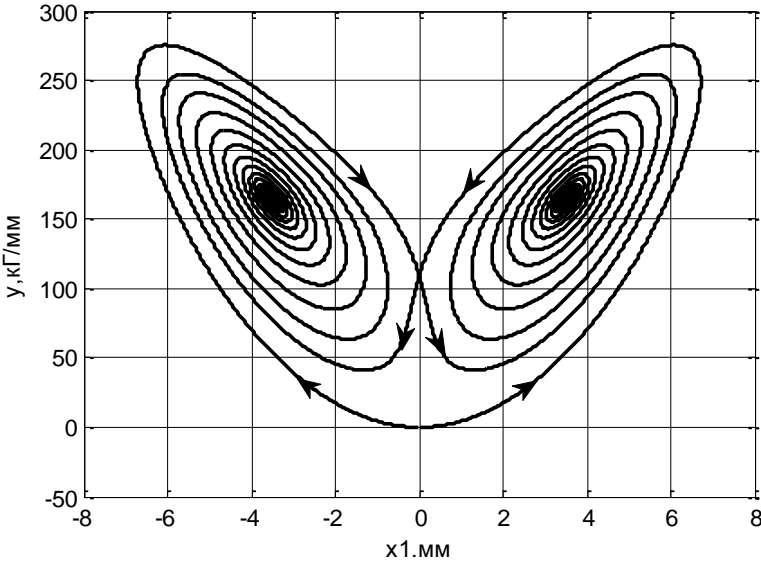


Рис. 32.  $c_1^p = -910, \text{кг} / \text{мм}$

Наконец, при  $c_1^p = -1050, \text{кг} / \text{мм}$  формируется хаотический аттрактор, который по своим характеристикам приближается к аттрактору Лоренца (33).

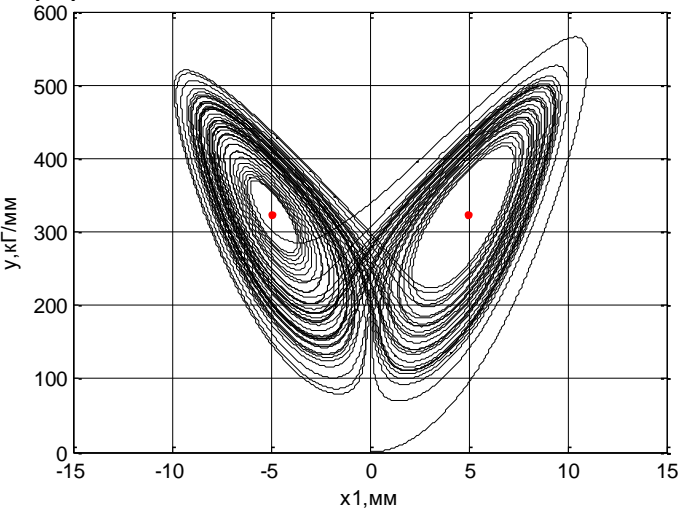


Рис. 33.  $c_1^p = -1050, \text{кг} / \text{мм}$



Аттрактор (рис. 33) характеризуется колебаниями достаточно широкого спектрального состава. Причем, его фрактальная размерность не является целой. Временные диаграммы изменения координат, соответствующие рассматриваемым преобразованиям приведены на рис. 34 - рис.36.

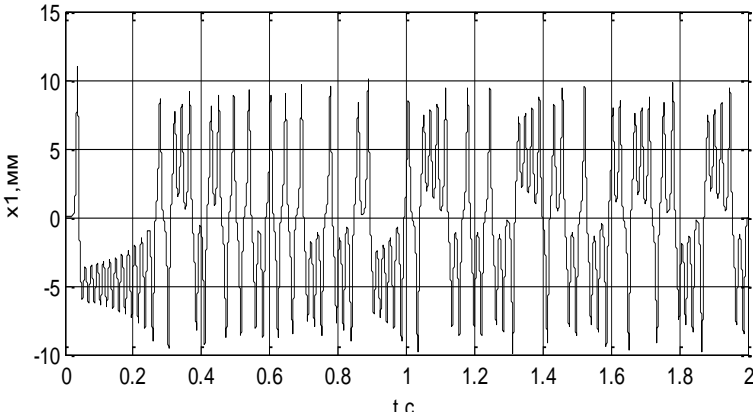


Рис.34. Временная характеристика координат состояния  $x_1$  при  $c_1^P = -1050, \text{кГ} / \text{мм}$ .

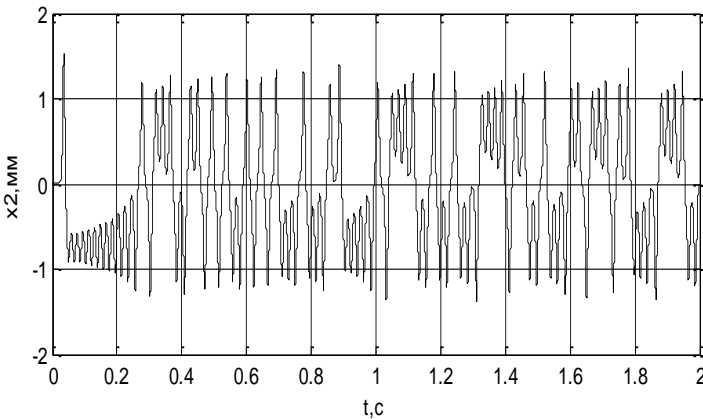


Рис.35. Временная характеристика координат состояния  $x_2$  при  $c_1^P = -1050, \text{кГ} / \text{мм}$ .

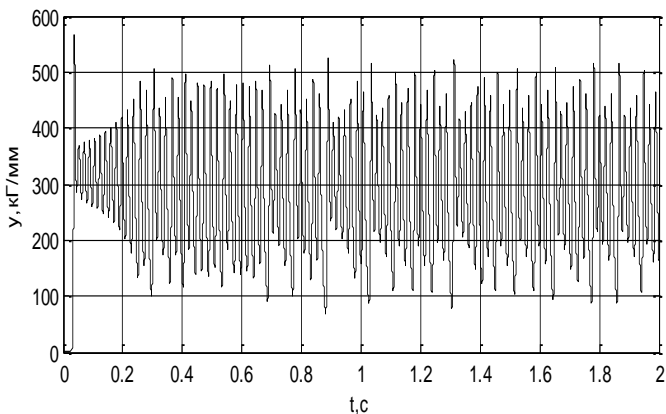


Рис. 36. Временная характеристика координат состояния  $y$  при

$$c_1^P = -1050, \text{ кг} / \text{ мм}.$$

Приведенный пример изменения свойств системы в зависимости от параметра, и формирование хаотического аттрактора является типичным примером, характеризующим движения инструмента относительно заготовки при использовании синергетической концепции анализа и синтеза систем. Подробнее проблемы нелинейной динамики упругих деформационных смещений инструмента относительно заготовки будут рассмотрены ниже. Приведенный пример – лишь иллюстрация формирования в системе аттрактора, обладающего хаотическими свойствами колебаний.

При анализе систем в фазовом пространстве необходимо учитывать, что построение фазовых траекторий реально только для систем, описываемых дифференциальными уравнениями не выше третьего порядка, то есть для случая, когда размерность фазового пространства не выше третьей. Если повышается размерность фазового пространства, то построение фазовых траекторий всегда является проблемой. В связи с этим в теории автоматического управления разработаны различные приемы качественного анализа фазовых траекторий. В разработку этих методов внесли большой вклад работы А.Пуанкаре, А.А.Андропова и его учеников.

Рассмотрим один из таких приемов, названных А.А.Андроновым методом точечных отображений. Проиллюстрируем этот метод на примере выявления предельных циклов (рис.37).

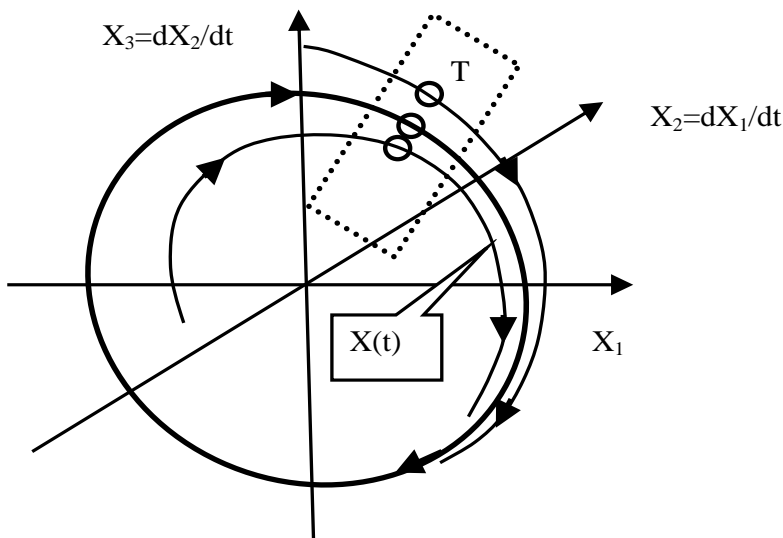


Рис. 37.Схема построения точечных отображений

Пусть задана поверхность «Т», трансверсально расположенная по отношению к фазовым траекториям (рис. 37). Трансверсально расположенная поверхность означает, что все фазовые траектории ее пересекают и при этом ни одна из траекторий ее не касается. Тогда для изучения свойств фазовых траекторий  $X(t)$  можно рассмотреть последовательности  $X(t_1), X(t_2), \dots$ , которые принимает траектория  $X(t)$  в точках ее пересечения в поверхность «Т». Здесь можно рассмотреть, прежде всего, три случая (рис. 38). Первый случай – последовательности  $X(t_1), X(t_2), \dots$  являются расходящимися. Тогда рассматриваемая траектория характеризует отход от неустойчивой точки равновесия. Система является неустойчивой в целом. Второй случай – последовательности приближаются к некоторой точке. Тогда состояние, соответствующее этой точке является асимптотически устойчивым. Третий случай – последовательности находятся в одной точке. Тогда рассматриваемая траектория соответствует предельному циклу. Мы здесь не рассматриваем другие возможные многообразия, которые могут образовываться в фазовом пространстве.

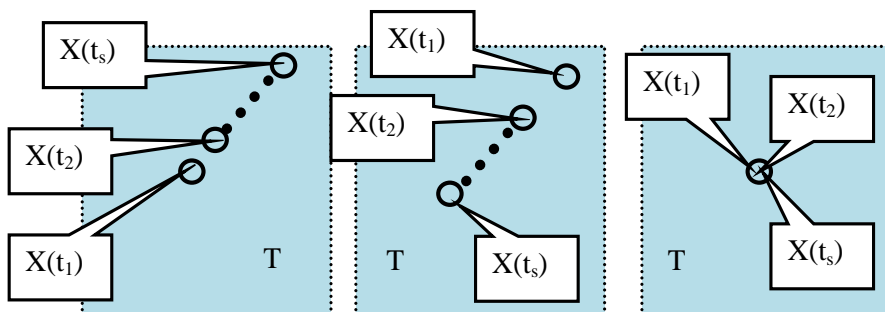


Рис. 38. Различные варианты точечных отображений

Метод точечных отображений позволяет понизить порядок дифференциального уравнения для качественного анализа нелинейных систем. Однако и в этом случае, если рассматривается система, имеющая высокий порядок дифференциальных уравнений, возникают практически не преодолимые сложности.

Приведенный выше анализ, как проблем устойчивости, так и вопросов определения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений позволил в конце восьмидесятых годов говорить о кризисе теории автоматического управления (академик РАН Красовский А.А.). Он определяется тем, что регулярных методов вычисления траекторий типа хаотических аттракторов не существует. В этом случае необходимо использовать численные методы интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Кроме этого качественные методы анализа систем в фазовом пространстве для дифференциальных уравнений, порядок которых превышает третий, вызывают большие сложности. В связи с этим разработаны различные асимптотические методы анализа нелинейных систем. Здесь, прежде всего, остановимся на методе разделения движений.

### 3.2. Метод разделения движений

При описании динамики реальных объектов управления в полном объеме необходимо привлекать уравнения достаточно высокого порядка. Например, при построении систем управления процессами обработки на станках токарной группы даже в упрощенном варианте необходимо иметь систему дифференциальных уравнений 27 – го порядка [10]. В связи с этим возникает проблема, каким образом анализировать пространство состояния такой размерности. Такие примеры можно приводить при анализе различных объектов управления. Достаточно



привести еще пример. Для описания движения одного твердого тела мы должны иметь дифференциальное уравнение двенадцатого порядка.

Проблема анализа и синтеза систем высокого порядка особенно актуальна для нелинейных систем. В данном случае речь идет не столько о точности линейной и нелинейной аппроксимации, а о качественном отличии свойств системы. Именно в нелинейных системах в окрестностях некоторых стационарных траекторий, определяемых управлением, возможно существование различных многообразий. Среди них, как уже указано, необходимо выделить орбитально асимптотически устойчивые предельные циклы (то есть автоколебания), формирование  $N$  - мерных инвариантных торов (то есть  $N$  - частотных стационарных состояний), образование странных аттракторов (то есть детерминированных траекторий, имеющих свойства хаотических колебаний). Все эти многообразия формируются исключительно в нелинейных системах. Кроме этого в нелинейных системах свойства системы зависят от рассматриваемых областей в пространстве состояний, а одному и тому же управлению в зависимости от начальных условий могут соответствовать различные траектории и свойства системы.

Проблема анализа и синтеза сложных нелинейных систем известна уже с пятидесятих годов прошлого века. В связи с этим в математике, а затем в теории автоматического управления стал развиваться подход, основанный на принципе разделения движений. Основы этого принципа положены в работах А.Н.Тихонова и Л.С.Понтрягина [30, 31]. Применительно к теории автоматического управления принцип разделения движений разработан Геращенко Е.И.

Изложим идеи этого метода элементарным способом. Для этого вновь обратимся к анализу системы общего вида, которую будем считать системой с постоянными параметрами, то есть к системе вида

$$T \frac{dX}{dt} = f(X) + u(X), \quad (38)$$

где  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$  - вектор координат пространства состояния;  $f(X) = \{f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, f_n(X_1, X_2, \dots, X_n)\}^T$  - нелинейные вектор – функции, имеющие необходимо число производных по координатам  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ ;  $T$  - диагональная матрица коэффициентов.

Пусть коэффициенты  $T_i$  принадлежат двум множествам  $\mathfrak{S}^1$  и  $\mathfrak{S}^3$ . Причем, между ними имеется ещё одно множество  $\mathfrak{S}^2$  (рис. 39). При этом выполняется условие  $\mathfrak{S}^1 \subset \mathfrak{S}^2 \subset \mathfrak{S}^3$ . Границы этих множеств обозначим  $T^{0,1}$ ,  $T^{0,2}$  и  $T^{0,3}$ . Кроме этого положим, что справедливо





$T^{0,1} \ll T^{0,2}$ . Перегруппируем систему (38) таким образом, что первые  $k$  уравнений имеют  $T_i \in \mathfrak{T}^1 (i=1,2,3...k)$ , а последние  $n-k$  уравнений имеют  $T_i \in \mathfrak{T}^3$ . На рис. 39 звездами обозначены параметры  $T_i$ , соответствующие этому условию.

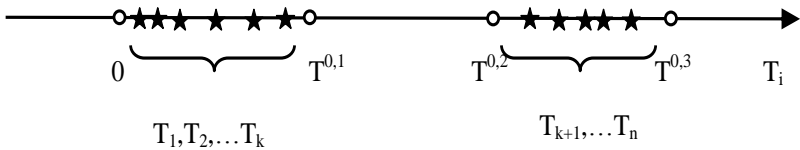


Рис. 39. Распределение множества параметров  $T_i$

Сделаем в (38) замену переменных  $t = T^{0,2} \tau$ , где  $\tau$  - безразмерное время, которое является «медленным» временем. При этом учтем, что  $T^{0,1} \ll T^{0,2}$ . Тогда  $dt = T^{0,2} d\tau$  и в (38) перейдем к безразмерному времени.

$$\frac{T}{T^{0,2}} \frac{dX}{d\tau} = f(X) + u(X), \quad (39)$$

где

$$\frac{T}{T^{0,2}} = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{T^{0,2}} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{T_k}{T^{0,2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T_{k+1}}{T^{0,2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{T_n}{T^{0,2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \varepsilon_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_{k+1}^{(\tau)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & T_n^{(\tau)} \end{bmatrix} = T^{(\tau)}$$

В (39) матрица  $T^{(\tau)}$  является матрицей безразмерных коэффициентов. Уравнение же (39) представлено в безразмерном времени. Проанализируем структуру матрицы  $T^{(\tau)}$ . Так как выполняется условие  $T^{0,1} \ll T^{0,2}$ , то для первых  $k$  уравнений  $\varepsilon_i = \frac{T_i}{T^{0,2}} \Rightarrow 0$ , то есть является



малым параметром в «медленном» времени  $\tau$ . Это значит, что в первых  $k$  уравнениях скорости являются малыми величинами и по первому приближению ими можно пренебречь. Тогда из (39) мы получаем порождающее уравнение, порядок которого уже равен  $n - k$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_1(X_1, X_2, \dots, X_n); \\ \dots\dots\dots \\ 0 = f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_k(X_1, X_2, \dots, X_n); \\ T_{k+1}^{(\tau)} \frac{dX_1}{d\tau} = f_{k+1}(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_{k+1}(X_1, X_2, \dots, X_n); \\ \dots\dots\dots \\ T_n^{(\tau)} \frac{dX_1}{d\tau} = f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) + u_n(X_1, X_2, \dots, X_n). \end{array} \right. \quad (40)$$

Если из первых  $k$  уравнений исключить  $X_1, X_2, \dots, X_k$  путем выражения  $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$  через эти координаты, то мы получаем уравнение «медленных» движений относительно  $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{k+1}^{(\tau)} \frac{dX_{k+1}}{d\tau} = \varphi_{k+1}(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n) + U_{k+1}(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n); \\ \dots\dots\dots \\ T_n^{(\tau)} \frac{dX_n}{d\tau} = \varphi_n(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n) + U_n(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n), \end{array} \right. \quad (41)$$

где  $\varphi_i(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n), U_i(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n), i = k + 1, \dots, n$  - новые нелинейные функции.

Уравнение (41) является уравнением «медленных» движений. Пусть решение (41) известно. Обозначим его  $\{X_{k+1,*}(\tau), X_{k+2,*}(\tau), \dots, X_{n,*}(\tau)\}^T$ . Переходя к естественному времени

$t = \frac{\tau}{T^{0,2}}$ , получаем уравнение «быстрых» движений

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \frac{dX_1(t)}{dt} = f_1(X_1, \dots, X_k, X_{k+1,*}, X_{k+2,*}, \dots, X_{n,*}) + u_1(X_1, X_2, \dots, X_{n,*}); \\ \dots\dots\dots \\ T_k \frac{dX_k(t)}{dt} = \varphi_k(X_1, X_2, \dots, X_{n,*}) + u_k(X_1, X_2, \dots, X_{n,*}), \end{array} \right. \quad (42)$$

в котором функции  $X_{k+1,*}(t), X_{k+2,*}(t), \dots, X_{n,*}(t)$  являются заданными



медленно меняющимися функциями времени.

Л.С. Понтрягиным показано, что при условии, когда решение (42) является асимптотически устойчивым, то траектории  $X_{k+1,*}(t), X_{k+2,*}(t), \dots, X_{n,*}(t)$  характеризуют притягивающее многообразие, то есть аттрактор. Таким образом, Анализ и синтез управления в системе (42) заменяется исследованием и синтезом управления в подсистеме «медленного» времени с последующим анализом асимптотической устойчивости траекторий в подсистеме «быстрого» времени.

В целом, вместо системы  $n$  - го порядка анализируются две иерархически связанные подсистемы «медленного» и «быстрого» времени соответственно  $k$  - го и  $n - k$  - го порядков. При рассмотрении реальных систем анализ существенно упрощается, так как управляющих воздействий, физически реализуемых, существенно меньше, а взаимосвязь между координатами упрощена. Принципиально, после анализа объекта управления и связи в нем между координатами состояния возможно параметры системы, стоящие при производных, разбивать на несколько групп. Тогда в соответствие исходной системе дифференциальных уравнений можно поставить несколько иерархических уровней подсистем по принципу «медленности» времени. Приведем простой пример использования метода разделения движений. Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{aligned} (T_1)^2 \frac{d^2 X_1(t)}{dt^2} + 2\xi_1 T_1 \frac{dX_1(t)}{dt} + X_1(t) &= f_1(X_2) + u_1(X_1, X_2); \\ (T_2)^2 \frac{d^2 X_2(t)}{dt^2} + 2\xi_2 T_2 \frac{dX_2(t)}{dt} + X_2(t) &= kX_1(t). \end{aligned} \right. \quad (43)$$

В (43) выполняется условие  $T_1 \ll T_2$ . Тогда после замены  $T_2 \tau = t$  получаем

$$\left\{ \begin{aligned} (\varepsilon)^2 \frac{d^2 X_1(\tau)}{d\tau^2} + 2\xi_1 \varepsilon \frac{dX_1(\tau)}{d\tau} + X_1(\tau) &= f_1(X_2) + u_1(X_1, X_2); \\ \frac{d^2 X_2(\tau)}{d\tau^2} + 2\xi_2 \frac{dX_2(\tau)}{d\tau} + X_2(\tau) &= kX_1(t). \end{aligned} \right. \quad (44)$$

В (44)  $\tau$  - медленное время,  $\varepsilon$  - малый параметр. Тогда на основе использования метода разделения движений имеем уравнение медленных движений



$$\frac{d^2 X_2(\tau)}{d\tau^2} + 2\xi_2 \frac{dX_2(\tau)}{d\tau} + X_2(\tau) = k\{f_1(X_2) + u_1(X_1, X_2)\}, \quad (45)$$

решение которого дает траекторию, в вариациях относительно которой необходимо анализировать первое уравнение в (43). Если это уравнение является асимптотически устойчивым, то решение (45) и есть асимптотическое решение системы (43). К этому решению быстро притягиваются все траектории системы (43). Если оно не устойчиво, то дополнительно необходимо анализировать многообразия, формируемые в окрестности решения уравнения «медленных» движений.

Второе направление анализа нелинейных систем автоматического управления связано с разработанной теорией асимптотических методов нелинейной динамики. Истоки этого метода лежат в работах А.Пуанкаре и М.А. Ляпунова. Основные положения этого метода сформулированы, развиты и доказаны Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым и Ю.А. Митропольским [32 - 35]. Однако необходимо признать, что все идеи метода принадлежат, в основном, Анри Пуанкаре.



### 3.3. Асимптотические методы нелинейной динамики

Рассмотренные в предыдущем параграфе методы анализа нелинейных систем относятся к таким системам, у которых в системе дифференциальных уравнений удастся выделить несколько уравнений, в которых перед производными стоит «большой» параметр. Именно в этом случае имеется возможность построить иерархию взаимосвязанных дифференциальных уравнений по принципу «медленности» времени.

Второй большой класс нелинейных систем автоматического управления определяется следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = \varepsilon f \left( X, \frac{dX}{dt} \right), \quad (46)$$

где  $n$  - малые параметры, стоящие перед вектор – функцией  $f(X) = \{f_1(X_1, X_2, \dots, X_n), f_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, f_n(X_1, X_2, \dots, X_n)\}^n$ .

В отличие от системы (38) здесь рассматриваются системы, имеющие малый параметр не при производных, а перед нелинейной функцией. Такие системы называются квазилинейными [32,33]. Кроме этого рассматриваются системы, состоящие из уравнений второго порядка. Это связано с тем, что при составлении дифференциальных уравнений используются методы Лагранжа или Гамильтона. Нелинейные же функции, зависящие от координат и их производных, вводятся в систему прямым образом. Примером такой системы является следующее скалярное уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = \varepsilon(1 - X^2) \frac{dX}{dt}. \quad (47)$$

Именно для этого уравнения голландским инженером Ван-дер-Полем предложен метод построения решений, который в дальнейшем был развит Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым и Ю.А. Митропольским. Ими были предложены и доказаны не только условия сходимости решений в виде асимптотических разложений для системы общего виде (46), но и рассмотрены различные случаи, в том числе и случай неавтономной системы, системы, в которой рассматриваются медленные изменения внешнего возмущения и пр.

Вначале проанализируем систему (47). Ее анализ показывает, что при  $X \Rightarrow 0$  значением  $X^2$  можно пренебречь. Тогда в окрестности равновесия  $X = 0$  система становится неустойчивой, так как характеристический полином в этом случае имеет, по крайней мере, один корень с положительной вещественной частью. Однако по мере отхода координат состояния от точки равновесия непропорционально быстро возрастает



влияние  $X^2$ . При этом знак при  $\frac{dX}{dt}$  изменяется. С физической точки

зрения в этом случае отрицательное трение становится положительным. Силы, формируемые скоростным членом, изменяют свое направление, и становятся силами, направленными против скорости. В результате в системе всегда формируется устойчивый предельный цикл, то есть автоколебания. Кроме этого, так как при нелинейной функции стоит малый параметр, то при  $\varepsilon = 0$  решением (47) является

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \theta), \tag{48}$$

причем,  $X_0$  и  $\theta$  будут постоянными во времени величинами, зависящими от начальных условий. Для дальнейшего обозначим  $\omega t + \theta = \psi$ .

Наличие нелинейного возмущения при  $\varepsilon \neq 0$  приводит к появлению в решении уравнений обертонов, обуславливает зависимость  $\psi$  от амплитуды и, наконец, может вызывать систематическое увеличение или уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от притока или поглощения энергии возмущающими силами  $f(X, \frac{dX}{dt})$ . В частности для системы

(47) по мере увеличения амплитуды возрастает поглощение энергии. Именно поэтому в системе (2.14) формируется устойчивый предельный цикл. Все эти эффекты, очевидно, исчезают в предельном случае при  $\varepsilon = 0$ .

Принимая во внимание эти обстоятельства, Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым предложено решение (46) искать в виде следующего асимптотического разложения

$$X(t) = X_0(t) \cos \psi(t) + \varepsilon u_1[X_0(t), \psi(t)] + \varepsilon^2 u_2[X_0(t), \psi(t)] + \varepsilon^3 u_3[X_0(t), \psi(t)] + \dots \tag{49}$$

В (49)  $u_1(X_0, \psi)$ ,  $u_2(X_0, \psi)$ ,  $u_3(X_0, \psi)$ ... являются периодическими функциями  $\psi$ , а  $X_0, \psi$  являются решениями вспомогательных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = \varepsilon A_1(X_0) + \varepsilon^2 A_2(X_0) + \dots; \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(X_0) + \varepsilon^2 B_2(X_0) + \dots \end{cases} \tag{50}$$

В частности, если рассматривается только инвариантное многообразие типа устойчивого предельного цикла, то  $\frac{dX_0}{dt} = 0$  и  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ .



Тогда решение (46) ищется в виде  $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \theta)$ , где параметры системы есть константы. В этом случае в (46) нелинейные функции  $f_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$  рассматриваются усредненными по периоду колебаний. Этот случай широко используется в теории автоматического управления для вычисления параметров одночастотных автоколебаний. Он носит название метода гармонической линеаризации, который изучался в традиционном курсе по теории автоматического управления. Именно для этого случая сформулирован и доказан критерий определения автоколебаний Гольдфарбом.

В тех случаях, когда рассматривается переходной процесс, то есть  $X_0(t)$  амплитуда есть функция времени, то можно воспользоваться непосредственно методом Ван-дер-Поля. Проиллюстрируем использование этого метода на примере анализа следующей скалярной системы

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \omega^2 X = \varepsilon f\left(X, \frac{dX}{dt}\right), \quad (51)$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр;  $\omega$  - резонансная частота системы при  $\varepsilon = 0$ .

Для системы (51) рассматривается уравнение

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \omega^2 X = 0, \quad (52)$$

которое называется порождающим. В фазовой плоскости траектория, соответствующая (52) есть предельный цикл, параметры которого зависят от начальных условий. При этом решением (52) является

$$X(t) = X_0 \cos \psi, \quad (53)$$

где  $\psi = \omega(t + t_0)$ ;  $X_0 = const$ ,  $t_0 = const$  - параметры, определяемые начальными условиями.

Естественно решение (51) искать в виде (53). Однако за счет  $\varepsilon f\left(X, \frac{dX}{dt}\right)$  будет изменяться во времени  $X_0 = X_0(t)$  и  $\psi(t)$ . Причем скорость их изменения мала, так как в правой части (51) перед нелинейной функцией стоит малый параметр. В частности, в пределах периода колебаний  $X_0$  можно считать постоянным. С учетом этого найдем производную

$$\frac{dX(t)}{dt} = -X_0 \omega \sin \psi. \quad (54)$$

Составим теперь дифференциальное уравнение, которому



должны удовлетворять функции  $X_0(t)$  и  $\psi(t)$ . Для этого продифференцируем (51) в предположении, что  $X_0(t)$  и  $\psi(t)$  - есть функции времени, то есть

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{dX_0}{dt} \cos \psi - X_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi. \quad (54)$$

Приравнявая приближенное уравнение (53) и (54) получаем первое дифференциальное уравнение относительно  $\frac{dX_0}{dt}$  и  $\frac{d\psi}{dt}$

$$\frac{dX_0}{dt} \cos \psi - X_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi + X_0 \omega \sin \psi = 0 - \quad (55)$$

- это уравнение определяет условие совместимости (52) и (53). Для понимания этого условия необходимо учитывать два обстоятельства. Во-первых, так как в правой части (50) стоит малый параметр, то отклонение траекторий от (52) являются малыми. Это значит, что амплитуда во времени

меняется мало. Поэтому  $\frac{dX_0}{dt} \Rightarrow 0$ . Во-вторых, необходимо учитывать

изменение амплитуды во времени. Поэтому справедливо (54).

Дифференцируя далее (53) по времени, получаем

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = -\frac{dX_0}{dt} \omega \sin \psi - \frac{d\psi}{dt} X_0 \omega \cos \psi. \quad (56)$$

Теперь подставим (56) в исходное уравнение (50). В результате получаем еще одно уравнение для определения  $\frac{dX_0}{dt}$  и  $\frac{d\psi}{dt}$

$$-\frac{dX_0}{dt} \omega \sin \psi - \frac{d\psi}{dt} X_0 \omega \cos \psi + \omega^2 X_0 \cos \psi = \mathcal{E}f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \quad (57)$$

Таким образом, мы имеем систему, разрешенную относительно  $\frac{dX_0}{dt}$  и

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{dX_0}{dt} \omega \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} X_0 \omega \cos \psi = \omega^2 X_0 \cos \psi - \mathcal{E}f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi]; \\ \frac{dX_0}{dt} \cos \psi - X_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi = -X_0 \omega \sin \psi. \end{aligned} \right. \quad (58)$$





Ее легко преобразовать к следующему виду

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = \frac{\Delta_{\dot{X}_0}}{\Delta} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \sin \psi; \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{\Delta_{\dot{\psi}}}{\Delta} = \omega - \frac{\varepsilon}{X_0 \omega} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \cos \psi, \end{cases} \quad (59)$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} \omega \sin \psi & X_0 \omega \cos \psi \\ \cos \psi & -X_0 \sin \psi \end{vmatrix} = -X_0 \omega$ ;

$$\Delta_{\dot{X}_0} = \begin{vmatrix} \omega^2 X_0 \cos \psi - \varepsilon f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] & X_0 \omega \cos \psi \\ -X_0 \omega \sin \psi & -X_0 \sin \psi \end{vmatrix} = \varepsilon X_0 f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \sin \psi$$

$$;$$

$$\Delta_{\dot{\psi}} = \begin{vmatrix} \omega \sin \psi & \omega^2 X_0 \cos \psi - \varepsilon f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \\ \cos \psi & -X_0 \omega \sin \psi \end{vmatrix} = -X_0 \omega^2 + \varepsilon f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \cos \psi.$$

Проанализируем систему (59), которая эквивалентна системе (50). Первое уравнение в (59) показывает, что переменное  $X_0$  меняется медленно, так как  $\varepsilon$  - малый параметр ( $\frac{dX_0}{dt} \Rightarrow 0$ ). Поэтому мы не сделаем большой ошибки, если правые части (59) заменим их средними значениями за период колебаний, то есть

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \tilde{f}_1[X_0]; \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{X_0 \omega} \tilde{f}_2[X_0], \end{cases} \quad (60)$$

где  $\tilde{f}_1(X_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \sin \psi d\psi$ ;

$$\tilde{f}_2(X_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[X_0 \cos \psi, -X_0 \omega \sin \psi] \cos \psi d\psi.$$

Первое уравнение в (60) является уравнением «медленных» движений, так как скорость  $\frac{dX_0}{dt}$  мала (справа стоит малый параметр)



Второе уравнение – есть уравнение быстрых движений, так как справа стоит частота, которая мало меняется за счет второго слагаемого, зависящего от амплитуды. Кроме этого нелинейная функция усредняется по периоду колебаний. С помощью (60) можно исследовать главные особенности поведения квазилинейных систем во времени. Причем, при исследовании (60) в инженерных приложениях обычно достаточно анализировать первое уравнение, позволяющее вычислить закон изменения амплитуды во времени. Малые вариации частоты обычно не рассматриваются.

В нелинейной динамике уравнения (60) называются укороченными или уравнениями Ван-дер-Поля. Они по своему виду напоминают две составляющих эквивалентной передаточной функции нелинейного элемента в методе гармонической линеаризации. Однако в отличие от метода гармонической линеаризации с помощью (60) можно анализировать не стационарное состояние, а переходные процессы. Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым показано, что уравнения (60) соответствуют тем, которые получаются по первому приближению исходя из разработанной ими теории асимптотических методов анализа нелинейных систем.

Анализируя состояние разработанных методов анализа нелинейных систем, необходимо отметить, что эти методы применимы лишь для анализа одночастотных процессов, в том числе для определения автоколебаний. При анализе двухчастотных процессов (двумерных инвариантных торов) эти методы становятся настолько громоздкими, что практически не используются в практике анализа конкретных систем. При анализе хаотических (странных) аттракторов они не применимы в принципе. Кроме этого эти методы рассматривают квазилинейные системы, то есть системы, в которых при нелинейной функции имеется возможность установить малый параметр. В связи с развитием вычислительной техники для анализа нелинейных систем в настоящее время большее распространение получили методы прямого интегрирования уравнений динамики. Однако все приближенные методы интегрирования имеют большой недостаток, заключающийся в том, что нет возможности анализа и оценки точности получаемых результатов. Это относится особенно к тем случаям, когда система обладает большой чувствительностью к вариациям параметров и начальных условий.



## **ГЛАВА 4. ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА НА ПРИМЕРЕ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ОБРАБОТКИ НА МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКАХ**

При управлении движением механической системы, взаимодействующей со средой (трибологической, процессом обработки резанием на станках, гидродинамической и пр.) приходится рассматривать управляемые движения механических элементов, которые взаимодействуют со средами. При этом, как правило, силы, образующиеся в зоне сопряжения система – среда, представляются как в траекториях относительных перемещений, так и в координатах, характеризующих упругие деформационные смещения элементов по отношению к некоторой обобщенной массе. Например, при управлении процессом резания, такой системой, по отношению к которой можно анализировать текущие координаты системы является несущая система металлорежущего станка. Важно подчеркнуть, что при математическом описании системы необходимо рассматривать как упругие деформационные системы, так и большие перемещения, и их траектории.

