



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

Методические указания к лабораторной работе

«Синтез оптимального управления на
основе траекторий состояния»
по дисциплине

**«Методы синтеза оптимальных и
адаптивных законов управления»**

Авторы
Лапшин В. П.,
Трегубенко Л. А.,
Слащев И. С.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Методические указания к лабораторной работе предназначены для студентов очной формы обучения направлений 27.03.04 «Управление в технических системах» и 27.04.04 «Управление в технических системах».

Авторы

к.т.н, доцент кафедры «АПП»

Лапшин В.П.,

магистрант, инженер ДИЦ

Слащев И.С.,

магистрант, техники ДИЦ

Трегубенко Л.А.





Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Синтез оптимального управления на основе траекторий состояния	5
1.1. Качественная сущность проблемы синтеза	5
1.2. Синтез оптимальных регуляторов систем второго порядка	6
1.3. Алгоритм оптимального управления и структурная схема системы	9
2. Пример решения практической задачи	11
3. Пример выполнения лабораторной работы	16
Библиографический список	22

ВВЕДЕНИЕ

Современная научная мысль позволяет получить различные решения для множества задач управления возникающих в сфере производства и автоматизации технологических процессов. Это разнообразие связано с математическим аппаратом, используемым при описании различных технологических процессов. Основной задачей является синтез электромеханической системы, обладающей свойством оптимальности, либо квазиоптимальности по быстродействию. При этом одним из условий синтеза является исходная линейная зависимость момента сопротивления от выходной координаты системы. Такая задача была выбрана неслучайно, дело в том, что ее решение позволяет добиться повышения эффективности реальных (действующих) систем управления технологическими процессами. С одной стороны, эта задача проста: необходимо определить математическую зависимость момента сопротивления, возникающего в зоне резания, от координат состояния привода, но с другой стороны: динамика этой систем, в результате этого, оказывается сложной, что может существенно осложнить вопросы моделирования. В результате, здесь возникает новая задача, задача синтеза системы управления учитывающей сложный, нелинейный характер технологических процессов.

Данное методическое пособие разработано с целью получить практические навыки в построении, синтезе систем, а также помочь развить навык их моделирования.

1. Синтез оптимального управления на основе траекторий состояния

1.1. Качественная сущность проблемы синтеза

Построение оптимального управления для линейных объектов $\dot{x} = Ax + Bu$ будем искать как функцию переменных состояния (фазовых переменных). Для простоты полагаем управление скалярным ($m=1$), ограничение на управление – единичным ($u^*=1$). Кроме того, не теряя общности рассмотрения, будем считать, что в конечный момент времени фазовая траектория (изображающая точка) должна попасть в начало координат ($x_{i0} = 0; i = \overline{1, n}$). Движение объекта $\dot{x} = Ax + Bu$ при управлении $u(t) = u^* \text{sign} \sum_{i=1}^n b_{i1} \psi_i(t)$ описывается уравнениями:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_{i1} \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{при } u = +1; \quad (1.1)$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_{i1} \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{при } u = -1; \quad (1.2)$$

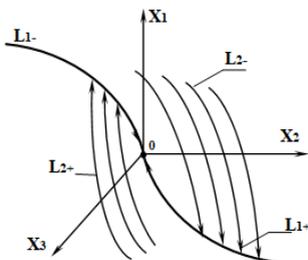


Рисунок 1

Траектории, соответствующие решениям этих уравнений, обозначим $L+$ и $L-$ соответственно.

Поскольку оптимальное управление приводит объект в начало координат, то всегда существует такое состояние системы, что кривые $L+$ и $L-$ проходят через начало координат (рис. 1).

Части L_{+1} и L_{-1} этих кривых (полутраектории), приводящие изображающую точку в начало координат, объединим и обозначим L_1 . Очевидно, что изображающая точка попадает в начало координат обязательно по линии L_1 . Это происходит на последнем этапе оптимального процесса.

В течение оптимального процесса знаки управляющего воздействия чередуются, поэтому концы фазовых траекторий предпоследнего интервала принадлежат кривой L_1 . Фазовые траектории, соответствующие предпоследнему интервалу и заканчивающиеся на кривых L_{1+} и L_{1-} , обозначим L_{2+} и L_{2-} , при этом кривые L_{2+} заканчиваются на кривой L_{2-} , а L_{2-} – на L_{1+} . Совокупность этих кривых при различных начальных условиях образуют две поверхности, каждая из которых имеет своим краем кривую L_1 . Обе поверхности стыкуются по линии L_1 и образуют поверхность L_2 , двигаясь по которой изображающая точка попадает на линию L_1 и по ней в начало координат.

