



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине

**«Методы синтеза оптимальных и
адаптивных законов управления»**

Авторы
Лапшин В. П.,
Подольцев В. В.,
Туркин И. А.

Ростов-на-Дону, 2019



Аннотация

Методические указания к лабораторной работе предназначен для студентов очной формы обучения направлений 27.03.04 «Управление в технических системах» и 27.04.04 «Управление в технических системах».

Авторы

к.т.н, доцент кафедры «АПП»
Лапшин В.П.,
магистрант, инженер кафедры «Физика»
Подольцев В.В.,
к.т.н, доцент кафедры «АПП»
Туркин И.А.



Оглавление

Фильтр Калмана	4
Расширенный фильтр Калмана	6
Лабораторная работа	8
Последовательность выполнения	13
Методический пример	14
Список литературы	16

ФИЛЬТР КАЛМАНА

Оптимальный фильтр имеет тем большее значение там, где уровень спектральной плотности сигнала выше уровня спектральной плотности помехи.

В работах Р.Калмана и Бьюси были получены уравнения физически реализуемого оптимального наблюдателя, которые были дальнейшим развитием результатов Колмогорова А.Н. и Винера Н. Эти уравнения фильтра Калмана сформулируем в виде следующего утверждения:

Оптимальный наблюдатель в случае не полностью измеряемого вектора состояния имеет вид:

$$\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - D(t)\hat{x}(t)] \quad (1)$$

где матрица $K(t)$ определяется из условия минимума функционала ошибки наблюдения (фильтрации) $e = x(t) - \hat{x}(t)$

$$J = M \{ e^T A(t) e \} \quad (2)$$

$A(t)$ - заданная положительно определенная матрица. При этом уравнение для ее определения имеет вид:

$$K(t) = P_e(t) D^T(t) (R^{(2)}(t))^{-1} \quad (3)$$

где $P_e(t)$ - матрица размеров $(n \times n)$, являющаяся решением уравнения Риккати

$$\dot{P}_e(t) = A(t)P_e(t) + P_e(t)A^T - P_e(t)D^T(t)(R^{(2)}(t))^{-1}D(t)P_e(t) + \Psi(t)R^{(1)}(t)\Psi^T(t) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}^0 \quad \text{и} \quad P_e(t_0) = R^{(0)} \quad (5)$$

Суть оценивания вектора состояния с помощью фильтра Калмана может быть сведена к достаточно простой сути:

Оценка вектора $\hat{x}(t)$ состоит из двух компонент – прогноза и коррекции прогноза. Прогноз представляет собой первое и второе слагаемое в уравнении (1) - $A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t)$. Это отражает движение объекта в соответствии с моделью объекта. Коррекция прогноза представляет собой вектор невязки – выражение в скобках, умноженное на матричный коэффициент усиления $K(t)[y(t) - D(t)\hat{x}(t)]$. Сам вектор невязки

$\varepsilon(t) = y(t) - D(t)\hat{x}(t)$ является разностью между измеренным вектором наблюдении и его прогнозным значением, или значением, которое он имел бы, если бы объект управления двигался в

соответствии с моделью (1) при отсутствии внешних возмущений. Предпочтение какой-либо из компонент в уравнении можно отдать с помощью матричного коэффициента, являющегося весовым коэффициентом. Если измерения производятся с минимальными погрешностями, то коррекции прогноза уделяется должное внимание, матричный коэффициент большой в силу малости матрицы интенсивностей шумов измерений. В противном случае основной составляющей оценки вектора состояния является прогноз по модели движения. Структурная схема модели с прогнозом представлена на рис.1.