Не нарушая общности, рассмотрим проблему синергетического системного синтеза на примере построения систем управления процессами обработки на металлорежущих станках токарной группы. Здесь, прежде всего, имеется проблема математического моделирования системы. Причем математические модели должны учитывать траектории перемещения исполнительных элементов и упругие деформации инструмента относительно обрабатываемой заготовки. Применительно к станку токарной группы исполнительными элементами являются суппорты продольных и поперечных перемещений и шпиндель, обеспечивающий вращение заготовки. Так как параметры обрабатываемой детали формируются движениями вершины инструмента относительно заготовки, то необходимо также рассматривать упругие деформационные смещения инструмента и заготовки по отношению к движениям исполнительных элементов. В связи с этим сразу дадим два определения. Будем называть траекториями формообразующих движений инструмента относительно заготовки их движения с учетом упругих деформационных смещений. Поэтому они отличаются от траекторий движения исполнительных элементов. Прежде всего, рассмотрим математическое моделирование управляемой системы резания на станке.



## 4.1. Иерархия дифференциальных уравнений движения инструмента относительно заготовки

Уравнения динамики управляемых формообразующих движений инструмента относительно заготовки можно представить в виде двух взаимосвязанных подсистем. Проанализируем эти подсистемы для случая, когда сервоприводами являются двигатели постоянного тока с независимым возбуждением и якорным управлением. Одна подсистема определяет преобразование напряжений якоря, заданного по программе в функции времени, в координаты пространственных перемещений  $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)} = 0, X_3^{(0)}\}^T$  исполнительных элементов (рис. 61). Вторая - упругие деформационные смещения вершины режущего инструмента  $X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ , по отношению к движениям исполнительных элементов. В приведённой схематизации деформации заготовки не принимаются во внимание. Уравнения движения исполнительных элементов станка без учета упруго-диссипативных характеристик механической части проводов определяются уравнениями сервоприводов. Для подсистемы преобразования управления в траектории исполнительных элементов станка имеем [10]

$$T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = (c_e)^{-1} U(t) - (c_e)^{-1} U_M [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}] - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - E\omega, \quad (61)$$

где

$$T_{ЭМ} T_{Э} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)} T_{Э}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)} T_{Э}^{(4)} \end{bmatrix};$$

$$T_{ЭМ} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)} \end{bmatrix} \quad - \text{диагональные матрицы, составленные из}$$

постоянных времени трёх управляемых двигателей постоянного тока;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{единичная диагональная матрица;}$$



$$(c_e)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_e^{(1)})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_e^{(3)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_e^{(4)})^{-1} \end{bmatrix} - \text{матрица, составленная из коэффициентов}$$

противо ЭДС двигателей  $c_e^{(i)}$ ;

$U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  - вектор управления, который может быть задан и в координатах перемещения суппорта, тогда этот вектор определяет программу ЧПУ станка;

$\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  - вектор частот вращения роторов двигателей;

$U_M = \{U_M^{(1)}, U_M^{(3)}, U_M^{(4)}\}^T$  - вектор функция моментов сопротивления вращения роторов, приведённых к электрическим частям двигателей;

$$T_{\mathcal{E}M}^{(i)} = \frac{J_i R_i}{c_e^{(i)} c_M^{(i)}}, i = 1, 3, 4; T_{\mathcal{C}}^{(i)} = \frac{L_i}{R_i}, i = 1, 3, 4; c_M^{(i)}, R_i, L_i - \text{параметры}$$

двигателей;

$J_i$  - моменты инерции приводов, приведённые к роторам двигателей;

$$X(t) = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}^T, \frac{X(t)}{dt} = \left\{ \frac{X_1(t)}{dt}, \frac{X_2(t)}{dt}, \frac{X_3(t)}{dt} \right\}^T - \text{векторы}$$

упругих деформаций режущего инструмента относительно суппорта и их скорости.

Таким образом, реакция со стороны процесса резания задается функциями  $U_M[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}]$ , значения которых определяются динамической моделью процесса резания [10].

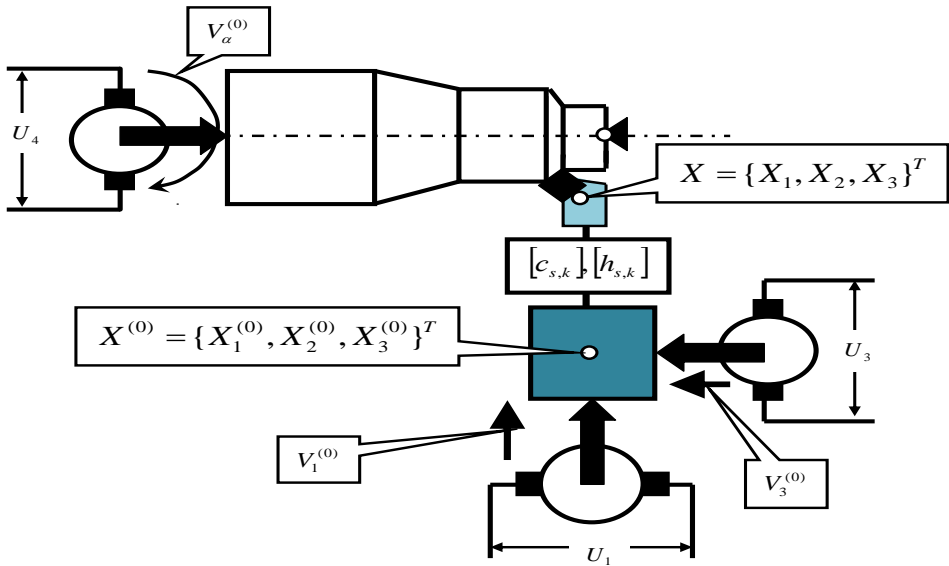


Рис.40. Обобщённая динамическая модель управляемой системы резания при точении

В системе (61) частоты  $\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  отличаются от скоростей перемещения исполнительных элементов  $V^0 = dX^{(0)} / dt = \{V_1^{(0)}, V_3^{(0)}, V_\alpha^{(0)}\}^T$  коэффициентами, определяемыми передаточными отношениями редукторов. Таким образом, например, координата  $X_3^{(0)}$  определяется  $X_3^{(0)} = \int_0^t V_3^{(0)}(t) dt$ . Причем,  $t = 0$  определяет начало процесса резания. Система (61) определяет три автономные подсистемы при условии, что  $U_M [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}] = 0$ . Это условие зависит от свойств редуктора, преобразующего вращение в поступательные движения. Здесь необходимо учитывать передаточное отношение редуктора. При большом передаточном отношении реакцией со стороны процесса резания можно пренебречь. Что касается вращения шпинделя, то в большинстве случаев можно считать, что двигатель установлен непосредственно на шпинделе. В этом случае необходимо учитывать силовую реакцию со стороны зоны резания на вращение шпинделя.



Если ограничиться линейным приближением упругих свойств подсистемы инструмента и считать подсистему заготовки недеформируемой, то динамика формирования упругих деформационных смещений вершины инструмента с учетом базовой динамической модели будет описываться следующей системой

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}], \quad (62)$$

где  $m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$ ,  $h = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & h_{3,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & h_{3,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & h_{3,3} \end{bmatrix}$ ,  $c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix}$  - матрицы инерционных, диссипативных и упругих параметров, которые определяются по правилам, изложенным во второй главе;

$X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$  - вектор упругих деформационных смещений вершины инструмента;

$F = F_0[S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), T_P \frac{dX(t)}{dt}]\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$  - динамическая характеристика процесса резания.

Для дальнейшего совместного анализа систем (61) и (62) воспользуемся свойствами систем дифференциальных уравнений, имеющих малый параметр при старшей производной [184, 185]. Для этого сделаем замену переменных  $t = \tau \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}$ , то есть введём в рассмотрение безразмерное время  $\tau$ . Кроме этого уравнение в (62) представим в следующем виде

$$(T)^2 \frac{d^2 X}{dt^2} + 2\xi T \frac{dX}{dt} + c^{(\tau)} X = c_0^{-1} F, \quad (63)$$

где  $c_0^{-1} = \begin{bmatrix} (c_{1,1})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_{2,2})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_{3,3})^{-1} \end{bmatrix}$ ;



$$(T)^2 = \begin{bmatrix} (T_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (T_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (T_3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{c_{1,1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{c_{2,2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{c_{3,3}} \end{bmatrix};$$

$$2\xi T = \begin{bmatrix} 2\xi_{1,1}T_1 & 2\xi_{2,1}T_1 & 2\xi_{3,1}T_1 \\ 2\xi_{1,2}T_2 & 2\xi_{2,2}T_2 & 2\xi_{3,2}T_2 \\ 2\xi_{1,3}T_3 & 2\xi_{2,3}T_3 & 2\xi_{3,3}T_3 \end{bmatrix} = h \cdot c_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{h_{1,1}}{c_{1,1}} & \frac{h_{2,1}}{c_{1,1}} & \frac{h_{3,1}}{c_{1,1}} \\ \frac{h_{1,2}}{c_{2,2}} & \frac{h_{2,2}}{c_{2,2}} & \frac{h_{3,2}}{c_{2,2}} \\ \frac{h_{1,3}}{c_{3,3}} & \frac{h_{2,3}}{c_{3,3}} & \frac{h_{3,3}}{c_{3,3}} \end{bmatrix};$$

$$c^{(\tau)} = c \cdot c_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{2,1}}{c_{1,1}} & \frac{c_{3,1}}{c_{1,1}} \\ \frac{c_{1,2}}{c_{2,2}} & 1 & \frac{c_{3,2}}{c_{2,2}} \\ \frac{c_{1,3}}{c_{3,3}} & \frac{c_{2,3}}{c_{3,3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

После введения безразмерного времени  $\tau$  вместо (61) имеем

$$T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} = (c_e)^{-1} U(\tau) - (c_e)^{-1} U_M [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(\tau), 0] - \frac{T_{ЭМ}}{\sqrt{T_{ЭМ} T_{Э}}} \frac{d\omega}{d\tau} - E\omega, \quad (64)$$





$$\text{где } T_{ЭМ} T_{Э} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(3)} T_{Э}^{(3)}}{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(4)} T_{Э}^{(4)}}{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \end{bmatrix};$$

$$\frac{T_{ЭМ}}{\sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}}} = \begin{bmatrix} \frac{T_{ЭМ}^{(1)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(3)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{ЭМ}^{(4)}}{(T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)})^{0,5}} \end{bmatrix};$$

$$(c_e)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_e^{(1)})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_e^{(3)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_e^{(4)})^{-1} \end{bmatrix};$$

$$U_{\Sigma} = \{(U_1 - U_M^{(1)}), (U_3 - U_M^{(3)}), (U_4 - U_M^{(4)})\}^T.$$

Кроме этого, вместо (63) имеем

$$(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} \frac{d^2 X}{d\tau^2} + 2\xi T / \sqrt{T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)}} \frac{dX}{d\tau} + c^{(\tau)} X = c_0^{-1} F, \quad (65)$$

где

$$(T)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} = \begin{bmatrix} (T_1)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & (T_2)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & (T_3)^2 / T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} \end{bmatrix};$$



$$2\xi T / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 2\xi_{1,1} T_1 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} & 2\xi_{2,1} T_1 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} & 2\xi_{3,1} T_1 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} \\ 2\xi_{1,2} T_2 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} & 2\xi_{2,2} T_2 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} & 2\xi_{3,2} T_2 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} \\ 2\xi_{1,3} T_3 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} & 2\xi_{2,3} T_3 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} & 2\xi_{3,3} T_3 / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}} \end{bmatrix}$$

;

$$F = F_0 [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), \frac{T_P}{(T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)})^{0,5}} \frac{dX(t)}{dt}] \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T.$$

В уравнениях (64) и (65) все элементы матриц представляют безразмерные величины. Их можно проанализировать на предмет введения малых параметров. Очевидно, что все элементы матриц  $(T)^2 / T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}$  и  $2\xi T / \sqrt{T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)}}$  стремятся к нулю, так как инерционные постоянные времени, по крайней мере, на два порядка меньше, чем электромеханическая и электрическая постоянные времени. Кроме этого все коэффициенты затухания не больше, чем 0,08. Кроме этого величина  $\frac{T_P}{(T_{\text{ЭМ}}^{(1)} T_{\text{Э}}^{(1)})^{0,5}}$  также является малой, так как  $T_P$  не превышает значений (0,01-0,015).

Согласно изложенному в третьей главе принципу для рассматриваемого класса систем асимптотические свойства при совместном рассмотрении уравнений (64) и (65) определяются уравнением «медленных» движений. Его удобно записать в реальном времени

$$\begin{cases} T_{\text{ЭМ}} T_{\text{Э}} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = (c_e)^{-1} U(t) - (c_e)^{-1} U_M [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), 0] - T_{\text{ЭМ}} \frac{d\omega}{dt} - E\omega; \\ cX = F [S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, X(t), 0]. \end{cases} \quad (66)$$

Пусть при заданном управлении  $U(t)$  определено решение системы (66) в виде  $\omega(t)$ ,  $X^{(0)}(t)$  и  $X^*(t)$ . Первые две функции отличаются коэффициентами, определяемыми передаточными отношениями редукторов. Функция  $X^*(t)$  характеризует установившиеся упругие деформации вершины инструмента, которые являются стационарными решениями уравнения (62). Решения  $\omega(t)$ ,  $X^{(0)}(t)$  и  $X^*(t)$  будут характеризовать



притягивающее многообразие в том случае, если уравнение в вариациях относительно  $X^*(t)$  будут асимптотически устойчивыми. Поэтому для анализа кроме уравнения (66) необходимо рассмотреть уравнение в вариациях относительно  $X^*(t)$ . После замены  $X(t) = X^*(t) + x(t)$  из (62) получаем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + cx = \varphi[S_p^{(0)}, t_p^{(0)}, X^*(t), x(t), T_p \frac{dx(t)}{dt}], \quad (67)$$

где  $\varphi = F[S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t), X^*(t), x(t), T_p \frac{dx(t)}{dt}] - F[S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t), X^*(t), 0]$  - вектор- нелинейные функции, рассматривающие вариации сил резания относительно вариаций упругих деформационных смещений в окрестности стационарной траектории  $X^*(t)$ .  $\varphi = 0$  при  $x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0$ .

Так как на данном этапе системы (67) является не возмущённой траектория  $X^*(t)$ , как и функции  $S_p^{(0)}(t), t_p^{(0)}(t)$  являются решением системы (66)), то при условии асимптотической устойчивости тривиального решения системы (67) решение (66)  $X^*(t)$  будет аттрактором, к которому притягиваются все траектории (рис.41).

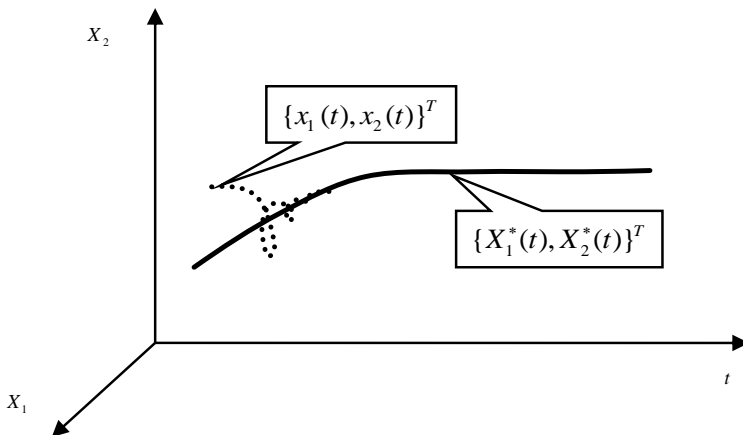


Рис. 41. Представление упругих деформационных смещений в виде траекторий



## «медленных» и «быстрых» движений

Траекторию  $X^*(t)$  и соответствующие ей функции изменения сил, площади срезаемого слоя и технологических режимов будем называть стационарным многообразием динамической системы резания или стационарной траекторией деформационных смещений вершины инструмента относительно траекторий исполнительных перемещений суппорта станка. Система (66) является системой «медленных» движений. Система (67), рассматривающая упругие деформационные свойства вершины режущего инструмента относительно траектории «медленных» движений, является системой «быстрых» движений.

#### 4.2. Системный подход к управлению процессами обработки на металлорежущих станках

Научные представления об анализе единой управляемой динамической системе резания позволили предложить системный подход к управлению процессами обработки, включающий решение совокупности проблем. **Первая проблема** – определение вектора управления (программ ЧПУ) траекториями «медленных» движений. Она включает определение желаемого многообразия траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки в пространстве состояния системы резания исходя из требований к точности, качеству обработки и состоянию процесса резания, и выбор на этом многообразии оптимальную траекторию по некоторому функциональному критерию. В качестве критерия оптимальности обычно анализируется критерий минимума приведенных затрат на изготовление деталей. Полученному желаемому многообразию траекторий формообразующих движений соответствует желаемое многообразие траекторий движения исполнительных элементов станка, и, следовательно, желаемое многообразие вектора управления. Для определения желаемого многообразия программ ЧПУ необходимо решать обратные задачи динамики для уравнений, описывающих преобразования управления в траектории движения исполнительных элементов.

Таким образом, в данном подходе программа ЧПУ строится не по геометрическому образу детали на основе принципа подчинения всех координат этой программе, а по многообразию желаемых формообразующих движений на основе согласования (когерентности) внешних управлений с внутренними управлениями, определяемыми динамической связью, формируемой процессом резания (рис.42). Необходимо отметить, что согласованность (когерентность) характеризуется одним из основных принципов в синергетической теории управления [2 - 4].



Рис. 42. Схемы управления точностью обработки: традиционная, и на основе синергетической концепции

Подчеркнем, что подсистемы «медленных» и «быстрых» движений являются взаимосвязанными. С одной стороны, траектории «медленных» движений через механизм формирования площади срезаемого слоя влияют на параметры линеаризованного уравнения в вариациях относительно траектории «медленных» движений. Таким образом, подсистема «быстрых» движений имеет параметры, зависящие от подсистемы «медленных» движений. С другой стороны, подсистема «быстрых» движений является



ся нелинейной. Поэтому при потере её устойчивости в окрестности равновесия могут формироваться различные инвариантных многообразия, которые влияют на траекторию «медленных» формообразующих движений. Поэтому при построении желаемого многообразия траекторий формообразующих движений одновременно необходимо обеспечить желаемые свойства подсистемы «быстрых» движений. Наиболее эффективным является обеспечение асимптотической устойчивости спроектированных траекторий формообразующих движений как для подсистемы «медленных» движений, так для подсистемы «быстрых» движений. Как показано в главе 3, обеспечение асимптотической устойчивости с помощью варьирования траекторий «медленных» движений исполнительных элементов станка имеет ограничения. Однако приведенные исследования показали возможности обеспечения асимптотической устойчивости траекторий формообразующих движений на основе выбора параметров и свойств взаимодействующих подсистем со стороны инструмента и заготовки через процесс резания. Кроме асимптотической устойчивости спроектированных траекторий формообразующих движений, необходимо обеспечивать достаточную их область притяжения, так как рассматриваемая траектория является возмущенной. В качестве возмущений анализируются кинематические воздействия, зависящие от точности станка, например, параметров радиальных биений шпинделя, вариаций припуска, физико-механических свойств обрабатываемого материала, тепловых деформации элементов станка и пр. Не смотря на разнообразную природу кинематических возмущений их можно привести к вариациям текущих значений технологических режимов: величины подачи на оборот и глубины резания. Обеспечение асимптотической устойчивости траекторий формообразующих движений в достаточной области их притяжения характеризует **вторую проблему**. Решение первой и второй проблем характеризует новый принцип построения программы управления (в том числе, программы ЧПУ) процессами обработки на основе синергетической концепции [10]. Системный подход требует одновременного синтеза как управления «медленными» движениями, так и выбор параметров и конструктивных элементов подсистемы «быстрых» движений.

Построение программ ЧПУ по многообразию желаемых траекторий опирается на детерминированное представление о динамической системе, и на предположение о заданных неизменных свойствах динамической связи, формируемой процессом резания. Свойства динамической связи, формируемой процессом резания, характеризуются эволюционными изменениями. Эволюционные изменения параметров вызывают смещение траектории формообразующих движений. Поэтому в зависимости от эволюционных изменений, зависящих от траектории мощности процесса резания по совершенной работе, требуется коррекция управляющих про-



грамм. Эта коррекция может осуществляться на основе априорной информации о траектории сил резания, а также на основе определения текущей информации о силах. При этом используются имитационные модели о динамической системе резания.

Принцип управления процессами обработки на основе использования имитационной модели носит вероятностный характер. Неопределенность параметров и координат состояния модели приводит к понижению эффективности управления. Она зависит от многих факторов. Поэтому возникает **третья проблема** изучения отображений текущих параметров системы и динамической связи в доступных измерению координатах состояния системы и на основе осуществляется коррекция управления в зависимости от отклонения параметров системы и динамической связи. Следует отметить, что одной из легко измеримых координат являются силы резания и вибрационные характеристики некоторых координат управляемой системы, а также траектории движений исполнительных элементов станка. Определение текущей информации о параметрах системы и динамической связи позволяет на основе имитационной модели не только оценивать и прогнозировать эволюцию системы, но и определить остаточный ресурс при изготовлении деталей заданного качества.

Рассмотрим общее уравнение динамики системы (рис. 43), состоящее из уравнений движений исполнительных элементов станка и уравнений упругих деформационных смещений инструмента и заготовки. Движения исполнительных элементов станка определяются системой дифференциальных уравнений

$$T_{ЭМ}T_{Э} \frac{d^2\omega}{dt^2} = (c_e)^{-1}U(t) - (c_e)^{-1}U^*(t) - (c_e)^{-1}U_M(\omega, X) - T_{ЭМ} \frac{d\omega}{dt} - E\omega, \quad (68)$$

$$\text{где } T_{ЭМ}T_{Э} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)}T_{Э}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)}T_{Э}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)}T_{Э}^{(4)} \end{bmatrix};$$

$$T_{ЭМ} = \begin{bmatrix} T_{ЭМ}^{(1)} & 0; & 0 \\ 0 & T_{ЭМ}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ЭМ}^{(4)} \end{bmatrix} - \text{диагональные матрицы, составленные из}$$

постоянных времени трёх управляемых двигателей постоянного тока;



$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{единичная диагональная матрица;}$$

$$(c_e)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_e^{(1)})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (c_e^{(3)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_e^{(4)})^{-1} \end{bmatrix} - \text{матрица, составленная из}$$

коэффициентов противо ЭДС двигателей  $c_e^{(i)}$ ;

$$T_{ЭМ}^{(i)} = \frac{J_i R_i}{c_e^{(i)} c_M^{(i)}}, i = 1, 3, 4; T_{Э}^{(i)} = \frac{L_i}{R_i}, i = 1, 3, 4; c_M^{(i)}, R_i, L_i - \text{параметры}$$

двигателей;

$J_i$  - моменты инерции приводов, приведённые к роторам двигателей;

$\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  - вектор частот вращения роторов двигателей, отличающих от скоростей исполнительных элементов станка

$V = \frac{dX^{(0)}}{dt} = \{V_1, V_3, V_4\}^T$  коэффициентами, определяемыми передаточными

отношениями редукторов, то есть  $V_i = k_p^{(i)} \omega_i, i = 1, 3, 4;$

$U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  - вектор управления (напряжений якоря), который может быть задан и в координатах перемещения суппорта, тогда этот вектор определяет программу ЧПУ станка;

$U^*(t) = \{U_1^*(t), U_1^*(t), U_1^*(t)\}^T$  - вектор моментов сопротивления вращений роторов без резания, определяемые конструктивными особенностями шпиндельной группы и свойствами подшипниковых узлов. Они являются известными. Будем считать, что  $U^*(t) = const$ ;

$U_M = \{U_M^{(1)}, U_M^{(3)}, U_M^{(4)}\}^T$  - вектор моментов сопротивления, определяемых процессом резания, приведённых к электрическим частям двигателей, являющихся известными функциями частот вращения роторов двигателей  $\omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}^T$  и упругих деформаций подсистемы инструмента  $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}^T$ .

Здесь удобно считать подсистему заготовки недеформируемой. Функции  $U_M$  определяются динамической моделью процесса резания и





свойствами редукторов. В частности, если двигатель вращения шпинделя находится непосредственно на нем, то

$$U_M^{(4)} = \frac{R_4}{c_M^{(4)}} [M_C^{(4)}(t) + T_3^{(4)} \frac{dM_C^{(4)}(t)}{dt}] \quad , \quad (69)$$

где

$$M_C^{(4)}(t) = \chi_2 R \rho \left\{ R_0(t) \int_{t-1/\omega_4}^t [k_3 \omega_3(\xi) - v_3(\xi)] d\xi - \int_{t-1/\omega_4}^t \int_0^t [k_3 \omega_3(\xi) - v_3(\xi)] [k_1 \omega_1(\xi) - V_1(\xi)] d\xi \right\}$$

- момент сопротивления, зависящий от скоростей  $V_1(t) = k_1 \omega_1(t)$ ,  $V_3(t) = k_3 \omega_3(t)$  движения суппортов продольных и поперечных перемещений, а также скоростей упругих деформационных смещений вершины инструмента относительно суппорта  $v_1(t)$ ,  $v_3(t)$ ;

$R(t)$  - радиус детали в рассматриваемой точке.

Величина управляемых упругих деформаций инструмента относительно координат суппорта определяется из следующей системы

$$\begin{cases} c_{1,1} X_1(t) + c_{2,1} X_2(t) + c_{3,1} X_3(t) = \chi_1 \rho \left\{ \int_{t-T}^t [V_3(\xi) - v_3(\xi)] d\xi \right\} \left\{ R_0(t) - \int_0^t [V_1(\xi) - v_1(\xi)] d\xi \right\} \\ c_{1,2} X_1(t) + c_{2,2} X_2(t) + c_{3,2} X_3(t) = \chi_2 \rho \left\{ \int_{t-T}^t [V_3(\xi) - v_3(\xi)] d\xi \right\} \left\{ R_0(t) - \int_0^t [V_1(\xi) - v_1(\xi)] d\xi \right\} \\ c_{1,3} X_1(t) + c_{2,3} X_2(t) + c_{3,3} X_3(t) = \chi_2 \rho \left\{ \int_{t-T}^t [V_3(\xi) - v_3(\xi)] d\xi \right\} \left\{ R_0(t) - \int_0^t [V_1(\xi) - v_1(\xi)] d\xi \right\} \end{cases} \quad (70)$$

где  $R_0(t)$  - известная функция изменения радиуса заготовки до обработки;

$\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$  - вектор угловых коэффициентов ориентации сил;

$v_1(t)$  и  $v_3(t)$  скорости упругих деформаций подсистемы инструмента в продольном и поперечном направлениях;

$T = 1/\omega_4$  - время одного оборота вращения шпинделя;

$c = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$  - матрица жесткости подсистемы инструмента.

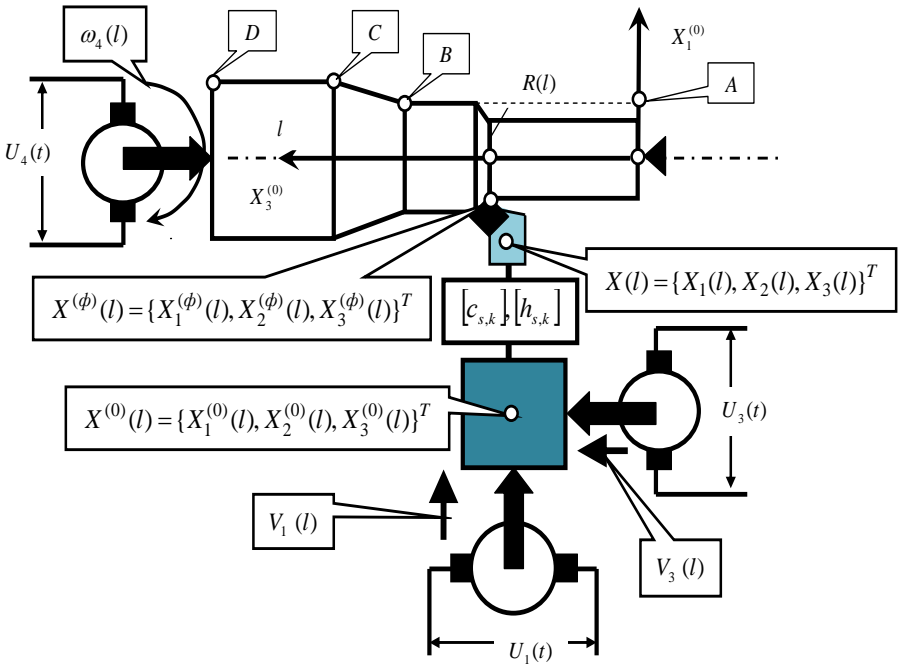


Рис.43. Схема управления формообразующими движениями инструмента относительно заготовки при точении

Если в системе (70) ограничимся линейным приближением правой части, то её можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} c_{1,1}X_1(t) + c_{2,1}X_2(t) + c_{3,1}X_3(t) = \chi_1\rho[S_p^{(0)}(t)t_p^{(0)}(t) - S_p^{(0)}(t)X_1(t) - t_p^{(0)}(t)X_3(t) + t_p^{(0)}X_3(t-T)]; \\ c_{1,2}X_1(t) + c_{2,2}X_2(t) + c_{3,2}X_3(t) = \chi_2\rho[S_p^{(0)}(t)t_p^{(0)}(t) - S_p^{(0)}(t)X_1(t) - t_p^{(0)}(t)X_3(t) + t_p^{(0)}X_3(t-T)]; \\ c_{1,3}X_1(t) + c_{2,3}X_2(t) + c_{3,3}X_3(t) = \chi_3\rho[S_p^{(0)}(t)t_p^{(0)}(t) - S_p^{(0)}(t)X_1(t) - t_p^{(0)}(t)X_3(t) + t_p^{(0)}X_3(t-T)], \end{cases}$$

где  $S_p^{(0)}(t) = \int_{t-1/\omega_4}^t V_3(\xi)d\xi$  - величина подачи на оборот без упругих



деформаций;  $t_p^{(0)}(t) = R_0(t) - \int_0^t V_1(\xi) d\xi$  - величина припуска без учета

упругих деформаций. Обозначим  $\int_{t-1/\omega_4}^t V_3(\xi) d\xi = \phi_{S_p}[\omega_3(t), \omega_4(t)]$ ,

$R_0(t) - \int_0^t V_1(\xi) d\xi = \phi_{t_p}[R_0(t), \omega_1(t)]$ , тогда технологические режимы

определяются следующей системой

$$\begin{cases} S_p^{(0)}(t) = \phi_{S_p}[\omega_3(t), \omega_4(t)] \\ t_p^{(0)}(t) = \phi_{t_p}[R_0(t), \omega_1(t)] \\ V_p(t) = R(t)\omega_4(t) \end{cases} \quad (71)$$

где  $V_p(t)$  - скорость резания;

$R(t)$  - текущее значение радиуса детали.

Таким образом, из систем (68 – 71) можно поставить задачу вычисления траекторий  $V_1(t)$ ,  $V_3(t)$  и  $\omega_4(t)$ , или соответствующих им траекторий  $V_1(l)$ ,  $V_3(l)$  и  $\omega_4(l)$ , при которых обеспечивается требование к точности изготовления детали. Траектория формообразующих движений вершины инструмента относительно заготовки, определяющая геометрию формируемой детали, складывается из траектории движений исполнительных элементов станка и упругих деформаций, то есть  $X^{(\phi)}(t) = X^{(0)}(t) + X(t)$ . Согласно синергетической концепции управления вначале необходимо определить технологические инварианты, которые характеризуют цель управления. Для процессов обработки в качестве технологических инвариантов целесообразно взять удовлетворяющие основной цели управления - изготовления детали с заданными показателями точности. Показатели микрорельефа и другие характеристики, зависящие от траекторий исполнительных элементов, учтем в ограничениях. В данном случае технологические инварианты характеризуют желаемое многообразие траекторий формообразующих движений вершины инструмента относительно заготовки.

В частности, для случая продольного точения вала (например, обработка на участках А-В и С-Д (см. рис. 69) при управлении процессом необходимо обеспечить постоянство диаметра детали, тогда инвариантное многообразие выбирается в следующем виде



$$\psi = R^{(жс)}(l) - X_1^{(0)}(l) + X_1(l) = 0 \quad (72)$$

где  $R^{(жс)}(l)$  - заданное требуемое по чертежу значение радиуса детали в точке  $l$ ;

$X_1^{(0)}(l)$  - программно задаваемое значение положение суппорта по направлению, нормальному к оси вращения заготовки;

$X_1(l)$  - вычисленные значения упругих деформационных смещений вершины инструмента.

Для случая точения детали сложной геометрической формы, например, обработка точением участка В-С, который допускает линейную интерполяцию, при управлении необходимо поддерживать такое соотношение скоростей продольного и поперечного перемещения, чтобы траектория движения суппортов соответствовала заданной траектории. Кроме того обеспечить постоянство заданных по условиям точности упругих деформаций инструмента в направлении, нормальном к оси вращения шпинделя. В данном случае инвариантное многообразие выбирается следующим образом

$$\begin{cases} \psi_1 = \omega_3(l) - k_p \omega_1(l) = 0 \\ \psi_2 = R^{(жс)}(l) - X_{1,0}(l) + X_1(l) = 0 \end{cases} \quad (73)$$

где  $k_p$  - коэффициент пропорциональности скоростей подачи;

$$\psi = \{\psi_1, \psi_2\}^T.$$

Таким образом, задача синтеза сводится к определению вектора  $U(l) = \{U_1(l), U_3(l), U_4(l)\}^T$  так, чтобы координаты вершины инструмента относительно заготовки двигались по многообразию  $\psi$ , или из начального состояния (в некоторой допустимой области) притягивались к многообразию  $\psi$ , и в дальнейшем двигались по этому направлению. Таким образом, многообразие  $\psi$  должно быть аттрактором, то есть асимптотическим устойчивым как для подсистемы «медленных» движений, так для подсистемы «быстрых» движений.

Если существует множество траекторий «медленных» движений исполнительных элементов станка  $\omega(l) = \{\omega_1(l), \omega_3(l), \omega_4(l)\}^T$ , обеспечивающих движений вершины инструмента относительно заготовки по многообразию  $\psi$ , и ему соответствует множество управлений

$U(l) = \{U_1(l), U_3(l), U_4(l)\}^T \in \mathfrak{R}_U$ , то именно на этом множестве строится программа ЧПУ для обработки рассматриваемого изделия. В производстве на конкретном оборудовании при изготовлении конкретной детали, как



правило, имеется справочник, который рекомендует выбрать технологические режимы для обеспечения заданного качества детали, поэтому введем рассмотрение множество технологических режимов  $\{S_P^{(0)}, t_P^{(0)}, V_P\}^T \in \mathfrak{R}_T$ , при котором обеспечивается заданное качество детали.

Таким образом, определение функции управления  $U(t)$  выполняется в несколько этапов. **На первом этапе** определяются множество технологических режимов  $\{S_P^{(0)}(l), t_P^{(0)}(l), V_P(l)\}^T$ , обеспечивающих заданное геометрическое качество детали. Если существует решение  $\{S_P^{(0)}(l), t_P^{(0)}(l), V_P(l)\}^T$ , то ему соответствуют желаемые траектории движений исполнительных элементов станка  $\{\omega_1(l), \omega_3(l), \omega_4(l)\}^T$ . Траектории  $\{\omega_1(l), \omega_3(l), \omega_4(l)\}^T$  легко перечисляются в функции времени  $\omega(t) = \{\omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)\}^T$ . **На втором этапе** определяется функция управления  $U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  на основе прямой постановки  $\omega(t) = \{\omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)\}^T$  в систему (67).