Продолжая это построение, получим поверхности $L_3, L_4, \dots, L_{n-1}, L_n$. Если характеристический полином объекта имеет действительные корни, то процесс синтеза состоит в отыскании поверхности L_{n-1} , при этом оптимальный процесс протекает в течение n интервалов (имеет $n-1$ переключение). Если начальная точка расположена в области L_{+n} , то в конце первого интервала фазовая траектория попадает на поверхность L_{-n-1} , и т.д. К сожалению, эти поверхности описываются трансцендентными уравнениями, и поэтому задача синтеза (построение поверхности переключения L_{n-1}) решается в замкнутой форме лишь для систем второго и третьего порядка. Для систем более высокого порядка ограничиваются частными решениями либо синтезируют управление, близкое к оптимальному.

1.2. Синтез оптимальных регуляторов систем второго порядка

Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$\ddot{y} = u, \text{ где } |u| \leq u^* \quad (1.3)$$

Требуется синтезировать управление $u = u[y(t), \dot{y}(t)]$, обеспечивающее наискорейшее приведение объекта из произвольного начального состояния в состояние покоя:

$$y(t_1) = \dot{y}(t_1) = 0 \quad (1.4)$$

Вводя обозначения $y = x_1, \dot{y} = \dot{x}_2$, запишем уравнение (3) в виде

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (1.6)$$

Функция H_1 и сопряженная система имеют в рассматриваемом случае вид

$$H_1 = \psi_1 x_2 + \psi_2 u \quad (1.7)$$

$$\dot{\psi}_1 = 0; \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \quad (1.8)$$

Максимум функции H_1 достигается при

$$u = 1 \cdot \text{sign } \psi_2(t) \quad (1.9)$$

Решая систему (8), получаем $\dot{\psi}_1(t) = \psi_1(t_0); \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t_0)(t-t_0) + \psi_2(t_0)$

Функция $\psi_2(t)$ изменяет знак не более одного раза и это происходит в момент времени

$$t = \psi_2(t_0) / \psi_1(t_0) + t_0 \quad (1.10)$$

Для решения задачи синтеза оптимального управления построим фазовые траектории системы (5), (6) и найдем поверхность переключений. Исключая время t из уравнений (5), (6), поделим первое из них на второе:

$$dx_1 / dx_2 = x_2 / u \quad (1.11)$$

Интегрируя это уравнение при $u = \text{const}$, получим семейство парабол

$$x_1 = 0,5u^{-1}x_2^2 + c \quad (1.12)$$

Или

$$x_1 = 0,5x_2^2 + c \quad (1.13)$$

$$x_1 = -0,5x_2^2 + c \quad (1.14)$$

Эти параболы, соответствующие значениям u , равным $+1$ и -1 , приведены на рис. 2, 3.

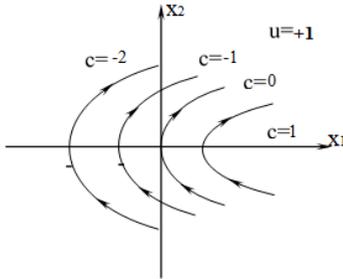


Рисунок 2

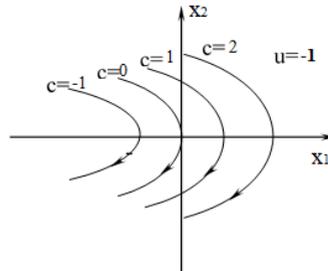


Рисунок 3

Стрелки на параболах означают направление движения при росте t . Проверим указанные, например, на рис. 3 направления. Пусть $u=+1$, тогда из (6) получим

$$x_2(t) = t + x_{20} \quad (1.15)$$

Нетрудно видеть, что $x_2(t)$ увеличивается с ростом t , а на основе (5) заключаем, что x_1 увеличивается со временем для тех значений t , при которых $x_2(t) > 0$.

При $c=0$ параболы L_{1+} и L_{1-} описываются уравнениями

$$x_1 = 0,5x_2^2; \quad x_1 = -0,5x_2^2 \quad (1.16)$$

и проходят через начало координат.

