




ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

## **Методические указания к лабораторной работе**

«Статистический анализ автоматических  
систем»

по дисциплине

**«Методы синтеза оптимальных и  
адаптивных законов управления»**



Авторы  
Лапшин В. П.,  
Подольцев В. В.,

Ростов-на-Дону, 2019



## Аннотация

Методические указания к лабораторной работе предназначены для студентов очной формы обучения направлений 27.03.04 «Управление в технических системах» и 27.04.04 «Управление в технических системах».

## Авторы

к.т.н, доцент кафедры «АПП»

Лапшин В.П.,

магистрант, инженер кафедры «Физика»

Подольцев В.В.,





## Оглавление

### **СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ....4**

Определение характеристик эргодического случайного  
процесса с помощью пакета MATLAB..... 9

**Список литературы .....17**

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основными характеристиками случайных величин являются функция распределения вероятности и плотность распределения вероятности. Функция распределения случайной величины  $\xi$ , принимающей любые вещественные значения, определяется соотношением

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}$$

и представляет собой вероятность того, что случайная величина  $\xi$  принимает значения, меньшие заданного значения  $x$ .

Плотность распределения вероятности случайной величины  $\xi$  может быть определена по функции распределения вероятности с использованием формулы

$$p_{\xi} = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}$$

Случайный процесс определяется множеством случайных реализаций  $\xi(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Фиксируя произвольным образом моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , можно получить  $N$ -мерную случайную величину  $\xi = [\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)]$ , т. е. случайный вектор, компонентами которого являются случайные величины, представляющие собой значения реализаций  $\xi(t)$  в дискретные моменты времени. Таким образом, случайный процесс характеризуется множеством функций распределения вероятности, определяющих векторную случайную величину  $\xi$ :

$$F_{\xi k}(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_k) < x_k\}$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ , или соответствующим множеством плотностей распределения вероятности:

$$\begin{aligned} p_{\xi k}(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) \\ = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} F_{\xi k}(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Используя плотности распределения вероятности, можно оп-  
разделить моменты различного порядка для случайного процесса  $\xi(t)$ . Наиболее часто применяют начальный момент первого порядка (математическое ожидание):

$$m_{\xi}(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x, t) dx$$

и центральный момент второго порядка (корреляционную (авто-  
корреляционную функцию):

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= M\{\xi(t_1), \xi(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{\xi}(t_1)) (x_2 - \\ &\quad - m_{\xi}(t_2)) p_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Из последнего выражения можно также найти дисперсию случай-  
ного процесса:

$$D_{\xi}(t) = M\{\xi(t_1), \xi(t_2)\}$$

Взаимокорреляционную функцию двух случайных процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  определяют по формуле

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= M\{\xi(t_1), \eta(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{\xi}(t_1)) (x_2 - \\ &\quad - m_{\eta}(t_2)) p_{\xi\eta}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Напомним, что случайный процесс  $\xi(t)$  называется стацио-  
нарным (в широком смысле), если его математическое ожидание  
постоянно, а корреляционная функция зависит только от разно-  
сти аргументов:

$$\begin{aligned} m_{\xi}(t) &= m_{\xi} = \text{const} \\ K_{\xi}(t_1, t_2) &= K_{\xi}(t_1 - t_2) = K_{\xi}(\tau) \end{aligned}$$

Для стационарных процессов можно определить спектральную плотность случайного процесса как преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

По заданной спектральной плотности можно определить корреляционную функцию:

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

Из последней формулы следует и выражение для вычисления дисперсии стационарного случайного процесса по его спектральной плотности:

$$D_{\xi} = K_{\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega$$

При статистической обработке случайных сигналов используются методы и формулы математической статистики.

Пусть на интервале времени  $[0, T]$  экспериментально получено  $n$  реализаций случайного процесса  $\xi(t)$ , которые мы обозначим  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда оценка математического ожидания случайного процесса может быть определена по формуле

$$m_{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

Вычислив оценку математического ожидания случайного процесса, можно найти оценку его автокорреляционной функции

по формуле

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i(t_1) - m_{\xi}(t_1))(x_i(t_2) - m_{\xi}(t_2))$$

Здесь используется множитель  $1/(n-1)$ , а не  $1/n$ , чтобы обеспечить несмещенность оценки. Ее состоятельность, как и состоятельность оценки математического ожидания, можно легко проверить.