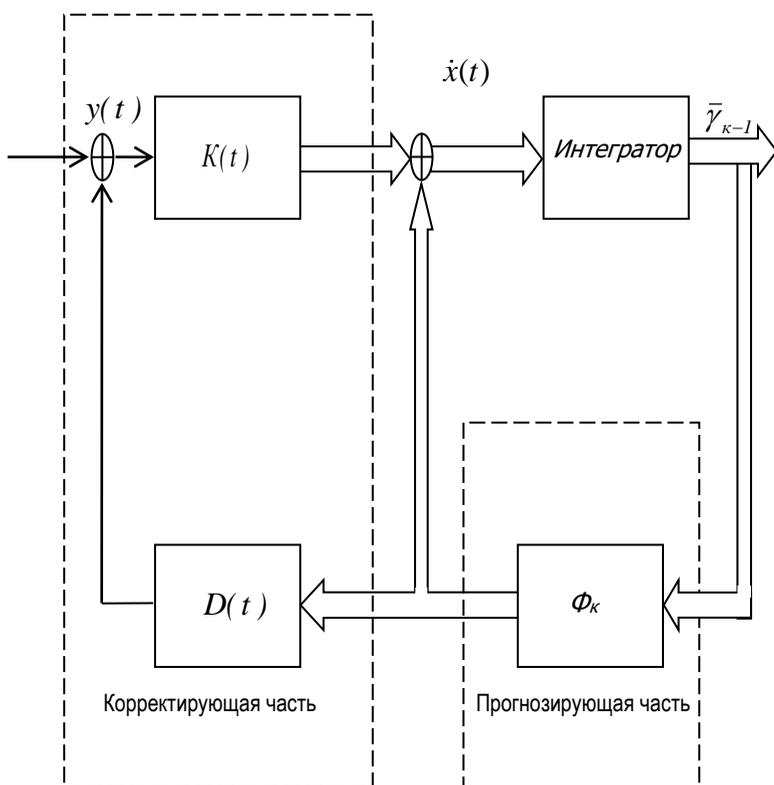


Рис. 1. Структурная схема модели фильтра Калмана

Расширенный фильтр Калмана

Рассмотрим объект, описываемый нелинейными уравнениями

$$\dot{x}(t) = \varphi(x, u, t) + f(t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (6)$$

$$y(t) = w(x, t) + \chi(t) \quad (7)$$

где $\varphi(x, u, t)$ и $w(x, t)$ - нелинейные вектор-функции своих аргументов соответствующего размера, $f(t)$ и $\chi(t)$ - случайные процессы типа «белый шум».

Пусть требуется по результатам измерения вектора $y(t)$ восстановить (оценить) вектор состояния $x(t)$.

Для решения этой задачи применяют несколько подходов. Один из них заключается в применении расширенного фильтра Калмана.

Будем для простоты рассмотрения полагать, что в уравнениях объекта $u=0$.

Пусть в некоторый момент времени получена оценка $\hat{x}(t)$ вектора состояния объекта. Разложим в окрестности этой оценки нелинейные вектор-функции $\varphi(x, u, t)$ и $w(x, t)$ в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами:

$$\varphi(x, t) \approx \varphi(\hat{x}, t) + \hat{A}(t)(x - \hat{x}), \quad (8)$$

$$w(x, t) \approx w(\hat{x}, t) + \hat{D}(t)(x - \hat{x}) \quad (9)$$

где элементы $\hat{a}_{ij}(t)$, $\hat{d}_{ij}(t)$ матриц $\hat{A}(t)$ и $\hat{D}(t)$ определяются выражениями

$$\hat{a}_{ij}(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{x=\hat{x}}, \quad \hat{d}_{kj}(t) = \left. \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \right|_{x=\hat{x}} \quad (i, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, r}) \quad (10)$$

С учетом этих выражений соотношения (8), (9) примут вид:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \varphi(\hat{x}, t) + K(t)[y(t) - w(\hat{x}, t)] \quad (11)$$

$$y(t) = w(\hat{x}, t) + \chi(t) \quad (12)$$

Уравнение для матричного коэффициента усиления аналогично (3) и (4).

В ряде случаев, когда программа движения известна,

система управления работает достаточно точно, удается линеаризовать уравнения фильтра вблизи опорной траектории. Однако в обоих этих случаях необходимо хорошее начальное приближение для вектора состояния, т.к. в противном случае погрешности линеаризации приводят к расходимости оценок и срыву управления.