Куски этих парабол, приводящие фазовую траекторию в начало координат, образуют линию переключения, приведенную на рис. 4.

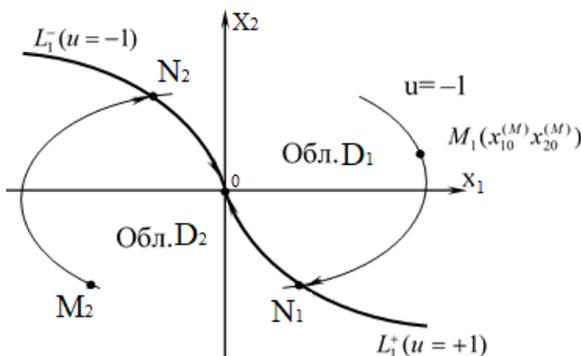


Рисунок 4

1.3. Алгоритм оптимального управления и структурная схема системы

Таким образом, на последнем интервале оптимального процесса изображающая точка попадает в начало координат по кривой L_{1+} или L_{1-} . Линия L_1 делит фазовую плоскость на две области D_1 и D_2 , расположенные над линией L_1 и под ней соответственно.

Если в начальный момент времени изображающая точка находится в области D_1 , например, в точке M_1 , то следует принять $u=-1$, тогда фазовая траектория будет двигаться по дуге M_1N_1 параболы (13), проходящей через точку M_1 . В момент времени, когда изображающая точка попадает в точку N_1 , необходимо изменить управление на $u=+1$. Дальнейшее движение будет происходить по дуге N_10 . Кривая M_1N_10 является оптимальной траекторией, соответствующей начальному состоянию $x_{10}^{(M)}, x_{20}^{(M)}$.

Аналогично, если в начальный момент времени изображающая точка находилась в области D_2 , например, в точке M_2 , необходимо принять $u=+1$. Изображающая точка будет двигаться по дуге параболы (14) и в точке N_2 произойдет переключение управления на $u=-1$.

На основе (14) получаем уравнение кривой L_1

$$x_1 + 0,5x_2 \mid x_2 \mid = 0 \tag{1.17}$$

В соответствии с этим уравнением оптимальная функция управления может быть представлена выражением

$$u = -1 \cdot \text{sign} \sigma_1 \quad (1.18)$$

Где

$$\sigma_1 = x_1 + 0,5x_2 | x_2 | \quad (1.19)$$

Чтобы убедиться в его справедливости, покажем, что в области D_1 имеет место соотношение $\sigma_1 > 0$. Пусть изображающая точка расположена справа от линии переключения и выше оси x_1 . Ее движение происходит по траектории (13). Определим значение c . В связи с этим представим результат интегрирования уравнения при $u = -1$ в виде

$$x_1(t) - x_{10} = -0,5[x_2^2(t) - x_{20}^2] \quad (1.20)$$

и, следовательно, $c = x_{10} + 0,5x_{20}^2 > 0$.

Подставляя выражение (13) в (19), получим

$$\sigma_1 = -0,5x_2^2 + 0,5x_2 | x_2 | + c = c > 0.$$

Если изображающая точка расположена между осью x_1 и кривой L_{+1} , то $x_2 > 0$ и подстановка (11) в (18) дает $\sigma_1 = c - x_2^2 > 0$. Действительно, для ординат x_2 точки N_1 справедливо соотношение $x_2^2 = x_{10} + 0,5x_{20}^2$, которое получится, если в (19) подставить первое из выражений (13). При выполнении равенства $x_2 = -\sqrt{x_{10} + 0,5x_{20}^2}$ изображающая точка попадает на линию переключения, для которой $\sigma_1 = 0$. До попадания на линию переключения $x_2^2 < x_{10} + 0,5x_{20}^2 = c$ и поэтому $\sigma_1 > 0$.

Схема реализации оптимального закона управления (17) приведена на рис. 5.



Рисунок 5

В управляющей части системы используется нелинейный преобразователь (НП), формирующий функцию $F(x_2) = 0,5x_2 |x_2|$.