При исследовании статистических характеристик стационарных случайных процессов часто применяют эргодическую гипотезу, позволяющую существенно упростить их вычисление. В этом случае вместо усреднения значений множества реализаций в одни и те же моменты времени, как в формулах, усредняют значения одной реализации, взятые в различные моменты времени.

Стационарный процесс называется эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если является несмещенной и состоятельной следующая статистическая оценка математического ожидания, определяемая по одной его реализации  $x(t)$ , измеряемой на интервале времени  $[0; T]$ :

$$m_{\xi} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Эта оценка является несмещенной. Нетрудно непосредственно убедиться в несмещенности оценки (17). Для ее состоятельности нужно дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{\xi}(\tau) = 0$$

Смысл условия состоит в том, что значения случайных величин  $\xi(t_i)$  и  $\xi(t_j)$  становятся слабо коррелированными при увеличении временного интервала  $(t_j - t_i)$ .

Для практических расчетов используют приближенное соотношение

$$m_{\xi} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_i(t)$$

В частности, если интервал  $[0; T]$  разбит на  $N$  элементарных интервалов длиной  $\Delta t = T/N$ , то  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Можно также записать, что  $N = T/\Delta t = Tfd$ , где  $fd = 1/\Delta t$  — частота дискретизации, Гц.

Обозначив  $x(t)$  отдельную реализацию случайного процесса и принимая во внимание, что интервал, на котором происходит вычисление оценки корреляционной функции, равен  $[0; T - \tau]$ , получим следующую формулу для оценки корреляционной функции:

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t + \tau) dt - m_{\xi}^2$$

Эта оценка являются несмещенными, а для их состоятельности достаточно выполнения условия. В этом случае стационарный случайный процесс  $\xi(t)$  называется эргодическим по отношению к корреляционной функции. Вычисление корреляционной функции как среднего по множеству можно приближенно заменить вычислением среднего по времени согласно формуле.

На практике оценку корреляционной функции обычно вычисляют по дискретным значениям реализации случайного процесса  $\xi(t_i)$ .

Определив оценку корреляционной функции, можно вычислить и оценку спектральной плотности. С учетом четности корреляционной функции формулу можно переписать в виде

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

Статистические характеристики могут быть определены как путем усреднения по множеству реализаций, так и по предполагающим усреднение по времени, вычисляемое для одной реализации при достаточно большом времени наблюдения.



## Определение характеристик эргодического случайного процесса с помощью пакета MATLAB

MATLAB — это программный пакет для технических вычислений, объединяющий средства вычисления, визуализации и программирования.

Пример статистического анализа в пакете MATLAB

Спектральная плотность случайного сигнала задана в виде

$$S(\omega) = \frac{1}{0.25\omega^2 + 1} = \frac{1}{(-0.5j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

1. Определим частотную характеристику формирующего фильтра:

$$W(j\omega) = \frac{1}{0.5j\omega + 1}$$

2. Сформируем с помощью пакета MATLAB требуемый случайный сигнал. Для этого вначале необходимо очистить пространство переменных от данных, которые могли остаться от предыдущих запусков программы:

```
clear;  
s = tf('s')
```

3. Запишем передаточную функцию формирующего фильтра:

```
W_form = 1/(0.5*s+1)
```

4. Положим дисперсию белого шума равной единице:

```
disp_val=1
```

5. Будем обрабатывать одновременно 10 реализаций случайного процесса:

```
num_ser = 10
```

6. Зададим период дискретизации:

```
time_scale = 0.001
```

7. Зададим размеры массива и заполним массив времени. Длительность периода обработки установим равной 2 с. Если время переходного процесса в системе превышает 1 с (это станет понятно при выполнении лабораторной работы), то длительность периода обработки необходимо увеличить.

```
t_obrabotki = 2;  
[u,t] = gensig('square', 1, t_obrabotki, ...  
time_scale);  
size_u = size(u,1)
```

8. Создадим 10 реализаций белого шума с длиной size\_u и дисперсией disp\_val:

```
r = randn(num_ser,size(u,1));  
noise_ = zeros(num_ser,size(u,1));  
for series = 1:num_ser  
for i = 1:size(u,1)  
noise_(series,i) = sqrt(disp_val)* ...  
r(series,i);  
end; end;
```

9. Пропустим семейство реализаций белого шума через формирующий фильтр при помощи функции lsim:

```
ai_noise = zeros(1,size(u,1));  
modell_inp = zeros(num_ser,size(u,1));  
for series = 1:num_ser  
for i = 1:size(u,1)  
ai_noise(i)=noise_(series,i);  
end;  
model_i_noise=lsim(W_form,ai_noise,t);  
for i = 1:size(u,1)  
modell_inp(series,i) = ...  
model_i_noise(i);  
end; end;
```