При определении множества траекторий  $\omega(t) = \{\omega_1(t), \omega_3(t), \omega_4(t)\}^T$  и соответствующего ему множества управления  $U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  необходимо обеспечить условия  $U(t) \in \Theta_U$ , где  $\Theta_U$  - множество допустимых управлений, которое учитывает физически допустимые вариации напряжений якорей двигателей. Кроме того полученная функция управления  $U(t) = \{U_1(t), U_3(t), U_4(t)\}^T$  должна обеспечить асимптотическую устойчивость траекторий. Необходимо отметить, что в зависимости от требований к показателям геометрического качества на данном оборудовании многообразия  $\mathcal{U}$  могут не существовать. Для этого проанализируем ограничения, накладываемые на траектории формообразующих движений исходя из закономерностей преобразования траекторий в показатели геометрического профиля формируемой детали.

### 4.3. Ограничения на траектории формообразующих движений

Ограничения, имеющие два основания. Первое связано с тем, что на формирование поверхности заготовки оказывают влияние не только траектории формообразующих движений вершины инструмента относительно заготовки, но и самостоятельные (не связанные с формообразующими



траекториями) процессы. Кроме этого в понятие качества детали входят не только параметры точности, но и другие характеристики. Второе обусловлено требованиями существования процесса резания. Например, при силах, действующих на инструмент, превышающих их значение, при которых наблюдается поломка инструмента или выкашивание режущих лезвий, процесс обработки принципиально не существует. Наконец, существуют ограничения, обусловленные интенсивностью эволюционных изменений параметров системы. Например, интенсивности изнашивания режущего инструмента. Этот вопрос будет изложен ниже при определении оптимальной траектории на многообразии.

Вначале остановимся на ограничениях, диктуемых требованиями качества. Будем рассматривать два основных показателя: точность и шероховатость. Поверхность детали образуется в результате пересечения поверхности инструмента и заготовки. В связи с этим на поверхности заготовки наблюдаются следы от геометрических параметров инструмента. Они характеризуют одну из важных компонент, формирующих микрорельеф. Эти составляющие микрорельефа зависят от геометрии инструмента и величины подачи на оборот. Для уменьшения этой регулярной составляющей микрорельефа обычно используют два приема. Первый основан на обеспечении радиуса инструмента при вершине, соизмеримого с величиной подачи на оборот. Второй основан на уменьшении вспомогательного угла в плане режущего инструмента. Именно эти приемы предлагает фирма Sandvik Coromant для обеспечения требуемой шероховатости поверхности. Следовательно, в зависимости от частоты вращения шпинделя на скорость продольного перемещения суппорта с учетом скорости упругих деформационных смещений наложено ограничение

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} \geq \mathfrak{R}_1. \quad (74)$$

Кроме этого на формируемую поверхность оказывают влияние самостоятельные процессы в зоне резания. Это процессы периодического формирования поверхностей скольжения в области первичной пластической деформации, которые оставляют следы на поверхности в направлении движения инструмента относительно заготовки. На формируемую поверхность оказывают влияние процессы контактирования задней грани с обработанной поверхностью, условия формирования стружки (сливная стружка, стружка надлома и пр.). В определенном скоростном диапазоне наблюдается формирование различных диссипативных структур, которые сами могут быть неустойчивыми. Например, формирование неустойчивого (срывающегося) нароста. Существуют многие другие факторы, влияющие на параметры качества поверхности. Их вклад в общую шероховатость поверхности определяется объемом пластической деформации в



зоне резания и градиентами распределения напряжений и деформаций в зоне обработки, прежде всего в области первичной пластической деформации. На показатели точности и характеристики микрорельефа оказывают влияние и тепловые процессы, влияющие как на текущие значения размера, так и на параметры шероховатости [10]. Именно термодинамическими процессами механической системы, взаимодействующей с процессом резания (внешней средой), объясняется формирование в зоне резания различных диссипативных структур (нароста, застойной зоны в области, прилегающей к передней поверхности инструмента, и пр.) [10]. Изучение термодинамических процессов выходит за рамки настоящего исследования. Например, при обработке конструкционных сталей срывающийся нарост, оказывающий негативное влияние на формируемую поверхность, формируется в диапазоне скоростей резания до (60,0 – 80,0) м/мин. Поэтому

$$R\omega_4 \geq \mathfrak{N}_2, \quad (75)$$

где  $R$  - радиус обрабатываемой детали в рассматриваемой точке.

На формируемую поверхность и показатели качества оказывают влияние, как уже отмечено, параметры, характеризующие точность металлорежущего станка. При этом основное влияние оказывают такие факторы как радиальное биение шпиндельного узла [12], а также параметры точности траекторий перемещений суппортных групп. Обеспечение точности траекторий перемещений суппортных групп особенно актуальны при рассмотрении малых перемещений, и перемещений с малыми скоростями относительного скольжения [12]. Это проблема конструирования станка, выходящая за рамки настоящего исследования. Поэтому будем считать, что траектории движения исполнительных элементов станка заданными и управляемыми в пределах точности станка. Влияние кинематических возмущений оценивается, как показано ниже, на основе рассмотрения возмущенных траекторий проектируемого многообразия.

Изучение взаимосвязи смещений инструмента относительно заготовки с параметрами микрорельефа в направлении движения инструмента относительно заготовки, а также геометрических параметров детали с деформационными смещениями инструмента, позволили выявить особенности влияния траекторий формообразующих движений на параметры качества детали [10]. При этом анализировалась взаимосвязь траектории движения вершины инструмента относительно заготовки с учетом упругих деформационных смещений  $X(t)$  в направлении, нормальном к формируемой поверхности, с профилем детали в этом же направлении  $R^{(V)}(t)$ . Заметим, что в настоящее время для оценивания параметров микрорельефа используются различные оценки, принятые в ГОСТ 2789-73, ГОСТ 24773-81. Однако для динамических исследований и оценивания связи динамических



смещений инструмента относительно заготовки с рельефом поверхности удобнее рассматривать функционалы над стационарными полями на поверхности, как это предлагается в [36]. Это так называемые топографические оценки [36]. Здесь, прежде всего, удобнее пользоваться корреляционно – спектральным анализом [36]. Это связано с тем, что реально наблюдаемые последовательности динамических смещений инструмента относительно заготовки являются функциями времени.

Приведем пример преобразования упругих деформаций инструмента относительно заготовки в функцию профиля детали, взятый нами из работы [10] (рис. 44). Как видно, в низкочастотной области (в частотном диапазоне до 2,0 – 4,0 кГц) упругие деформации инструмента относительно заготовки практически однозначно отображаются на рельефе поверхности обрабатываемой детали. Если следовать корреляционно – спектральной теории, то для оценивания степени обусловленности формируемой поверхности траекториями формообразующих движений удобнее пользоваться функцией когерентности  $K_{R^{(v)}}^2(\omega)$  между функцией профиля  $R^{(v)}(t)$  в направлении скорости резания и колебательными смещениями инструмента относительно заготовки  $X(t)$  в направлении, нормальном к формируемой поверхности (рис. 45). В указанном направлении следы от геометрии инструмента на поверхности заготовки отсутствуют, и они определяются исключительно динамическими особенностями процесса резания.

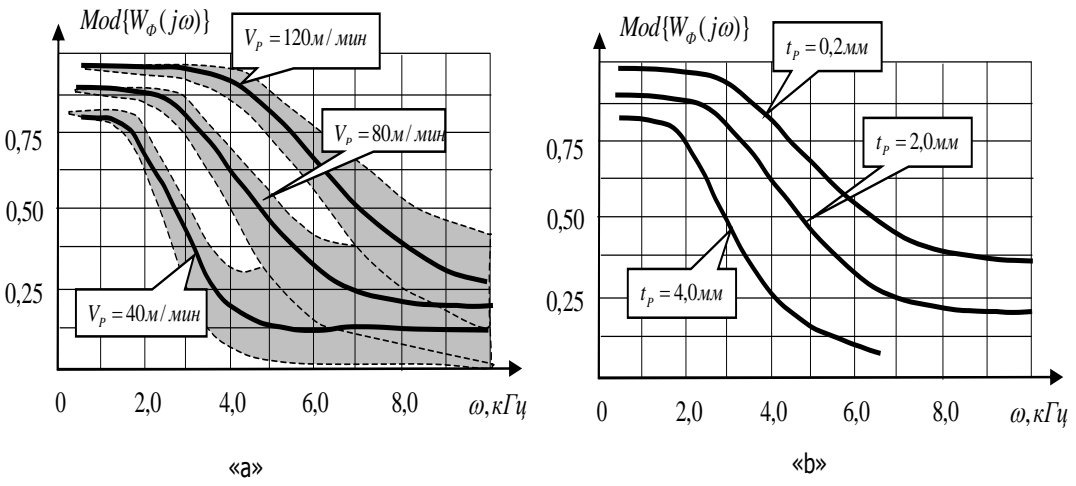


Рис. 44. Изменение модуля амплитудно-фазочастотной характеристики преобразования упругих деформаций инструмента относительно





заготовки в функцию профиля в зависимости от изменения технологических режимов: а -  $t_p^{(0)} = 2,0\text{мм}$ ,  $S_p^{(0)} = 0,14\text{мм/об}$ ,  $V_p = \text{var}$ ; б -  $t_p^{(0)} = \text{var}$ ,  $S_p^{(0)} = 0,14\text{мм/об}$ ,  $V_p = 80,0\text{м/мин}$ .

Для пояснения приведем пример профилограммы (рис. 46) в направлениях  $I^{(S)}$  и  $I^{(V)}$ . Направления указаны на рис. 45. Профилограммы получены на детали, обработанной трехгранным неперетачиваемым инструментом из Т15К6 при точении стали 20Х диаметром 120 мм на режимах: скорость резания 120 м/мин, подача – 0,1 мм. По оси ординат отложено отклонение профиля в мкм. Обработка без СОЖ. Радиус при вершине инструмента равен 0,8 мм.

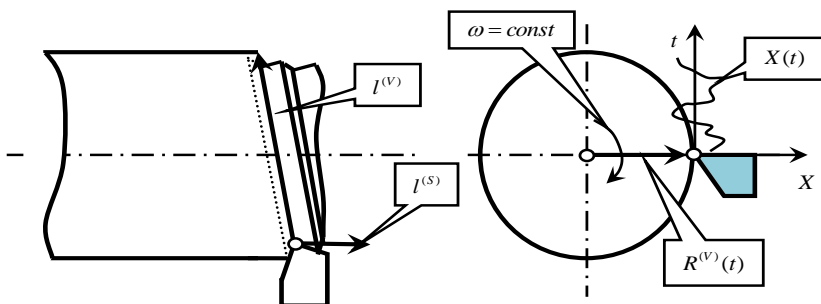


Рис. 45. Направления оценивания отклонений текущего радиуса детали при анализе микрорельефа формируемой поверхности

На нижней иллюстрации хорошо видны следы от инструмента с периодичностью, равной величине подачи на оборот. Для рассмотрения взаимосвязи колебаний с функцией профиля удобно профилограмму в направлении  $I^{(V)}$  перевести в функцию времени. При этом учтем, что скорость резания остается неизменной. Для оценивания частотного состава неровностей в направлении скорости резания рассмотрим спектральный состав формируемого микрорельефа  $S_{R,R}(\omega)$ , полученный вначале на основе вычисления автокорреляционной функции, а затем спектральной плотности. Кроме этого рассмотрены также характеристики текущего спектра, вычисленные на основе определения модуля прямого преобразования Фурье от функции  $R^{(V)}(t)$  (рис. 47). Спектральный состав вычислен в



частотном диапазоне от 0,5 кГц до 40,0 кГц. Амплитудный спектр, вычисленный на основе прямого преобразования Фурье, для наглядности представлен в низкочастотной области (в диапазоне 0,5 – 5,0 кГц (рис. 6.6 «а») и в высокочастотной области (в диапазоне 5,0 – 40,0 кГц). Как видно, спектральный состав микрорельефа в высокочастотной области является достаточно широкополосным.

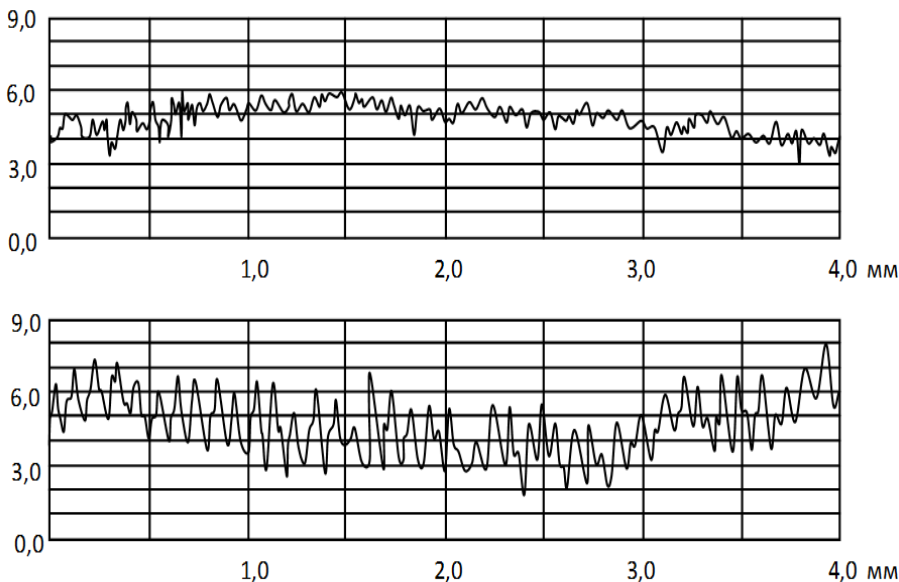


Рис. 46. Сравнение профилограмм поверхности в направлениях  $l^{(S)}$  (нижняя иллюстрация) и  $l^{(V)}$  (верхняя иллюстрация)

Для приведенной иллюстрации дадим также пример функции когерентности  $K_{R^{(v)}}^2(\omega)$  (рис.48) в направлении  $l^{(V)}$ . Затемненная часть диаграммы соответствует частотному диапазону, в котором профиль поверхности определяется траекторией формообразующих движений инструмента относительно заготовки.

Приведенная функция когерентности соответствует обработке изношенным инструментом. Однако по мере развития износа критическая частота  $\omega^{(K)}$ , при которой наблюдается резкое уменьшение функции когерентности, смещается в низкочастотную область. Сравнение рис. 48 с рис.49 показывает, что неровности на поверхности обрабатываемой детали в частотном диапазоне от 3,0 кГц определяются исключительно самостоятельными процессами в зоне резания и параметры поверхности никак



не связаны с колебательными смещениями инструмента относительно заготовки в направлении, нормальном к формируемой поверхности. В свою очередь, в частотном диапазоне до  $\omega^{(K)}$  они формируются в основном смещениями инструмента относительно заготовки.

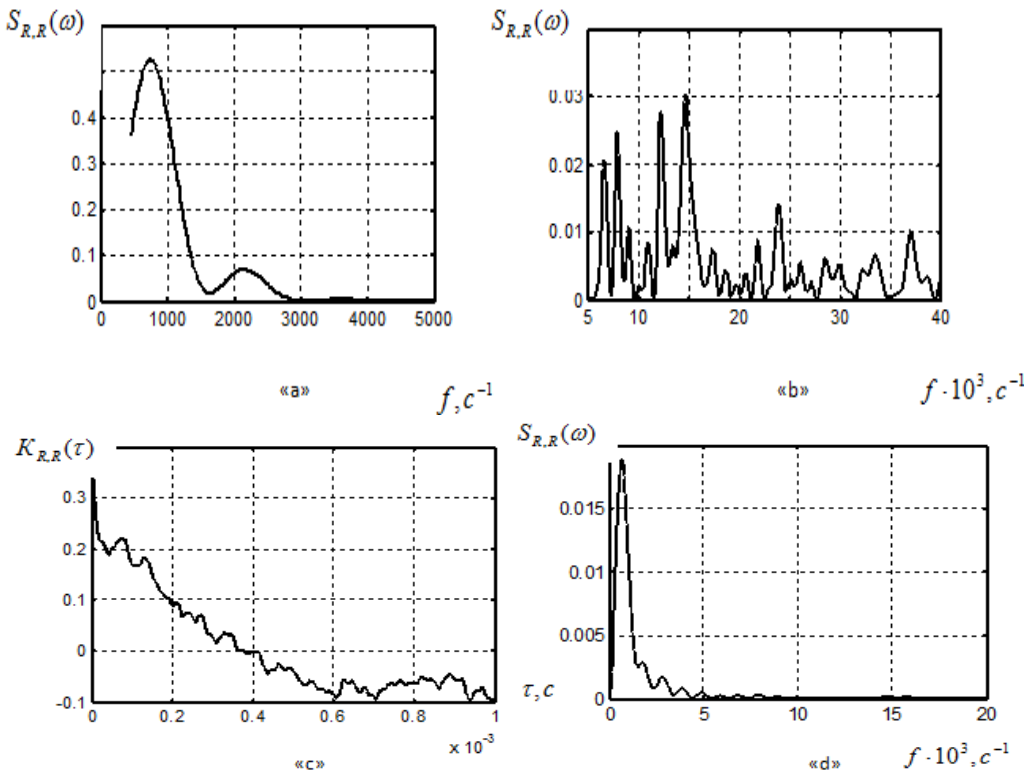


Рис. 47. Пример спектральных характеристик функции  $R^{(V)}(t)$  : «а, б» - нормированный к дисперсии амплитудный спектр, вычисленный на основе прямого преобразования Фурье в различных частотных областях; «в» - автокорреляционная функция; «д» - автоспектр.

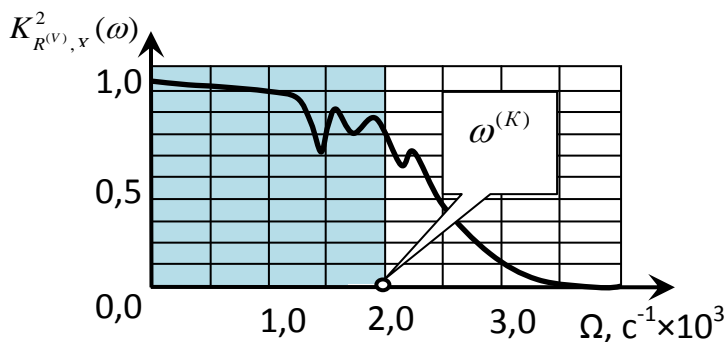


Рис.48. Функция когерентности  $K_{R,X}^2(\omega)$ , соответствующая обработке на рис.6.6

Отметим следующие особенности преобразования траекторий формообразующих движений в функцию профиля детали.

1) Функция когерентности между траекторией движений вершины инструмента относительно заготовки и функцией профиля  $K_{R,X}(\omega)$  по мере увеличения частоты является монотонно затухающей. Причем, в низкочастотной области она приближается к единице, а в высокочастотной области асимптотически стремится к нулю. В связи с этим можно утверждать, что по мере увеличения частоты рассматриваемых периодических колебаний возрастает роль самостоятельных процессов в зоне резания при формировании параметров качества изготовления детали. Причем критическая частота, при которой резко уменьшается функция когерентности при неизменных радиусах режущего инструмента при вершине, зависит от условий обработки и технологических режимов. Во всех случаях она снижается при увеличении объема пластической деформации материала в зоне резания, уменьшении градиентов напряжений и деформаций в зонах первичной и вторичной деформации, увеличении площади контакта задней поверхности с обрабатываемой заготовкой.

2) Неопределенность, вносимая процессом обработки, в формировании поверхности детали имеет три главных взаимосвязанных источника (рис. 49). Первый определяется областью, прилегающей к вершине режущего инструмента со стороны главного и вспомогательного режущих лезвий. На рис. 49 – это область «В-С-D». Именно в этой области формируется главная неопределенность формирования поверхности, вносимая собственно процессом резания. Подчеркнём, что даже в том



случае, когда смещения во времени инструмента относительно заготовки отсутствуют, поверхность детали формируется не идеально. Второй определяется процессами, прилегающими к главному режущему лезвию. На рис. 49 – это область «А-В-D-E». Не смотря на то, что неопределенность, вносимая процессом резания, в этой области непосредственно не влияет на формируемую поверхность, процессы, протекающие в ней, взаимосвязаны с процессами в первой области.

Подчеркнем, что уровень неопределенности, вносимый процессом резания, зависит от объема пластической деформации, приходящийся на единицу приращения длины главного режущего лезвия. Ясно, что неопределенность, вносимая процессом резания, зависит также от всех факторов, влияющих на процессы пластической деформации (СОЖ, свойств поверхности инструмента, его геометрии и пр.).

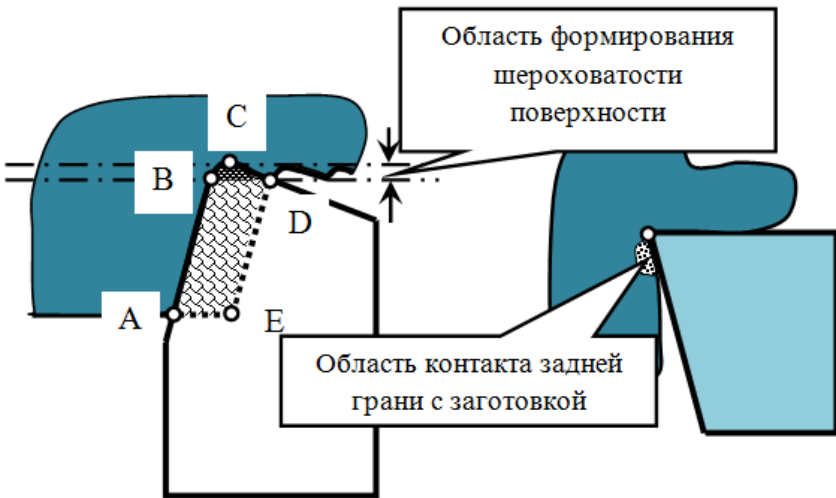


Рис. 49. Области в зоне резания, в которых формируются самостоятельные процессы, влияющие на формируемую поверхность детали

3) Известно, что статистические свойства микрорельефа зависят от направления измерения профилограммы. Профилограмма в направлении оси вращения заготовки имеет регулярно повторяющиеся неровности имеющие периодичность, равную величине подачи на оборот. На эти регулярные составляющие наложен случайный шум. Поэтому статистические свойства микрорельефа в направлении скорости резания в основном зависят от самостоятельных процессов в зоне резания. Именно поэтому для анализа обусловленности формируемой поверхности траекториями формообразую-



щих движений инструмента относительно заготовки целесообразно использовать функцию когерентности (рис. 48). Важно подчеркнуть, что неровности, обусловленные геометрией инструмента и технологическими режимами, являются независимыми (аддитивными) по отношению к неровностям, обусловленным самостоятельными процессами в зоне резания.

4) Неопределенность, вносимая процессом резания на формирование поверхности, зависит также от условий контакта задней грани инструмента с заготовкой (рис. 49). В свою очередь условия контакта изменяются, прежде всего, в зависимости от износа инструмента. Подчеркнем, что в данном случае речь идет не о влиянии размерного износа, а, прежде всего, об изменении условий пластической деформации по мере развития износа. Наконец, на условия формирования поверхности детали оказывают влияние формируемые в процессе резания диссипативные структуры (нарост, в том числе срывающийся, застойная зона и пр.). Износ инструмента, изменения свойств поверхности инструмента по мере развития износа, формирование диссипативных структур и другие термодинамические процессы являются типично эволюционными. Поэтому при определении ограничений на текущие значения технологических режимов необходимо учитывать эволюционные свойства самостоятельных процессов в зоне резания.

Изучение функций когерентности, выполненные нами, а также другими исследователями [10] показывает, что при выборе желаемого многообразия траекторий формообразующих движений необходимо учитывать предельно достижимую точность изготовления деталей, зависящую при прочих неизменных условиях от объема пластической деформации, который связан с формируемыми силами резания. Следовательно, существует еще одно ограничение на траектории формообразующих движений, которое можно представить в виде

$$\rho\{R_0(t) \int_{t-1/\omega_4}^t [k_3\omega_3(\xi) - v_3(\xi)]d\xi - \int_{t-1/\omega_4}^t \int_0^t [k_3\omega_3(\xi) - v_3(\xi)][k_1\omega_1(\xi) - v_1(\xi)]d\xi d\zeta\} \leq \mathfrak{R}_3$$

Следующий фактор, ограничивающий достижимые параметры формируемого рельефа поверхности, определяется кинематическими возмущениями, действующими со стороны металлорежущего станка. Здесь главное значение имеют радиальные биения шпинделя, которые главным образом влияют на формирование волнистости поверхности детали в поперечном сечении. Это связано с тем, что частотный состав кинематических возмущений имеет ограниченный с верху диапазон. Он не превышает пяти – шести частот вращения шпинделя. В частности, в прецизионных станках радиаль-



ные биения шпинделя не превышают  $(0,2 - 0,1)$  мкм. Они также изменяются в ходе функционирования станка, прежде всего, за счет тепловых деформаций, износа и сил резания. Однако в современных прецизионных станках радиальные биения шпинделя, характеризующие кинематические неуправляемые возмущения, не превышают  $0,2$  мкм. Достижение таких показателей точности станков требуют больших усилий, в том числе при их эксплуатации. Обычно радиальные биения шпинделей станков, используемых в производстве, могут достигать величин  $(0,8 - 1,2)$  мкм.

Все указанные факторы, в том числе тепловые деформации элементов станка, приводят к пространственным смещениям, вызывающим кинематические возмущения на координаты формообразующих движений. Таким образом, под кинематическими возмущениями мы понимаем возмущения любой физической природы, вызывающие отклонения пространственных координат положения вершины инструмента и точки на заготовке в контакте с ней вершины инструмента. Эти возмущения являются внешними и не связанными с управлением траекториями формообразующих движений инструмента относительно заготовки. Они возмущают стационарные траектории движения инструмента относительно заготовки. Механизм влияния кинематических возмущений и примеры будут рассмотрены в следующих параграфах.

Таким образом, каждый металлорежущий станок характеризуется своими выходными характеристиками, влияющими на точность траекторий исполнительных элементов. Скрупулезное исследование факторов, влияющих на отклонения траекторий исполнительных элементов станка от идеальных, определяющих кинематические возмущения, приведены в работах [28, 29]. В рамках настоящего исследования функцию кинематических возмущений мы будем считать заданной. Кроме этого при моделировании точности изготовления деталей необходимо принимать во внимание два дополнительных обстоятельства. Во-первых, параметры динамической связи, формируемой процессом резания, определяются на основе идентификации. Поэтому они оценены с некоторой погрешностью. Их можно задать своими математическими ожиданиями и дисперсией. Во-вторых, все параметры являются эволюционными. Приведенный в предыдущих главах материал показывает, что эволюционные преобразования в динамической системе резания не ограничиваются традиционно рассматриваемым износом инструмента. Эволюция проявляется и в изменениях динамической связи, формируемой процессом резания, в потере устойчивости, в формировании различных многообразий в окрестностях стационарных траекторий и пр. Кроме этого, в зависимости от эволюционного параметра  $\rho$  смещаются не только траектории, но и формируемые силы (правые части систем дифференциальных уравнений). Эти силы могут



достигать критических значений, при которых напряжения в инструменте достигают своих предельных значений. Необходимо подчеркнуть, что терминальное состояние процесса резания, после которого процесс необходимо остановить, характеризуется не только износом, но и всеми отмеченными параметрами и координатами. Другими словами, ограничения (49, 76) являются эволюционно изменчивыми.

Наконец, имеют место ограничения, обусловленные требованиями к состоянию процесса резания. Здесь, прежде всего, необходимо учитывать предельно допустимые значения сил резания, зависящие от площади срезаемого слоя. Очевидно, что ограничения на предельные значения сил определяются выражением (77). Приведенный анализ показывает, что определение желаемого многообразия траекторий формообразующих движений должно выполняться в несколько этапов. На первом этапе определяется многообразие траекторий без ограничений на траектории. На втором этапе на этом многообразии определяются траектории, удовлетворяющие условиям (75 – 77). Наконец, на третьем этапе на многообразии определяется единственная траектория, удовлетворяющая требованию минимума приведенных затрат на изготовление партии деталей.

#### 4.4. Построение программного управления процессом точения на основе синергетической концепции

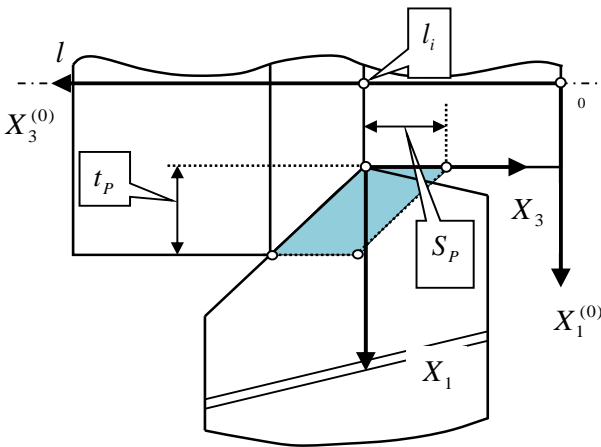
Вначале рассмотрим случай управления процессом точения вала неизменного диаметра, имеющего изменяющуюся жесткость вдоль оси вращения шпинделя (рис 50). При этом будем основываться на положениях, изложенных в третьей главе. Пусть заданы управляемые траектории движения исполнительных элементов станка  $X^{(0)}(l) = \{X_1^{(0)}(l), X_3^{(0)}(l), X_4^{(0)}(l)\}^T$  вдоль оси вращения шпинделя  $l$ , то есть  $X_3^{(0)}(l)$ , которые определяют технологические режимы  $S_p^{(0)}$ ,  $t_p^{(0)}$  и  $V_p^{(0)}$ . Кроме этого, пусть заданы значения матриц жесткости подсистем инструмента  $c^{(u)} = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$  и заготовки  $c^{(3)} = [c_{s,k}(l)]$ ,  $s, k = 4, 5, 6$  вдоль оси  $l$ . В общем случае можно дополнительно полагать заданными вариации припуска вдоль оси  $l$ , представленные в виде функции  $R_0(l)$ . Каждой точке  $l_i$  вдоль оси  $l$  соответствует пара векторов упругих деформационных смещений инструмента  $X^{(1)}(l_i) = \{X_1(l_i), X_2(l_i), X_3(l_i)\}^T$  и заготовки





$X^{(2)}(l_i) = \{X_4(l_i), X_5(l_i), X_6(l_i)\}^T$ . Координаты  $l_i$  отчитываются от центра правого торца заготовки. Тогда для определения текущего значения диаметра детали  $d = 2R$  при заданных упругих деформационных смещениях  $X^{(1)}(l_i)$  и  $X^{(2)}(l_i)$ , которые смещают центр заготовки от точки « $0_1^{(1)}$ » к точке « $0_1^{(2)}$ », а также вершину инструмента от точки « $0_2^{(1)}$ » к точке « $0_2^{(2)}$ », можно воспользоваться очевидным геометрическим соотношением

$$R(l_i) = \sqrt{[X_1^{(0)}(l_i) - X_1(l_i) - X_4(l_i)]^2 + [-X_2(l_i) - X_5(l_i)]^2}, \quad (77)$$



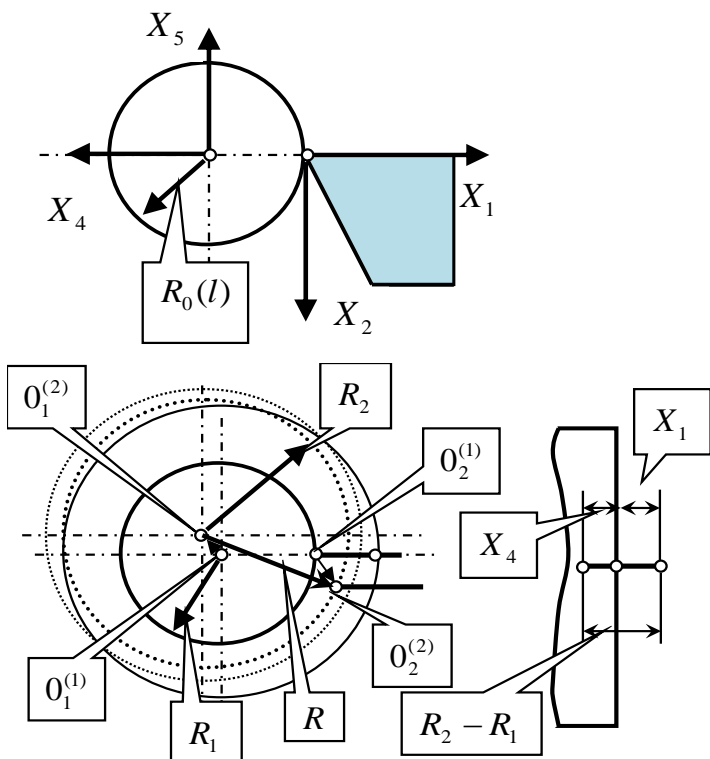


Рис. 50. Схема формирования поверхности детали с учетом упругих деформационных смещений инструмента и заготовки

Однако при обработке заготовки, в которой диаметр существенно превышает упругие деформационные смещения (это традиционные условия), (77) можно существенно упростить. В этом случае с достаточной точностью можно рассматривать отклонение радиуса как сумму деформационных смещений инструмента и заготовки в направлении осей  $X_1(l_i)$  и  $X_4(l_i)$ , то есть выражение (77) представляется в виде

$$R(l_i) = X_1^{(0)}(l_i) - X_1(l_i) - X_4(l_i). \quad (78)$$

Тогда для вычисления установившихся деформационных смещений инструмента относительно заготовки можно воспользоваться выражением



$$c_{\Sigma}(l_i)X(l_i) = \Phi(l_i), \quad (79)$$

где  $X(l_i) = \{X_1(l_i), X_2(l_i), \dots, X_6(l_i)\}^T$  - вектор упругих деформационных смещений инструмента и заготовки в точке  $l_i$  вдоль оси вращения заготовки;

$\Phi(l_i) = \rho[t_p^{(0)}(l_i)S_p^{(0)}(l_i) + t_p^{(0)}(l_i)X_3(l_{i-1}) + t_p^{(0)}(l_i)X_6(l_{i-1})]\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$  - вектор сил, в которых величина припуска без упругих деформаций  $t_p^{(0)}(l_i) = R_0(l_i) - X_1^{(0)}(l_i)$ ;

$$c_{\Sigma}(l_i) = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \rho(l_i)\chi_1 S_p^{(0)}(l_i) & c_{2,1} & c_{3,1} + \rho(l_i)\chi_1 t_p^{(0)}(l_i) & \Leftrightarrow \\ c_{1,2} + \rho(l_i)\chi_2 S_p^{(0)}(l_i) & c_{2,2} & c_{3,2} + \rho(l_i)\chi_2 t_p^{(0)}(l_i) & \Leftrightarrow \\ c_{1,3} + \rho(l_i)\chi_3 S_p^{(0)}(l_i) & c_{2,3} & c_{3,3} + \rho(l_i)\chi_3 t_p^{(0)}(l_i) & \Leftrightarrow \\ \rho(l_i)\chi_1 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \rho(l_i)\chi_1 t_p^{(0)}(l_i) & \Leftrightarrow \\ \rho(l_i)\chi_2 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \rho(l_i)\chi_2 t_p^{(0)}(l_i) & \Leftrightarrow \\ \rho(l_i)\chi_3 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \rho(l_i)\chi_3 t_p^{(0)}(l_i) & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \rho(l_i)\chi_1 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \rho(l_i)\chi_1 t_p^{(0)}(l_i) \\ \Leftrightarrow & \rho(l_i)\chi_2 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \rho(l_i)\chi_2 t_p^{(0)}(l_i) \\ \Leftrightarrow & \rho(l_i)\chi_3 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \rho(l_i)\chi_3 t_p^{(0)}(l_i) \\ \Leftrightarrow & c_{4,4}(l_i) + \rho(l_i)\chi_1 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \rho(l_i)\chi_1 t_p^{(0)}(l_i) \\ \Leftrightarrow & \rho(l_i)\chi_2 S_p^{(0)}(l_i) & c_{5,5}(l_i) & \rho(l_i)\chi_2 t_p^{(0)}(l_i) \\ \Leftrightarrow & \rho(l_i)\chi_3 S_p^{(0)}(l_i) & 0 & c_{6,6} + \rho(l_i)\chi_3 t_p^{(0)}(l_i) \end{bmatrix}.$$

Система (79) позволяет вычислить деформационные смещения вершины инструмента и заготовка  $X(l_i) = \{X_1(l_i), X_2(l_i), \dots, X_6(l_i)\}^T$ . Однако в отличие от задачи определения  $X(l) = \{X_1(l), X_2(l), \dots, X_6(l)\}^T$  для задачи синтеза необходимо определить закон управления траекториями «медленных» движений исполнительных элементов станка таким образом, чтобы выполнить условие (78),

$$R^{(жс)}(l) = X_1^{(0)}(l) - X_1(l) - X_4(l) = const. \quad (80)$$

$$\psi = R^{(жс)}(l) - X_1^{(0)}(l) + X_1(l) + X_4(l) = 0 \quad (81)$$

где  $R^{(жс)}(l)$  - заданное желаемое значение радиуса детали.