Опишем теперь решение задачи синтеза оптимального по быстродействию управления для объекта:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.21)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u \quad (1.22)$$

Для построения фазовых траекторий поделим первое уравнение на второе

$$dx_1 / dx_2 = x_2 / (u - x_2) \quad (1.23)$$

Разделяя переменные, найдем решение этого уравнения при $u = \text{const}$:

$$x_1 = x_{10} + (x_{20} - x_2) - u \ln \left| \frac{u - x_2}{u - x_{20}} \right| \quad (1.24)$$

Полагая в этом выражении $x_{10} = x_{20} = 0$, определим линии L_1+ и L_1- :

$$x_1 = -x_2 - \ln(1 + x_2) \quad \text{при } u = +1 \quad (1.25)$$

$$x_1 = -x_2 + \ln(1 - x_2) \quad \text{при } u = -1 \quad (1.26)$$

Нетрудно показать, используя эти выражения, что уравнение линии переключения L_1 имеет вид $x_1 + x_2 - [\ln(1 + |x_2|)] \text{sign} x_2 = 0$, а оптимальное управление

$$u = -\text{sign} \sigma_2 \quad (1.27)$$

Где $\sigma_2 = x_1 + x_2 - [\ln(1 + |x_2|)] \text{sign} x_2$.

2. Пример решения практической задачи

Используя принцип максимума для объекта, описываемого уравнением $k\ddot{x} = u$, определить алгоритм оптимального управления, который обеспечивает перевод объекта из начального состояния $x(0) = (0), \dot{x}(0) = 0$ в конечное состояние

$x(T) = 1, \quad \dot{x}(T) = 0$ за минимальное время T . Определить число переключений, моменты переключений и построить кривые управления $u(t)$ и координат $x(t), \dot{x}(t)$. На управляющее воздействие наложено ограничение $|u| \leq \underline{U}_{\max}$. Параметры системы: $k=2; U_{\max}=0,5$.

Решение:

Для того, чтобы привести уравнение, описывающее объект к нормальному виду, введем фазовые координаты:

$$x = x_1; \quad \dot{x} = x_2. \quad (2.1)$$

Движение объекта с учетом (3.1) будет описываться системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1; \\ \dot{x}_2 &= ku = f_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Запишем гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^2 \psi_i f_i \quad (2.3)$$

где ψ_i и f_i – координаты векторов $\vec{\psi}$ и \vec{f} . В дополнение к системе (3.2) составим систему уравнений для вспомогательных переменных ψ_i , где $i = 1, 2$, используя следующую зависимость:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^2 \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Учитывая (3.2), получаем:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 \right] = -\psi_1 \quad (2.5)$$

Решение уравнений (3.4) и (3.5) имеет вид:

$$\psi_1 = c_1; \quad \psi_2 = c_2 - c_1 t \quad (2.6)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Выражение для гамильтониана (3) принимает вид:

$$H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = c_1 x_2 + c_2 k u - c_1 k u t \quad (2.7)$$

В выражении (3.7) рассмотрим член, зависящий от управления:

$$H^* = (c_2 k - c_1 k t) \cdot u \quad (2.8)$$

Так как при оптимальном управлении гамильтониан H принимает максимальное положительное значение, то слагаемое H^* должно быть всегда положительным и наибольшим.

Это будет, если алгоритм оптимального управления имеет вид:

$$u(t) = \sigma U_{\max} \quad (2.9)$$

Где

$$\sigma = \text{sign}(c_2 k - c_1 k t) \quad (2.10)$$

Оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $\pm U_{\max}$, и имеет не более двух интервалов постоянства, так как линейная функция $c_2 k - c_1 k t$ меняет знак не более одного раза.

Решение уравнения, описывающего заданный объект, на интервале управления при $u = +U_{\max}$ имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_0^t \frac{U_{\max}}{k} dt = \frac{U_{\max}}{k} t + c_3; \\ x(t) &= \int_0^t \left[c_3 + \frac{U_{\max}}{k} t \right] dt = c_4 + c_3 t + \frac{U_{\max}}{2k} t^2, \end{aligned} \right\} , 0 \leq t \leq t_1 \quad (2.11)$$

где t_1 – продолжительность первого участка; c_3, c_4 – постоянные интегрирования.

