



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

Учебно-методическое пособие **«Методы классического вариационного** **исчисления»** **по дисциплине**

«Методы синтеза оптимальных и **адаптивных законов управления»**

Авторы
Лапшин В. П.,
Трегубенко Л. А.,
Слащев И. С.,
Подольцев В. В.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Методические указания к лабораторной работе предназначены для студентов очной формы обучения направлений 27.03.04 «Управление в технических системах» и 27.04.04 «Управление в технических системах».

Авторы

к.т.н, доцент кафедры «АПП»
Лапшин В.П.,
магистрант, техник ДИЦ
Трегубенко Л.А.,
магистрант, инженер ДИЦ
Слащев И.С.,
магистрант, инженер кафедры «Физика»
Подольцев В.В.



Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Методы классического вариационного исчисления	5
1.1. Создание вариационного исчисления.	5
1.2. Понятия вариационного исчисления.	5
1.3. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем.	7
1.4. Уравнение Эйлера – Пуассона.	10
1.5. Задача с подвижными концами и нефиксированным временем.	10
1.6. Второе необходимое условие экстремума (условие Лежандра).	12
1.7. Метод классического вариационного исчисления для условного экстремума – уравнения Эйлера-Лагранжа.....	12
2. Пример решения практической задачи	16
Список литературы	23

ВВЕДЕНИЕ

Современная научная мысль позволяет получить различные решения для множества задач управления, возникающих в сфере производства и автоматизации технологических процессов. Это разнообразие связано с математическим аппаратом, используемым при описании различных технологических процессов. Основной задачей является синтез электромеханической системы, обладающей свойством оптимальности, либо квазиоптимальности по быстродействию. При этом одним из условий синтеза является исходная линейная зависимость момента сопротивления от выходной координаты системы. Такая задача была выбрана неслучайно, дело в том, что ее решение позволяет добиться повышения эффективности реальных (действующих) систем управления технологическими процессами. С одной стороны, эта задача проста: необходимо определить математическую зависимость момента сопротивления, возникающего в зоне резания, от координат состояния привода, но с другой стороны: динамика этой систем, в результате этого, оказывается сложной, что может существенно осложнить вопросы моделирования. В результате здесь возникает новая задача, задача синтеза системы управления, учитывающей сложный, нелинейный характер технологических процессов.

Данное методическое пособие разработано с целью получить практические навыки в построении, классического вариационного исчисления, а также помочь развить навык их моделирования.

1. МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Создание вариационного исчисления.

В 1696 г. появилась заметка И. Бернулли, озаглавленная «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». В ней ставилась следующая задача. «В вертикальной плоскости даны две точки А и В (рис. 1.3). Определить путь АМВ, опускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело М, начав двигаться из точки А, дойдет до точки В в кратчайшее время».

Решение этой задачи было получено самим И. Бернулли, а также Г. Лейбницем, Я. Бернулли и И. Ньютоном. Оказалось, что линией наискорейшего спуска (брахистохроной) является циклоида. После этих работ стали появляться и решаться задачи того же типа. И. Бернулли поставил перед своим учеником Л. Эйлером проблему найти общий путь их решения.

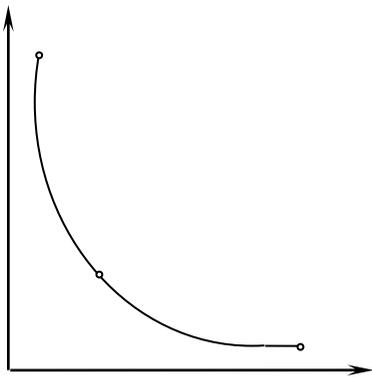


Рис. 1.3

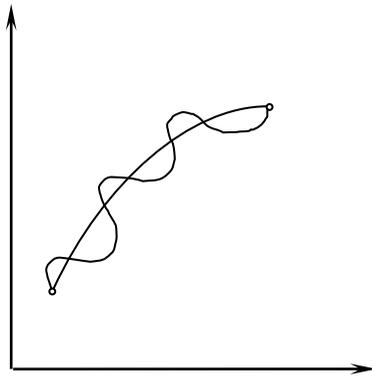


Рис. 1.4

В 1744 г. вышел труд Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума и минимума или решения изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле», а в 1759 г. появилась работа Лагранжа и с ней новые методы исследования, которые составили новый раздел математики, названный Эйлером вариационным исчислением.

1.2. Понятия вариационного исчисления.

Переменная величина $J[x(t)]$ называется функционалом,

зависящим от функции $x(t)$, если каждой функции $x(t)$ (из некоторого класса функций) соответствует число J . Аналогично определяются функционалы, зависящие от нескольких функций.