Прежде чем переходить к дальнейшему анализу рассмотрим принципиальные возможности управления точностью обработки, вытекающим из (81). Условие (81) можно обеспечить, по крайней мере, тремя способами, каждый из которых имеет ограниченные возможности. Во-первых, можно обеспечивать точность путем варьирования скорости продольной подачи. Именно этот способ будет рассматриваться в настоящем параграфе. С помощью этого метода можно эффективно управлять упругими деформационными смещениями и, следовательно, точностью в пределах допустимых вариаций величины подачи на оборот.

Во-вторых, на основе выбора геометрии инструмента (вектора угловых коэффициентов  $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$ ) можно обеспечить условие (81). Однако при обработке детали, у которой параметры жесткости изменяются вдоль оси  $l$ , условие зависит от текущей координаты, а изменение углов режущего инструмента в процессе обработки не возможно. Кроме этого компоненты вектора  $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$  существенно меняются по мере развития износа инструмента.

В-третьих, точностью можно управлять путем варьирования координаты вершины инструмента по отношению к оси вращения заготовки, влияющей на  $t_p^{(0)}$ . Это наиболее общий случай управления. Однако в этом случае необходимо варьировать знак скорости суппорта поперечных перемещений.

Рассмотрим подробно случай управления скоростью продольной подачи. Пусть заданы  $R_0(l) = const$  и  $\rho(l) = const$ ,  $t_p^{(0)}(l) = R_0(l) - X_1^{(0)}(l) = const$ . Кроме того, будем полагать постоянными другие параметры (например, геометрию инструмента) и частоту шпинделя. Если скорость вращения шпинделя по каким-то причинам изменяется по оси  $l$ , то  $T = T(l)$ . Здесь также не принимается во внимание эволюционное изменение параметров системы. Главное значение имеет изменение параметров  $c^{(3)} = [c_{s,k}(l_i)]$ ,  $s, k = 4, 5, 6$ . При необходимости его можно обобщить и на случай, когда  $\rho(l) \neq const$  и  $R(l) \neq const$ . Упругие деформационные смещения  $X_3(0)$  и  $X_6(0)$  в начальный момент времени можно считать равными нулю.

Согласно процедуре синтеза управления вначале определяется последовательность значений  $S_p^{(0)}(l_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , где  $m$  - число оборотов заготовки, потребное для прохождения пути, соответствующего длине обрабатываемой поверхности, для обеспечения условия (81). Для этого



поставляя переменную  $X_1(l_i) = \Delta R - X_4(l_i)$ , ( $\Delta R = R^{(жк)} - X_1^{(0)}$ ), полученную из (81) в систему (79), после предварительно преобразования получим следующую систему

$$C_{\Sigma}(l_i)Z(l_i) = G(l_i) \quad (82)$$

где  $Z(l_i) = \{S_P^{(0)}(l_i), X_2(l_i), X_3(l_i), X_4(l_i), X_5(l_i), X_6(l_i)\}^T$ ;

$$G(l_i) = \begin{bmatrix} \chi_1 \rho X_3(l_{i-1}) + \chi_1 \rho X_6(l_{i-1}) - c_{1,1} \Delta R \\ \chi_2 \rho X_3(l_{i-1}) + \chi_2 \rho X_6(l_{i-1}) - c_{1,2} \Delta R \\ \chi_3 \rho X_3(l_{i-1}) + \chi_3 \rho X_6(l_{i-1}) - c_{1,3} \Delta R \\ \chi_1 \rho X_3(l_{i-1}) + \chi_1 \rho X_6(l_{i-1}) \\ \chi_2 \rho X_3(l_{i-1}) + \chi_2 \rho X_6(l_{i-1}) \\ \chi_3 \rho X_3(l_{i-1}) + \chi_3 \rho X_6(l_{i-1}) \end{bmatrix};$$

$$C_{\Sigma}(l_i) = \begin{bmatrix} \chi_1 \rho(\Delta R - t_P^{(0)}) & c_{2,1} & c_{3,1} + \chi_1 \rho t_P^{(0)} & c_{1,1} & 0 & \chi_1 \rho t_P^{(0)} \\ \chi_2 \rho(\Delta R - t_P^{(0)}) & c_{2,2} & c_{3,2} + \chi_2 \rho t_P^{(0)} & c_{2,1} & 0 & \chi_2 \rho t_P^{(0)} \\ \chi_3 \rho(\Delta R - t_P^{(0)}) & c_{2,3} & c_{3,3} + \chi_3 \rho t_P^{(0)} & c_{3,1} & 0 & \chi_3 \rho t_P^{(0)} \\ \chi_1 \rho(\Delta R - t_P^{(0)}) & 0 & \chi_1 \rho t_P^{(0)} & c_{4,4}(l_i) & 0 & \chi_1 \rho t_P^{(0)} \\ \chi_2 \rho(\Delta R - t_P^{(0)}) & 0 & \chi_2 \rho t_P^{(0)} & 0 & c_{5,5}(l_i) & \chi_3 \rho t_P^{(0)} \\ \chi_3 \rho(\Delta R - t_P^{(0)}) & 0 & \chi_3 \rho t_P^{(0)} & 0 & 0 & c_{4,4}(l_i) + \chi_3 \rho t_P^{(0)} \end{bmatrix}$$

Для каждого  $l_i$  можно найти решение при условии, что известны деформационные смещения вершины инструмента на предыдущем шаге « $X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1})$ », по формуле

$$Z(l_i) = C_{\Sigma}(l_i)^{-1} G(l_i) \quad (83)$$

Тогда значение  $S_P^{(0)}(l_i)$  определяется первой составляющей решения (83)

$$S_P^{(0)}(l_i) = Z_1(l_i) \quad (84)$$

Необходимо отметить, что обычно при обеспечении точности значение диаметра в пределах первого (или нескольких первых оборотов) можно не принимать во внимание. Полученная последовательность



$S_p^{(0)} = \{S_p^{(0)}(0), S_p^{(0)}(1), S_p^{(0)}(2), \dots, S_p^{(0)}(m)\}^T$  фактически задает фазовую траекторию перемещения суппорта (рис.51). Если в пределах одного оборота заготовки рассматривать среднюю скорость продольного перемещения суппорта  $\tilde{V}_3(i) = \frac{1}{T} \int_{t_{i-T}}^{t_i} V_3(t) dt$ , то  $\tilde{V}_3(i) = \frac{S_p^{(0)}(i)}{T}$ . Поэтому функция

изменения скорости продольных перемещений будет определяться последовательностью  $\tilde{V}_3 = \{\tilde{V}_3(0), \tilde{V}_3(1), \tilde{V}_3(2), \dots, \tilde{V}_3(m)\}^T$ , которая фактически задает функцию  $\tilde{V}_3(l)$ .

изменения скорости продольных перемещений будет определяться последовательностью  $\tilde{V}_3 = \{\tilde{V}_3(0), \tilde{V}_3(1), \tilde{V}_3(2), \dots, \tilde{V}_3(m)\}^T$ , которая фактически задает функцию  $\tilde{V}_3(l)$ .

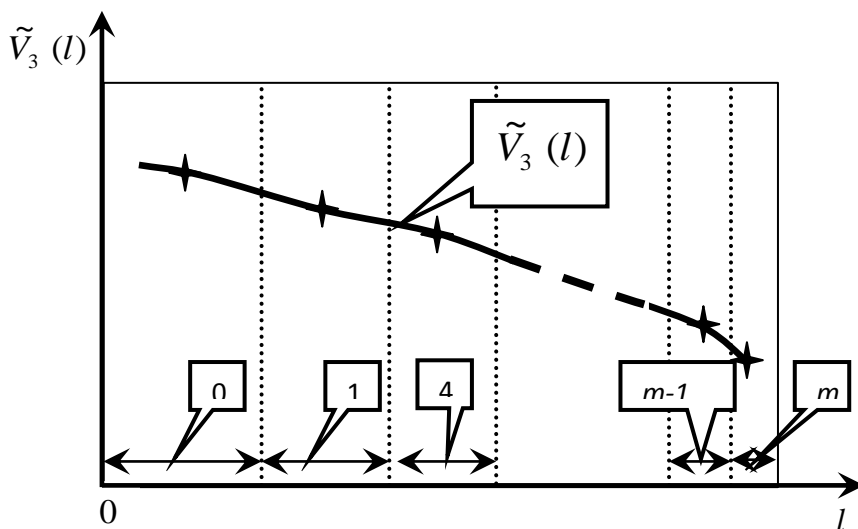


Рис. 51. Усредненная по периодам вращения шпинделя фазовая желаемая траектория продольных перемещений суппорта.

Если не принимать во внимание погрешность, которая образуется при преобразовании программы ЧПУ в траекторию перемещения исполнительного элемента (в данном случае скорости продольного суппорта), то полученная траектория является основой для построения программы ЧПУ. Известно, что при построении программы ЧПУ используются различные методы аппроксимации движения от точки к точке. Это проблема интерполяции, которая осуществляется линейной аппроксимацией (линейная интерполяция) или аппроксимацией в виде элементов окружностей (круговая интерполяция) [26]. Однако в тех случаях, когда необходимо достаточно



быстро изменять скорость, то при программировании по траектории  $\tilde{V}_3(l)$  возникает существенная динамическая погрешность, обусловленная ограниченной полосой пропускания серводвигателя. В связи с этим, траекторию изменения скорости подачи суппорта целесообразно преобразовать в траекторию изменения управляющего воздействия серводвигателя.

Для этого последовательность  $\tilde{V}_3 = \{\tilde{V}_3(0), \tilde{V}_3(1), \tilde{V}_3(2), \dots, \tilde{V}_3(m)\}^T$  целесообразно представить в виде функции изменения скорости во времени  $\tilde{V}_3(t) = \{\tilde{V}_3(0), \tilde{V}_3(T), \tilde{V}_3(2T), \dots, \tilde{V}_3[mT]\}^T$ . Так как частота шпинделя на рассматриваемом участке остается неизменной, то все дискретные значения  $S_p^{(0)}(i)$  суппорт проходит через неизменные промежутки времени, равные  $T$ . Если частота вращения шпинделя изменяется по пути движения суппорта, то изменяются и последовательности  $\tilde{V}_3$  и  $\tilde{V}_3(t)$ . Они изменяются и в том случае, когда обрабатывается деталь сложной геометрической формы.

После определения  $\tilde{V}_3(t) = \{\tilde{V}_3(0), \tilde{V}_3(T), \tilde{V}_3(2T), \dots, \tilde{V}_3[mT]\}^T$  можно ввести желаемую траекторию изменения скорости подачи как функцию времени  $V_3^{(Ж)}(t)$  (рис. 52).

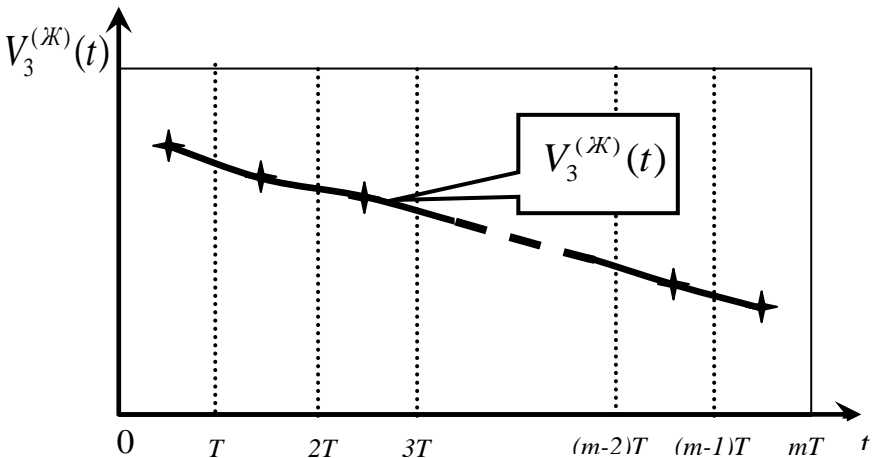


Рис. 52. Усредненная по периодам вращения шпинделя желаемая траектория продольных перемещений суппорта во времени.



Затем ее аппроксимировать полиномом Тейлора относительно времени  $t$

$$V_3^{(Ж)}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} V_{i,0} t^i, \quad (85)$$

и для рассматриваемой функции времени определить управление, обеспечивающее движение по траектории (85). Для этого необходимо знать управление, связывающее траекторию перемещения суппорта с управлением серводвигателя.

Не нарушая общности, покажем алгоритм определения управления  $U(t)$ , обеспечивающего во времени движение по закону (85), для серводвигателя постоянного тока. Для этого, как и в третьей главе, воспользуемся уравнением преобразования напряжения якоря в частоту вращения ротора серводвигателя. При этом будем полагать, что эта связь является детерминированной и вариациями момента сопротивления в редукторе можно пренебречь. Тогда связь между скоростью  $V_3^{(Ж)}(t)$  и напряжением якоря  $U(t)$  определяется

$$U(t) = kc_e \{ T_{ЭМ} T_{Э} \frac{d^2 V_3^{(Ж)}(t)}{dt^2} + T_{ЭМ} \frac{dV_3^{(Ж)}(t)}{dt} + V_3^{(Ж)}(t) \} + M^*(t), \quad (86)$$

где  $M^*(t) = \frac{R_{я}}{c_M} \{ M_c(t) + T_{Э} \frac{dM_c(t)}{dt} \}$  - обобщенное возмущение,

определяемое функцией изменения момента сопротивления, действующего на ротор двигателя;

$k$  - параметр, зависящий от передаточного отношения редуктора.

Принимая во внимание (85) с учетом (86), имеем

$$\begin{aligned} U(t) = kc_e \{ & (V_{0,0} + T_{Э} V_{1,0} + T_{Э} T_{ЭМ} V_{2,0}) + (V_{1,0} + 2T_{Э} V_{2,0} + 2 \cdot 3 \cdot T_{Э} T_{ЭМ} V_{3,0}) t + \\ & + (V_{2,0} + 3T_{Э} V_{3,0} + 3 \cdot 4 \cdot T_{Э} T_{ЭМ} V_{4,0}) t^2 + \dots + \\ & + [V_{n-2,0} + (n-1)T_{Э} V_{n-1,0} + (n-1) \cdot n \cdot T_{Э} T_{ЭМ} V_{n,0}] t^{n-2} + \\ & + (V_{n-1,0} + nT_{Э} V_{n,0}) t^{n-1} + V_{n,0} t^n \} + M^*(t). \end{aligned} \quad (87)$$





Полагая  $M^* = const$  и заданным, на основе (86) получаем функцию изменения напряжения якоря серводвигателя во времени, которой соответствует желаемая траектория изменения скорости продольной подачи. В результате получаем функцию  $U(l)$ , которая позволяет построить программу ЧПУ, в которой учитываются динамические свойства преобразования напряжения якоря в траекторию движения суппорта, а также траектории движения суппорта в траекторию формообразующих движений инструмента относительно заготовки. При этом в основу определения  $U(l)$  положена требуемая по критерию точности траектория формообразующих движений инструмента относительно заготовки. В рассмотренной схеме определения  $U(l)$  используется упрощенная динамическая модель преобразования напряжения якоря серводвигателя в скорость подачи. Современные привода станков имеют, по крайней мере, две обратных связи по скорости и перемещению суппорта. В этом случае для определения  $U(t)$  и соответствующего ему  $U(l)$  можно воспользоваться известными в теории управления методами, например, методом коэффициентов ошибок.

Рассмотренный метод имеет ограничения. Они обусловлены возможностью формирования требуемых траекторий формообразующих движений. Во-первых, компенсация возмущений или влияния распределенных параметров, периодически изменяющихся с частотой вращения шпинделя, на точность обработки не представляется возможным, если в качестве управления рассматривается скорость продольного перемещения суппорта. Во-вторых, многие траектории, подлежащие управлению, могут лежать за пределами полосы пропускания серводвигателей. Например, ступенчатое изменение припуска приводит к необходимости двойного дифференцирования функции Хевисайда, что физически не реализуемо.

При определении траектории мы полагали, что скорость резания  $V_p$  и уставка  $X_1^{(0)}$  инструмента по отношению к оси вращения заготовки являются заданными и неизменными. Их значения непосредственно влияют на функции  $S_p^{(0)}(l, V_p, X_1^{(0)})$ ,  $\tilde{V}_3(l, V_p, X_1^{(0)})$ , и  $U(l, V_p, X_1^{(0)})$ . Задавая различные значения  $V_p$  и  $X_{0,1}$ , мы получаем множество траекторий  $\tilde{V}_3(l, V_p, X_1^{(0)})$ ,  $S_p^{(0)}(l, V_p, X_1^{(0)})$  и  $U(l, V_p, X_1^{(0)})$ , которые обеспечивают требуемые показатели точности изготовления деталей.

Рассмотрим пример построения таких многообразий на основе цифровых моделей. Рассмотрим пример точения вала диаметром  $D = 20, мм$  и



длиной  $l = 430, \text{мм}$  из стали 45. Изменения элементов матрицы жесткости вдоль оси вращения заготовки, вычисленные на основе использования метода конечных элементов. Значения матрицы жесткости инструмента приведены в таблице.

Если обрабатывать рассматриваемую деталь при постоянных и неизменных режимах резания, то прогнозируемое отклонение радиуса обрабатываемой детали при различных скоростях резания вдоль оси  $l$  представлено на рис. 53. В качестве серводвигателя подачи принят двигатель постоянного тока независимого возбуждения с якорным управлением, который имеет параметры, приведенные в таблице 1.

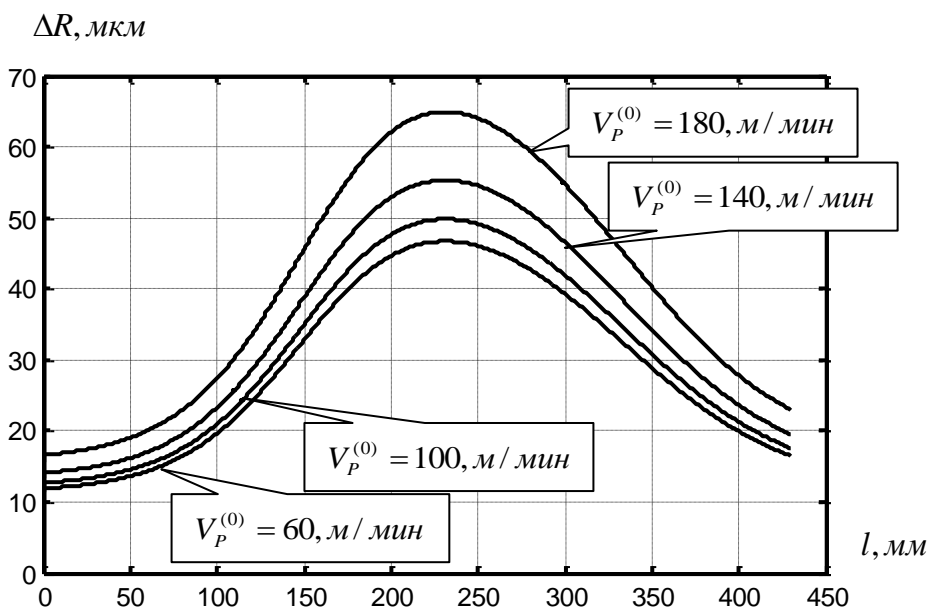


Рис.53. Пример изменения геометрической погрешности  $\Delta R$  вдоль координат обработки при различных скоростях резания.  $t_p^{(0)} = 2,0 \text{мм}$ ,  $S_p^{(0)} = 0,2 \text{мм/об}$ .

Таблица 1.

Наименование параметров	Значение
Номинальная мощность, кВт	4,3
Номинальное напряжение, В	220



Номинальная скорость вращения, об/мин	3000
Номинальный ток, А	22
Сопротивление якорной цепи, Ом	0.275
Момент инерции якоря, $кг \cdot м^2$	0.056

После расчета, получили значения параметров уравнения динамики привода подачи, приведенные в таблице 2. Траектории подачи, скорости подачи и соответственно напряжения на якоре серводвигателя, обеспечивающие обработку с постоянным радиусом детали, приведены на рис. 54. При этом отметим, что программа ЧПУ в конечном счете задает не значения соответствующих скоростей по оси движения суппорта, а напряжения якоря серводвигателя. Эти траектории, естественно, зависят от программируемого приращения радиуса  $\Delta R$  обрабатываемой детали (см. рис. 54).

Таблица 2

Параметры уравнения динамики привода подачи

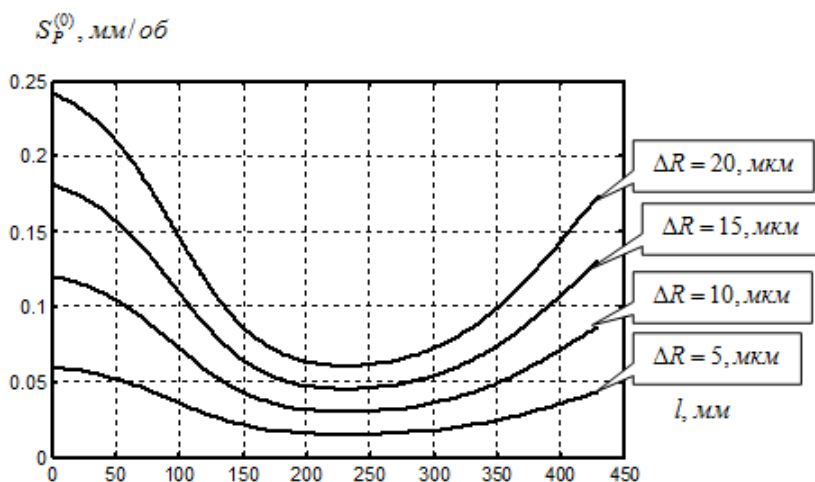
Наименование параметров	Обозначе-	Значние
Коэффициент пропорциональности между ЭДС двигателя и скоростью	$C_e, [B \cdot c]$	0.68
Коэффициент пропорциональности между моментом двигателя и током	$C_M, [H \cdot м / A]$	0.68
Момент нагрузки, приведенный к валу двигателя	$M_c, [H \cdot м]$	15
Электромагнитная постоянная времени	$T_э, [c]$	0.0364
Электромеханическая постоянная времени	$T_{эм}, [c]$	0.0482
Коэффициент передачи скорости подачи	$k_{v_3}, [мм]$	16

Так как  $V_3 = dl / dt$ , то приведенные траектории на рис. 54 «б» есть желаемые фазовые траектории движения продольного суппорта. Эти траектории зависят от выбранного значения скорости резания. Многообразие же фазовых траекторий изменения скорости подачи при различных частотах вращения шпинделя приведено на рис. 54. Подчеркнем, что в зависимости от скорости резания при неизменных силах изменяется и интенсивность эволюционных изменений системы, так как скорость влияет при неизменных силах, прежде всего на мощность необратимых преобразований в системе. Поэтому на этом многообразии необходимо выбрать

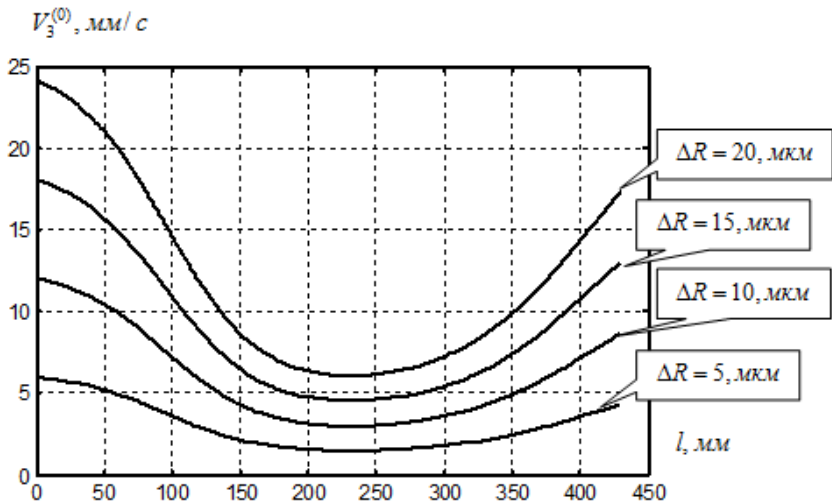


траекторию, которая с учетом интенсивности эволюционных изменений дает минимум приведенных затрат на изготовление партии деталей. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

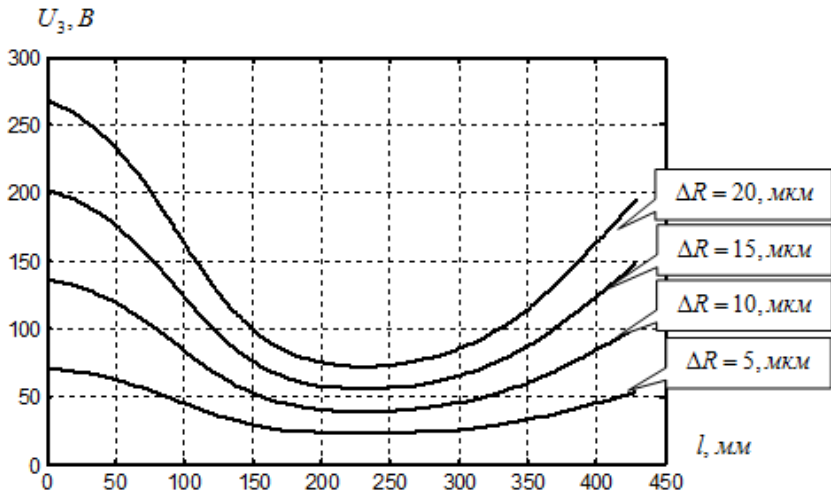
Траектории скорости подачи и напряжения якоря могут отличаться. Они идентичны лишь в установившемся состоянии. Причем их отличие зависит от спектрального состава рассматриваемых траекторий. Для приведенного примера определения траекторий управления, обеспечивающих траектории движения исполнительных элементов из условия постоянства упругих деформационных смещений инструмента относительно заготовки, погрешность изменения напряжения якоря приведена на рис. 54. Как видно, эта погрешность возрастает при увеличении стабилизируемых упругих деформационных смещений. Кроме этого она увеличивается при управлении точностью деталей, имеющих сложную геометрическую форму, при обработке которых координаты состояния находятся практически всегда в переходных режимах.



«а»



«b»



«с»

Рис.54. Траектория величины подачи «а», скорости подачи «b» и напряжения якоря серводвигателя (программа ЧПУ) «с», обеспечивающая постоянство радиуса при постоянной скорости  $V_p^{(0)} = 60,0 \text{ м/мин}$  и глубине резания  $t_p^{(0)} = 2,0 \text{ мм}$ .

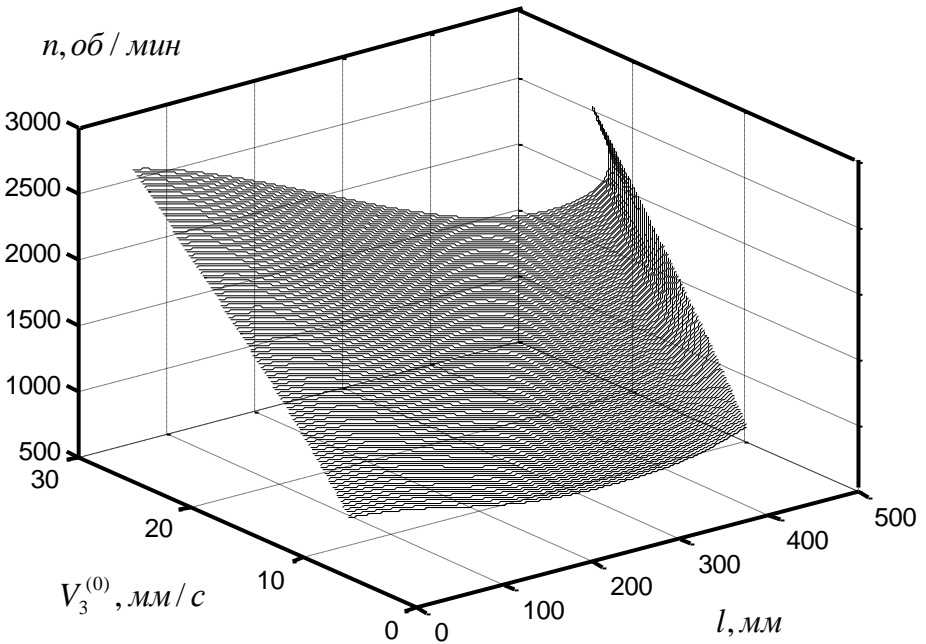


Рис. 55. Пример многообразия фазовых траекторий исполнительных элементов станка, обеспечивающее ( $\Delta R = 5,0 \text{ мкм} = \text{const}$ ) при изменении частоты вращения заготовки

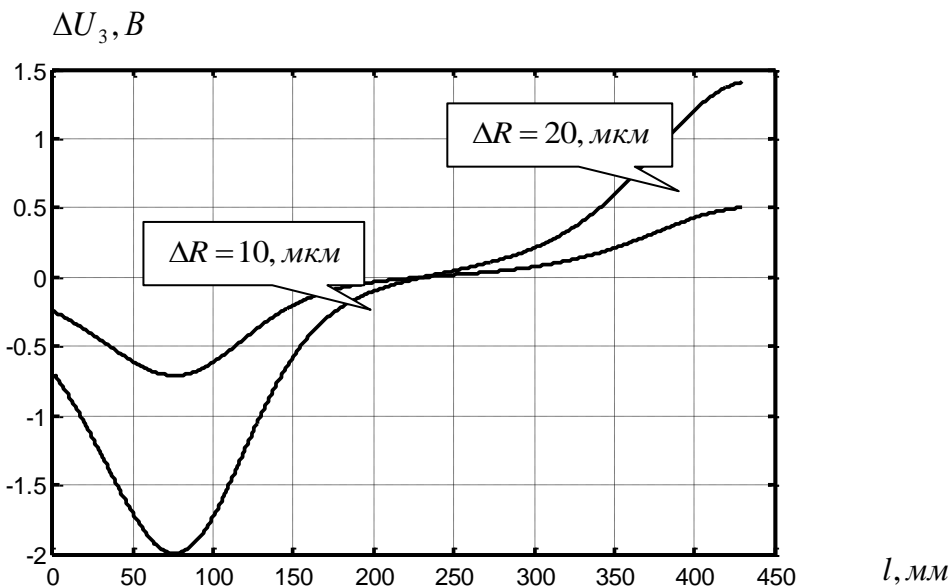


Рис. 56. Погрешность вычисления управляющего напряжения якоря двигателя привода подачи между статическим алгоритмом, и алгоритмом, учитывающим динамические составляющие двигателя привода подачи.

Современные приводы исполнительных элементов станка обладают достаточной точностью установившихся траекторий движения. Достаточно отметить, что установившаяся погрешность пространственных движений исполнительных элементов в современных станках высокой точности, рассматриваемая без реакции со стороны процесса резания, не превышает десятых долей микрона. Динамическая погрешность, рассматриваемая в частотном диапазоне до номинальной частоты вращения шпинделя, не превышает единиц микрон. Однако, как показано выше, погрешность изготовления детали, обусловленная упругими деформационными смещениями и реакцией со стороны процесса обработки в зависимости от параметров взаимодействующих подсистем и динамической связи процесса обработки, может достигать десятых долей миллиметра. В отдельных случаях при обработке деталей малой жесткости она достигает величин, близких к миллиметру. Эта погрешность принципиально неустранима в системах, программы управления которых построена традиционными способами. Этим объясняется эффективность предложенного синергетического метода построения программ ЧПУ станков.



## 4.5. Построение программного управления процессом точения изделий сложной геометрической формы

Изложенные положения можно легко распространить на случай, когда деталь имеет сложную геометрическую форму, т.е. такую, при образовании поверхности которой необходимо одновременно изменить все компоненты вектора  $\{\omega_1(l), \omega_3(l), \omega_4(l)\}^T$  или, по крайней мере,  $\{\omega_1(l), \omega_3(l)\}^T$ . Здесь  $l$ , как и ранее, соответствует координате продольного перемещений суппорта  $X_3^{(0)}$  (см. рис 57). Однако при изменении направления движения инструмента в плоскости траекторий продольных и поперечных перемещений суппорта изменяются углы режущего инструмента, прежде всего главный угол в плане. Изменяется и длина контакта инструмента с заготовкой. Поэтому изменяются и параметры динамической характеристики процесса. Выделим на детали отдельный фрагмент (рис. 67), соответствующий линейной интерполяции геометрии заготовки.

На этом фрагменте обработка ведется с одновременным изменением скоростей поперечной  $V_1(l)$  и продольной подачи  $V_3(l)$  (в данном случае обрабатывается конус). Рассмотрим случай, когда перепад диаметра конуса настолько велик, то для поддержания рациональной скорости резания необходимо дополнительно варьировать частоту вращения шпинделя  $\omega_4(l)$ .

На станках с ЧПУ при обработке такой детали программа строится на основе аппроксимации геометрии детали прямыми между некоторыми опорными точками [26]. При этом она поддерживает такое соотношение скоростей продольного и поперечного перемещения, чтобы траектория движения суппорта соответствовала заданной траектории прямой без учета упругих деформационных смещений, то есть

$$\psi_1 = k_{BC} V_1(l) - V_3(l) = 0 \text{ или } \psi_1 = k_{BC} k_p^{(1)} \omega_1(l) - k_p^{(3)} \omega_3(l) = 0 \quad (88)$$

где  $k_{BC} = \tan \theta$  - коэффициент пропорциональности скоростей подачи  $V_1(l)$  и  $V_3(l)$ ;

$k_p^{(1)}$  и  $k_p^{(3)}$  коэффициенты преобразований частот в скорости подачи.