Используя начальные условия, определяем постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(0) &= c_3 = 0; \\ x(0) &= c_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Для момента времени t_1 координаты \dot{x} и x соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t_1) &= \frac{U_{\text{макс}}}{k} t_1; \\ x(t_1) &= \frac{U_{\text{макс}}}{2k} t_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

На втором участке управления (после переключения управления) при $u = -U_{\text{макс}}$ координаты \dot{x} и x определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{t_1}^t -\frac{U_{\text{макс}}}{k} dt + \dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_1) - \frac{U_{\text{макс}}}{k} (t - t_1); \\ x(t) &= \int_{t_1}^t \left[\dot{x}(t_1) - \frac{U_{\text{макс}}}{k} (t - t_1) \right] dt + x(t_1) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t - t_1) - \frac{U_{\text{макс}}}{2k} (t - t_1)^2; \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad t_2 = T.$$

Для момента времени $t_2 = T$ – прихода системы в конечное состояние $x(T) = 1$, $\dot{x}(T) = 0$ – справедливы следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t_2) &= \dot{x}(t_1) - \frac{U_{\text{макс}}}{k} (t_2 - t_1) = 0; \\ x(t_2) &= x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{U_{\text{макс}}}{2k} (t_2 - t_1)^2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Подставляя численные значения параметров системы в выражения (3.11), (3.13) с учетом (3.12), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0,25t; \\ x(t) &= 0,125t^2; \\ 0 &\leq t \leq t_1; \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t_1) &= 0,25t_1; \\ x(t_1) &= 0,125t_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

После подстановки численных значений параметров в выражении (3.14), (3.15) с учетом (3.17) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0,5t_1 - 0,25t; \\ x(t) &= 0,05tt_1 - 0,25t_1^2 - 0,125t^2; \\ t_1 &\geq t \geq t_2; \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} 2t_1 &= t_2; \\ 0,5t_1t_2 - 0,25t_1^2 - 0,125t_2^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Из выражения (3.19) определяем моменты переключения:
 $t_1 = 2 \text{ сек}; \quad t_2 = 4 \text{ сек} .$

Из выражения (3.18) для координат движения системы на втором участке управления с учетом значений моментов переключения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1 - 0,25t; \\ x(t) &= -1 + t - 0,125t^2; \\ t_1 &\geq t \geq t_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

На основании выражений (3.16) и (3.20) на рис. 3.1 представлены кривые оптимальных процессов в системе.

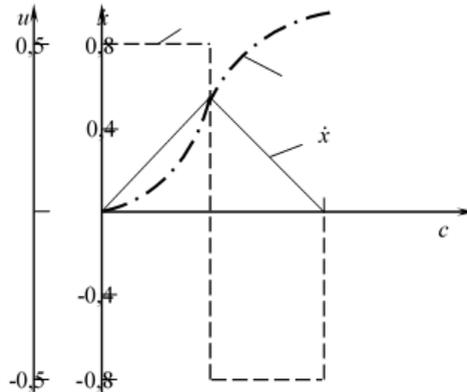


Рисунок 6

3. Пример выполнения лабораторной работы

Имеется система: $\dot{x} = ku$ (k -коэффициент, u -управление).
Синтезируем систему, построим ее модель и графики в следующих состояниях:

- Без управления
- С квазиоптимальным управлением
- С оптимальным управлением

Введем обозначения: $x = x_1, \dot{x} = x_2$ и запишем исходное уравнение следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ku \end{cases} \quad (4.1)$$

I. Система без управления

Т.к. управление в данном случае равно 0, то модель объекта управления, построенная в Simulink изображена на рисунке 7.

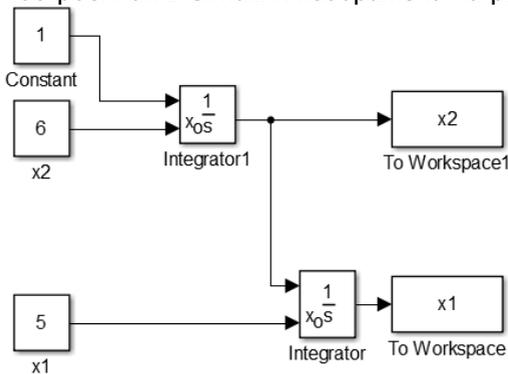


Рисунок 7

В качестве начальных значений примем 4 точки со следующими координатами:

$M_1 = (5,5); M_2 = (-6,2); M_3 = (-6,2); M_4 = (-5,-5); M_5 = (6,-2)$; Полученный график можно увидеть на рисунке 2.