Функционал $J[x(t)]$ достигает на $x_0(t)$ минимума, если его значение на любой близкой к $x_0(t)$ кривой $\bar{x}(t)$ не меньше, чем $J[x_0(t)]$, т. е.

$$\delta J = J[\bar{x}(t)] - J[x_0(t)] \geq 0.$$

Аналогично определяется кривая, на которой реализуется максимум. В этом случае $\delta J \leq 0$ для всех кривых, близких к кривой $x_0(t)$.

Уточним понятие близости кривых. Кривые $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности $x(t) - \bar{x}(t)$ мал. Кривые $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости 1-ого порядка, если модули разности $x(t) - \bar{x}(t)$ и $\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)$ малы. Кривые $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости k -ого порядка, если $|x^i(t) - \bar{x}^i(t)| \leq \varepsilon (i = \overline{1, k})$, $x^i(t)$ – i -я производная, ε – достаточно малое число. На рис. 1.3 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка (координаты их близки, а направления касательных существенно различаются), а на рис. 1.4 приведены кривые, близкие в смысле близости 1-ого порядка.

Если функционал $J[x(t)]$ достигает на кривой $x_0(t)$ минимума или максимума по отношению ко всем кривым, близким к $x_0(t)$ в смысле близости нулевого порядка, то такой минимум (или максимум) называется сильным.

Если функционал $J[x(t)]$ достигает на кривой $x_0(t)$ минимума или максимума лишь по отношению к кривым $x(t)$, близким к $x_0(t)$ в смысле близости 1-ого порядка, то такой минимум (или максимум) называется слабым. Очевидно, что если достигается сильный минимум (максимум), то достигается и слабый. Далее, если не оговорено противное, будет подразумеваться слабый минимум (максимум).

Разность функций $\bar{x}(t) - x(t) = \delta x(t)$ называется вариацией (приращением) аргумента $x(t)$ функционала $J[x(t)]$.

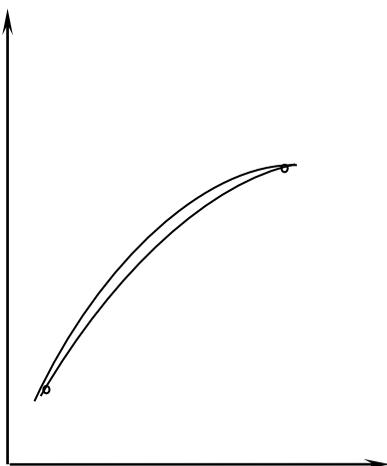


Рис. 1.5

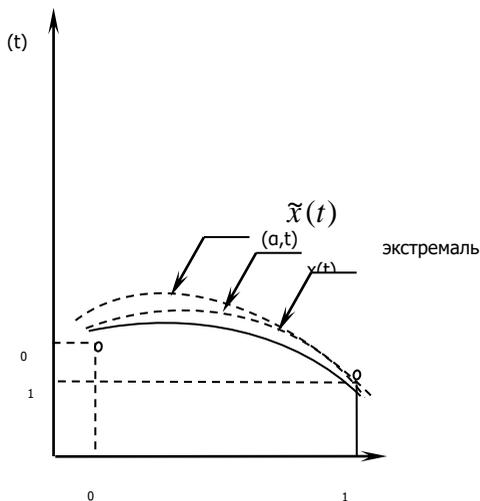


Рис. 1.6

1.3. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем.

Исследуем на экстремум (максимум или минимум) функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[t, x(t), \dot{x}(t)] dt, \quad (1.1)$$

где $\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))$ - непрерывная и трижды дифференцируемая функция своих аргументов.

Искомая функция (для которой этот функционал принимает экстремальное значение) удовлетворяет краевым условиям $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$. (1.2)

Задача о нахождении экстремума функционала (1.1) при условиях (1.2), в которых x_0 и x_1 – заданные числа, называется вариационной задачей с закрепленными граничными точками. Непрерывно дифференцируемые функции $x(t)$, определенные на $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющие условиям (1.2), называются допустимыми функциями.

Переходя к решению вариационной задачи, допустим, что её решение – кривая $x_0(t)$ – найдено. Возьмем некоторую

функцию $\bar{x}(t)$ и включим её в однопараметрическое семейство кривых

$$x(t, \alpha) = x^0(t) + \alpha[\bar{x}(t) - x^0(t)], \quad (1.3)$$

где α – некоторое число.