Вторым условием является поддержание рациональной постоянной скорости резания. Ему соответствует следующий второй инвариант

$$\psi_2 = V_p - \omega_4(l)R(l) = 0 \quad (89)$$

где  $V_p$  - заданная рациональная скорость резания;

$R(l)$  - функция изменения радиуса детали, определяемая траекторией





движения суппорта в направлении, нормальном к оси вращения заготовки  $X_1^{(0)}(l)$  и суммой упругих деформаций инструмента и заготовки  $X_1(l) + X_4(l)$  в этом направлении.

Таким образом, при заданной скорости резания частота  $\omega_4(l)$  есть функция радиуса детали. Обычно при построении программы ЧПУ изменение скорости резания при обработке детали сложного геометрического профиля не принимается во внимание.

Упругие деформационные смещения инструмента и заготовки в направлениях  $X_1(l)$  и  $X_3(l)$  искажают реальную образующую (рис. 57). Если это искажение параллельно  $BC$ , то достаточно изменить уставку инструмента для уменьшения погрешности. Однако в отличие от продольного точения упругие деформационные смещения в направлениях  $X_1(l)$  и  $X_3(l)$  непосредственно влияют на геометрическую точность формируемой поверхности. Поэтому при рассмотрении деформационных смещений необходимо ввести в рассмотрение новую систему координат  $(Y_1, Y_3)$ , которая образуется на основе ее поворота на угол  $\theta$ . Кроме этого, если упругие деформационные смещения отсутствуют, то в процессе управления приводами за счет асимметрии их динамических характеристик может нарушаться одно из условий (88), что также вызывает не только отклонение реальной траектории от образующей  $BC$ , но и приводит к дополнительным возмущениям. Поэтому первое условие, диктуемое требованием (88), связано с обеспечением идентичности динамических свойств приводов продольных и поперечных перемещений. Это требование согласованности скоростей движения суппортов продольных и поперечных перемещений по направлению  $BC$ .

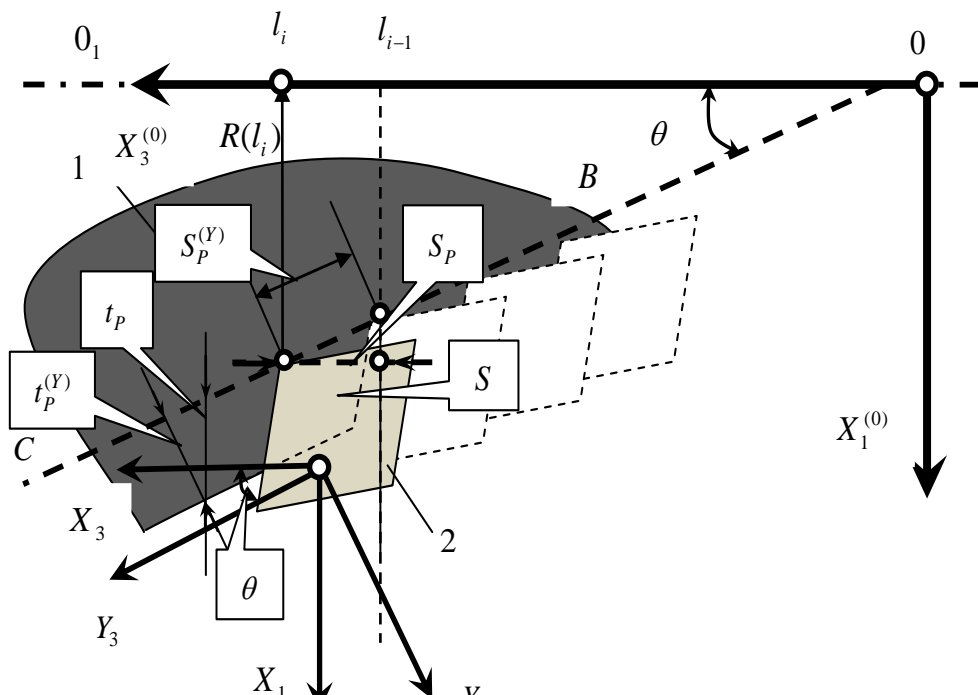


Рис. 57. Схема формирования формообразующих движений при точении детали сложной геометрической формы: 1- заготовка; 2- режущий инструмент 0-0<sub>1</sub> – ось вращения.

Исходя из анализа схемы (рис. 57), величина подачи  $S_P^{(Y)}$  по направлению образующей  $BC$  равна  $S_P^{(Y)} = S_P / \cos \theta$ , а величина припуска по нормали к образующей равна  $t_P^{(Y)} = t_P \cos \theta$ , то площадь срезаемого слоя равна

$$S = S_P^{(Y)} t_P^{(Y)} = S_P t_P, \quad (90)$$

где  $S_P$  - величина подачи по направлению оси;

$t_P$  - величина припуска по нормали к оси вращения заготовки.

При анализе траекторий, как и ранее, в пределах  $i$ -ого оборота вращения заготовки, частоту  $\omega_4$  будем считать неизменной, то есть текущее значение  $\omega_4(l_i)$  в координатной точке  $l_i$  соответствует её усредненному значению на полуинтервале  $(l_{i-1}, l_i)$ . Таким образом, значение площади



срезаемого слоя в системах координат  $(X_1, X_3)$  и  $(Y_1, Y_3)$  будет неизменным, что естественно. Однако значение  $\rho$  при движении инструмента по направлению  $(B, C)$  на рис. 82 будет отличаться. Во-первых, за счет изменения углов режущего инструмента по отношению к образующей. Во-вторых, за счет изменения скорости резания.

Если заданы средние скорости подачи  $V_1(l_i)$  и  $V_3(l_i)$ , то величина подачи на оборот  $S_P(l_i)$  и величина припуска  $t_P(l_i)$  на  $i$ -ом обороте с учетом упругих деформационных смещений инструмента  $X^{(1)}(l_i) = \{X_1(l_i), X_2(l_i), X_3(l_i)\}^T$  и заготовки  $X^{(2)}(l_i) = \{X_4(l_i), X_5(l_i), X_6(l_i)\}^T$  будут равны

$$\begin{cases} S_P(l_i) = S_P^{(0)}(l_i) - X_3(l_i) - X_6(l_i) + X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1}) \\ t_P(l_i) = t_P^{(0)}(l_i) - X_1(l_i) - X_4(l_i) \end{cases} \quad (91)$$

где  $S_P^{(0)}(l_i)$  и  $t_P^{(0)}(l_i)$  - подача и припуск на  $i$ -ом обороте без учета упругих деформационных смещений, определяющиеся следующим соотношением

$$\begin{cases} S_P^{(0)}(l_i) = V_3(l_i)T_i \\ t_P^{(0)}(l_i) = R_0(l_i) - X_1^{(0)}(0) - \sum_{k=1}^{k=i-1} V_1(l_k)T_k - V_1(l_i)T_i \end{cases} \quad (92)$$

где  $T_i = 1/\omega_4(l_i)$  - время  $i$ -го оборота;

$R_0(l_i)$  - текущее значение радиуса детали до обработки;

$X_1^{(0)}(0)$  - координата суппорта  $X_1^{(0)}$  в нулевой точке отчета.

Для вычисления упругих деформационных смещений примем сформированные ранее гипотезы о формировании сил. Учтем, что  $\rho(l_i)$  зависит от скорости и геометрии инструмента. Тогда величина упругих деформационных смещений на  $i$ -ом обороте определяется следующей системой

$$c_{\Sigma}(l_i)X(l_i) = \Phi(l_i), \quad (93)$$



$$\text{где } \Phi(l_i) = \begin{bmatrix} \chi_1 \rho(l_i) \{t_p^{(0)}(l_i) S_p^{(0)}(l_i) + t_p^{(0)}(l_i) [X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1})]\} \\ \chi_2 \rho(l_i) \{t_p^{(0)}(l_i) S_p^{(0)}(l_i) + t_p^{(0)}(l_i) [X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1})]\} \\ \chi_3 \rho(l_i) \{t_p^{(0)}(l_i) S_p^{(0)}(l_i) + t_p^{(0)}(l_i) [X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1})]\} \\ \chi_1 \rho(l_i) \{t_p^{(0)}(l_i) S_p^{(0)}(l_i) + t_p^{(0)}(l_i) [X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1})]\} \\ \chi_2 \rho(l_i) \{t_p^{(0)}(l_i) S_p^{(0)}(l_i) + t_p^{(0)}(l_i) [X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1})]\} \\ \chi_3 \rho(l_i) \{t_p^{(0)}(l_i) S_p^{(0)}(l_i) + t_p^{(0)}(l_i) [X_3(l_{i-1}) + X_6(l_{i-1})]\} \end{bmatrix};$$

$$c_{\Sigma}(l_i) =$$

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} + \chi_1 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & c_{2,1} & c_{3,1} + \chi_1 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) & \chi_1 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \chi_1 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) \\ c_{1,2} + \chi_2 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & c_{2,2} & c_{3,2} + \chi_2 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) & \chi_2 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \chi_2 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) \\ c_{1,3} + \chi_3 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & c_{2,3} & c_{3,3} + \chi_3 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) & \chi_3 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \chi_3 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) \\ \chi_1 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \chi_1 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) & C_{4,4}(l_i) + \chi_1 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \chi_1 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) \\ \chi_2 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \chi_2 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) & \chi_2 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & C_{5,5}(l_i) & \chi_2 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) \\ \chi_3 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & \chi_3 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) & \chi_3 \rho(l_i) S_p^{(0)}(l_i) & 0 & C_{6,6}(l_i) + \chi_3 \rho(l_i) t_p^{(0)}(l_i) \end{bmatrix}$$

- суммарная матрица жесткости, составляющая из матрицы жесткости подсистемы инструмента  $c = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$ , диагональная матрицы жесткости заготовки  $C(l) = [C_{s,k}(l)]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$  и матрицы динамической жесткости процесса резания;

$\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$  - угловые коэффициенты ориентации сил резания. Заметим, что матрицы жесткости и скоростных коэффициентов подсистемы инструмента, а также углы ориентации сил в пространстве при переходе от постоянного диаметра к линейно возрастающему отличаются.

В системе (93) принято во внимание, что при вычислении траектории упругих деформационных смещений на первом обороте заготовки  $X_3(l_{i-1})$  и  $X_6(l_{i-1})$  равны нулю. Так как упругие деформационные смещения инструмента и заготовки вызывают отклонение траекторий от заданных, то при синтезе закона управления процессом необходимо дополнительно обеспечить условие постоянства упругих деформационных смещений инструмента относительно заготовки в направлении, нормальном к образующей  $BC$ . Если выполнено условие (88) и угловые коэффициенты  $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$  на участке движения по направлению  $BC$  остаются неизменными (на этом участке углы режущего инструмента постоянны), то угол



поворота осей  $\theta$  также остается неизменным. Следовательно, справедливо  $Y_1 = X_1(\cos \theta)^{-1}$ . Так как  $\theta = const$ , то деформационные смещения  $X_1$  и  $Y_1$  отличаются коэффициентом. Постоянству заданных упругих деформационных смещений соответствует третий технологический инвариант

$$\psi_3 = \Delta - X_1(l)(\cos \theta) - X_4(l) = 0, \quad (94)$$

где  $\Delta$  - желаемое значение упругих деформационных смещений.

Для определения закона управления  $U(t) = \{U_1(t), U_2(t), U_3(t)\}^T$  используем приведенный выше алгоритм. Вначале определим технологические режимы  $\{S_p^{(0)}(l_i), t_p^{(0)}(l_i), V_p(l_i)\}^T$  на каждом  $i$ -ом обороте вращения заготовки, обеспечивающие условия (88), (89) и (94). Для этого, из (88) и второго уравнения (89), получим следующее равенство

$$t_p^{(0)}(l_i) = R_0(l_i) - X_1^{(0)}(0) - \sum_{k=1}^{i-1} V_1(l_k) T_k - \frac{1}{k_{BC}} S_p^{(0)}(l_i) \quad (95)$$

Необходимо отметить, что в (95) составляющая  $\sum_{k=1}^{i-1} V_1(l_k) T_k$  известна.

Она определяется на предыдущих оборотах. Тогда получим систему шести уравнений для шести неизвестных независимых переменных  $\{X_1(l_i), X_2(l_i), X_3(l_i), X_4(l_i), X_5(l_i), X_6(l_i), S_p^{(0)}(l_i)\}^T$ . Поэтому решение этой системы позволяет определение значения величины подачи  $S_p^{(0)}(l_i)$ , обеспечивающего заданное геометрическое качество, и желаемое значение упругих деформационных смещений инструмента относительно заготовки  $\{X_1(l_i), X_2(l_i), X_3(l_i), X_4(l_i), X_5(l_i), X_6(l_i)\}^T$ . Отметим, что при определении  $S_p^{(0)}(l_i)$  координата  $l_i$  является неизвестной. Она становится известной после определения  $S_p^{(0)}(l_i)$ , так как  $l_i = l_{i-1} + S_p^{(0)}(l_i)$ . Если (89) выполнено, то для определения частоты вращения шпинделя  $\omega_4(l_i)$  в точке  $l_i$  необходимо знать значение радиуса детали  $R(l_i)$ , определяющегося следующей формулой

$$R(l_i) = X_1^{(0)}(l_i) - X_1(l_i) - X_4(l_i) = X_1^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_p^{(0)}(k)}{k_{BC}} - \Delta \quad (96)$$

где



$$X_1^{(0)}(l_i) = X_1^{(0)}(0) + \int_0^{l_i} V_1(t) dt = \sum_{k=1}^{k=i} V_1(l_k) T_k = \sum_{k=1}^{k=i} \frac{V_3(l_k) T_k}{k_{BC}} = \sum_{k=1}^{k=i} \frac{S_P^{(0)}(l_k)}{k_{BC}} \quad -$$

траектория движения суппорта в направлении, нормальном к оси вращения заготовки.

Таким образом,

$$\omega_4(l_i) = V_P / R(l_i) \text{ или } T_i = R(l_i) / V_P \quad (97)$$

Полученные

последовательности

$$\{S_P^{(0)}(0), S_P^{(0)}(l_1), S_P^{(0)}(l_2), \dots, S_P^{(0)}(l_n)\}^T, \quad \{t_P^{(0)}(0), t_P^{(0)}(l_1), t_P^{(0)}(l_2), \dots, t_P^{(0)}(l_n)\}^T$$

есть желаемые функции изменения технологических режимов, обеспечивающих заданное геометрическое качество детали, в координатах продольного перемещения суппорта станка. Желаемые фазовые траектории движения суппорта

$$V_1 = \{V_1(0), V_1(l_1), V_1(l_2), \dots, V_1(l_n)\}^T \quad \text{и}$$

$V_3 = \{V_3(0), V_3(l_1), V_3(l_2), \dots, V_3(l_n)\}^T$  в координатах продольного перемещения суппорта. Желаемая траектория вращения шпинделя

$$\omega_4 = \{\omega_4(0), \omega_4(l_1), \omega_4(l_2), \dots, \omega_4(l_n)\}^T.$$

Полученные желаемые траектории можно представляться во времени

$$V_1 = \{V_1(0), V_1(t_1), V_1(t_2), \dots, V_1(t_n)\}^T,$$

$$V_3 = \{V_3(0), V_3(l_1), V_3(l_2), \dots, V_3(l_n)\}^T \quad \text{и}$$

$$\omega_4 = \{\omega_4(0), \omega_4(l_1), \omega_4(l_2), \dots, \omega_4(l_n)\}^T. \quad \text{Здесь } t_i = \sum_{k=1}^{k=i} T_k. \quad \text{После этого}$$

аппроксимировать их рядом Тейлора относительно времени, получим желаемые траектории

$$\begin{cases} V_1^{(жс)}(t) = \sum_{k=0}^n V_{1,0}^{(k)} t^k \\ V_3^{(жс)}(t) = \sum_{k=0}^n \omega_{3,0}^{(k)} t^k \\ \omega_4^{(жс)}(t) = \sum_{k=0}^n \omega_{4,0}^{(k)} t^k \end{cases} \quad (98)$$

Траекториям (98) соответствуют желаемые траектории упругих деформационных смещений инструмента относительно заготовки

$$X_i^{(жс)}(t) = \sum_{k=0}^n X_{i,0}^{(k)} t^k, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (99)$$



Затем определяется управление. Например, для двигателей постоянного тока

$$\begin{cases} U_1(t) = T_{ЭМ}^{(1)} T_{Э}^{(1)} \frac{d^2 \omega_1^{(эс)}(t)}{dt^2} + T_{ЭМ}^{(1)} \frac{d\omega_1^{(эс)}(t)}{dt} + \omega_1^{(эс)}(t) - U^*(t) - U_M^{(1)}[\omega^{(эс)}(t), X^{(эс)}(t)] \\ U_3(t) = T_{ЭМ}^{(3)} T_{Э}^{(3)} \frac{d^2 \omega_3^{(эс)}(t)}{dt^2} + T_{ЭМ}^{(3)} \frac{d\omega_3^{(эс)}(t)}{dt} + \omega_3^{(эс)}(t) - U^*(t) - U_M^{(3)}[\omega^{(эс)}(t), X^{(эс)}(t)] \\ U_4(t) = T_{ЭМ}^{(4)} T_{Э}^{(4)} \frac{d^2 \omega_4^{(эс)}(t)}{dt^2} + T_{ЭМ}^{(4)} \frac{d\omega_4^{(эс)}(t)}{dt} + \omega_4^{(эс)}(t) - U^*(t) - U_M^{(4)}[\omega^{(эс)}(t), X^{(эс)}(t)] \end{cases} \quad (100)$$

где

$$X^{(эс)}(t) = \{ X_1^{(эс)}(t), X_2^{(эс)}(t), \dots, X_6^{(эс)}(t) \},$$

$$\omega^{(эс)}(t) = \{ \omega_1^{(эс)}(t), \omega_3^{(эс)}(t), \omega_4^{(эс)}(t) \}^T.$$

Очевидно, что приведенный алгоритм построения программы ЧПУ легко распространяется и на обработку деталей, геометрическая поверхность которой аппроксимируется более сложными законами, например, если используется круговая аппроксимация (рис. 58). Обобщая материал, приведенный в этих двух параграфах, отметим два важных условия построения программ для обработки деталей.

**Первое условие** согласованности траекторий движения суппортов продольных и поперечных перемещений в соответствии с образующей формируемой поверхности.

**Второе условие** выбора вектора скорости вдоль образующих по закону обеспечения постоянства упругих деформационных смещений по нормали к образующей.

Принципиальным отличием предложенного метода построения программ ЧПУ от существующих является учет упругих деформационных смещений инструмента относительно заготовки и сил, формируемых в координатах состояния, вызывающих упругие деформации. Для этого программа ЧПУ строится не по геометрическим параметра обрабатываемой детали, а по многообразию траекторий формообразующих движений, которому соответствует многообразие программ ЧПУ. Важно подчеркнуть, что предлагаемый метод построения управляющих программ ориентирован на его использование на существующем станочном оборудовании без модернизации. При этом используются приводы исполнительных элементов, существующие на станке. Если не принимать во внимание динамические погрешности изменения траекторий исполнительных элементов по отношению к программе ЧПУ (в нашем случае изменению напряжений якорей серводвигателей), то основная погрешность при формировании поверхности детали зависит от параметров динамических взаимодействующих



щих подсистем, свойств динамической связи, формируемой процессом резания и закономерностей образования новых поверхностей обработки, зависящих, в основном от величины подачи. Именно эти преобразования учитываются в предлагаемом новом методе построения управляющих программ. Причем, они формируются не во времени, а в траекториях исполнительных перемещений. Эффективность используемого метода определяется следующими свойствами обрабатываемых деталей и технологического процесса.

1. Обрабатываемая деталь имеет изменяющиеся вдоль траектории значения матриц жесткости. Такой класс деталей характерен для предприятий авиа-космической промышленности.

2. Заготовки на данной технологической операции имеют заданные и изменяющиеся вдоль траектории значения припуска. Причем, функции изменения припуска могут быть заданы своими статистическими характеристиками, например, математическими ожиданиями и дисперсией.

3. Деталь имеет сложную геометрическую форму, для изготовления которой необходимо изменять направление движения инструмента в плоскости  $(X_1, X_3)$ . В этом случае изменяются параметры динамической связи, формируемой процессом резания и матрицы упругости подсистемы инструмента.

4. Наконец, существует ряд процессов обработки, которые характеризуются нестационарностью изменения сил и динамической связи. Например, процесс сверления глубоких отверстий малого диаметра спиральными сверлами. В этом случае за счет накопления стружки в стружкоотводящих канавках имеет место интегрирование момента по мере каждого единичного заглубления.

Во всех этих случаях, характеризующих достаточно большой класс деталей, наиболее эффективно использовать предложенный синергетический метод построения управления, учитывающий за счет расширения пространства состояния внутреннее управление, формируемое процессом резания.

В третьем параграфе показано, что на управляемые траектории «медленных» движений наложены ограничения, определяемые дополнительными требованиями к качеству формируемой в процессе резания детали и к координатам, характеризующим состояние процесса резания. Эти ограничения удобно рассматривать в терминах технологических режимов. В связи с этим на множество желаемых траекторий наложены ограничения, учет которых выполняется по алгоритму, приведенному на рис. 59.





Рис.58. Обобщенный алгоритм определения инвариантного многообразия траекторий формообразующих движений  $\psi$ , обеспечивающих заданные показатели геометрического качества детали

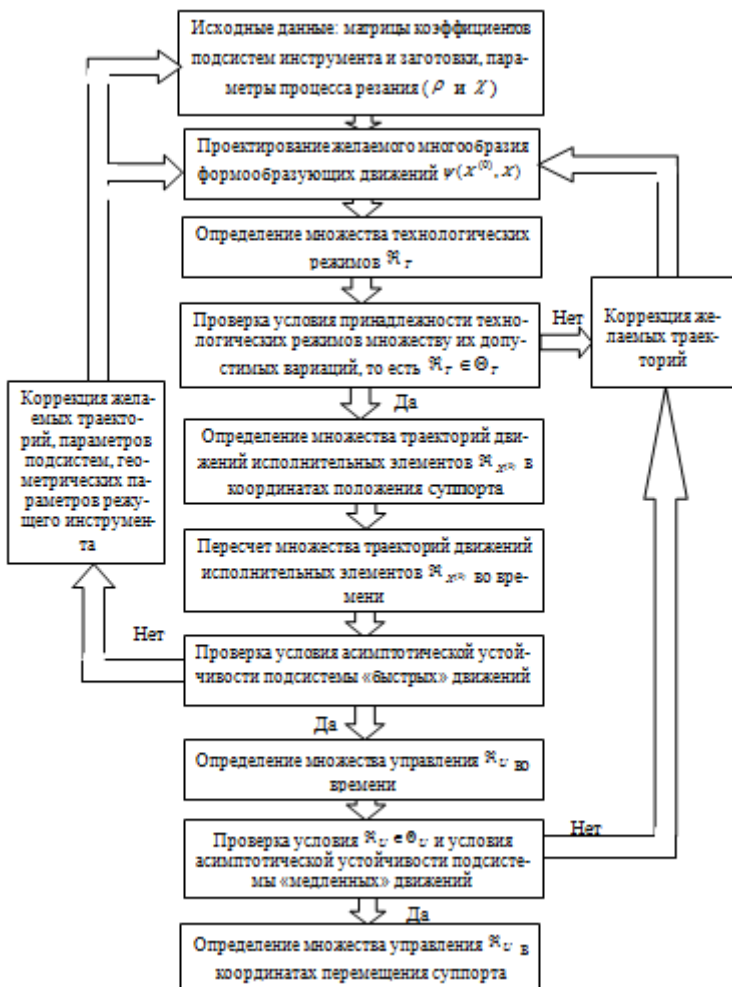


Рис. 59. Обобщенный алгоритм определения многообразия желаемых траекторий с учетом ограничений

Изложенный материал характеризует новый принцип построения программы управления без введения дополнительных связей, характеризующих рабочую информацию о параметрах точности и состояния процесса резания. Естественным развитием этого подхода является построение некоторых наблюдателей за координатами состояния системы и ее основными параметрами. Этот вопрос будет рассмотрен в шестой главе.



## **ГЛАВА 5. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ОБРАБОТКИ НА МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКАХ НА ОСНОВЕ СИНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ОБЛАДАЮЩИХ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ ПАРАМЕТРОВ.**

Как было показано ранее, параметры динамической связи, формируемой процессом резания, обладают свойством эволюционной изменчивости. Эволюционные изменения имеют два основания. Первое основано на том, что при управлении процессом обработки изменяются технологические режимы и, как следствие, изменяются параметры динамической связи, формируемой процессом резания. К этому же основанию можно отнести обработку заготовки, динамические свойства которой изменяются вдоль траектории движения инструмента относительно заготовки. Второе основание обусловлено тем, что в зоне сопряжения система – среда происходят необратимые преобразования, влияющие на параметры динамической связи. Типичным примером эволюционных изменений при резании является развитие износа инструмента, формирование диссипативных структур в области передней поверхности инструмента, тепловые деформации и влияние температурного поля на физико-механические характеристики материала и пр. В дальнейшем под эволюцией будем понимать изменение параметров, обусловленные работой сил резания, направленной на необратимые преобразования при резании. Этот фактор всегда имеет место при резании, и он характеризует внутреннюю природу изменения параметров динамической связи. Таким образом, параметры системы можно представить в виде интегральных операторов Вольтера второго рода, то есть представить параметры, зависящими от траектории работы и мощности необратимых преобразований. Для пояснения механизма влияния эволюции на динамическую систему и определение направлений учета эволюции при управлении рассмотрим подсистему «быстрых» движений для базовой динамической модели системы резания.

Уравнение динамики для базовой динамической модели процесса резания с учетом эволюционных преобразований представляется в линеаризованном виде в форме следующей интегро-дифференциальной системы уравнений



$$\left\{ \begin{aligned} m_{1,1} \frac{d^2 X_1}{dt^2} + m_{1,2} \frac{d^2 X_2}{dt^2} + h_{1,1} \frac{dX_1}{dt} + h_{1,2} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,1} X_1 + c_{1,2} X_2 &= \frac{\rho_1 t_p^{(0)}}{\sin \varphi} [S_p^{(0)} \sin \varphi - X_1 + T_1 \frac{dX_1}{dt}]; \\ m_{2,1} \frac{d^2 X_1}{dt^2} + m_{2,2} \frac{d^2 X_2}{dt^2} + h_{2,1} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,2} \frac{dX_2}{dt} + c_{2,1} X_1 + c_{2,2} X_2 &= \frac{\rho_2 t_p^{(0)}}{\sin \varphi} [S_p^{(0)} \sin \varphi - X_1 + T_2 \frac{dX_1}{dt}]; \\ p_i &= p_{i,0} + \alpha_i^{(1)} \int_0^A w_i^{(1)} (A - \zeta) N(\zeta) d\zeta + \alpha_i^{(2)} \int_0^A w_i^{(2)} (A - \zeta) N(\zeta) d\zeta, ; i = 1, 2, 3, 4; \\ p_1 &= \rho_1, p_2 = \rho_2, p_3 = T_1, p_4 = T_2; \\ N(t) &= V_p F_2(t); \\ A(t) &= \int_0^t N(\tau) d\tau \end{aligned} \right. \quad (101)$$

где  $\rho_1 = \rho \sin \beta$  и  $\rho_2 = \rho \sin \beta$  - удельные силы резания в направлениях  $X_1$  и  $X_2$ ;

$$w_i^{(1)} (A - \zeta) = \exp\left[-\frac{1}{T_i^{(1)}} (A - \zeta)\right];$$

$$w_i^{(2)} (A - \zeta) = \exp\left[\frac{1}{T_i^{(2)}} (A - \zeta)\right], \quad i = 1, 2, 3, 4 - \text{ ядра интегральных операторов, причём, } T_i^{(1)}, T_i^{(2)} - \text{ постоянные работы, имеющие размерность } \kappa\Gamma \cdot \text{ м,}$$

эти параметры характеризуют эволюционную наследственность траекторий по мере совершения работы;

$\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}$  - параметры, определяющие связь текущей мощности необратимых преобразований и траектории мощности по совершенной работе с рассматриваемым параметром;

$p_{i,0}$  - начальные значения эволюционных параметров;

$A(t), N(t)$  - работа и мощность необратимых преобразований сил резания;

$V_p(t), F_2(t)$  - соответственно скорость резания и сила резания в направлении скорости резания.

Система (101) представляет собой функциональное интегро-дифференциальное нелинейное уравнение. Сложность анализа этого уравнения заключается, прежде всего, в его функциональности. Здесь параметры динамической связи зависят от траектории мощности по



вершенной работе. Одновременно мощность и работа зависят от координат состояния системы. Для изучения системы (101) предложен асимптотический метод, учитывающий то, что эволюционные преобразования параметров являются медленными функциями времени. Определение траекторий (101), зависящих от текущих значений подачи и глубины, а также от эволюционного изменения параметров определяется стационарная эволюционная траектория [10].

Для этого в (101) положим  $\frac{dX_1}{dt} = 0, \frac{dX_2}{dt} = 0$ . Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1,1}X_1 + c_{1,2}X_2 = \frac{\rho_1 t_P^{(0)}}{\sin \varphi} [S_P^{(0)} \sin \varphi - X_1]; \\ c_{2,1}X_1 + c_{2,2}X_2 = \frac{\rho_2 t_P^{(0)}}{\sin \varphi} [S_P^{(0)} \sin \varphi - X_1]; \\ p_i = p_{i,0} + \alpha_i^{(1)} \int_0^A w_i^{(1)}(A - \zeta) N(\zeta) d\zeta + \alpha_i^{(2)} \int_0^A w_i^{(2)}(A - \zeta) N(\zeta) d\zeta; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (102) \\ p_1 = \rho_1, p_2 = \rho_2, p_3 = T_1, p_4 = T_2; \\ N(t) = V_P F_2(t); \\ A(t) = \int_0^t N(\tau) d\tau \end{array} \right.$$

Алгоритм решения системы (102) изложен в [12]. Для решения системы (102) необходимо знать параметры матрицы жесткости системы, условия резания, и коэффициенты интегральных операторов. В указанной работе показано, что наиболее простым способом определения стационарной эволюционной траектории и соответствующих ей эволюционных параметров является их вычисление на каждом обороте, в предположении, что их значения на предыдущих оборотах являются заданными. При этом погрешность по сравнению с прямым интегрированием уравнения (102) не превышает десятых долей процента. Тогда для определения траектории и программы ЧПУ можно воспользоваться изложенными выше приемами, которые необходимо дополнить вычисленными значениями эволюционных параметров  $\rho_1(A_i)$  и  $\rho_2(A_i)$ . Поясним метод определения программы ЧПУ с учетом эволюционных преобразований.



## 5.1. Определение программного управления с учетом эволюционных изменений в динамической системе резания

В отличие от случая продольного точения, рассмотренного ранее, учтем эволюционные изменения обобщенного параметра  $\rho$ , который моделируется в виде интегрального оператора Вольтера относительно траектории мощности по совершенной работе силами резания

$$\rho(A) = \rho_0 + \alpha_1 \int_0^A \exp\left(-\frac{A-\zeta}{T_{1,0}}\right) N(\zeta) d\zeta + \alpha_2 \int_0^A \exp\left(\frac{A-\zeta}{T_{2,0}}\right) N(\zeta) d\zeta \quad (103)$$

где  $N(t) = V_p F_2(t)$  и  $A(t) = \int_0^t N(\tau) d\tau$  мощность и работа силы реза-

ния;  $F_2(t)$  - главная составляющая силы резания;  $\rho_0$  - начальное значение  $\rho$  без учета эволюции;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $T_{1,0}$  и  $T_{2,0}$  параметры интегрального оператора, подлежащие идентификации. Тогда для определения упругих деформаций инструмента относительно заготовки с учетом эволюционных изменений динамической системы резания (101) в пределах  $i$ -го оборота заготовки имеем

$$c_{\Sigma}(i)X(i) = \rho(i)\{t_p^{(0)}(i)S_p^{(0)}(i) + t_p^{(0)}(i)X_3(i) + t_p^{(0)}(i)X_6(i-1)\}\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T, \quad (104)$$

В (104) для каждого  $i$ -го оборота заготовки при вычислении упругих деформаций или закона управления, обеспечивающее постоянство диаметра обрабатываемой детали, необходимо знать значение эволюционного параметра  $\rho(i)$ . Так как эволюционные изменения параметров являются медленными функциями времени, то в пределах каждого  $i$ -го оборота заготовки эволюционный параметр  $\rho(i)$  можно считать постоянным. Кроме того, для определения  $\rho(i)$  будем считать, что запаздывание в вычисление работы и мощности на один оборот вращения заготовки вызывает малую погрешность, то есть не влияет на точность алгоритма в целом. С учетом высказанных допущений интегральный оператор (104) можно заменить суммой интегралов со своими последовательными пределами интегрирования от  $A(i-1)$  до  $A(i)$ . После очевидных преобразований, получим



$$\begin{aligned} \rho(i) = & \rho_0 + \alpha_1 T_{1,0} \sum_{s=1}^{i-1} N(s) \exp\left(-\frac{A(i)}{T_{1,0}}\right) \left[ \exp\left(\frac{A(s)}{T_{1,0}}\right) - \exp\left(\frac{A(s-1)}{T_{1,0}}\right) \right] + \\ & + \alpha_2 T_{2,0} \sum_{s=1}^{i-1} N(s) \exp\left(\frac{A(i)}{T_{2,0}}\right) \left[ \exp\left(\frac{A(i-1)}{T_{2,0}}\right) - \exp\left(\frac{A(i)}{T_{2,0}}\right) \right] \end{aligned} \quad (105)$$

В (105) работа и мощность в пределах  $i$ -ого оборота заготовки определяются

$$\left\{ \begin{aligned} N(i) = & V_p \chi_2 \rho(i) \{ S_p^{(0)}(i) t_p^{(0)}(i) - S_p^{(0)}(i) [X_1(i) + X_4(i)] - \\ & - t_p^{(0)}(i) [X_3(i) + X_6(i)] + t_p^{(0)}(i) [X_1(i) + X_4(i)] \}; \\ A(i) = & \sum_{s=1}^i N(s) T \end{aligned} \right. \quad (106)$$

где  $T$  время одного оборота вращения заготовки.

Системы (105), (106) позволяют вычислить эволюционные траектории упругих деформаций инструмента относительно заготовки при заданных технологических режимах  $S_p^{(0)}$ ,  $t_p^{(0)}$  и  $V_p$ , или определить технологические режимы (например, величина подачи на оборот  $S_p^{(0)}$ ), обеспечивающие постоянство диаметра детали. В данном случае алгоритм вычисления управления аналогичен алгоритму, приведенному ранее.

Для определенности рассмотрим партию из десяти деталей. На рис. 60 приведены характеристики погрешности с учетом эволюционных изменений обобщенного параметра  $\rho$ . На приведенной иллюстрации хорошо заметно изменение погрешности текущего радиуса обрабатываемой детали при обработке партии из десяти деталей по мере изменения параметра  $\rho$  в ходе эволюции. Это хорошо известный из технологии машиностроения факт. Однако в отличие от известных исследований в этой области, здесь эволюционные изменения размера являются зависящими от параметров динамической подсистемы инструмента и заготовки. Эти параметры влияют как на эволюционные изменения сил резания, так и на упругие деформационные свойства, влияющие на размер. Необходимо подчеркнуть, что эволюционные изменения размера детали не инвариантно к параметрам подсистем инструмента и заготовки.