Стоит отметить, что в каждой четверти знаки управляющего воздействия чередуются в зависимости от начальных условий, будет положительным или отрицательным.

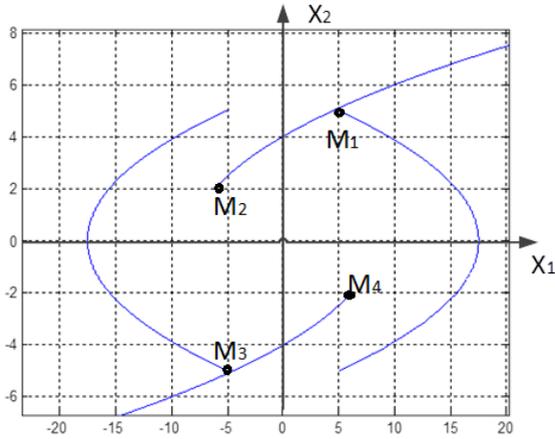


Рисунок 8

II. Система с квазиоптимальным управлением

Теперь благодаря наличию управления модель системы примет вид, как на рисунке 9.

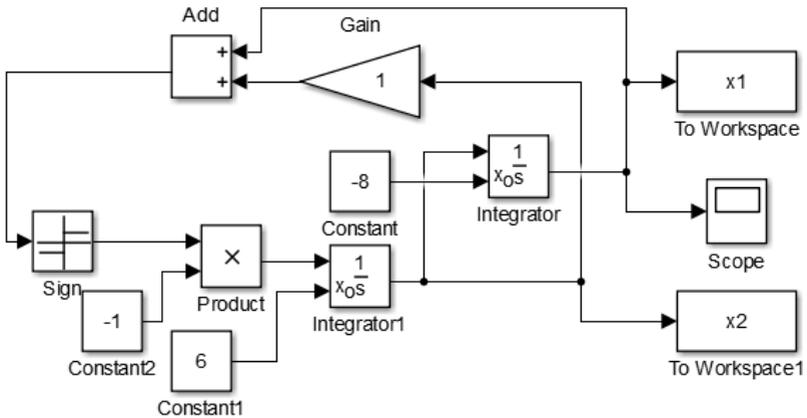


Рисунок 9

При попадании на линию А, изображенную на рисунке 4, траектория меняет свое направление, т.е. меняется знак управления.

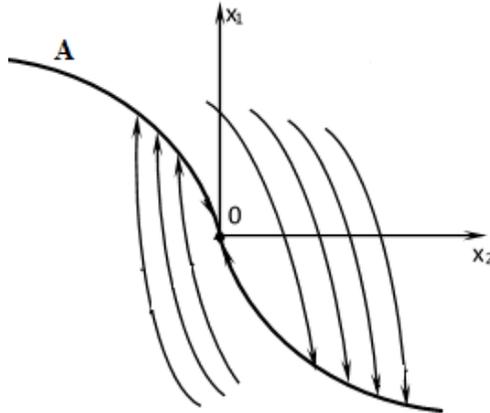


Рисунок 10

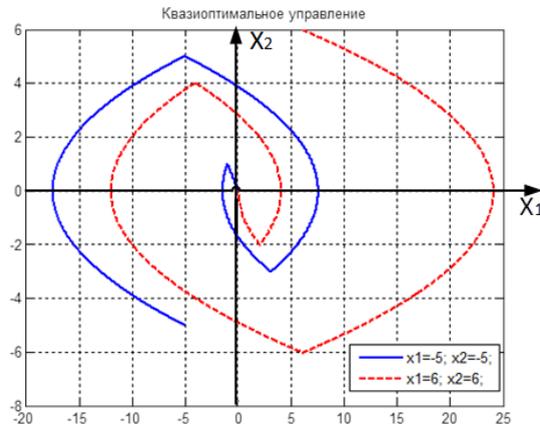


Рисунок 11

В конечный момент времени фазовая траектория должна попасть в начало координат, что мы и видим. С разными

начальными условиями, система приходит в конечном итоге в одну и ту же точку.

Если немного поварьировать коэффициент k , то есть возможность найти траекторию, наиболее приближенную к оптимальному процессу. Методом эксперимента был получен коэффициент $k=3.2$. Фазовый портрет изображен на рисунке 12.