Концы варьируемых кривых естественно также закреплять в точках (1.2) (рис. 1.6), и поэтому

$$x(t_0, \alpha) = x_0, \quad x(t_1, \alpha) = x_1. \quad (1.4)$$

Рассмотрим значения, которые принимает функционал (1.1) на кривых семейства (1.3),

$$J(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[t, x^0(t) + \alpha \delta x(t), \dot{x}^0(t) + \alpha \delta \dot{x}(t)] dt, \quad (1.5)$$

где $\delta x(t) = \bar{x}(t) - x^0(t)$, $\delta \dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}^0(t)$.

Нетрудно видеть, что при известных кривых $x^0(t)$ и $\bar{x}(t)$ функционал (1.1) становится функцией α . Эта функция достигает своего экстремума при $\alpha=0$, т.к., по определению, $x(t, 0) = x^0(t)$.

Необходимым условием экстремума функции $J(\alpha)$ при $\alpha=0$ является, как известно, равенство

$$\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя в это условие выражение (1.5), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right] dt \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right|_{\alpha=0} \delta x(t) + \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right|_{\alpha=0} \delta \dot{x}(t) \right] dt = 0. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) dt = \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right|_{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta x(t) dt,$$

и тогда запишем (1.6) окончательно с учетом краевых условий $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$ в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt = 0. \quad (1.7)$$

В этом выражении сомножитель $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}}$ является на кривой $x(t)$, реализующей экстремум, заданной непрерывной функцией, а второй сомножитель $\delta x(t)$ – произвольная (в силу произвола при выборе функции $\bar{x}(t)$) дифференцируемая функция.

При этих условиях из (1.7) следует тождество

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \equiv 0, \quad (1.8)$$

которое выполняется на экстремальных $x(t)$.

Доказательство того, что (1.8) следует из (1.7), опирается на основную лемму вариационного исчисления, которая формулируется так: если для каждой непрерывной функции $\eta(t)$ (удовлетворяющей условию $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$)

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \eta(t) dt = 0, \quad (1.9)$$

где $\mu(t)$ – непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$ функция, то $\mu(t) \equiv 0$ на том же отрезке.

Для доказательства леммы предположим (в противоречии с её утверждением), что в точке $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ значение $\mu(\bar{t}) \neq 0$. Тогда придем к противоречию с утверждением леммы. Действительно, из непрерывности функции $\mu(t)$ следует, что если $\mu(\bar{t}) \neq 0$, то $\mu(t)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $\bar{t}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1$ точки \bar{t} . Выбирая функцию $\eta(t)$ сохраняющей знак на отрезке $[\bar{t}_0, \bar{t}_1] \in [t_0, t_1]$ и равной нулю вне этого отрезка, заключаем, что произведение $\mu(t)\eta(t)$ сохраняет знак на отрезке $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ и равно нулю вне этого отрезка и, следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \eta(t) dt = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \mu(t) \eta(t) dt \neq 0,$$

а это противоречие и доказывает лемму. Таким образом, $x(t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (1.10)$$

которое называется уравнением Эйлера.

Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x},$$

запишем (1.10) в развернутой форме:

$$-\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0. \quad (1.11)$$

Его решение $x(t, c1, c2)$, где $c1$ и $c2$ – постоянные, определяемые краевыми условиями (1.2), называются экстремалими.

1.4. Уравнение Эйлера – Пуассона.

Исследуем на экстремум функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt, \quad (1.12)$$

в котором функцию φ_0 будем считать дифференцируемой по своим аргументам необходимое число раз.

Пусть граничные условия имеют вид

$$x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0^{(1)}; x(t_1) = x_1; \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1^{(1)}, \quad (1.13)$$

где $x_0, \dot{x}_0^{(1)}, x_1, \dot{x}_1^{(1)}$ – заданные числа.

Нетрудно показать, повторяя изложенное при выводе уравнения Эйлера, что экстремали функционала (1.12) являются решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} = 0, \quad (1.14)$$

которое называется уравнением Эйлера – Пуассона. Это уравнение четвертого порядка, его решение $x(t, c1, c2, c3, c4)$

содержит постоянные c_i ($i = \overline{1,4}$), которые определяются из граничных условий (1.13).

1.5. Задача с подвижными концами и нефиксированным временем.

До сих пор при исследовании функционала (1.1) предполагалось, что граничные точки $(t_0, x_0), (t_1, x_1)$ заданы.

Теперь будем полагать, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Класс допустимых кривых в этом случае расширяется, так как кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно брать кривые со смещенными граничными точками. Это означает, что если на какой-нибудь кривой $x_0(t)$ функционал (1.1) достигает экстремума в задаче с подвижными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $x_0(t)$, и, следовательно, $x(t)$ должна быть решением уравнения Эйлера (1.10).