Управление в технических системах

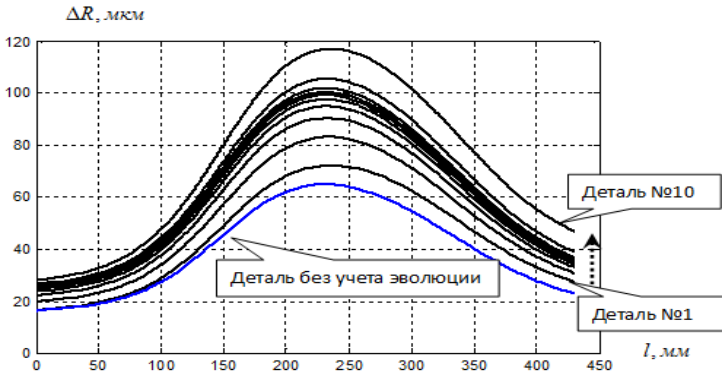


Рис.60. Траектории изменения упругих деформаций инструмента относительно заготовки вдоль координат обработки без учета и с учетом эволюции системы при обработке серии деталей (10 деталей с диаметром 20 мм и длиной 430 мм) при режиме резания: скорость резания  $V_p^{(0)} = 60,0 м/мин$ , глубина резания  $t_p^{(0)} = 2,0 мм$ , подача на оборот  $S_p^{(0)} = 0,2 мм/об$ .

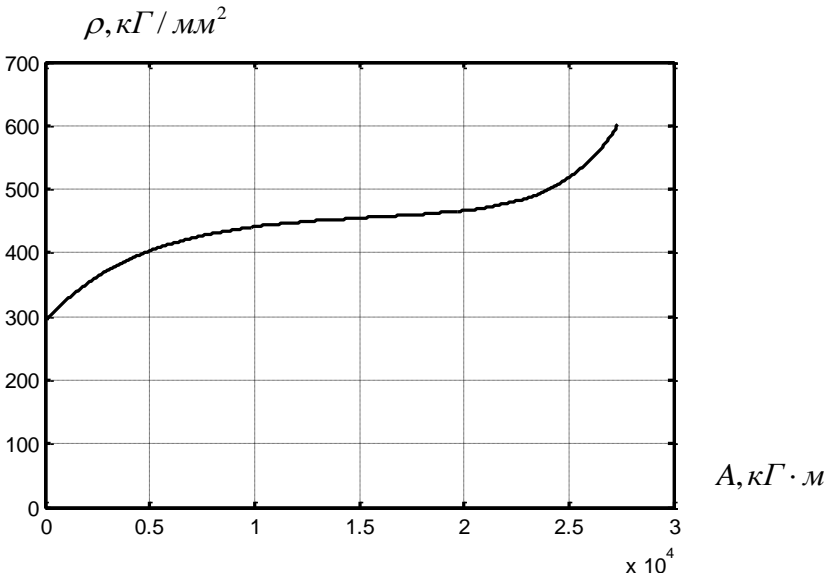


Рис.61. Эволюционная траектория изменения параметра  $\rho$  по совершенной работе резания





Таким образом, данные, полученные на одном технологическом оборудовании нельзя переносить на другое, если динамические подсистемы станка, приведенные в процессе резания, отличаются. На рис. 62, 63 приведены рассчитанные эволюционные диаграммы параметра  $\rho$  соответственно в функции совершенной работы и пути резания.

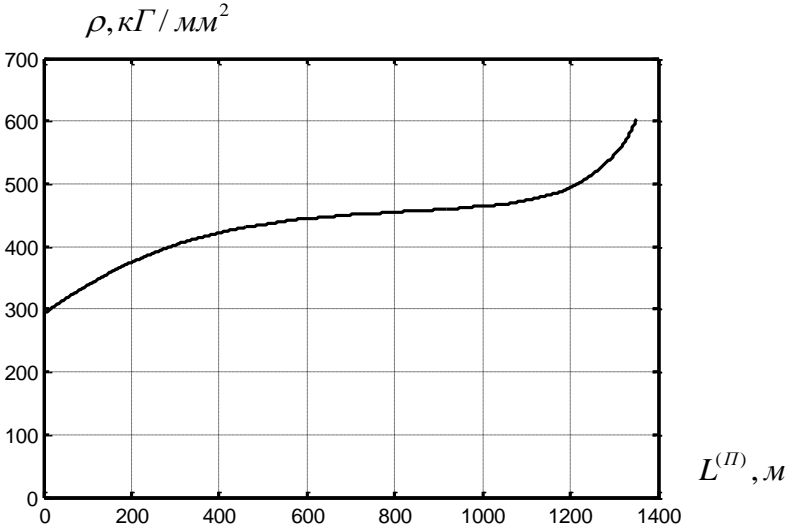


Рис.62. Эволюционная траектория изменения параметра  $\rho$  по пути резания

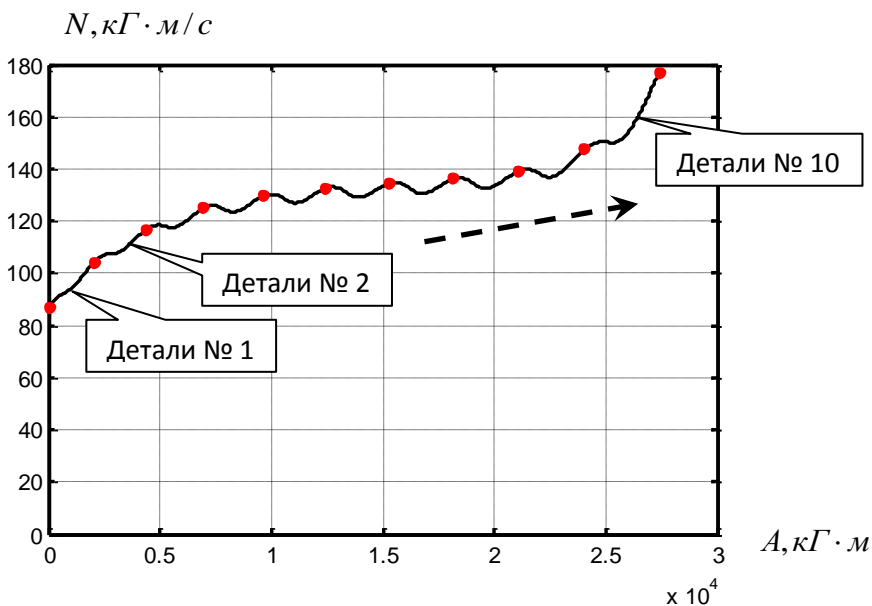


Рис.63. Траектория изменения мощности резания  $N$  по совершенной работе силы резания  $A$  в ходе эволюции системы

Для обеспечения низменного значения радиуса обрабатываемой детали требуется также коррекция программы изменения величины подачи  $S_p^{(0)}$ , мм/об, скорости продольного движения суппорта  $V_3^{(0)}$ , мм/с и соответственно напряжения якоря серводвигателя  $U_3$ , в вдоль оси вращения заготовки при обработке каждой детали. Вычисленные траектории, обеспечивающие  $R = const$  приведены на рис. 6.50.

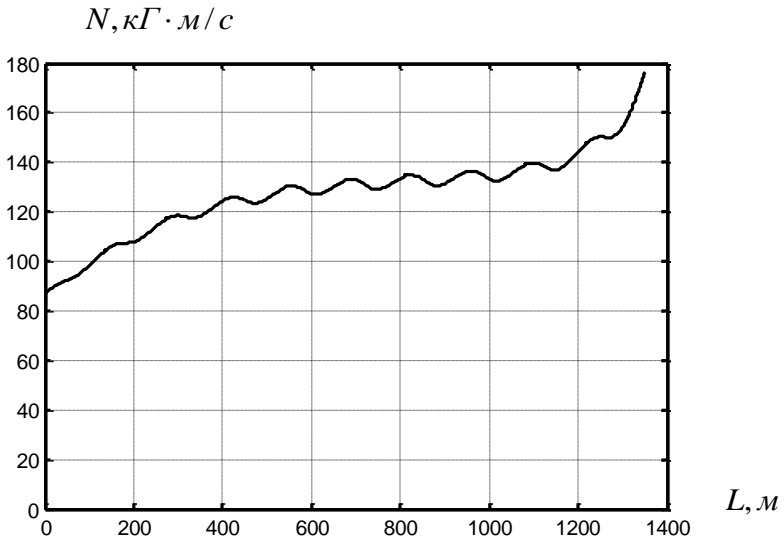
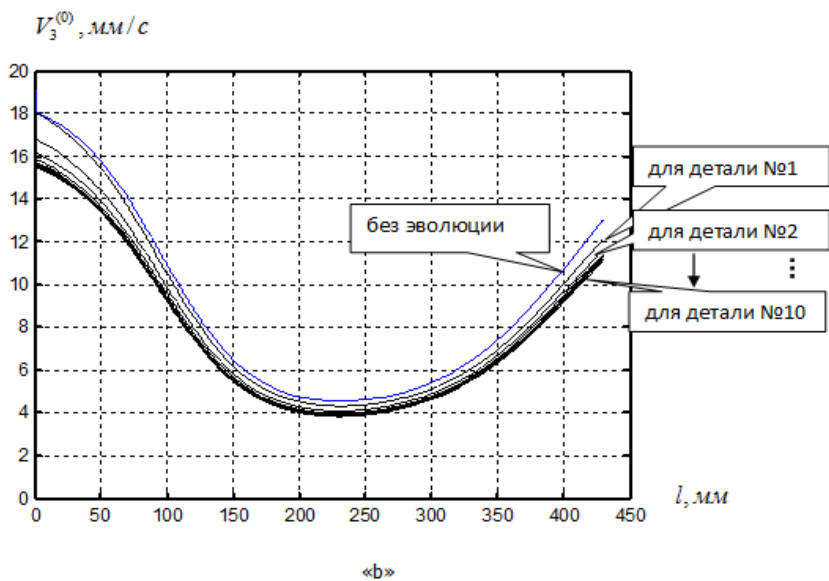
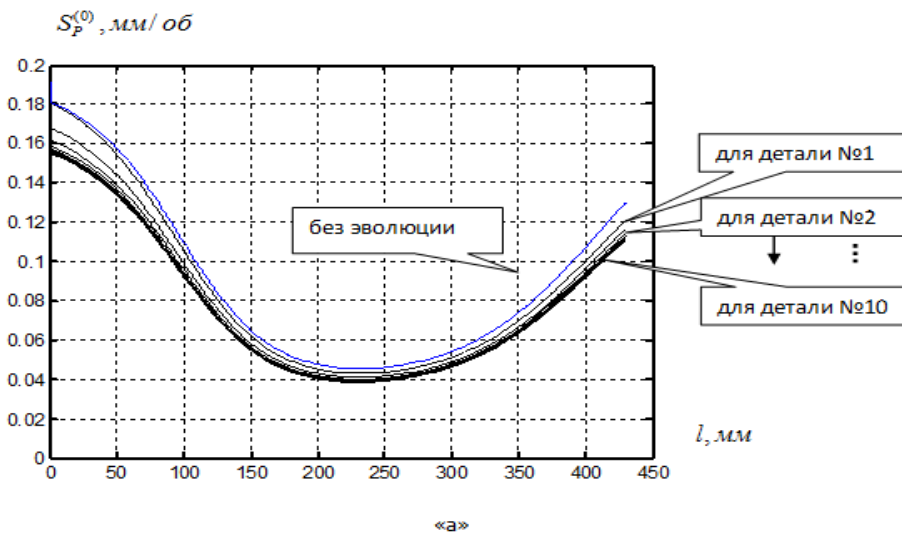


Рис.64. Траектория изменения мощности резания  $N$  по пути резания с учетом эволюции системы



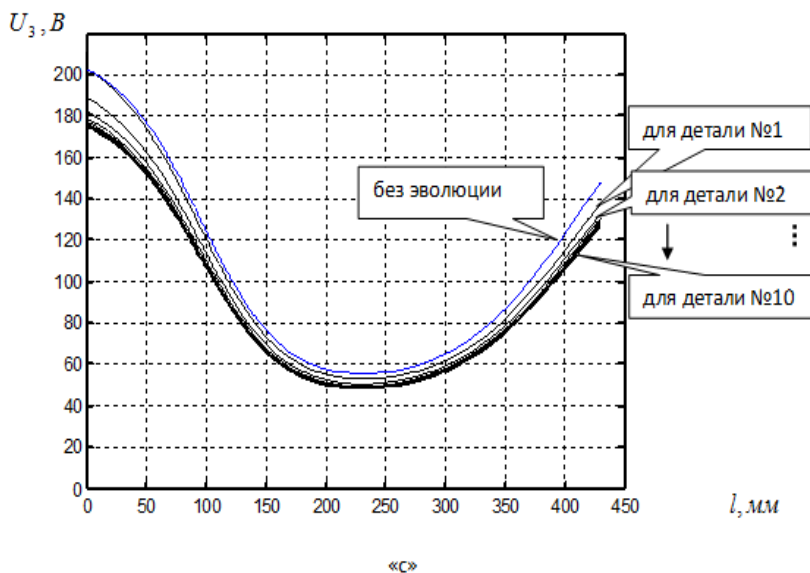


Рис.65. Траектории изменения требуемой величины подачи на оборот, обеспечивающей постоянство радиуса детали «а», и им соответствующие траектории изменения скорости подачи «б» и, следовательно, напряжения якоря серводвигателя (программа ЧПУ) «с» при обработке серии деталей (10 деталей) с учетом эволюции системы при постоянной скорости резания  $V_p^{(0)} = 60, м / мин$ , глубине резания  $t_p^{(0)} = 2, мм$ .  
( $\Delta R = 15, мкм$ )

Таким образом, эволюционные изменения динамической системы резания вызывают изменение точности обработки. Учет эволюционных изменений позволяет откорректировать программу управления траекториями исполнительных элементов станка, которая может полностью компенсировать влияние эволюции на точность изготовления деталей.

## 5.2. Эволюционные изменения и устойчивость

Эволюционная перестройка системы вызывает изменение ее свойств и, следовательно, характеристик качества изготовления детали и свойств динамической системы «быстрых» движений. В пространстве параметров



состояния процесса резания и показателей качества изготовления детали, следовательно, существуют эволюционные траектории, которые могут достигать своих предельных значений. Одним из таких важных свойств является устойчивость процесса резания.

Для изучения влияния эволюционных преобразований на устойчивость равновесия системы во многих случаях достаточно рассматривать предельную глубину резания, при которой система теряет устойчивость. Это связано с тем, что чувствительность системы к потере устойчивости наибольшая по отношению к изменению глубины резания. В этом случае необходимо проанализировать характеристическое уравнение системы (102) с учетом эволюционных изменений параметров.

$$\Delta(p) = (m_{1,1}p^2 + (h_{1,1} - \frac{\rho_1 T_1 t_p^{(0)}}{\sin \varphi})p + c_{1,1} + \frac{\rho_1 t_p^{(0)}}{\sin \varphi})(m_{2,2}p^2 + h_{2,2}p + c_{2,2}) - (m_{1,2}p^2 + (h_{1,2} - \frac{\rho_2 T_2 t_p^{(0)}}{\sin \varphi})p + c_{1,2} + \frac{\rho_2 t_p^{(0)}}{\sin \varphi})(m_{2,1}p^2 + h_{2,1}p + c_{2,1}) = 0 \quad (107)$$

где  $\rho_1(A)$ ,  $\rho_2(A)$ ,  $T_1(A)$  и  $T_2(A)$  - эволюционные параметры - функции от совершенной работы силы резания. Они являются решениями системы (102). Таким образом, при рассмотрении эволюции характеристическое уравнение (103) имеет изменяющиеся параметры. Причем эти параметры изменяются медленно по отношению к импульсной реакции системы. Поэтому систему можно рассматривать замороженной. В этом случае мы приходим к рассмотрению дискретного множества значений эволюционных параметров  $\rho_1^{(i)}$ ,  $\rho_2^{(i)}$ ,  $T_1^{(i)}$  и  $T_2^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , соответствующих значению работы сил резания  $A_i$ . Когда в каждом значении  $\rho_1^{(i)}$ ,  $\rho_2^{(i)}$ ,  $T_1^{(i)}$  и  $T_2^{(i)}$  для (103) с помощью метода D-разбиения легко определить предельную глубину резания  $t_p^{(0)}(i)$ .

Рассмотрим конкретный пример влияния эволюционных преобразований на предельную глубину резания. Для этого будем рассматривать следующие технологические режима резания  $V_p = 80, \text{мм/мин}$ ,  $S_p^{(0)} = 0.16, \text{мм/об}$  и  $V_p = 120, \text{мм/мин}$ ,  $S_p^{(0)} = 0.16, \text{мм/об}$ . Параметры системы приведены в таблице 6, коэффициенты интегральных операторов для первого режима резания приведены в таблице 8, и для второго режима резания в таблице 9. На рис. 66 показаны эволюци-



онные траектории изменения параметров для различных скоростей резания. На рис.67 приведена траектория смещения предельной глубины резания по совершенной работе силы резания. Отметим, что по совершенной работе сил резания из-за эволюционных преобразований уменьшается предельная глубина резания, то есть запас устойчивости уменьшается.

Таблица 8.

Коэффициенты интегральных операторов

$p_i$	$p_{i,0}$	$\alpha_i^{(1)}$	$T_i^{(1)}$	$\alpha_i^{(2)}$	$T_i^{(2)}$
$\rho_1$	56.3	$6.115 \cdot 10^{-5}$	$6.289 \cdot 10^3$	$2.826 \cdot 10^{-8}$	$8.919 \cdot 10^3$
$\rho_2$	154.6	$6.205 \cdot 10^{-5}$	$6.250 \cdot 10^3$	$3.052 \cdot 10^{-8}$	$8.892 \cdot 10^3$
$T_1$	$7.1 \cdot 10^{-4}$	$8.428 \cdot 10^{-11}$	$6.06 \cdot 10^3$	$3.93 \cdot 10^{-14}$	$8.49 \cdot 10^3$
$T_2$	$3.49 \cdot 10^{-4}$	$4.415 \cdot 10^{-11}$	$5.91 \cdot 10^3$	$5.25 \cdot 10^{-14}$	$9.66 \cdot 10^3$

Таблица 9.

Коэффициенты интегральных операторов

$p_i$	$p_{i,0}$	$\alpha_i^{(1)}$	$T_i^{(1)}$	$\alpha_i^{(2)}$	$T_i^{(2)}$
$\rho_1$	53	$4.864 \cdot 10^{-5}$	$6.314 \cdot 10^3$	$8.585 \cdot 10^{-8}$	$9.519 \cdot 10^3$
$\rho_2$	145.4	$4.885 \cdot 10^{-5}$	$6.250 \cdot 10^3$	$9.050 \cdot 10^{-8}$	$9.892 \cdot 10^3$
$T_1$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.323 \cdot 10^{-11}$	$6.94 \cdot 10^3$	$6.07 \cdot 10^{-14}$	$7.84 \cdot 10^3$
$T_2$	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$2.356 \cdot 10^{-11}$	$6.255 \cdot 10^3$	$5.789 \cdot 10^{-14}$	$8.66 \cdot 10^3$

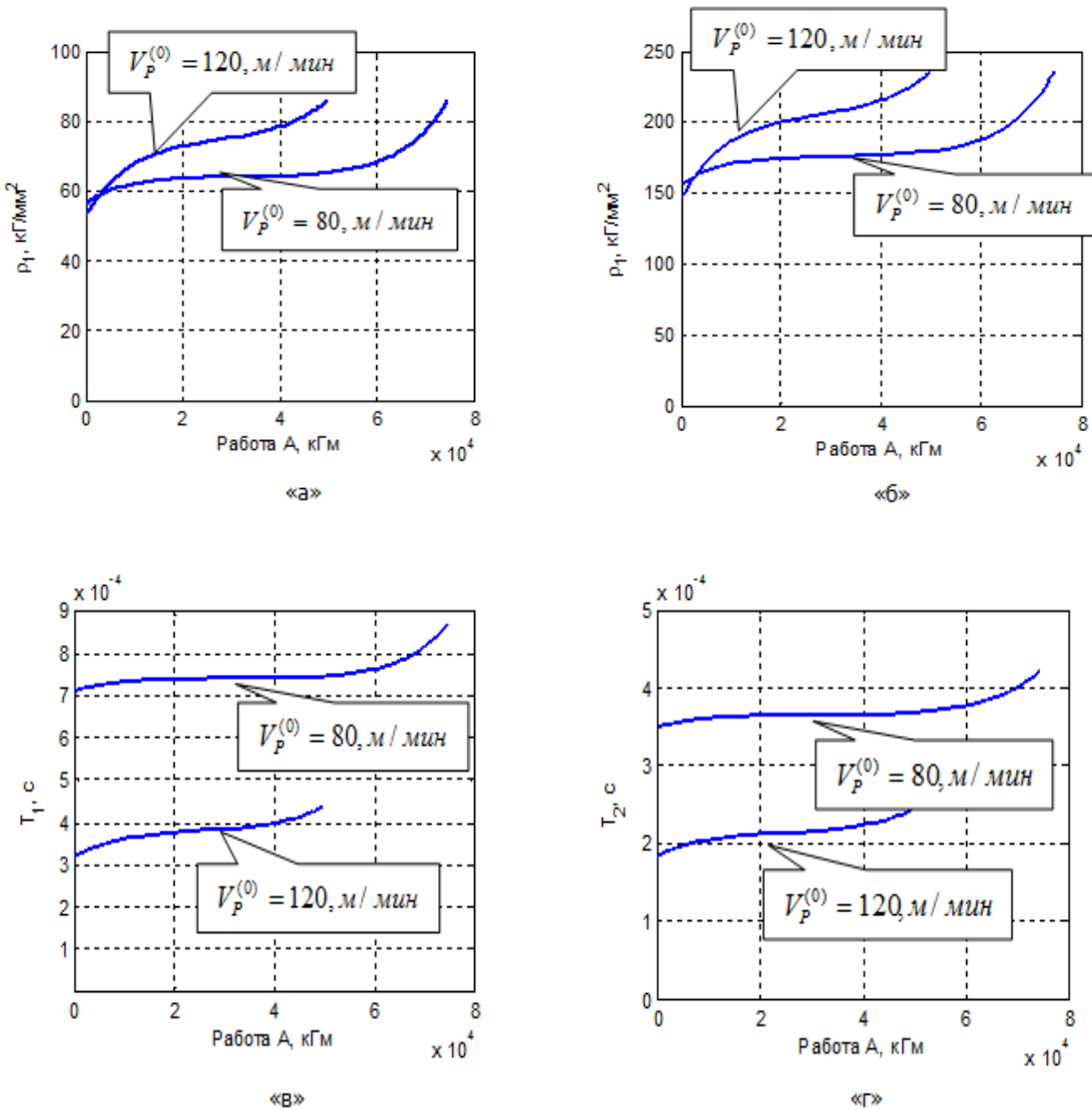


Рис. 66. Эволюционные траектории параметров системы по совершенной работе силы резания при различных скоростях резания





Анализ графиков (рис. 67) показывает, что в зависимости от сочетания скорости и глубины резания предельное значение работы, при которой процесс резания достигает своего терминального состояния, может существенно изменяться. Под терминальным состоянием понимается предельное сочетание параметров динамической характеристики процесса резания, при котором система теряет устойчивость.

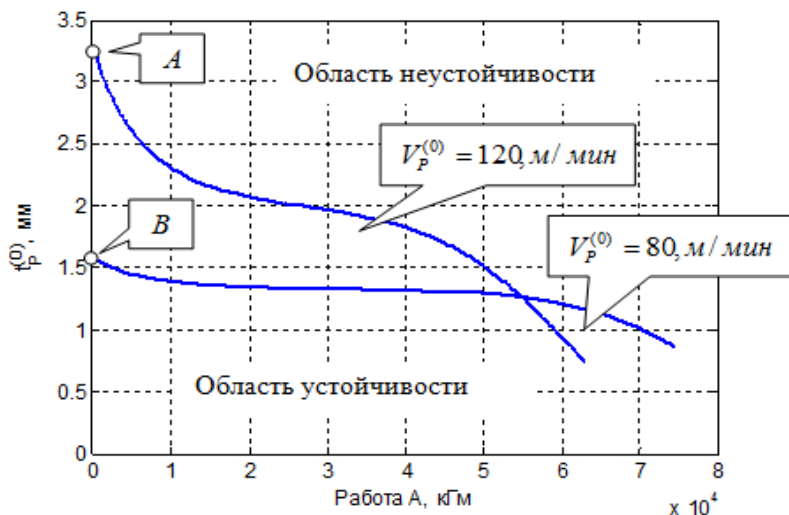


Рис. 67. Смещения предельной глубины резания по совершенной работе силы резания при различных скоростях резания

Например, при  $t_p^{(0)} = 1,0$  мм для скорости резания  $V_p = 120,0$  м/мин терминальное состояние достигается при работе  $A = 5,8 \cdot 10^4$  кгм. При скорости же  $V_p = 80,0$  м/мин - при работе  $A = 7,1 \cdot 10^4$  кгм. При других сочетаниях технологических режимов ситуация может принципиально меняться. Например, при глубине  $t_p^{(0)} = 2,0$  мм при скорости  $V_p = 80,0$  м/мин система является неустойчивой, а при  $V_p = 120,0$  м/мин она устойчива на первом этапе. Однако критическое значение работы, при которой система теряет устойчивость, равно  $A = 2,5 \cdot 10^4$  кгм. Как отмечено, что в традиционном подходе к выбору рациональных технологических режимов обычно ориентируются на критическое значение износа инструмента. Это значение языком теории управления можно считать терминальным состоянием системы. При



достижении этого терминального состояния процесс обработки не будет гарантировать заданное качество детали. Как показано, что в ходе эволюции система резания будет терять устойчивость. Поэтому терминальное состояние системы характеризуется также и потерей устойчивости системы резания.

В связи с этим проанализируем совместные диаграммы достижения терминального состояния процесса резания одновременно по критерию устойчивости и критического износа инструмента. Как показано в работах [10 - 12], развитие износа инструмента можно моделироваться в виде интегрального оператора Вольтера

$$h = \alpha_1 \int_0^A \exp\left(-\frac{A-\zeta}{T_{A_1}}\right) N(\zeta) d\zeta + \alpha_2 \int_0^A \exp\left(\frac{A-\zeta}{T_{A_2}}\right) N(\zeta) d\zeta \quad (108)$$

Приведем примеры развития износа инструмента по пути резания (рис. 44 и 45) при обработке стали 20Х инструментами из Т15К6 для различных скоростей и подач при неизменной глубине. Приведенные данные хорошо совпадают с известными экспериментально определенными зависимостями [299-301, 353]. Во всех случаях износ определяется в виде ширины его ленточки по задней грани.

Для приведенных условий обработки вычислены значения критического пути резания по критериям износа и потери устойчивости (рис. 68, рис. 69). На приведенных иллюстрациях область «А» соответствует устойчивому процессу резания. Область «В» соответствует износу инструмента, величина которого не достигла критического значения.

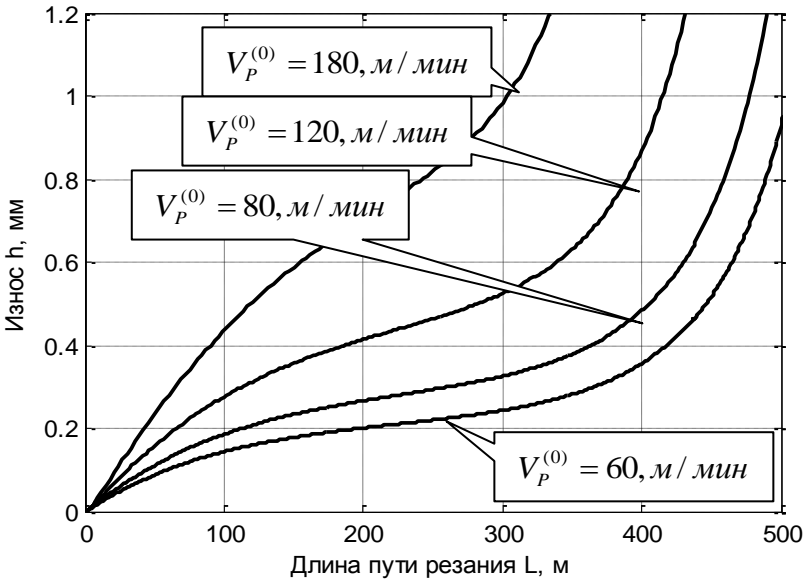


Рис.68. Пример диаграмм развития износа инструмента по пути резания при различных скоростях.  $S_p^{(0)} = 0.2, \text{мм/об}$ ,  $t_p^{(0)} = 1.0, \text{мм}$

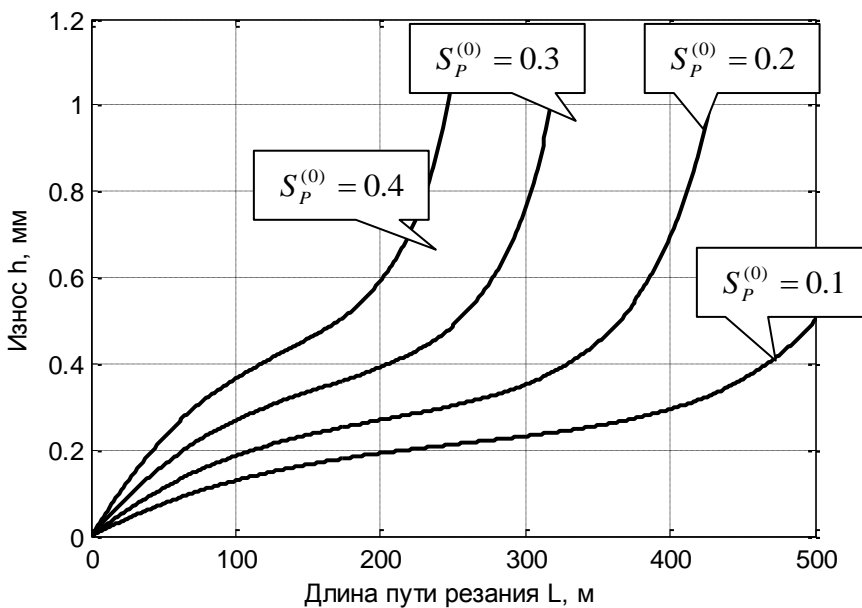


Рис. 69. Развитие износа инструмента по пути резания при различных значениях подачи на оборот.  $V_p^{(0)} = 80, м/мин$ ,  $t_p^{(0)} = 1, мм$ .

Как видно, в рассмотренных примерах путь резания по критерию потери устойчивости траекторий формообразующих движений, как правило, существенно меньше, чем по критерию критического износа. Величина критического износа принята равной 1,0 мм. При управлении процессом, например, по критерию требуемой точности изготовления деталей, приходится варьировать в процессе обработки также технологические режимы. Здесь, прежде всего, необходимо определить ограничения, накладываемые на изменение величины подачи на оборот. В связи с этим приведем также рассчитанные траектории терминальных значений величины подачи на оборот (рис. 70). Приведенные данные показывают, что путь резания при заданных режимах, в основном, регламентируется не величиной износа, а условиями потери устойчивости траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки.

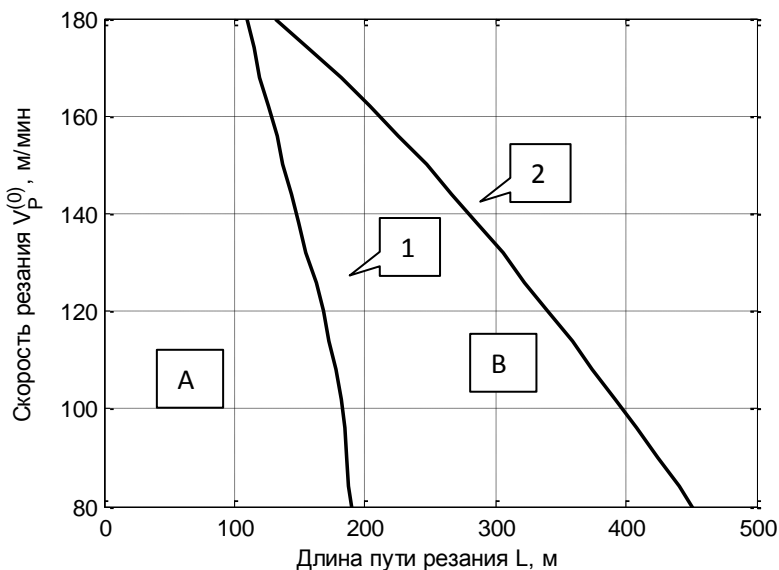


Рис. 70. Изменение терминальных значений по критериям устойчивости и предельного износа при изменении скорости резания  $V_p^{(0)}$ .

$t_p^{(0)} = 1, мм$ ,  $S_p^{(0)} = 0.2, мм/об$ ; (1) – граница предельной пути резания по устойчивости; (2) – граница пути резания по критическому значению износа инструмента

Необходимо отметить, что опыт настройки инструментов при обработке на автоматических линиях показывает, что отказ процесса резания в основном наблюдается не по критерию достижения инструментом своего критического значения, а по причине резкого увеличения шероховатости поверхности, которая возрастает после потери устойчивости.

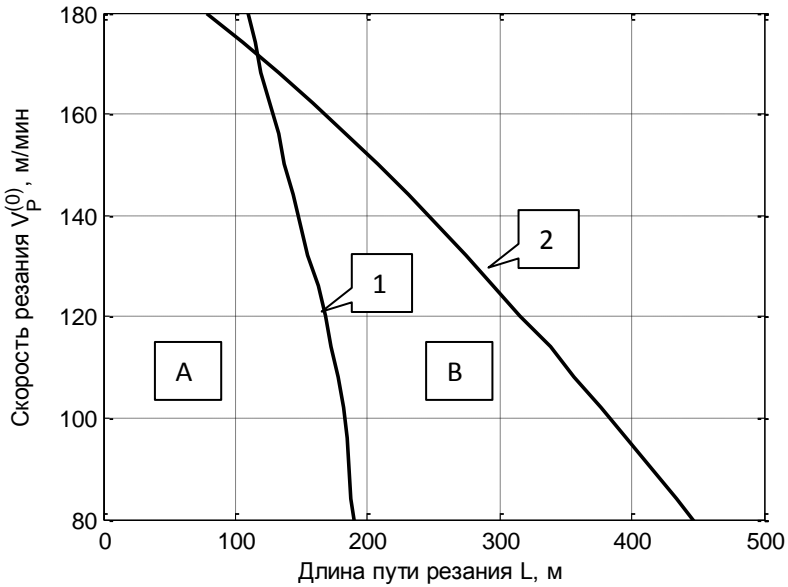


Рис.71. Изменение терминальных значений по критериям устойчивости и предельного износа при изменении скорости резания  $V_p^{(0)}$ .