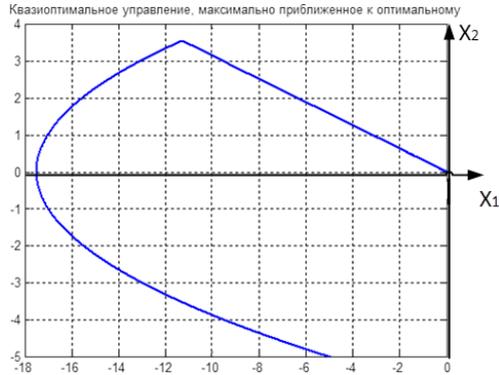


Рисунок 12

Однако при ближайшем рассмотрении (см. рисунок 13) можно увидеть, почему процесс не является оптимальным.

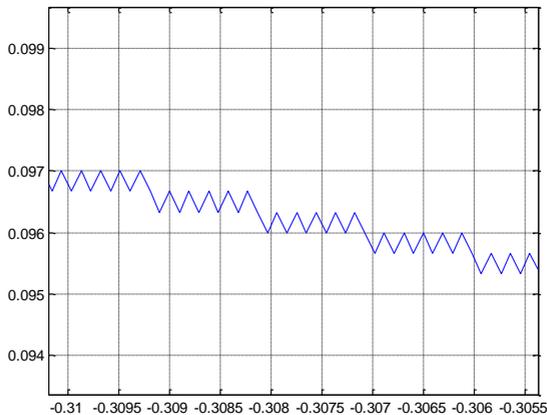


Рисунок 13

III. Система с оптимальным управлением

На последнем интервале оптимального процесса система попадает в начало координат по кривой L_{1+} или L_{1-} , изображённых на рисунке 14. Линия L_1 делит фазовую плоскость на две области D_1 и D_2 , расположенные над линией L_1 и под ней соответственно.

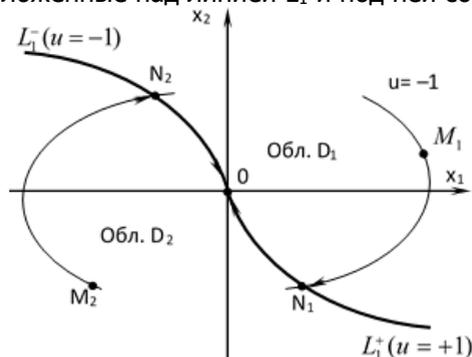


Рисунок 14

Если в начальный момент времени изображающая точка находится в области D_1 , например, в точке M_1 , то следует принять $u=-1$, тогда фазовая траектория будет двигаться по дуге M_1N_1 параболы, проходящей через точку M_1 . В момент времени, когда изображающая точка попадает в точку N_1 , необходимо изменить управление на $u=+1$. Дальнейшее движение будет происходить по дуге N_1O . Кривая M_1N_1O является оптимальной траекторией.

Аналогично, если в начальный момент времени изображающая точка находилась в области D_2 , например, в точке M_2 , необходимо принять $u=+1$. Изображающая точка будет двигаться по дуге параболы (14) и в точке N_2 произойдет переключение управления на $u=-1$.

Вернемся к системе (1).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ku \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx_1 = x_2 dt \\ dx_2 = kudt \end{cases} \rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{ku}{x_2} \rightarrow \int x_2 dx_2 = \int kudx_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x_2^2}{2} = kux_1 \rightarrow x_1 = \frac{x_2^2}{2ku} \quad (4.2)$$

Тогда получаем $u = -1 \cdot \text{sign} \sigma_1$, где $\sigma_1 = x_1 + 0,5x_2 |x_2|$.

Система в Simulink изображена на рисунке 15.