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, которые находятся при закрепленных границах из граничных условий, а при подвижных границах – из условий трансверсальности.

Эти условия имеют вид

$$\left[\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t) \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_0} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_0} = 0;$$
(1.15)

$$\left[\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t) \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_1} = 0.$$
(1.16)

Если правая граничная точка (t_1, x_1) должна перемещаться по некоторой кривой $x_1 \neq p_1(t_1)$, то условия (1.16) принимают вид

$$\left[\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t)) + \left(\frac{dp_1}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_1} = 0.$$

Аналогичный вид принимают условия (1.15), если левая граничная точка (t_0, x_0) перемещается по кривой $x_0 = p_0(t_0)$.

Соотношения (1.15), (1.16) представляют собой четыре уравнения для определения четырех неизвестных: t_0 , t_1 и произвольных постоянных c_1 и c_2 , входящих в общее решение уравнения Эйлера. Часто числа t_0 и t_1 заданы, т.е. точки (t_0, x_0) , (t_1, x_1) могут перемещаться только вертикально, и тогда условия (1.15), (1.16) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_0} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_1} = 0. \quad (1.17)$$

1.6. Второе необходимое условие экстремума (условие Лежандра).

Экстремали функционала (1.1) с закрепленными концами удовлетворяют уравнению (1.10), которое выражает первое необходимое условие экстремума. Однако оставалось неясным, доставляют ли они функционалу (1.1) максимум или минимум? Ответ на этот вопрос дает теорема Лежандра, выражающая второе необходимое условие экстремума: для того, чтобы функционал (1.1) в задаче с закрепленными границами достигал на кривой $x(t)$ минимума (максимума), необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие

$$\frac{\partial^2 \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t) \partial \dot{x}(t)} \geq 0 \left(\frac{\partial^2 \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t) \partial \dot{x}(t)} \leq 0 \right). \quad (1.18)$$

1.7. Метод классического вариационного исчисления для условного экстремума – уравнения Эйлера-Лагранжа.

Вариационными задачами на условный экстремум (связанный экстремум) называются задачи, в которых требуется найти кривые, доставляющие экстремум функционалу, при этом помимо граничных условий они должны удовлетворять некоторым связям (условиям). Например, эти кривые должны иметь заданную длину (изопериметрическая задача) либо удовлетворять некоторой заданной системе дифференциальных уравнений (задача Лагранжа), либо лежать на некоторой поверхности.

Приведенная в первой главе задача об оптимальном программном движении является по математическому содержанию задачей на условный экстремум, в которой требуется найти вектор – функции $x(t)$, $u(t)$, доставляющие функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u, t) dt$$

минимум, причем эти функции должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = \varphi(x, u, t), \quad (1.19)$$

а также интегральным связям

$$\int_{t_0}^{t_1} u_k^2(t) dt \leq J_{uk}^* (k = \overline{1, m}); \int_{t_0}^{t_1} x_i^2(t) dt \leq J_{xi}^* (i = \overline{1, n})$$

и ограничениям

$$|u_k(t)| \leq u_k^* (k = \overline{1, m}).$$

Опустим пока эти связи и ограничения и для удобства изложения введем в функционал производные переменных состояния и управлений.

Итак, требуется найти экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) dt, \quad (1.20)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$x(t_0) = x(0); \quad (1.21)$$

$$x(t_1) = x(1); \quad (1.22)$$

и являющиеся решением уравнений связей (1.19). Эта задача называется задачей Лагранжа. Отметим, что если в функционале (1.20) отсутствует производная какой-либо из компонент векторов x или u , то, естественно, что граничные условия для нее не задаются.

Переходя к решению, введем в рассмотрение новый функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(x, \dot{x}, u, \dot{u}, \psi, t) dt, \quad (1.23)$$

в котором

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + \psi'(t) [\dot{x} - \varphi(x, u, t)], \quad (1.24)$$

где $\psi(t)$ – n -мерный вектор, компонентами которого являются пока неопределенные функции, называемые множителями Лагранжа. С помощью этих множителей задача об условном экстремуме функционала (1.20) сводится к задаче на безусловный экстремум функционала (1.23). Уравнения Эйлера для безусловных экстремалей функционала (1.23) имеют вид:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left[\psi_i(t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_i} \right] = 0 (i = \overline{1, n}); \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_k} - \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (k = \overline{1, m});$$
(1.26)

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \psi_i} = \dot{x}_i - \varphi_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$
(1.27)

Уравнения (1.27), (1.25), (1.26) образуют систему из $2n+m$ уравнений, которые называют уравнениями Эйлера – Лагранжа, для определения такого же числа неизвестных $x_i(t)$, $\psi_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), $u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$).