$t_p^{(0)} = 1,5 \text{ мм}$ ,  $S_p^{(0)} = 0,2, \text{ мм/об}$ ; (1) – граница предельной пути резания по устойчивости; (2) – граница пути резания по критическому значению износа инструмента

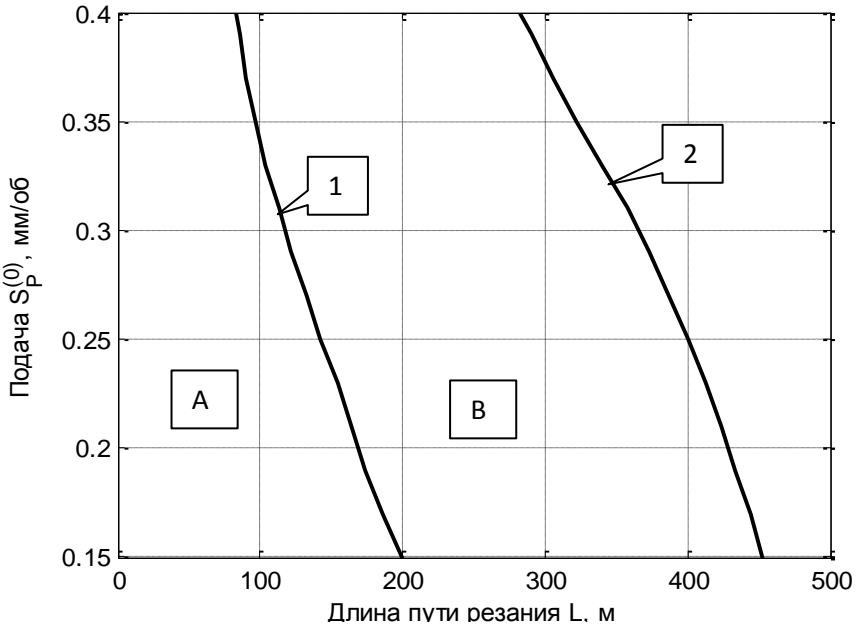


Рис. 72- Изменение терминальных значений по критериям устойчивости и предельного износа при изменении подачи на оборот  $S_p^{(0)}$ .

$t_p^{(0)} = 1, мм, V_p^{(0)} = 80 мм, мин$ ; (1) – граница предельной пути резания по устойчивости; (2) – граница пути резания по критическому значению износа инструмента

Обобщая приведенные результаты по эволюционному преобразованию динамической системы резания, необходимо отметить, что приведенные на рис. 72 терминальные значения пути резания, при которых система теряет устойчивость точки равновесия, фактически характеризуют линию бифуркации. Дальнейшие сценарии изменения свойств системы и их бифуркационные преобразования могут быть разнообразными. Они частично проанализированы ранее. Здесь же отметим, что на участке до точек бифуркаций наблюдается монотонная эволюция корней характеристического полинома системы. В точках же бифуркации обычно пара корней характеристического полинома переходит через мнимую ось. В связи с этим отметим важную особенность эволюционных преобразований в динамической системе резания: вплоть до точки бифуркации наблюдается монотон-



ное смещение корней характеристического полинома системы. Другими словами, всякой эволюционной траектории соответствует некоторая диаграмма смещения корней характеристического полинома. После точки бифуркации, в результате формирования различных многообразий в окрестности эволюционной траектории происходит резкое изменение спектрального состава колебаний. Этот факт может служить хорошим диагностическим признаком для оценивания подхода динамической системы резания к критической точке, где наблюдается потеря устойчивости равновесия.

### 5.3. Определение оптимальных траекторий на множестве желаемых траекторий с учетом ограничений и эволюции

Приведенная выше методика определения управления на основе синергетической концепции использует детерминированное представление о преобразующей системе станка. Она не учитывает влияние самостоятельных процессов в зоне резания, кинематических возмущений, имеющих различную природу, а также эволюционные изменения в динамической системе резания. В связи с этим рассмотрим ограничения на характеристики системы и траектории множества с учетом отмеченных выше факторов, ограничивающих как сами траектории, так и возможности достижения точности. Кроме того, рассмотрим вопрос о выборе оптимальной траектории на множестве желаемых траекторий по критерию минимума приведенных затрат на изготовление партии деталей.

**Вначале рассмотрим вопрос о выборе оптимальной траектории на многообразии  $\psi$ .** В основу выбора траектории положим противоречие между стоимостью инструмента с учетом его замены и наладки на размер, и стоимостью эксплуатации станка, то есть стоимостью станкоминуты. Замена инструмента и (или) его подналадка осуществляется в следующих случаях.

- 1) Достижения износа инструмента его критического значения.
- 2) Потери устойчивости траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки.
- 3) Потери точности размера детали.
- 4) При достижении предельно допустимых значений шероховатости поверхности.
- 5) При достижении сил резания своего критического значения, при котором наблюдается поломка инструмента или выкрашивание его режущих лезвий.

Все указанные условия принадлежат множеству существования про-





цесса резания, которое обозначим  $\mathfrak{S}$ . Обозначим компоненты пересечения множеств  $\psi$  и  $\mathfrak{S}$  следующим образом  $Z \in \psi \cap \mathfrak{S}$ . Множество  $\psi \cap \mathfrak{S}$  являются выпуклым с допустимыми границами  $\psi_0 \cap \mathfrak{S}_0$ . Под терминальным состоянием эволюционного процесса резания будем понимать такое, при котором  $Z$  достигает границы  $\psi_0 \cap \mathfrak{S}_0$  (рис.73). Причем, система достигает своего терминального состояния в том случае, если хотя бы одна из компонент (например, компонента  $Z_k(l_0)$ ) достигла своего терминального значения (рис. 73). Тогда  $l_0$  - есть критический путь резания, после которого требуется переналадка системы.

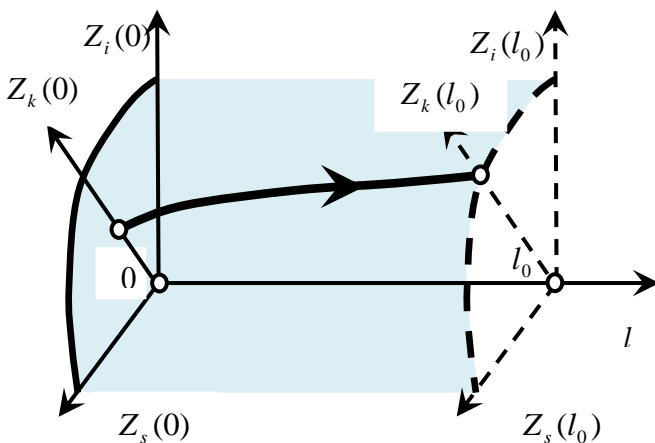


Рис. 73. Схема эволюционного изменения компонент множества  $\psi \cap \mathfrak{S}$

Таким образом, под терминальным состоянием понимается не достижение критического износа, а достижение критического состояния одной из компонент множества  $\psi \cap \mathfrak{S}$ . Более того, существует ряд технологических процессов обработки резанием, для которых достижение значения критического износа не является лимитирующим. Например, при сверлении глубоких отверстий малого диаметра спиральными сверлами терминальным состоянием является достижение момента, действующего на сверло, своего критического значения [10].

Для рассматриваемого примера точения вала неизменного диаметра терминальное состояние процесса определяется следующими компонентами: критическим значением износа инструмента, при котором наступает



этап катастрофического его изнашивания; критическим значением эволюционных параметров, при которых траектория формообразующих движений теряет устойчивость; критическим значением дисперсии самостоятельных процессов в зоне резания, при котором величина шероховатости поверхности превышает допустимые значения; критическим значением параметра  $\rho$ , при котором наблюдается потеря точности.

Кроме указанных терминальных значений на технологические параметры накладываются дополнительные ограничения, не связанные с эволюционными изменениями динамической системы резания. Во-первых, это ограничения, обусловленные допустимыми вариациями скорости подачи и частоты вращения шпинделя. Они связаны, прежде всего, с допустимыми вариациями рассматриваемых координат, исходя из физической реализуемости траекторий. Здесь, прежде всего, необходимо учитывать физически реализуемые границы диапазона регулирования скоростей серводвигателей. Во-вторых, существуют ограничения исходя из влияния скоростей на кинематические возмущения. При рассмотрении скорости подачи ниже критического, ограничение дополнительно диктуется уровнем кинематических возмущений. Что касается верхней границы частоты вращения шпинделя, то они кроме физической реализуемости имеют ограничения по уровню кинематических возмущений, связанных с радиальными биениями шпинделей. Наконец, существуют ограничения на максимальные значения величины подачи на оборот, которые связаны с геометрическими следами от инструмента на обрабатываемой поверхности, влияющими на величину шероховатости.

В настоящей работе рассматривается вопрос выбора рациональной траектории на многообразии траекторий формообразующих движений. Под рациональной траекторией будем понимать траекторию, обеспечивающую минимум приведенных затрат на изготовление партии деталей. Причем понятие оптимальности будем рассматривать в узком смысле. Это значит необходимо выбрать траекторию с такой неизменной скоростью резания, при которой обеспечивается минимум приведенных затрат. Такая постановка задачи является некоторым развитием и обобщением традиционной. Обобщение ее заключается в том, что в качестве терминального состояния рассматривается не критическое значение износа, а достижение терминального множества  $\Psi_0 \cap \mathfrak{F}_0$ .

Пусть задана партия из  $N$  деталей, которой соответствует суммарный путь резания  $L = Nl^{(D)}$ . Кроме этого будем считать, что нам задано многообразие траекторий  $\{dX/dt, X\}$  и  $\{d\alpha/dt = \omega, \alpha\}$ . Первое многообразие характеризует закон изменения скорости движения суппорта по перемещению в направлении образующей при обработке детали. Второе



многообразии характеризует закон изменения частоты вращения шпинделя по углу поворота. Причем, каждая фазовая траектория этих многообразий попарно соответствуют друг другу. Необходимо на этом многообразии определить такую пару, при которой обеспечивается условие минимума приведенных затрат при изготовлении партии из  $N$  деталей. Будем также считать, что нам заданы: стоимость станкоминуты  $\theta_C$  и стоимость инструмента с учетом его замены, установки и настройки на размер  $\theta_H$ . Таким образом, затраты на изготовление партии деталей определяются

$$\theta_{\Sigma} = \theta_C (T_M + N\Delta T) + \theta_H (kT_H), \quad (109)$$

где  $T_M$  - время процесса резания;

$\Delta T$  - время на установку детали и ее замену;

$T_H$  - приведенное время, затрачиваемое на замену инструмента и его настройку (всего  $k$  замен).

Заданной  $i$  - ой паре фазовых траекторий  $\{d\alpha^{(i)} / dt = \omega^{(i)}, \alpha^{(i)}\}$  и  $\{dX^{(i)} / dt = V^{(i)}(X^{(i)}), X^{(i)}\}$  соответствуют эволюционные траектории  $Z^{(i)} \in \psi \cap \mathfrak{S}$ . В свою очередь, каждой траектории можно поставить в соответствие путь  $l_0^{(i)}$ , при котором достигается терминальное состояние системы резания, а также средняя скорость движения инструмента относительно заготовки по направлению формообразования. Это скорость

$\hat{V}^{(i)} = \frac{1}{X^{(i)}} \int_0^{l_0} V^{(i)}(X^{(i)}) dX^{(i)}$ . В (109)  $N\Delta T = const$ . Поэтому стоимость

замены деталей не влияет на оптимальные значения траекторий. Пусть на пути динамическая система резания  $k$  раз достигает своего терминального состояния. Тогда необходимо выбрать такую пару траекторий, при которой  $\theta_{\Sigma} = \min$ . Решение задачи выбора оптимальных траекторий на рассматриваемом многообразии выполняется в два этапа. На первом этапе для каждой конкретной траектории вычисляется эволюционная траектория и путь, при котором она достигает своего терминального состояния. На втором этапе из рассматриваемых траекторий выбирается оптимальная, например, по критерию  $\theta_{\Sigma} = \min$ . Возможны и другие критерии, например, критерий максимальной производительности.

Приведем для рассматриваемого случая пример выбора траек-



тории, оптимальной по стоимости, то есть по критерию  $\theta_{\Sigma} = \min$ . Ограничимся рассмотрением двух терминальных состояний: достижения критического износа и параметров динамической характеристики процесса резания, при которых система теряет устойчивость траектории формообразующих движений. На рис. 74 приведены две терминальные траектории для рассмотренного выше примера, в котором траектория изменения скорости подачи вычислена по критерию  $R = const$  с учетом эволюционных изменений параметра  $\rho$ . Критическое значение износа инструмента выбрано исходя из условия  $h^{(кр)} = 1.2, мм$  ширины ленточки износа по задней грани.

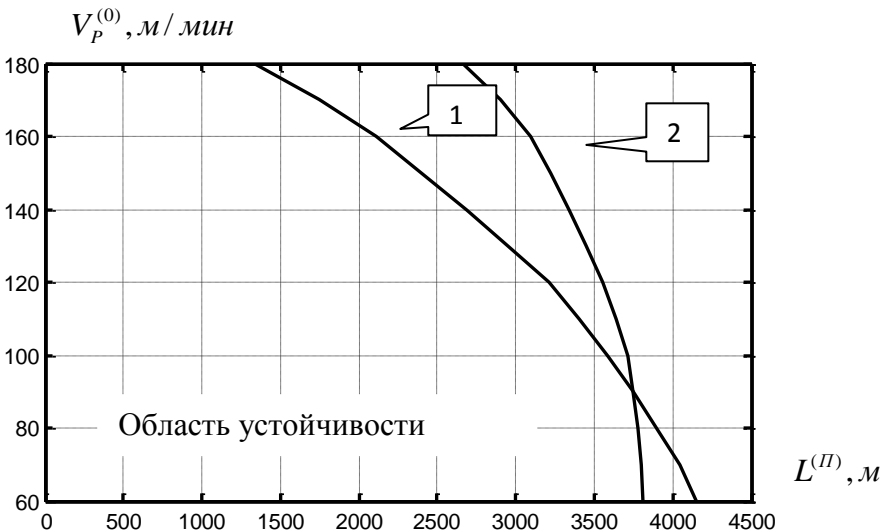


Рис.74. Терминальные траектории системы резания по пути при различных скоростях резания: 1- терминальная траектория по критерию устойчивости системы, 2 – терминальная траектория по критерию износа инструмента

В рассматриваемом примере траектория изменения подачи по длине обработки с учетом эволюционных преобразований является заданной исходя из требования  $R = const$ . Существует бесконечное множество сочетаний скорости резания и соответствующей ей траектории скорости подачи, при которых выполняется условие  $R = const$ . Вначале определим оптимальные значения скорости резания, при которой система резания



достигает своего критического износа. Это значение зависит от стоимости инструмента с учетом стоимости его замены и настройки (рис. 73). Оптимальное значение скорости зависит не только от условий обработки, которые в данном случае остаются неизменными, но и от стоимостей станкоминуты  $\theta_H$  и режущего инструмента  $\theta_C$ . На приведенной иллюстрации минимальное значение приведенных затрат выделено красным цветом. Если в качестве терминального значения выбрать потерю устойчивости процесса резания, то диаграмма оптимальной скорости резания меняется, качественно оставаясь такой же (рис. 75). Здесь также красным цветом выделены значения скорости резания, при которых приведенные затраты принимают минимальные значения. Необходимо обратить внимание на то, что оптимальные значения скорости резания изменяются в зависимости от того, какие терминальные условия рассматриваются. Если рассматривать в качестве терминального состояния эволюционного процесса резания одновременное ограничение по критериям критического износа и потери устойчивости, то диаграммы изменения приведенных затрат и соответствующие значения оптимальной скорости резания будут меняться (рис. 76). Скачкообразное изменение оптимального значения приведенных затрат на рис. 76 «b» объясняется изломом терминального состояния системы в точке пересечения кривой по критическому значению и кривой по потере устойчивости процесса резания (рис. 74). Механизм образования этого скачка хорошо заметен на рис. 76 «a».

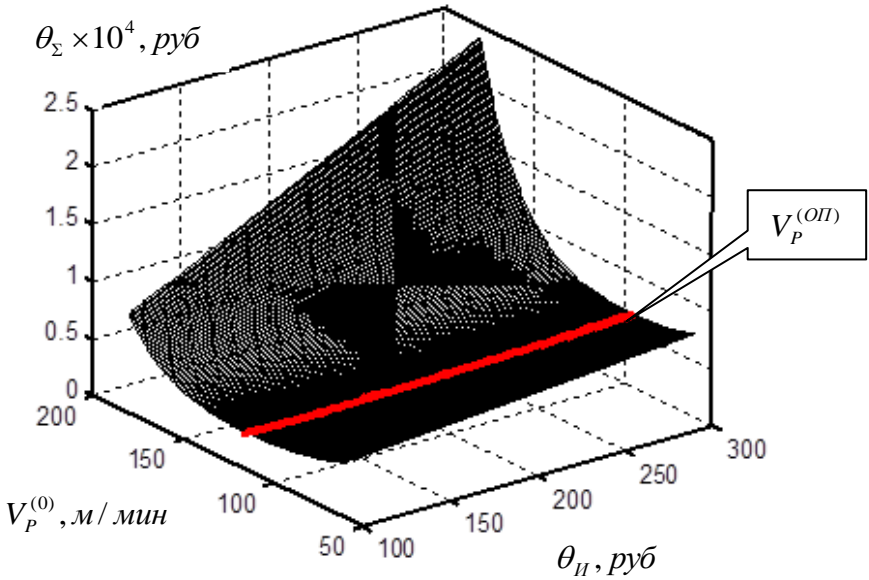


Рис.75. Зависимость приведенных затрат на изготовление партии из 100 деталей от скорости резания.  $V_P^{(ОП)}$  - Кривая оптимальных скоростей резания, при которых обеспечивается условие минимума приведенных затрат при изготовлении партии из 100 деталей при различных значениях стоимости  $\theta_{II} = \text{var}$ ,  $\theta_C = 0.5, \text{руб}$

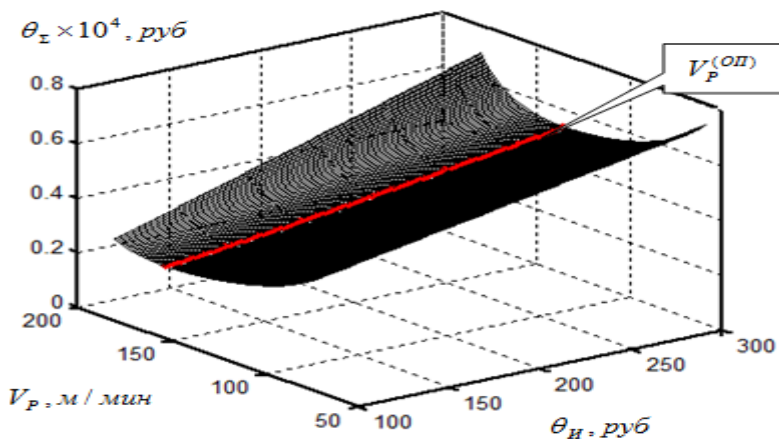
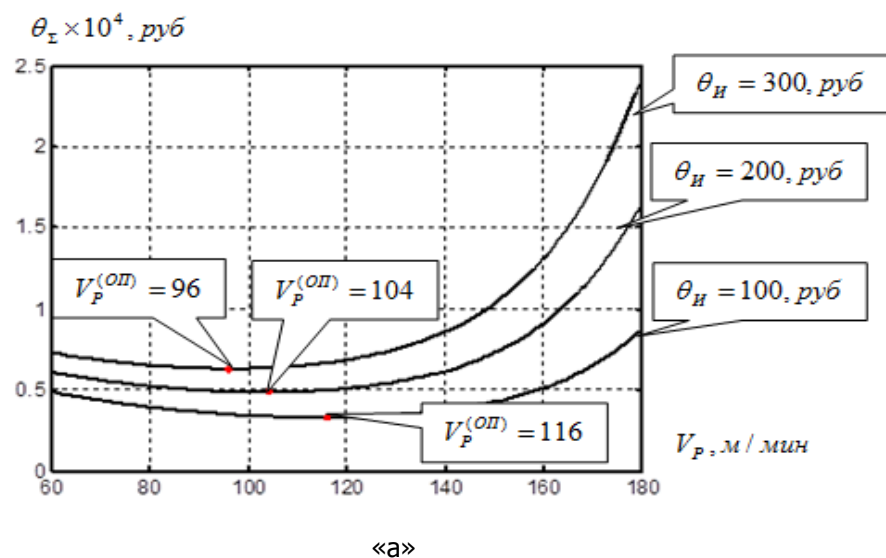
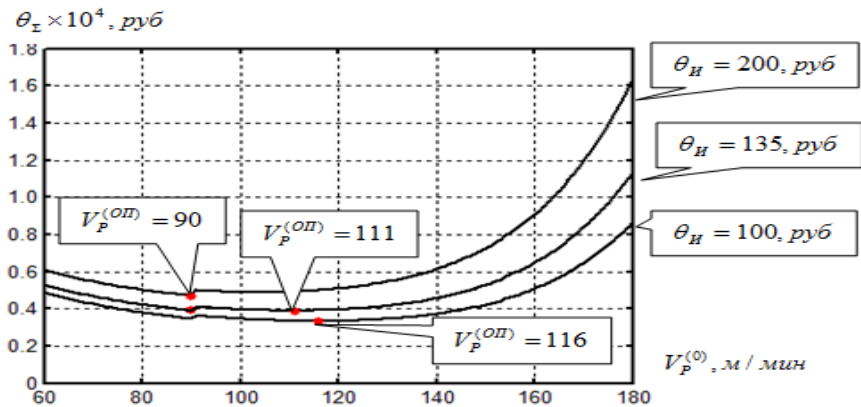
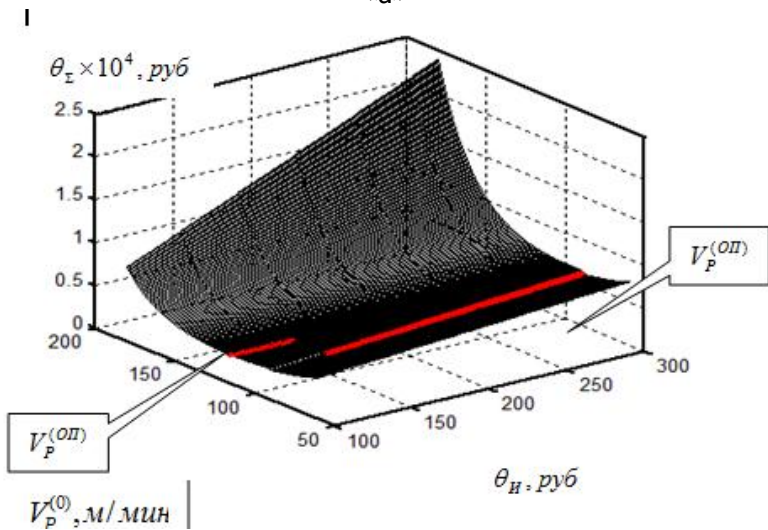


Рис.76. Изменение оптимального значения скорости резания при рассмотрении в качестве терминального значения потери устойчивости траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки: «а» - пример изменения приведенных затрат в зависимости от скорости резания при различных значениях стоимости инструмента; «б» - диаграмма изменения стоимости в плоскости скорость резания – стоимость инструмента



«а»



«б»

Рис. 77. Изменение оптимальных значений скорости резания при одновременном учете ограничений по критическому износу инструмента и потери устойчивости траекторий формообразующих движений инструмента относительно заготовки

Приведенный пример можно обобщить и на более общий случай, когда в качестве терминального состояния процесса резания дополнительно рассматриваются другие ограничения. Среди наиболее важных отметим:

- существование терминального значения по величине шероховатости





поверхности (это ограничение определяет предельные величины подачи и критическое значение износа);

-достижение максимального значения сил резания (это ограничение особенно актуально, например, при сверлении глубоких отверстий малого диаметра);

- изменение характеристик радиального биения шпинделя, возрастающих по мере увеличения скорости вращения шпинделя и пр.

Важно подчеркнуть, что рассмотренное представление о выборе оптимальной скорости резания, опирающееся на эволюционные свойства динамической системы резания, обобщают известные представления о выборе оптимальных режимов резания.



## **ГЛАВА 6. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ РЕЗАНИЯ О КООРДИНАТАХ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА И ПАРАМЕТРАХ КАЧЕСТВА ИЗГОТОВЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ.**

Изложенные выше синергетические методы построения управления процессами обработки на станках основаны на использовании этих методов на станках, выпускаемых промышленностью без введения обратных связей по текущим характеристикам точности обрабатываемой детали и состояния процесса резания. Однако системный подход к анализу, принятый в настоящем курсе, дает возможность повышения качества управления за счет введения различных обратных связей, определяемых рабочей информацией о процессе.

### **6.1. Коррекция программируемых траекторий за счет дополнительных информационных потоков**

Построение программ ЧПУ на основе желаемых многообразий траекторий формообразующих движений основано на детерминированном подходе к системе и знания априорной информации о ее свойствах. Однако параметры математических моделей и свойства системы могут меняться за счет вариаций физико-механических свойств обрабатываемой заготовки, условий ее закрепления в зажимных приспособлениях, вариаций геометрии инструмента и условий его заточки, а также условий его закрепления в суппорте и пр. Изменяются достижимые параметры точности и за счет дополнительных, прежде всего кинематических возмущений. В связи с этим для повышения эффективности синергетического подхода к синтезу систем необходимо вводить обратные связи по координатам, оценивающим текущую информацию о формируемом качестве детали и состоянии процесса резания. В настоящее время разработаны системы управления процессом обработки на основе использования различных измерительных систем, которые определяют характеристики текущего качества деталей после обработки. Для этого в технологический процесс встраиваются измерительные машины и разрабатываются алгоритмы коррекции программы обработки последующей детали на основе измерения параметров качества при обработке предыдущей детали [26, 27]. Однако такой способ существенно усложняет схему технологического процесса за счет введения дополнительных измерительных позиций и не позволяет вводить коррекцию непосредственно в ходе обработки конкретной детали. Системный подход,



принятый в настоящей работе, позволяет построить наблюдатели за отдельными координатами состояния, так как в единой динамической системе все координаты являются взаимосвязанными и изменения некоторых параметров системы отображается в траекториях, прежде всего, подсистемы «быстрых» движений. В работе ограничимся легко измеримыми в ходе обработки координатами, характеризующими процесс обработки. В качестве измеримых координат будем рассматривать силы резания  $\{F_1(l), F_2(l), F_3(l)\}^T$ , вибрационные последовательности инструмента  $\{x_1(l), x_2(l), x_3(l)\}^T$ , траектории пространственных перемещений исполнительных элементов станка  $\{V_1(l), X_1^{(0)}(l)\}^T$ ,  $\{V_3(l), X_3^{(0)}(l)\}^T$  и  $\{\omega_4(l), \alpha_4(l)\}^T$  (рис. 78). Заметим, что массивы данных  $\{V_1(l), X_1(l)\}^T$ ,  $\{V_3(l), X_3(l)\}^T$  и  $\{\omega_4(l), \alpha_4(l)\}^T$  в настоящее время легко получаются, так как они характеризуют обратные связи по положению и скорости в системах автоматического регулирования траекториями исполнительных элементов станка. Для наблюдения за функциями  $\{F_1(l), F_2(l), F_3(l)\}^T$  и  $\{x_1(l), x_2(l), x_3(l)\}^T$  можно установить выпускаемые промышленностью измерительные преобразователи. Таким образом, все перечисленные траектории фактически объединяют динамическую систему станка в единую систему. Необходимость такого объединения диктуется принятым в работе системным подходом. На основе перечисленного массива можно сформировать наблюдатели за текущими характеристиками состояния процесса резания и параметрами текущего качества деталей, то есть решить задачу наблюдения в целом. Фактически на основе приведенного массива и использования априорной информации о свойствах системы всегда имеется возможность оценивать свойства не измеримых траекторий формирующих движений. Кроме этого, на основе учета зависимости траекторий от свойств динамической связи имеется возможность оценивать изменения параметров динамической связи в ходе обработки и на этой основе определять параметры состояния процесса резания.

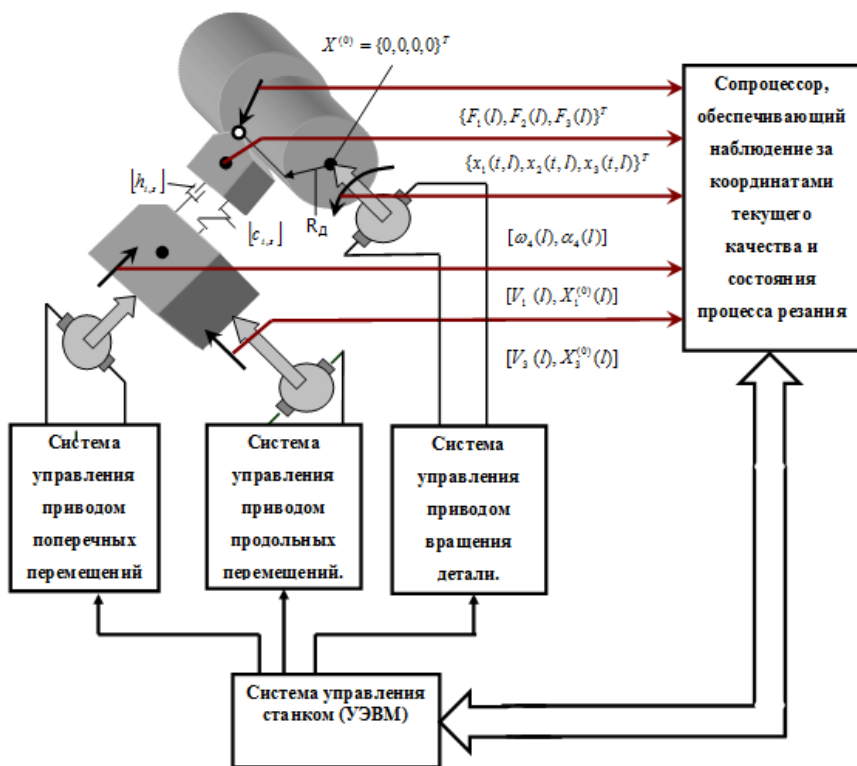


Рис. 78. Обобщенная схема построения систем наблюдения за состоянием процесса резания и о параметрах качества формируемой детали.

Необходимо отметить, что рассматриваемый системный подход обладает большой эвристической основой, и его использование, приведенное ниже, далеко не исчерпывает всех направлений. Рассматриваемая система является эволюционной и законы эволюционных преобразований параметров связи получены. Поэтому открывается возможность не только оценивания текущего состояния, но и прогнозирования изменения во времени при определенных программой траекториях. Единство задач наблюдения и прогнозирования в работе интерпретируется как решение проблемы динамического мониторинга.



## 6.2. Коррекция программируемых траекторий за счет введения обратной связи по силам резания

В настоящее время для измерения сил резания используется два принципа. Первый основан на оценивании сил по электрическим параметрам серводвигателя вращения шпинделя. Этот метод не обладает достаточной точностью и не позволяет разделить информацию о составляющих вектора сил в пространстве. Второй метод основан на измерении упругих деформаций инструмента относительно суппорта. Это достаточно точный метод, основанный на использовании специальных измерительных суппортов, выпускаемых фирмами Крупп Видео, Прометек, Хертель и др. Будем считать силы  $F = \{F_1(t), F_2(t), F_3(t)\}^T$  заданными. Тогда вместо имеем

$$c(l_i)X(l_i) = F(S_p, t_p, V_p), \tag{110}$$

где  $X(l_i) = \{X_1(l_i), X_2(l_i), \dots, X_6(l_i)\}^T$  - вектор упругих деформационных смещений инструмента и заготовки в точке  $l_i$  вдоль оси вращения заготовки;

$F = \{F_1(t), F_2(t), F_3(t), F_1(t), F_2(t), F_3(t)\}^T$  - измеримый вектор сил резания;

$$c(l_i) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{4,4}(l_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{5,5}(l_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{6,6} \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица жесткости подсистем}$$

инструмента и заготовки.

Причем, элементы  $c_{4,4}(l_i) = c_{5,5}(l_i)$  являются заданными функциями.

Ограничимся случаем продольного точения детали неизменного диаметра. Изложенные ниже материалы могут быть легко обобщены и на случай обработки детали сложного геометрического профиля. Рассмотрим случай, когда управление точностью осуществляется на основе варьирования скорости продольной подачи. Естественно положить, что угловые коэффициенты ориентации силы остаются неизменными. Тогда можно ввести в рассмотрение значение эффективной суммарной жесткости системы  $c_0(l_i)$ , учитывающей матрицы жесткости подсистем, по следующему правилу



$$c_0(l_i)X_0(l_i) = F_0(S_P, t_P, V_P), \quad (111)$$

где  $\{c_0(l_i)\}^{-1} = \frac{\Delta_\chi}{\Delta} + \frac{\chi_1}{c_{4,4}(l)}$  - суммарная податливость системы без

учета связи сил с деформациями;

$$\Delta_\chi = \begin{vmatrix} \chi_1 & c_{2,1} & c_{3,1} \\ \chi_2 & c_{2,2} & c_{3,2} \\ \chi_3 & c_{2,3} & c_{3,3} \end{vmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Потребуем, чтобы вдоль траектории движения суппорта диаметр обрабатываемой детали оставался неизменным. Так как в рассматриваемом примере вариации припуска отсутствуют, то

$$X_1(l) + X_4(l) = X_0(l) = const; \quad (112)$$

$$R^{(Ж)} = R - X_1^{(0)} + X_0(l),$$

которое в данном случае аналогично требованию

$$F_0 \left\{ \frac{\Delta_\chi}{\Delta} + \frac{c_{4,4}(l)}{\chi_1} \right\} = const. \quad (113)$$

Так как  $c_{4,4}(l)$ , то суммарная сила  $F_0(l)$  также является функцией  $l$ .

Для реализации (113) программу ЧПУ построим таким образом, что при движении от одной узловой точки к другой будем задавать не пространственные траектории, а траектории изменения сил. Следовательно, в основу построения программы положим закон  $F_0(l)$  изменения сил вдоль оси  $l$ .

Кроме этого в систему управления приводом продольной подачи введем обратную связь по силам. Тогда, независимо от факторов, влияющих на силы, система управления обеспечивает движение продольного суппорта по закону (113). Для аппаратной реализации такой системы требуется только новый способ программирования и введение обратной связи по силам в привод продольных перемещений. Кроме этого необходимо ввести измерительный преобразователь сил. Если точности измерения сил по параметрам двигателя вращения инструмента достаточно, то введение измерительного преобразователя не требуется.

При определении управления по изложенному алгоритму требуется



знание об упругих свойствах обрабатываемой заготовки. Их можно определить на основе использования метода конечных элементов, а также экспериментально. Подробнее этот вопрос изложен во второй главе. В частности показано, что при определении параметра жесткости подсистемы заготовки в зависимости от условий закрепления заготовки в зажимном приспособлении существует заметный разброс. Поэтому представляется актуальной проблема оценивания текущей жесткости подсистемы заготовки непосредственно в процессе резания.