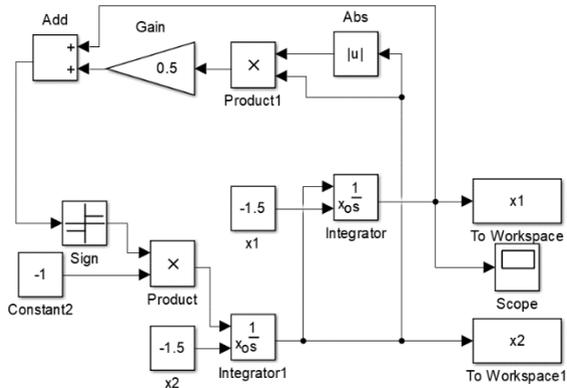
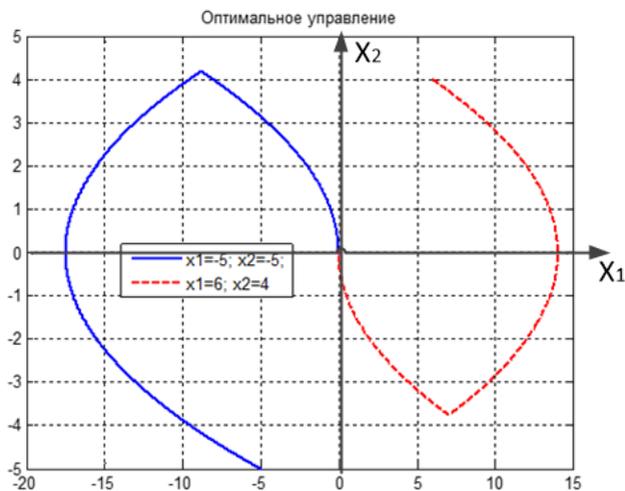


Рисунок 15

Получаем следующие графики (см. рисунок 16).



Полученные результаты полностью соответствуют теоретическим.

Библиографический список

1. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, и др., "Математическая теория оптимальных процессов" М.: Наука, 1976.
2. В.А. Дыхта, и Н.В. Деренко, "Численные методы решения задач оптимального импульсного управления, основанные на

- вариационном принципе максимума”, Известия высших учебных заведений. Математика. 2001. № 12. pp. 32-40.
3. А.А. Колесников Прикладная синергетика: основы системного синтеза. Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. – 384 с.
 4. Синергетика и проблемы теории управления. / Под ред. А.А. Колесникова // М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
 5. В.Л. Заковоротный Синергетический системный синтез управляемой динамики металлорежущих станков с учетом эволюции связей /В.Л. Заковоротный, А.Д. Лукьянов, Нгуен Донг Ань, Фам Динь Тунг// Ростов н/Д: изд-во ДГТУ, 2008. – 324 с.
 6. Ю.З. Житников, м И.В. Житникова, “Анализ погрешностей моментов затяжки одношпиндельными гайковертами на основе муфт предельного момента”, Сборка в машиностроении, приборостроении. 2011. № 8. pp. 12-15.
 7. O.V. Uzunov, “The "screwdriver" technology of the model building for simulating of the processes in the mechatronic objects”, Solid State Phenomena. 2009. Т. 147-149. pp. 468-473.
 8. В.Л. Заковоротный, В.П. Лапшин, и А.А. Губанова, “ Определение оптимальных координат переключения циклов обработки в эволюционной динамической системе резания”, Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2014.№ 4 (179). pp. 59-63.
 9. В.П. Лапшин, и И.А. Туркин, “Моделирование динамики формообразующих движений при сверлении глубоких отверстий малого диаметра” Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2012. № 4 (110). pp. 226-233.
 10. V.P. Lapshin, I.A. Turkin Dynamic influence of the spindle servo drive on the drilling of deep narrow holes// Russian Engineering Research. 2015. Т. 35. № 10. pp. 795-797.
 11. V.P. Lapshin, I.A. Turkin Modeling tractive effort torque of wheel in deformation movements of pneumatic tire wheel//Procedia Engineering. 2017. Т. 206. pp. 594-599.

12. V.L. Zakovorotny, V.P. Lapshin, T.S. Babenko Assessing the Regenerative Effect Impact on the Dynamics of Deformation Movements of the Tool during Turning. *Procedia Engineering* 2017. Т 206. pp.68–73.
13. В.Л. Заковоротный, В.П. Лапшин, и И.А. Туркин, "Зависимость перестройки динамической системы сверления глубоких отверстий спиральными сверлами от параметров серводвигателей", *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки*. 2014.№ 1. pp. 36-42.
14. В.Л. Заковоротный, В.П. Лапшин, и И.А. Туркин, "Управление процессом сверления глубоких отверстий спиральными сверлами на основе синергетического подхода", *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки*. 2014.№ 3 (178). pp. 33-41.
15. V.L. Zakovorotnyi, A.D. Lukyanov, A.A. Gubanova, and V.V. Khristoforova , "Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting", *Journal of Sound and Vibration*. 2016. Т. 368. pp. 174-190.