Если кривые $x_i(t)$, $u_k(t)$ ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$) доставляют безусловный экстремум функционалу (1.23), то на них достигается и условный экстремум функционала (1.20). Действительно, если на указанных кривых достигается безусловный экстремум функционала (1.23), то они удовлетворяют уравнениям Эйлера (1.27), (1.25), (1.26). Это означает (см. (1.24)), что на таких кривых значение функционала $J_1 = J$. И если они доставляют безусловный экстремум функционалу (1.23), то они будут доставлять экстремум и в более узком классе кривых, удовлетворяющих уравнениям связей (1.27).

Обратное утверждение о том, что функции $x_i(t)$, $u_k(t)$ ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$), доставляющие условный экстремум функционалу (1.20) при наличии связей (1.27), будут являться безусловными экстремумами функционала (1.23), дает следующая теорема.

Если функции $x_i(t)$, $u_k(t)$ ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$) доставляют экстремум функционалу (1.20), удовлетворяют уравнениям связи (1.27) и краевым условиям (1.21), (1.22), то существуют такие множители $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$, что эти функции удовлетворяют уравнениям Эйлера (Эйлера – Лагранжа) для функционала (1.23).

К задачам на условный экстремум относятся также изопериметрическая задача, которая формулируется так: среди всех кривых, удовлетворяющих граничным условиям (1.21), (1.22) и равенствам

$$\int_{t_0}^{t_1} l_i(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) dt = J_i^* \quad (i = \overline{1, \alpha}),$$

где $l_i(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ - заданные функции; $J_{l_i}^*$ - заданные числа ($i = \overline{1, \alpha}$), требуется найти кривые $x_i(t)$, $u_k(t)$ ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$), на которых достигается экстремум функционала (1.20).

Изопериметрическая задача сводится путем введения вспомогательных множителей ψ_i (здесь ψ_i – некоторые числа, $i = \overline{1, n}$) к задаче на безусловный экстремум функционала

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^{\alpha} \psi_i l_i \right) dt.$$

1.8. Задачи Майера и Больца.

В более общем случае функционал (1.20) и граничные условия (1.21), (1.22) имеют вид:

$$J = q_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u, \dot{x}, \dot{u}, t) dt + q_{2v_0}(x^{(1)}, t_1), \quad (1.28)$$

$$v_{j_0}(x^{(0)}, t_0) = 0; v_{i1}(x^{(1)}, t_1) = 0 \quad (j = \overline{1, s} \leq n; i = \overline{1, p} \leq n), \quad (1.29)$$

где $v_0(x^{(1)}, t_1)$ - заданная функция; $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$, то задача о нахождении экстремалей этого функционала, удовлетворяющих уравнениям связи (1.27) и граничным условиям (1.29), называется задачей Больца. Если в (1.28) $q_1 = 0$, то она называется задачей Майера. При $q_2 = 0$ это задача Лагранжа.

Покажем, что задачи Больца и Лагранжа сводятся к задаче Майера. Действительно, если дополнить уравнения (1.27)

уравнением $\dot{x}_0 = \varphi_0$, а граничные условия (1.29) – равенством $x_0(t_0) = 0$, то функционал (1.28) примет вид $J = q_1 x_0(t_1) + q_2 v_0$. Верно и обратное. Действительно, рассмотрим вместо функционала

$$J = v_0(x(1), t_1) \quad (1.30)$$

в задаче Майера функционал

$$J_1 = v_0(x(1), t_1) - v_0(x_0, t_0). \quad (1.31)$$

Поскольку $v_0(x_0, t_0)$ – известная величина, то экстремали функционалов (1.30) и (1.31) совпадают.

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} v_0(x(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \varphi_i(x, u, t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right) dt,$$

а задача об экстремуме этого функционала на связях (1.27) – это уже задача Лагранжа.

Покажем также, что задача Больца эквивалентна задаче Лагранжа. В связи с этим запишем функционал (1.29) как

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (q_1 \varphi_0 + q_2 x_{n+1}) dt,$$

дополним уравнения (1.27) уравнением $\dot{x}_{n+1} = 0$, а краевые условия (1.29) – равенством $x_{n+1}(t_0) = v_0/(t_1 - t_0)$. Тогда из уравнения связи следует $x_{n+1}(t) = \text{const} = v_0/(t_1 - t_0)$, и, следовательно, задачи Больца и Лагранжа эквивалентны. Выбор той или иной формы вариационной задачи определяется соображениями удобства ее формулировки.