10. Выполним оценку результатов. Исследуем для этого семейство реализаций выходного сигнала формирующего фильтра `modell_inp`. Для этого значения массива `modell_inp` запишем в массив `values`:

```
values= zeros(num_ser,size(u,1));
for j = 1:num_ser
for i = 1:size(u,1)
values(j, i) = modell_inp(j,i);
end; end;
```

11. Проведем расчет среднего по множеству реализаций случайного процесса по формуле:

```
mean_ = mean(values,1);
```

12. Определим дисперсию случайного процесса по формуле с коррекцией на шаг дискретизации:

```
std_ = std(values,0,1);
disp_ = zeros(1,size_u);
for i = 1:size_u
disp_(i) = std_(i)^2/time_scale;
end;
```

13. Рассчитаем оценку корреляционной функции и спектральной плотности по формулам:

```
value_r = zeros(1,size(u,1));
covv = zeros(num_ser, 2*size_u-1);
NFFT = 2^nextpow2(size_u);
spec = zeros(num_ser, NFFT);
for series = 1:num_ser
for i = 1:size_u
value_r(i) = values(series,i);
end;
[covvb,lags_] = xcov(value_r,'coeff');
for i = 1:(2*size_u-1)
covv(series,i) = covvb(i);
end;
temp_sp = 2*abs(fft(value_r,NFFT))/size_u;
for i = 1:NFFT
```

```
spec(series, i) = temp_sp(i);  
end;  
end;  
cov_ = mean(covv,1);  
f = 1/time_scale*0.5*linspace(-0.125, ...  
0.125, NFFT/8);  
spect_ = mean(spec,1);  
lags_ = lags_*time_scale;
```

14. Отообразим результаты на экран в виде графиков.

14.1. Белый шум (рис. 1):

```
plot(t, noise_); grid on;  
xlabel('t, секунды', 'FontSize', 12);  
set(gca, 'FontSize', 12);
```

14.2. Белый шум, пропущенный через фильтр (рис. 2):

```
plot(t, values); grid on;  
xlabel('t, секунды', 'FontSize', 12);  
set(gca, 'FontSize', 12);
```

14.3. Среднее по множеству реализаций выходного сигнала оценка математического ожидания (рис. 3):

```
plot (t, mean_); grid on;  
xlabel('t, секунды', 'FontSize', 12);  
set(gca, 'FontSize', 12);
```

14.4. Дисперсия (рис. 4):

```
plot (t, disp_); grid on;  
xlabel('t, секунды', 'FontSize', 12);  
set(gca, 'FontSize', 12);
```

14.5. Корреляционная функция (рис. 5):

```
plot (lags_, cov_); grid on;  
xlabel('\tau, секунды', 'FontSize', 12);  
ylabel('K(\tau)', 'FontSize', 12);
```

```
title('Корреляционная функция', ...
'FontSize', 12);
set(gca, 'FontSize', 12);
```

14.6. Спектральная плотность (рис. 6):

```
plot(f, [spect_(NFFT/16:-1:1) ...
spect_(1:NFFT/16)]); grid on;
xlabel('\omega, Гц', 'FontSize', 12);
ylabel('S(\omega)', 'FontSize', 12);
title('Спектральная плотность', ...
'FontSize', 12);
set(gca, 'FontSize', 12);
```