Интерес представляет ситуация, когда начального приближения найти не удастся, например, при решении задач по перехвату боеголовок противника, когда начальная оценка в принципе неизвестна. Для получения оценок вектора состояния применяют методы проективной геометрии, используя групповые операторы вращения и трансляции. Рассмотрим этот подход.

Пусть уравнение наблюдения нелинейно

$$y(t) = D(x(t), t) + \chi(t) \quad (13)$$

Ряд измерительных систем имеют навигационные функции, которые позволяют произвести разделение уравнений наблюдения на линейную часть и функционалы, содержащие нелинейность:

$$y(t) = H(t)x(t) - G(y(t))V(x(t), y(t)) + \chi(t) \quad (14)$$

где $H(t)$ - линейная часть уравнения наблюдения,
 $V(x(t), y(t))$ - нелинейность, вызванная, например, параболическим характером навигационной функции измерительной системы,

$G(y(t))$ - нелинейная часть уравнения наблюдения.

Введем в рассмотрение проектор – матрицу, определенную на пространстве нелинейной части уравнения наблюдения:

$$P(y(t)) = E_N - G(y(t))[G(y(t))]^{-1} \quad (15)$$

где $[G(y(t))]^{-1}$ - обратная матрица $G(y(t))$, E_N - единичная матрица.

Используем известное нам из линейной алгебры свойств матриц:

$$AA^{-1}A = A$$

Умножим слева уравнение (14) на проектор (15), получим

$$P(y(t))y(t) = P(y(t))H(t)x(t) - P(y(t))G(y(t))V(x(t), y(t)) + P(y(t))\chi(t) \quad (16)$$

Рассмотрим второе слагаемое в этом уравнении, опустив для простоты все аргументы матриц

$$PGV = (E_N - G[G]^{-1})GV = GV - G[G]^{-1}GV = GV - GV = 0 \quad (17)$$

Таким образом, второе слагаемое исключено из уравнения наблюдения, а вместе с ним и вся нелинейность. В результате исходное уравнение наблюдения становится линейным, что позволяет решить проблему отсутствия начального приближения и получать текущую оценку фильтром Калмана с линейным уравнением наблюдения:

$$P(y(t))y(t) = P(y(t))H(t)x(t) + P(y(t))\chi(t) \quad (18)$$

Таким образом, может быть решена задача оптимального оценивания для системы с нелинейной моделью измерительной системы в условиях отсутствия хорошего начального приближения, не позволяющего линеаризовать уравнения фильтра разложением в ряд.

Лабораторная работа

Исследуется модель объекта управления в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = A_x + B_u + G_w \\ \dot{y} = C_x + D_u + H_w + v \end{cases} \quad (19)$$

с известными входами u и возмущениями по входам w и измерениям v , которые являются "белым" шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M(w) &= M(v) = 0, \\ M(w(t)w(\tau)^T) &= Q\delta(t - \tau), \\ M(v(t)v(\tau)^T) &= R\delta(t - \tau), \\ M(v(t)w(\tau)^T) &= N\delta(t - \tau). \end{aligned}$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M((x - \hat{x})(x - \hat{x}))^T. \quad (20)$$

Пусть многомерная система определяется как система с l -входами и n -выходами, у которой преобразование "вход-выход"

задано в виде матричной импульсной переходной функции $K(t, \tau)$.

Пусть $U(t)$ – l -мерный вектор входа фильтра, а $\hat{X}(t)$ – n -мерный вектор выхода. Тогда связь между векторами $\hat{X}(t)$ и $Y(t)$ определена интегралом

$$\hat{X}(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) Y(\tau) d\tau, \hat{X}(t_0) = 0.$$

Пусть $Y(\tau)$ – действительный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_{YY}(t, \tau)$. Обозначим норму произвольной квадратной матрицы B через $\|B\|$ и определим её следующим образом:

$$\|B\| = \sqrt{\text{tr}(BB^T)}$$

где tr – след, т.е. сумма диагональных элементов матрицы.