В заключение отметим, что в связи с задачами оптимального управления в последние десятилетия уравнения Эйлера, Эйлера – Лагранжа были получены для дискретных систем с распределенными параметрами.

2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Определить методом классического вариационного исчисления кривую экстремаль $x(t)$, проходящую через заданные точки x_0 и x_1 в моменты времени t_0 и t_1 , на которой достигает экстремума функционал семейства оптимальной САУ.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt,$$

где τ - заданное число; t_0 – начало функционирования САУ; t_1 – конец функционирования САУ.

Алгоритм решения

1. Определение подинтегральной функции φ_0 функционала качества, непрерывно дифференцируемой по x и \dot{x} ;
2. Определение исходного уравнения Эйлера для определения экстремума функционала качества $x(t)$;
3. Подстановка подинтегральной функции в уравнение Эйлера;

4. Определения постоянных интегрирования для отыскания экстремали $x_0(t)$.

Решение задачи

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt \Rightarrow \varphi_0 = x^2 + 2\tau^2 \dot{x}^2$$

1. поскольку
2. Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 0,$$

определяем

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 2\tau^2 \dot{x}$$

3. Уравнение Эйлера примет вид

$$2x - \frac{2\tau^2 \dot{x}}{\partial t} = 0$$

или

$$2x - 2\tau^2 \ddot{x} = 0$$

или

$$\ddot{x} - \frac{1}{\tau^2} x = 0$$

4. Решение уравнения

$$x(t) = c_1 e^{\frac{t}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5. Определим c_1 и c_2 из уравнений

$$x_0 = c_1 e^{\frac{t_0}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t_0}{\tau}}; \quad x_1 = c_1 e^{\frac{t_1}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

$$c_1 = \frac{x_0 e^{\frac{t_1}{\tau}} - x_1 e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{\frac{(t_0 - t_1)}{\tau} - e^{-\frac{(t_0 - t_1)}{\tau}}}; \quad c_2 = \frac{x_1 e^{\frac{t_0}{\tau}} - x_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{\frac{(t_0 - t_1)}{\tau} - e^{-\frac{(t_0 - t_1)}{\tau}}}$$

Требуется перевести объект из начальной точки $x(t_0)=x_0=2$ при $t_0=0$ в конечную точку $x(t_1)=x_1=4$ при $t_1=1$, таким образом, чтобы доставить экстремум функционалу.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (0,4x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt,$$

 для $\tau=0,2$

Уравнение Эйлера для экстремалей функционала

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 0,$$

где $\tilde{\varphi}_0 = (0,4x^2 + \tau^2 \dot{x}^2)$

Решая уравнение, получим

$$0,8x - \frac{d}{dt} \tau^2 \dot{x} = 0$$

Уравнение Эйлера для экстремалей функционала примет вид

$$0,8x - \tau^2 \ddot{x} = 0$$

 Подставляем значение τ и переходим к операторной форме записи

$$0,8X(p) - 0,08X(p)p^2 = 0$$

Находим корни уравнения

$$X(p)(0,8 - 0,08p^2) = 0 \quad p = \pm \sqrt{10}$$

Получим общее решение уравнения

$$X(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$$

 Используя граничные условия определим значения постоянных c_1 и c_2 .

 При $x_0=2, t_0=0, x_1=4, t_1=1$ получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 4 = c_1 e^{\sqrt{10}} + c_2 e^{-\sqrt{10}} \\ c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 = \frac{(2e^{\sqrt{10}} - 4)e^{\sqrt{10}}}{e^{2\sqrt{10}} - 1} \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$c_1 = 0,17, c_2 = 1,83$$

 Частное решение, проходящее через граничные точки x_0 ,

x_1 и доставляющее экстремум функционалу примет вид

$$x(t) = 0,17e^{pt} + 1,83e^{-pt}$$

Определить методом классического вариационного исчисления кривую экстремаль $x_0(t)$, проходящую через заданные точки x_0 и x_1 в моменты времени t_0 и t_1 , на которой достигает экстремума функция качества оптимальной САУ

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^4 \ddot{x}^2) dt$$

при граничных условиях $x(t_0)=x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}$, $x(t_1)=x_1$, $\dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}$; где $\tau, x_0, x_0^{(1)}, x_1, x_1^{(1)}$ - заданные числа.

Алгоритм решения

1. Определение подынтегральной функции φ_0 функционала качества, непрерывно дифференцируемой по x и \ddot{x} ;
2. Определение исходного уравнения Эйлера - Пуассона для определения экстремума функционала качества $x_0(t)$;
3. Подстановка подынтегральной функции в уравнение Эйлера - Пуассона с учетом преобразования Лапласа;
4. Определение функции $x(t)$ или экстремали функционала $J(x(t))$.