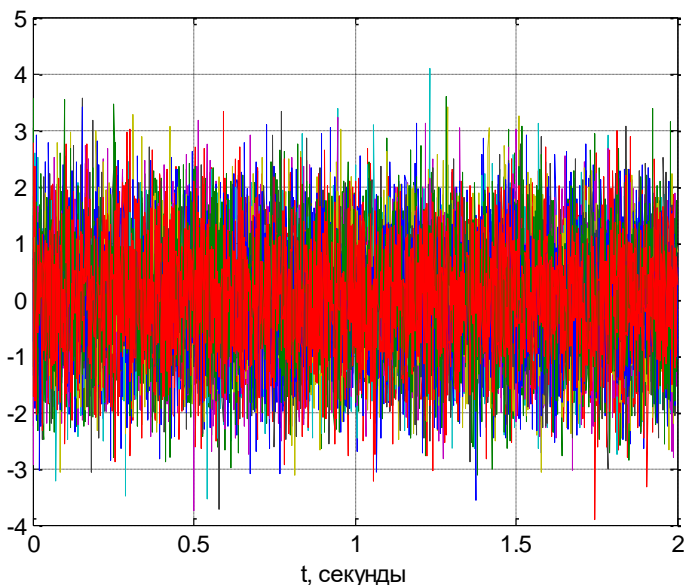


Рис. 1. Белый шум

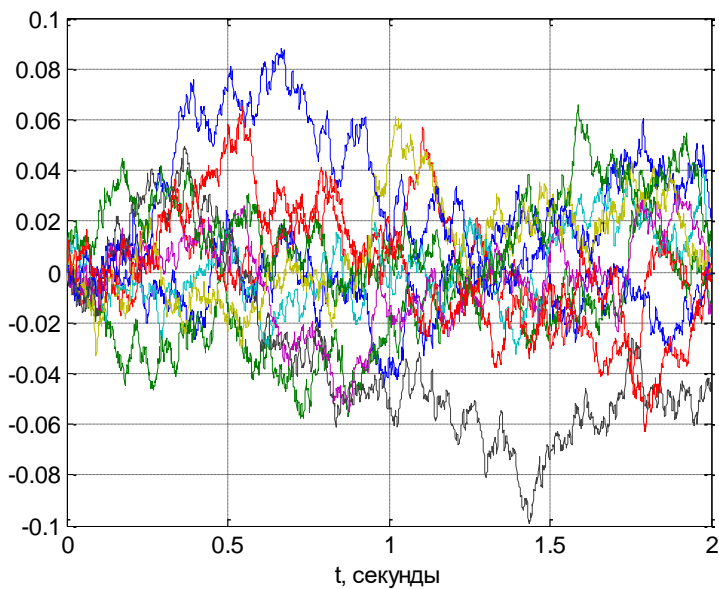


Рис. 2. Белый шум, пропущенный через фильтр

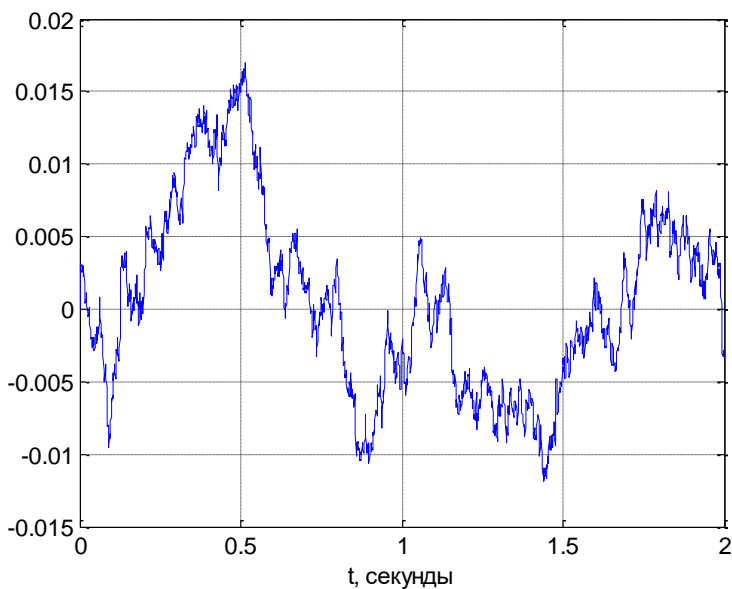


Рис. 3. Среднее по множеству реализаций выходного сигнала

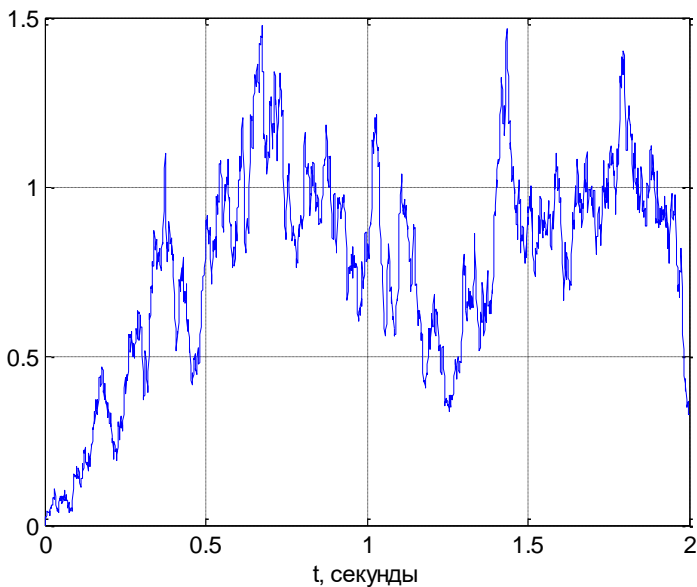


Рис. 4. Дисперсия выходного сигнала системы

Корреляционная функция

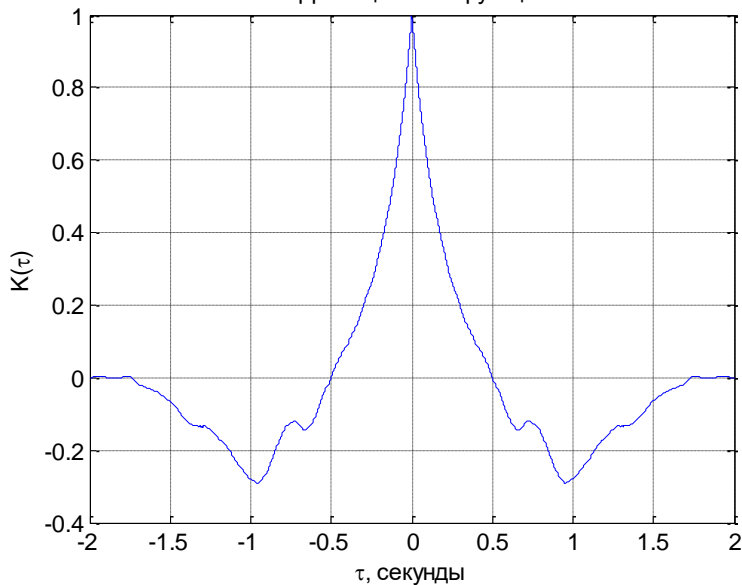


Рис. 5. Корреляционная функция выходного сигнала системы

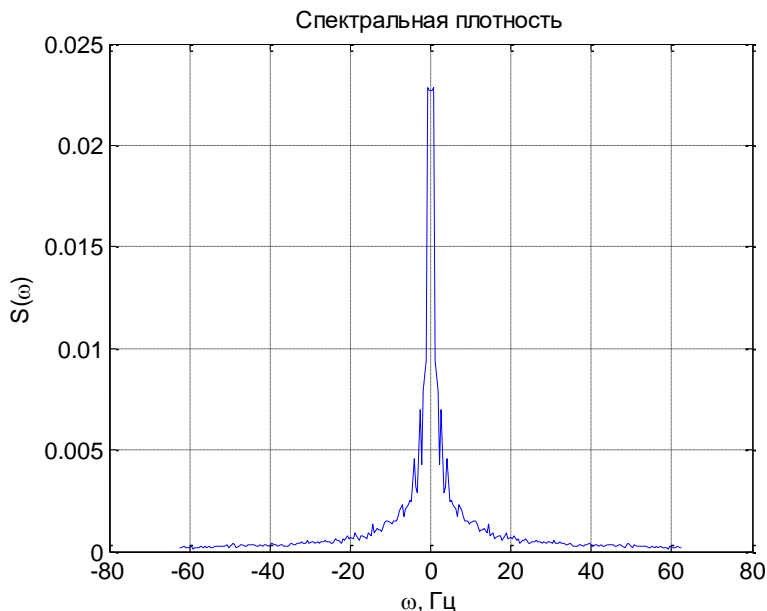


Рис. 6. Спектральная плотность выходного сигнала системы

Наблюдаемый провал графика в районе малых частот вызван тем, что частота обратно пропорциональна периоду колебаний, и для малых частот не хватает длительности периода наблюдения для построения достоверной оценки спектральной плотности.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лапшин В.П., Туркин И.А., Бочаров К.П. К вопросу устойчивости синтезированной методом АКАР электромеханической системы с нелинейной нагрузкой. В сборнике: динамика технических систем "ДТС - 2017" Сборник трудов хiii международной научно-технической конференции. Министерство Образования и Науки Российской Федерации, Донской государственной технической университет. 2017. с. 8-11.

2. В.П. Лапшин, И.А. Туркин. Руководство к выполнению курсового проекта по дисциплинам «Синтез систем управления движением», «Синтез оптимальных регуляторов» Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2018.- 24 с.

3. Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде MATLAB: Учебное пособие. – М.: МГАПИ, 2002. – 88 с.

4. Астапов Ю.М., Медведев В.С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982. 304 с.