Пусть на вход многомерного фильтра поступает искаженный сигнал как сумма полезного сигнала $M(t)$ и помехи $N(t)$, т.е.

$$Y(t) = M(t) + N(t)$$

где $M(t)$ и $N(t)$ – l -мерные векторы с известными корреляционными функциями $R_{MM}(t, \tau)$ и $R_{NN}(t, \tau)$.

Предположим, что существует идеальный вход $X(t)$ некоторой системы, который определяет желаемый выход и связан с полезным сигналом соотношением

$$X(t) = \int_{t_0}^t K_{ID}(t, \tau) M(\tau) d\tau$$

где $K_{ID}(t, \tau)$ – матрица импульсной передаточной функция идеальной системы. Рассмотрим вектор ошибок

$$X_s^t(t) = X(t) - \hat{X}(t)$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать такую физическую реализуемую матричную импульсную переходную функцию $\hat{K}(t, \tau)$ так, чтобы математическое ожидание квадрата нормы ошибок было минимальным

$$M(\|X_\delta(t)\|^2) = \min_{K(t, \tau)} \quad (21)$$

где $K(t, \tau) = 0$.

В зависимости от того, какая задача стоит: прогнозирование, фильтрации или сглаживания, определяется $K_{ID}(t, \tau)$ идеальной системы. В задаче фильтрации $X(t) = M(t)$, т.е. $K_{ID}(t, \tau) = E \cdot \delta(t - \tau)$. При такой постановке задачи минимум среднеквадратической ошибки (21) определяется МИПФ $\dot{K}(t, \tau)$, получаемой из обобщенного уравнения Винера-Хопфа для многомерных систем

$$R_{MY}(t, \tau) = \int_0^t \dot{K}(t, s) R_{YY}(s, \tau) ds$$

Известно, что, если на вход системы поступает случайный сигнал $Y(t)$, являющийся стационарным, в широком смысле, случайным процессом, оптимальную матричную передаточную функцию $W(s)$ многомерного фильтра можно получить факторизацией рациональной матрицы спектральных плоскостей. В случае нестационарного случайного процесса решение интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода даже для скалярного случая представляет серьезные трудности, не говоря уже о векторном.

Калман в своих работах модифицировал постановку задачи многомерной фильтрации Винера, придав ей форму проблемы пространства состояния. В результате такой модификации был получен фильтр Калмана, осуществляющий процедуру рекурсивного оценивания, когда подлежащий оцениванию сигнал является входным сигналом линейной нестационарной динамической системы.

Рассмотрим непрерывную модель объекта управления

$$\begin{cases} \dot{x} = A_x x + B_u u + G_w w \\ y_v = C_x x + D_u u + H_w w + v \end{cases}$$

с известными входами u и возмущениями по входам w и измерениям v , которые являются "белым" шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M(w) &= M(v) = 0, \\ M(w(t)w(\tau)^T) &= Q\delta(t - \tau), \\ M(v(t)v(\tau)^T) &= R\delta(t - \tau), \end{aligned}$$

$$M(v(t)w(\tau)^T) = N\delta(t - \tau).$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M((x - \hat{x})(x - \hat{x})^T)$$

Оптимальным решением является фильтр Калмана, описываемый уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_{\hat{x}} + B_u + L(y_v - C_{\hat{x}} + D_u) \\ \begin{pmatrix} \hat{y}_v \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ I \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} u + H_w + v \end{cases}$$

где матрица коэффициентов обратных связей L определяется на основе решения алгебраического матричного уравнения Риккати. Например, при $H=0$ дисперсия P определяется из уравнения:

$$AP + PA^T - (PC^T + GN)RR^{-1}(CP + N^T G^T) + GQG^T = 0,$$

Матрица L определяется как:

$$L = APC^T(N + CPC^T)^{-1}$$

Наблюдатель (рис. 2) объединяет фильтр Калмана и объект управления.