Решение задачи

$$1. \varphi_0 = (x^2 + \tau^4 \ddot{x}^2)$$

$$2. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} = 0.$$

Найдем экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^4 \ddot{x}^2) dt$$

при граничных условиях

$$x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}; x(t_1) = x_1; \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}$$

Вычислим вначале

$$\partial \varphi_0 / \partial x = 2x; \partial \varphi_0 / \partial \ddot{x} = 2\tau^4 \ddot{x},$$

тогда уравнение Эйлера - Пуассона имеет вид

$$x + \tau^4 x^{IV} = 0.$$

Характеристический полином этого уравнения

$$d(s) = \tau^4 s^4 + 1 = (\tau^2 s^2 - \sqrt{2\tau}s + 1)(\tau^2 s^2 + \sqrt{2\tau}s + 1).$$

Его корни

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2\tau}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2\tau}}; s_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2\tau}}.$$

И, таким образом, экстремаль функционала имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1+j)t}} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1-j)t}} + c_3 e^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1+j)t}} + c_4 e^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1-j)t}}.$$

где $c_i (i = \overline{1,4})$ определяются из граничных условий $x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}; x(t_1) = x_1; \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}$.

Найдем экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (qx^2 + u^2) dt \quad (q > 0)$$

на связях

$$\dot{x} = ax + bu$$

при граничных условиях

$$x(t_0) = x_0; x(t_1) = x_1.$$

В соответствии с методом решения задачи на условный экстремум составим вспомогательный функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} [qx^2 + u^2 + \psi(t)(\dot{x} - ax - bu)] dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(x, u, \psi) dt$$

$$\tilde{\varphi}_0 = qx^2 + u^2 + \psi(t)(\dot{x} - ax - bu)$$

Уравнение Эйлера (Эйлера – Лагранжа) для безусловных экстремалей этого функционала имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{x}} = 0; \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{u}} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{\psi}} = 0.$$

Принимая во внимание, что $\partial \tilde{\varphi}_0 / \partial \dot{u} = \partial \tilde{\varphi}_0 / \partial \dot{\psi} = 0, \partial \tilde{\varphi}_0 / \partial \dot{x} = \psi$, запишем эти уравнения соответственно в виде

$$\psi = -a\psi + 2qx; 2u = b\psi; \dot{x} = ax + bu.$$

Исключая переменную u , получим систему из двух уравнений

$$\dot{x} = ax + \frac{1}{2}b^2\varphi; -a\varphi + 2qx.$$

Дифференцируя первое уравнение с учетом второго, имеем

$$\ddot{x} = a\dot{x} + \frac{1}{2}b^2(-a\varphi + 2qx).$$

Исключая из этого уравнения переменную

$$\psi = \frac{1}{0,5b^2}(\dot{x} - ax)$$

получим окончательно уравнение для экстремали $x(t)$:

$$\ddot{x} - (a^2 + qb^2)x = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt},$$

Используя граничные условия $x(t_0)=x_0$; $x(t_1)=x_1$, получим постоянные c_1 и c_2 .

Требуется перевести объект из начальной точки $x(t_0)=x_0=2$ при $t_0=0$ в конечную точку $x(t_1)=x_1=6$ при $t_1=2$, таким образом, чтобы доставить экстремум функционалу.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}(qx^2 + u^2)dt, \quad q=3$$

Уравнение связей $\dot{x} = ax + bu$, при $a=2$, $b=1$.

В соответствии с методом решения задачи на условный экстремум составим вспомогательный функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} [(3x^2 + u^2) + \psi(t)(\dot{x} - 2x - u)]dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(x, u, \psi)dt$$

Уравнение Эйлера (Эйлера – Лагранжа) для безусловных экстремалей этого функционала имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{x}} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{u}} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{\psi}} = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$3x - 2\psi - \frac{d\psi}{dt} = 0$$

$$u - \psi = 0$$

$$\dot{x} - 2x - u = 0$$

Исключая переменную u , получим систему из двух уравнений

$$\dot{x} = 2x + \psi;$$

$$\dot{\psi} = 3x - 2\psi.$$

Дифференцируя первое уравнение с учетом второго, имеем

$$\ddot{x} = 2\dot{x} + (3x - 2\psi).$$

Исключая из этого уравнения переменную

$$\psi = \dot{x} - 2x,$$

получим окончательно уравнение для экстремали $x(t)$:

$$\ddot{x} - 7x = 0.$$

Запишем уравнение в операторной форме

$$X(p)p^2 - 7X(p) = 0$$

$$X(p)(p^2 - 7) = 0$$

Корни уравнения

$$p = \pm\sqrt{7}$$

Получим общее решение уравнения

$$x(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$$

Используя граничные условия $x(t_0) = x_0$; $x(t_1) = x_1$, рассчитаем постоянные c_1 и c_2 .