### 6.3. Оценивание текущего значения жесткости в процессе обработки

Для оценивания жесткости воспользуемся наблюдаемой вибрационной последовательностью колебаний  $x(t)$ . Затем на основе использования методов авторегрессионного спектрального анализа (АРА)  $x(t)$  построим АРА и определим корни характеристического полинома модели. Тогда оценивание жесткости осуществляется на основе определения смещения корней характеристического полинома на комплексной плоскости. Подробно методы обработки информации изложены в монографии [12]. Покажем возможности оценивания жесткости заготовки на примере продольного течения вала. Пусть задана динамическая система в вариациях относительно точки равновесия

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma} x = f(t) \quad (114)$$

где  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}^T$  - измеримые вариации упругих деформаций инструмента и заготовки в окрестности точки равновесия;

$f(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_6(t)\}$  - не наблюдаемый силовой шум, возмущающий точку равновесия системы резания;

$$m = [m_{s,k}], s, k = 1, 2, \dots, 6, \text{ причем } m_{s,k} = 0 \text{ при } s \neq k;$$



$$c_{\Sigma} = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \partial\varphi_1 / \partial x_1 & c_{2,1} & c_{3,1} + \partial\varphi_1 / \partial x_3 & \partial\varphi_1 / \partial x_4 & 0 & \partial\varphi_1 / \partial x_6 \\ c_{1,2} + \partial\varphi_2 / \partial x_1 & c_{2,2} & c_{3,2} + \partial\varphi_2 / \partial x_3 & \partial\varphi_2 / \partial x_4 & 0 & \partial\varphi_2 / \partial x_6 \\ c_{1,3} + \partial\varphi_3 / \partial x_1 & c_{2,3} & c_{3,3} + \partial\varphi_3 / \partial x_3 & \partial\varphi_3 / \partial x_4 & 0 & \partial\varphi_3 / \partial x_6 \\ \partial\varphi_1 / \partial x_1 & 0 & \partial\varphi_1 / \partial x_3 & c_{4,4} + \partial\varphi_1 / \partial x_4 & 0 & \partial\varphi_1 / \partial x_6 \\ \partial\varphi_2 / \partial x_1 & 0 & \partial\varphi_2 / \partial x_3 & \partial\varphi_2 / \partial x_4 & c_{5,5} & \partial\varphi_2 / \partial x_6 \\ \partial\varphi_3 / \partial x_1 & 0 & \partial\varphi_3 / \partial x_3 & \partial\varphi_3 / \partial x_4 & 0 & c_{6,6} + \partial\varphi_3 / \partial x_6 \end{bmatrix}$$

причем  $\partial\varphi_i / \partial x_1 = \partial\varphi_i / \partial x_4, \partial\varphi_i / \partial x_3 = \partial\varphi_i / \partial x_6$ ;

$$h_{\Sigma} = \begin{bmatrix} h_{1,1} + \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_1 & c_{2,1} & c_{3,1} + \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_3 & \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_4 & 0 & \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_6 \\ h_{1,2} + \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_1 & c_{2,2} & c_{3,2} + \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_3 & \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_4 & 0 & \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_6 \\ h_{1,3} + \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_1 & c_{2,3} & c_{3,3} + \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_3 & \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_4 & 0 & \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_6 \\ \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_1 & 0 & \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_3 & c_{4,4} + \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_4 & 0 & \partial\varphi_1 / \partial \dot{x}_6 \\ \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_1 & 0 & \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_3 & \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_4 & c_{5,5} & \partial\varphi_2 / \partial \dot{x}_6 \\ \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_1 & 0 & \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_3 & \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_4 & 0 & c_{6,6} + \partial\varphi_3 / \partial \dot{x}_6 \end{bmatrix}$$

причем  $\partial\varphi_i / \partial \dot{x}_1 = \partial\varphi_i / \partial \dot{x}_4, \partial\varphi_i / \partial \dot{x}_3 = \partial\varphi_i / \partial \dot{x}_6, i = 1, 2, 3$ .

В (114)  $c^{(P)} = [\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_k}], s, k = 1, 2, 3$  и  $h^{(P)} = [\frac{\partial\varphi_s}{\partial \dot{x}_k}], s, k = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$

- соответственно матрицы динамической жесткости и скоростных коэффициентов процесса.

Поставим задачу определить отображение изменения элементов матрицы жесткости в корнях характеристического полинома. Определение этих отображений опирается на известный в теории управления метод корневого годографа. Для анализа рассмотрим конкретный пример. Параметры динамической системы приведены в табл. 10, 11 и 12.





Таблица 10

Параметры подсистемы инструмента

$m \cdot 10^{-4}, [\text{кг} \cdot \text{с}^2 / \text{мм}]$	$h, [\text{кг} \cdot \text{с} / \text{мм}]$	$c, [\text{кг} / \text{мм}]$
$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1094 & -0.0042 & -0.0364 \\ -0.0042 & 0.0708 & 0.0107 \\ -0.0364 & 0.0107 & 0.0827 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3000 & 800 & 400 \\ 800 & 5000 & 500 \\ 400 & 500 & 3000 \end{bmatrix}$

Таблица 11

Параметры подсистемы заготовки

$m \cdot 10^{-3}, [\text{кг} \cdot \text{с}^2 / \text{мм}]$	$h, [\text{кг} \cdot \text{с} / \text{мм}]$	$c, [\text{кг} / \text{мм}]$
$\begin{bmatrix} 1.086 & 0.06 & -0.047 \\ 0.06 & 1.086 & -0.047 \\ -0.047 & -0.047 & 0.065 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.672 & 0.038 & -0.015 \\ 0.038 & 0.672 & -0.015 \\ -0.015 & -0.015 & 0.36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7300 & 500 & 2100 \\ 500 & 7300 & 2100 \\ 2100 & 2100 & 5600 \end{bmatrix}$

Таблица 12

Параметры динамической характеристики процесса резания

$h^{(P)}, [\text{кг} \cdot \text{с} / \text{мм}]$	$c^{(P)}, [\text{кг} / \text{мм}]$
$\begin{bmatrix} -0.00270 & 0 & -0.054 \\ -0.00375 & 0 & -0.075 \\ -0.00295 & 0 & -0.039 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 27 & 0 & 540 \\ 37.5 & 0 & 750 \\ 29.5 & 0 & 390 \end{bmatrix}$

На рис. 79 приведена диаграмма смещения корней в предположении, что все параметры системы остаются неизменными, а варьируется  $c_{1,1}$  матрицы жесткости подсистемы инструмента. Видим, что варьирование жесткости приводит к смещению корней характеристического полинома системы. Кроме того, чувствительность смещения корней к изменению жесткости для различных корней различна. В данном случае наиболее чувствительны корни:  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  и  $p_4$ , а корни  $p_5$  и  $p_6$  фактически остаются неизменными. Таким образом, для оценивания текущей жесткости достаточно в сигнале виброакустической эмиссии рассматривать ограниченные частотные диапазоны, которым соответствуют корни, имеющие



наиболее чувствительность к изменению жесткости. Эти корни соответствуют основным осцилляторам АР модели.

Если варьируется элементы матрицы жесткости подсистемы заготовки, например, радиальная жесткость  $c_{4,4}$  (рис. 80), то картина смещения корней существенно изменяется. В данном случае имеется только один корень  $p_6$ , обладающий наиболее чувствительностью к изменению жесткости подсистемы заготовки, а остальные корни фактически не изменяются. Кроме того, чувствительный корень смещается вдоль мнимой оси, то есть изменение жесткости полностью отображается в изменении частоты.

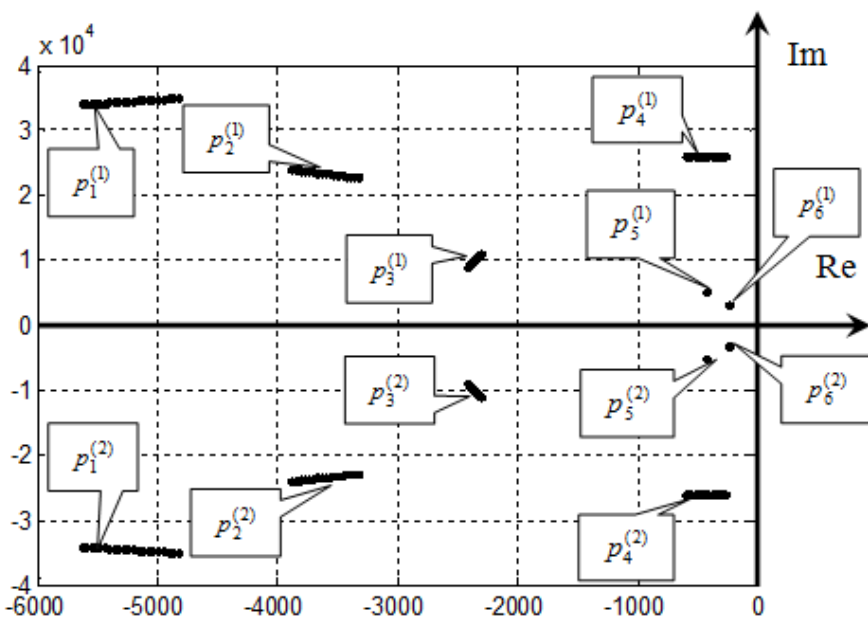


Рис. 79. Диаграмма смещения корней характеристического полинома при варьировании радиальной жесткости  $c_{1,1}$  подсистемы заготовки в диапазоне  $[3000 - 5000]$ ,  $\text{кГ} / \text{мм}$ .

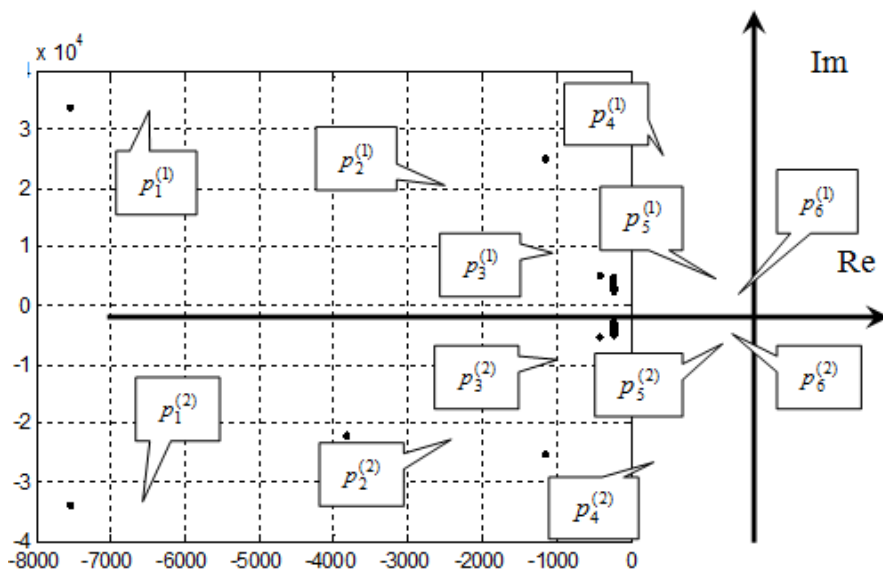


Рис. 80. Диаграмма смещения корней характеристического полинома при варьировании радиальной жесткости  $c_{4,4}$  подсистемы заготовки в диапазоне  $[5000 - 10000], \text{кГ/мм}$ .

Таким образом, для оценивания текущей жесткости заготовки можно рассматривать один базовой корень, соответствующий базовому осциллятору. Это упрощенный подход, позволяющий дать качественную картину отображений изменения жесткости в смещениях корня. Очевидно, что мультипликативная форма базового осциллятора может быть представлена в виде

$$\Delta(p) = c_{\Sigma} \{ T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 \}. \quad (115)$$

Его корни можно представить следующим образом

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{c_{\Sigma}}{m}} (-\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2} \cdot i) \quad (116)$$

где  $c_{\Sigma}$  - приведенная жесткость, при прочих неизменных условиях зависящая от жесткости заготовки в контакте с инструментом;  
 $m$  - приведенная масса осциллятора.

В случае  $m = \text{const.}$  расположение корней зависит от коэффициента



затухания  $\xi$  и жёсткости  $c_{\Sigma}$ . Коэффициент  $\Omega = \sqrt{\frac{c_{\Sigma}}{m}}$ , характеризующий частоту осциллятора. Так как коэффициенты затухания элементов станочных систем обычно находятся в пределах  $\xi \in (0,04 - 0,08)$ . В этом диапазоне варьирование коэффициента затухания практически не влияет на связь мнимой составляющей корня с частотой осциллятора. Поэтому смещения частот вдоль мнимой оси достаточно точно даёт информацию о текущих параметрах жёсткости. Положение принципиально меняется, если увеличивается коэффициенты затухания. При  $\xi > 1$  оценивание жёсткости становится невозможным.

Однако на суммарные значения жёсткости оказывают влияние изменения динамической жёсткости процесса резания и другие факторы. Поэтому более приемлемым можно считать метод, основанный на обучении связи вариаций корней с параметрами геометрического качества. Такой способ приемлем для серийного, крупносерийного и массового производства. Для этого строится эталонная эволюционная диаграмма корней, соответствующая обработке конкретной детали с учётом реальных значений изменения матриц жёсткости заготовки. Она строится при неизменных режимах при обработке вала неизменного диаметра или при штатных режимах (программе ЧПУ) при обработке детали сложного геометрического профиля. В соответствие этой траектории ставятся экспериментально определённые траектории размера детали и силы  $F_0$ . Кроме этого определяется матрицы жёсткости подсистемы инструмента  $c^{(II)} = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$ . Тогда справедливо

$$c^{(3)} = \frac{2\chi_1 F_0 c_0}{\Delta D c_0 - 2F_0}, \quad (117)$$

где  $\Delta D$  - отклонение диаметра обрабатываемой детали, экспериментально определённое;

$$c_0^{-1} = \frac{\Delta_{\chi}}{\Delta};$$

$$\Delta_{\chi} = \begin{vmatrix} \chi_1 & c_{2,1} & c_{3,1} \\ \chi_2 & c_{2,2} & c_{3,2} \\ \chi_3 & c_{2,3} & c_{3,3} \end{vmatrix};$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{vmatrix}, \quad c^{(3)} = c_{4,4}.$$

Тогда, задавшись статистически значимым значением диаграмм корней, можно определить связь отклонения частоты осциллятора  $\Delta\Omega$  от её математического ожидания  $\bar{\Omega}$  с отклонением жёсткости заготовки  $\Delta c^{(3)}$ , то есть

$$\Delta c^{(3)} = k^{(C)} \bar{c}^{(3)} \frac{\Delta\Omega}{\bar{\Omega}}, \quad (118)$$

где  $k^{(C)}$  - экспериментально определяемый безразмерный коэффициент, характеризующий линеаризованную связь  $\Delta\Omega$  и  $\Delta c^{(3)}$ .

Во-первых, зависимость (6.43) является статистической. Поэтому в соответствии  $\frac{\Delta\Omega}{\bar{\Omega}}$  можно поставить верхнюю и нижнюю границы  $\Delta c^{(3)}$ , то есть  $\Delta c_{\min}^{(3)}$  и  $\Delta c_{\max}^{(3)}$ . Так как вариации величины подачи на оборот практически не влияют на мнимую составляющую корней характеристического полинома, то в параметрах  $\frac{\Delta\Omega}{\bar{\Omega}}$  можно программировать величину подачи по критерию  $\Delta D = const$ .

Во-вторых, эта связь может быть справедливой только при малых вариациях  $\Delta\Omega$ . Поэтому большее значение имеет принцип, основанный на распознавании  $\Delta c^{(3)}$  на основе идентификации  $\Delta\Omega$  с помощью АР спектрального анализа построения кластеров  $\Delta c^{(3)}$ . При этом используется Байесовское классификационное правило. Проиллюстрируем возможность использования диаграмм смещения корней АР моделей в комплексной плоскости для целей диагностирования и управления точностью обработки на примере точения вала, динамическая схема которого приведена ранее. Соответствующая диаграмма смещения центров группирования корней характеристического полинома АР модели для базового осциллятора приведена на рис. 81. На иллюстрации начало обработки ( $l = 0$ ) соответствует точке контакта заготовки с вращающимся центром. Конец обработки находится на расстоянии 10,0мм от шпинделя станка.

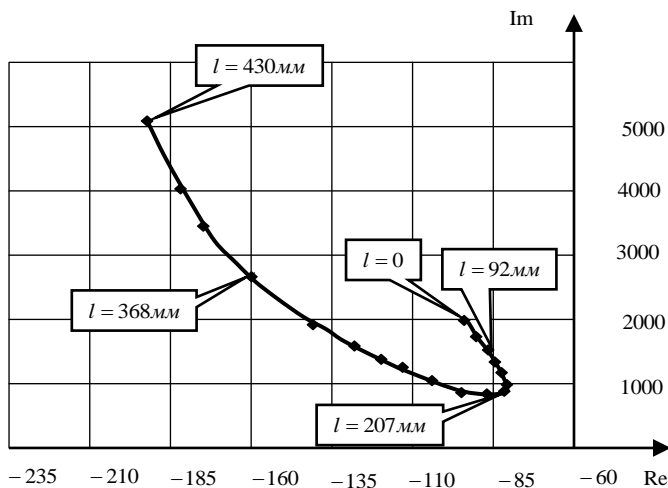


Рис. 81. Диаграмма смещения корня базового осциллятора с положительной мнимой частью при точении заготовки на всю длину

На рис. 82 приведена диаграмма соответствия значения жёсткости заготовки, измеренная экспериментально по отклонению диаметра при измеренных силах, с вариациями частоты базового осциллятора. Точечными кривыми обозначены верхняя и нижняя границы вариаций частоты базового осциллятора, соответствующие текущему значению жёсткости заготовки. Кластеры группирования вариаций частоты и соответствующие им диапазоны изменения жёсткости при классификации с 95% - ой вероятностью по Байесовскому классификационному правилу выделены на иллюстрации тёмным фоном. Как видно, с указанной вероятностью классификации на основе контроля изменения частоты базового осциллятора имеется возможность разбить диапазон изменения жёсткости заготовки на шесть классов в соответствии с диапазонами, приведёнными в табл. 13. Естественно количество групп и центры группирования частот зависят от доверительной вероятности.

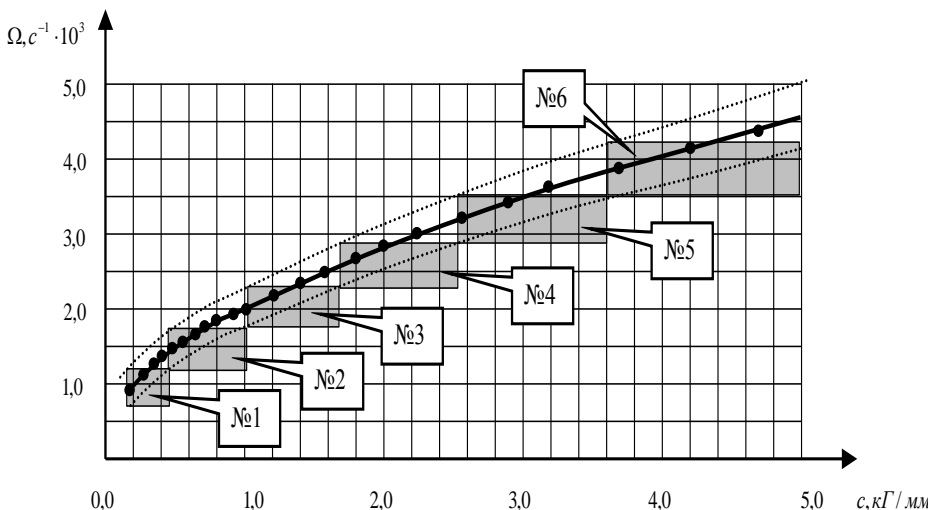


Рис. 82. Диаграмма классификации жёсткости заготовки по частоте базового осциллятора при обработке детали

Таблица 13

Кластеры значений жёсткости по Байесовскому классификатору

№ п/п	Диапазон изменения жёсткости $c^{(min.)} - c^{(max.)}$	Центр группирования частоты в кг/ц
1.	0,18-0,45	0,92
2.	0,45-1,1	1,4
3.	1,1-1,7	2,0
4.	1,7-2,55	2,56
5.	2,55-3,6	3,3
6.	3,6-4,97	3,87

Таким образом, линейные отображения справедливы лишь при малых вариациях жёсткости и соответствующей её частоте. Более того, точность оценивания изменения жёсткости зависит от величины её отклонения от начального значения.

Для реализации управления точностью обработки на основе дополнительного оценивания смещения корней характеристического полинома AP модели используется алгоритм, блок – схема которого приведена на рис. 83.

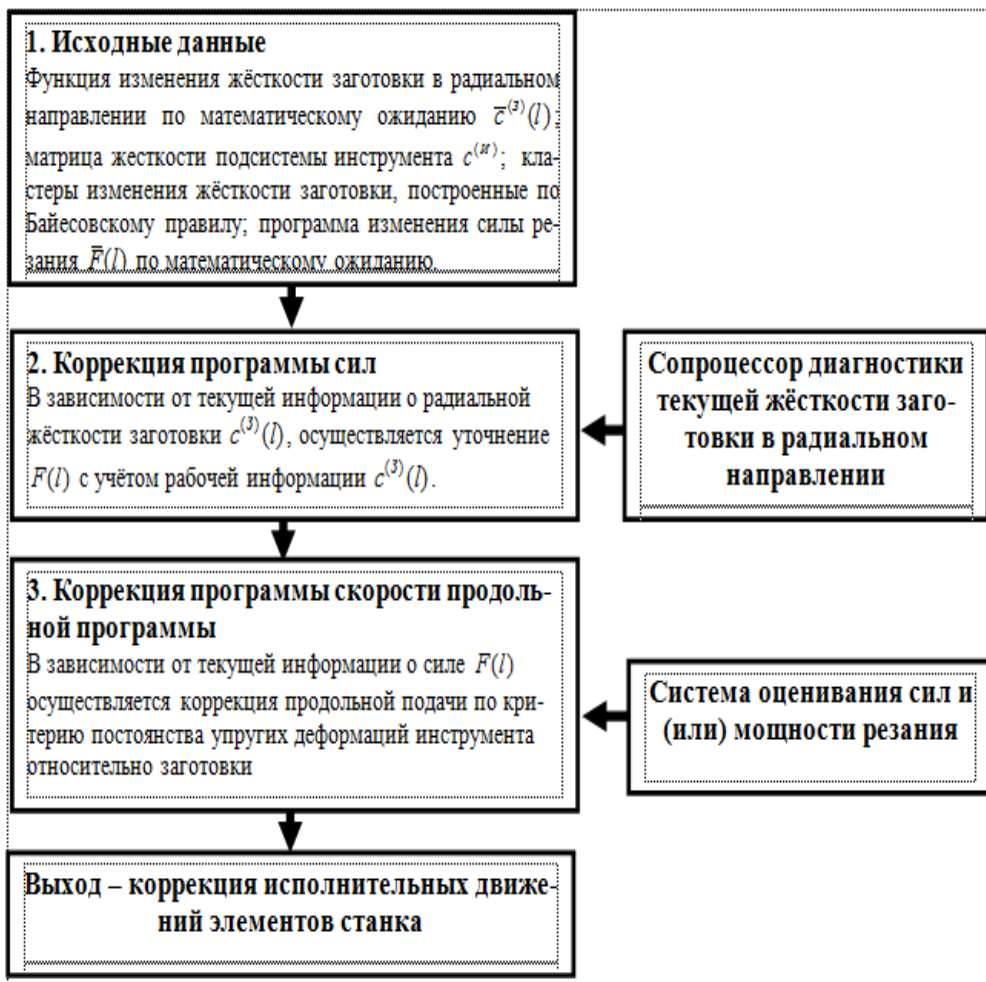


Рис. 83. Блок – схема коррекции траекторий движения исполнительных элементов станка

Здесь последовательно осуществляется коррекция программы ЧПУ (фазовых траекторий движения исполнительных элементов) в зависимости от изменения текущей жёсткости подсистемы заготовки вдоль траектории движения суппорта. При этом весь диапазон изменения жёсткости разбивается на кластеры по Байесовскому правилу разделения информации о принадлежности жёсткости к тому или иному кластеру. Затем в пределах каждого кластера корректируется скорость подачи в зависимости от текущей информации о радиальных составляющих сил резания.





Данные цифрового моделирования, а также результаты экспериментально – теоретических исследований, полученные на основе использования приведенных алгоритмов управления точностью обработки, показывают возможность снижения разброса диаметра обрабатываемой детали в три – четыре раза.

## 6.4. Оценивание текущих характеристик геометрической точности

Проанализируем возможности оценивания геометрической точности деталей на токарном станке. Остановимся на погрешностях продольного и поперечного сечений, связанных с изменениями его диаметра по координатам перемещения исполнительных органов станка (ИОС) и смещениями точки равновесия системы, рассматриваемой в подвижной системе координат, задаваемой траекториями ИОС. В современных станках, оснащенных управляющими индустриальными ЭВМ, имеется возможность использовать в реальном времени достаточно сложные алгоритмы обработки информации. Если не учитывать самостоятельные процессы в зоне резания, то отклонение диаметра от заданного, определяемого программой ЧПУ, определяется следующим соотношением

$$\Delta d(l) = 2[R^{(ж)}(l) - X_1^{(0)}(l) - X_1(l) - X_4(l)] \quad (119)$$

где  $R^{(ж)}(l)$  - заданный радиус детали, при котором синтезируется программа ЧПУ процессом обработки на основе синергетической концепции;

$X_1^{(0)}(l)$  - измеримая траектория поперечного перемещения суппорта;

$X_1(l)$  - измеримые упругие деформации подсистемы инструмента относительно суппорта в направлении, нормальном к оси заготовки;

$X_4(l)$  - упругие деформации подсистемы заготовки в направлении, нормальном к оси ее вращения.

Таким образом, здесь главная проблема заключается в оценивании упругих деформаций  $X_4(l)$ . Оценивание  $X_4(l)$  может осуществляться по следующим алгоритмам. Обычно изменение динамической структуры станка априорно задано. Поэтому первый алгоритм оценивания  $X_4(l)$  опирается на использование имитационной модели. Если заданы матрицы жесткости инструмента  $c^{(II)} = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$  и заготовки  $c^{(3)} = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 4, 5, 6$ , то силы резания  $F_i(l)$  определяется из уравнения

$$F_i(l) = c_{1,1}X_1(l) + c_{1,2}X_2(l) + c_{1,3}X_3(l) \quad (120)$$



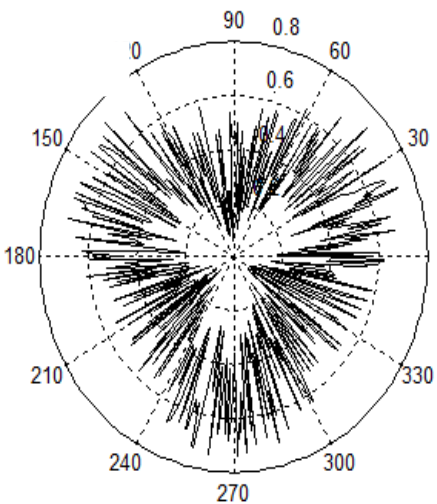
Тогда упругие деформации  $X_4(l)$  определяются

$$X_4(l) = \frac{F_2(l)}{c_{4,4}(l)} \quad (121)$$

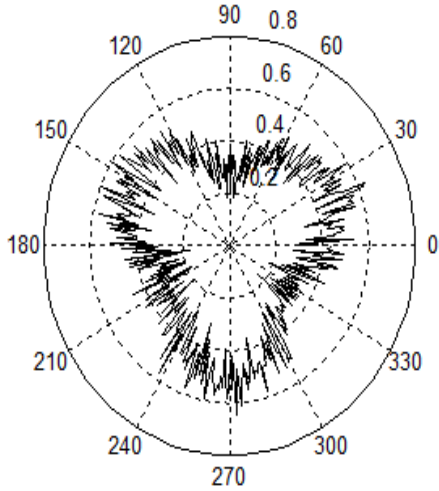
В (121) жесткость  $c_{4,4}$  задана, она определяется как её математическим ожиданием. Поэтому она носит вероятностный характер. Однако как показано выше, её текущее значение можно оценивать непосредственно в процессе обработки. Алгоритм оценивания текущей жесткости заготовки изложен в предыдущем параграфе. Таким образом, второй алгоритм определения  $X_4(l)$  является использование (121) с дополнительным оцениванием текущей жесткости заготовки. На основе оценивания текущего отклонения диаметра обрабатываемой детали необходимо осуществлять дополнительную коррекцию программ ЧПУ для обеспечения условия  $\Delta d = 0$ . Эта коррекция может осуществляться на основе использования алгоритмов синтеза управления процессом обработки, приведенных в первом параграфе.

Самостоятельное значение имеет оценивание точности поперечного сечения. Формирование погрешности поперечного сечения связано с разнообрабатываемостью, то есть с существованием некоторого периодического тренда в деформационных смещениях, синхронизированного с частотой вращения заготовки. Поэтому для оценивания погрешности в поперечном сечении можно воспользоваться статистическими последовательностями, построенными на стробоскопическом отображении Пуанкаре.

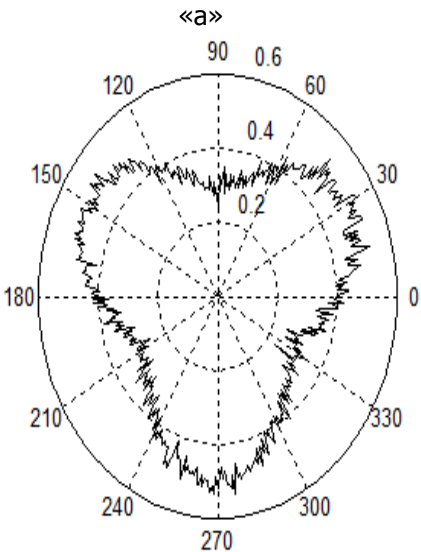
Для пояснения метода рассмотрим пример обработки детали из стали 20Х, закрепленная в трехкулачковом патроне и поджатая вращающимся центром. Режимы: скорость резания – 60,0 м/мин; припуск – 2,0 мм; подача – 0,15 мм/об. На рис. 84 приведены круговые диаграммы изменения деформационных смещений, являющиеся стробоскопическим отображением Пуанкаре, по мере увеличения числа усреднений. Деформационные смещения вычислены на основе использования математической модели динамики процесса резания. На приведенной иллюстрации пунктирными линиями отложены деформационные смещения инструмента относительно заготовки, представленные в микронах.



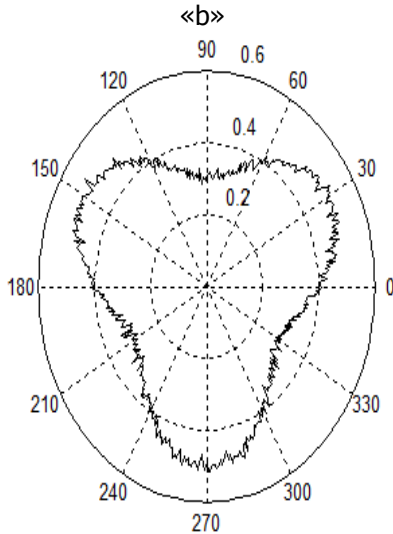
«а»



«b»



«с»



«d»

Рис.84. Пример использования операции стробоскопического отображения Пуанкаре для выявления погрешности формы поперечного сечения детали «а» - исходная реализация, «b», «с» и «d» - усредненная по мере увеличения числа усреднений  $N = 5$ ,  $N = 50$  и  $N = 100$ .



Пример наглядно демонстрируем, что при обработке детали в трехкулачковом патроне формируется периодическая составляющая погрешности поперечного сечения, обусловленная периодическими изменениями жесткости. В приведенном примере используется самый простой алгоритм обработки случайной последовательности – операция математического ожидания. Его можно существенно усложнить и получить более богатую информацию о статистических свойствах погрешности поперечного сечения. Эту информацию легко использовать для коррекции траекторий формообразующих движений, имея ввиду, что периодические деформационные смещения, связанные с периодическими силами, зависят от скорости продольной подачи суппорта.

Приведенные в этих параграфах материалы далеко не исчерпывают возможности построения информационных систем о состоянии процесса резания и параметрах качества. Они имеют высокий эвристический потенциал. Здесь перечислим возможные направления реализации этого потенциала.

1) Контроль сил позволяет определить режимы, при которых силы не превышают предельные значения исходя из условий прочности инструмента.

2) Оценивание распределения корней характеристического полинома в комплексной плоскости позволяет оценивать интенсивность изнашивания инструмента. При этом учитывается, что диссипативное влияние процесса резания на рассматриваемые осцилляторы вызывают смещения корней к центру единичной окружности. Подчеркнем, что увеличение диссипации связано с возрастанием энергии, отбираемой процессом резания, в основном вызывающей увеличение интенсивности изнашивания.

3) Контроль вибрационных последовательностей инструмента позволяет оценивать уровень неопределенности формируемого микрорельефа. Тогда наряду с регулярной составляющей случайная составляющая позволяет оценивать текущее значение микрорельефа.



## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Синергетический подход и представление управляемого металлорежущего станка как единой системы, направленной на изготовление деталей заданного качества характеризует новое перспективное управление процессами обработки. Синергетический подход в равной мере может быть распространен на анализ и синтез управлений в любой сложной системе, прежде всего, в системе, обеспечивающей движение отдельных координат, взаимодействующих с различными средами.



## ЛИТЕРАТУРА

- Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Эдиториал УРСС. 2004.
- Колесников А.А. Прикладная синергетика: основы системного синтеза. Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2007.
- Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994.
- Синергетика и проблемы теории управления. / Под ред. А.А.Колесникова. М.: Физматлит, 2004.
- Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс. 1986.
- Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Эдиториал УРСС. 2003.
- Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.
- Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
- Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.
- Заковоротный В.Л., Флек М.Б. Динамика процесса резания. Синергетический подход./ Ростов н/Д: изд-во «Терра», 2006. – 876 с.
- Заковоротный В.Л. Динамика трибосистем. Самоорганизация, эволюция. Ростов н/Д: изд-во ДГТУ, 2003. -502 с.
- Заковоротный В.Л. Нелинейная трибомеханика. Ростов н/Д: изд-во ДГТУ, 2000. – 293 с.
- Заковоротный В.Л., Семко И.А. Электромеханические системы. Ростов н/Д: изд-во ДГТУ, 2000. – 213 с.
- Колесников В.И., Заковоротный В.Л., Шаповалов В.В. Транспортная трибомеханика. Ростов н/Д: изд-во РГУПС, 2006. -466 с.
- Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. – 384 с.
- Кадомцев Б.Б. Динамика и информация. М.: УФН, 1997.
- Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983.
- Эшби У.Р. Введение в кибернетику. М.: КомКнига. 2005.
- Моисеев Н.Н. Расставание с простотой (Путь к очевидности). М.: Аграф. 1998 .
- Моисеев Н.Н. Универсум. Информация. Общество. М.: Устойчивый мир. 2001.
- Эбилинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции. Синергетический подход. М: УРСС, 2001.
- Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. -352 с.



Бекетов Н.В. Проблемы развития российской станкостроительной промышленности: инерционный и инновационный сценарий развития. <http://www.rppe.ru/wp-content/uploads/2011/05/beketov-nv.pdf>.

Станкостроение. Состояние. Пути развития. <http://www.subcontract.ru/Docum/DocumUpIShow.asp?DocumUpIID=982>.

Черпаков Б.И. Станкостроение России: перспективы развития до 2005 года / Б.И. Черпаков, И.Д. Новосельский // Труды IV Международного конгресса "Конструкторско-технологическая информатика-2000". — М.: МГТУ «Станкин», 2000. — Т. 2. — С. 257-260.

О системах ЧПУ нового поколения Современные системы ЧПУ фирмы Siemens [Электронный ресурс] / ЗАО "ТПК Технополус". — [Б.м. : б.и.], сор. 2005.-Режим доступа:

<http://www.technopolus.ru/Siemens/Sinumeric/modern5.html>, свободный.

Мигранов М. Ш. Пути повышения эффективности механической обработки резанием / Мигранов М. Ш., Шустер Л. Ш. // Технология машиностроения. — 2004. — № 5. — С. 19-22.

Металлорежущие станки.// Под ред, В.Э. Пуша. /М.: Машиностроение, 1986. - 576 с.

Металлорежущие станки и автоматы. // Под ред. А.С. Проникова/ М.: Машиностроение, 1981.- 480 с.

Понтрягин Л.С. Избранные труды.-М.: Наука, 1988. Т.2, с. 95-154.

Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных./ Математический сборник. // М: Наука. 1952. Т.31, № 3, с. 231 – 239.

Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.-531 с.

Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Из-во АН УССР, Львов, 1945.

Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. – 503 с.

Крылов Н.Н., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Изд-во ВУ АН, К.: 1934.

36. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхности. Теоретико – вероятностный подход. М.: Наука, 1975. – 344 с.