$$\begin{cases} 2 = c_1 e^0 - c_2 e^0 \\ 6 = c_1 e^{2\sqrt{7}} + c_2 e^{-2\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 = \frac{6 - c_1 e^{2\sqrt{7}}}{e^{-2\sqrt{7}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 = (6 - c_1 e^{2\sqrt{7}}) e^{2\sqrt{7}} \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$c_1 = 0,03, c_2 = 1,97$$

Частное решение, проходящее через граничные точки x_0 , x_1 и доставляющее экстремум функционалу примет вид

$$x(t) = 0,03e^{pt} + 1,97e^{-pt}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.С. Понtryгин, В.Г. Болтянский, и др., "Математическая теория оптимальных процессов" М.: Наука, 1976.
2. В.А. Дыхта, и Н.В. Деренко, "Численные методы решения задач оптимального импульсного управления, основанные на вариационном принципе максимума", Известия высших учебных заведений. Математика. 2001. № 12. pp. 32-40.
3. А.А. Колесников Прикладная синергетика: основы системного синтеза. Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. – 384 с.
4. Синергетика и проблемы теории управления. / Под ред. А.А. Колесникова // М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
5. В.Л. Заковоротный Синергетический системный синтез управляемой динамики металлорежущих станков с учетом эволюции связей /В.Л. Заковоротный, А.Д. Лукьянов, Нгуен Донг Ань, Фам Динь Тунг// Ростов н/Д: изд-во ДГТУ, 2008. – 324 с.
6. Ю.З. Житников, и И.В. Житникова, "Анализ погрешностей моментов затяжки одношпindelными гайковертами на основе муфт предельного момента", Сборка в машиностроении, приборостроении. 2011. № 8. pp. 12-15.
7. O.V. Uzunov, "The "screwdriver" technology of the model building for simulating of the processes in the mechatronic objects", Solid State Phenomena. 2009. T. 147-149. pp. 468-473.
8. В.Л. Заковоротный, В.П. Лапшин, и А.А. Губанова, "Определение оптимальных координат переключения циклов обработки в эволюционной динамической системе резания", Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2014. № 4 (179). pp. 59-63.

9. В.П. Лапшин, и И.А. Туркин, "Моделирование динамики формообразующих движений при сверлении глубоких отверстий малого диаметра" Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2012. № 4 (110). pp. 226-233.

10. V.P. Lapshin, I.A. Turkin Dynamic influence of the spindle servo drive on the drilling of deep narrow holes// Russian Engineering Research. 2015. Т. 35. № 10. pp. 795-797.

11. V.P. Lapshin, I.A. Turkin Modeling tractive effort torque of wheel in deformation movements of pneumatic tire wheel//Procedia Engineering. 2017. Т. 206. pp. 594-599.

12. V.L. Zakovorotny, V.P. Lapshin, T.S. Babenko Assessing the Regenerative Effect Impact on the Dynamics of Deformation Movements of the Tool during Turning. Procedia Engineering 2017. Т. 206. pp.68–73.

13. В.Л. Заковоротный, В.П. Лапшин, и И.А. Туркин, "Зависимость перестройки динамической системы сверления глубоких отверстий спиральными сверлами от параметров серводвигателей", Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2014.№ 1. pp. 36-42.

14. В.Л. Заковоротный, В.П. Лапшин, и И.А. Туркин, "Управление процессом сверления глубоких отверстий спиральными сверлами на основе синергетического подхода", Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2014.№ 3 (178). pp. 33-41.

15. V.L. Zakovorotnyi, A.D. Lukyanov, A.A. Gubanova, and V.V. Khristoforova , "Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting", Journal of Sound and Vibration. 2016. Т. 368. pp. 174-190.

16. V.L. Zakovorotnyi, and I.A.Vinokurova, "Mathematical modeling of the dynamic cutting system taking into account the irreversible transformation in the area of cutting", В сборнике: Modern informatization problems in the technological and telecommunication systems analysis and synthesis Proceedings of the XXII-th International Open Science Conference. Editor in Chief O.Ja. Kravets. 2017. pp. 351-356.

17. V.L. Zakovorotnyi, and A.D. Lukyanov, "System synthesis of machine tool manufacturing process control based on synergetic conception", В сборнике: Procedia Engineering 2. Сер. "2nd International Conference on Industrial Engineering, ICIE 2016" 2016. pp. 370-375.