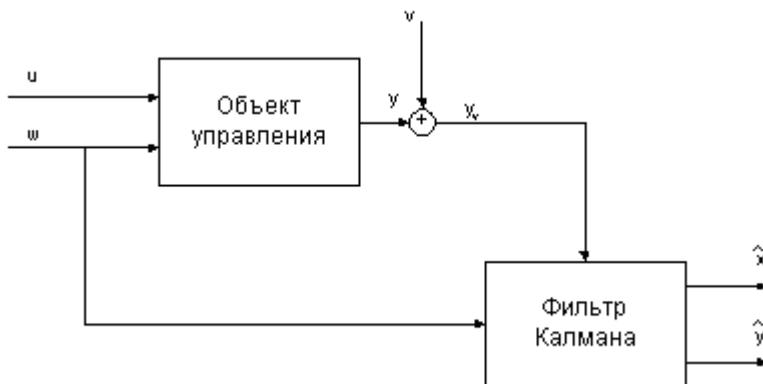


Рис.2. Наблюдатель Калмана

Наблюдатель использует известные входы u и результаты измерений y_v , искаженные случайными помехами, для того, чтобы вычислить оценки вектора переменных состояния \hat{x} и выходов \hat{y} .

Пусть задана дискретная модель объекта управления

$$\begin{cases} x[n+1] = A_x[n] + B_u[n] + G_w[n] \\ y_v[n] = C_x[n] + D_u[n] + H_w[n] + v[n] \end{cases}$$

с известными входами u и возмущениями по входам w и измерениям v , которые являются "белым" шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M(w) &= M(v) = 0, \\ M(w(n)w(m)^T) &= Q\delta_{nm}, \\ M(v(n)v(n)^T) &= R\delta_{nm}, \\ M(v(n)w(n)^T) &= N\delta_{nm}. \end{aligned}$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта управления, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания,

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M((x - \hat{x})(x - \hat{x})^T)$$

В этом случае фильтр Калмана описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \hat{x}[n+1] = A_{\hat{x}}[n] + B_u[n] + L(y_v - C_{\hat{x}}[n] + D_u[n]) \\ \begin{pmatrix} \hat{y}_v[n] \\ \hat{x}[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(I - MC) \\ I - MC \end{pmatrix} \hat{x}[n] + \begin{pmatrix} (I - CM)D & CM \\ -MD & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u[n] \\ y_v[n] \end{pmatrix} \end{cases}$$

где матрица коэффициентов обратных связей L и новая матрица коэффициентов обратных связей M определяются на основе решения матричного алгебраического уравнения Риккати.

Наблюдатель объединяет фильтр Калмана и объект управления; он использует известные входы $u[n]$ и результаты измерений $y_v[n]$, искаженные случайными помехами, для того, чтобы вычислить оценки вектора переменных состояния $\hat{x}[n]$ и выходов $\hat{y}[n]$.

Обновленная матрица коэффициентов обратных связей M применяется для того, чтобы уточнить предсказание $\hat{x}[n]$ на основе измерения $y_v[n]$

$$\hat{x}[n+1] = \hat{x}[n] + M(y_v[n] - C_{\hat{x}}[n] + D_u[n])$$

Последовательность выполнения

Для синтеза фильтра Калмана в предназначены следующие функции Control System Toolbox:

`[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)`

`[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn, sensors, known)`

для дискретных моделей

`[kest, L, P, M, Z] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)`

для синтеза дискретного фильтра Калмана для непрерывных систем

`[kest, L, P, M, Z] = kalmz(sys, Qn, Rn, Nn)`

Приведенные выше функции выполняют синтез фильтров Калмана для оценки переменных состояния объекта управления на основе данных о случайных внешних возмущениях и ошибках измерений.

На систему, описывающую объект управления и случайные воздействия накладываются следующие ограничения:

- пара матриц (C, A) должна быть обнаруживаемой;
- необходимо выполнение неравенства:

$$\bar{R} > 0, \bar{Q} - \bar{N}\bar{R}^{-1}\bar{N}^T$$

с учетом обозначений

$$\bar{Q} = GQG^T, \bar{R} = HN + N^T H^T + NQH^T, \bar{N} = G(QH^T + N).$$

Для выполнения практической работы необходимо выполнить следующие действия:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Произвести расчет фильтра Калмана.
4. Выполнить моделирование системы управления с наблюдателем.
5. Сравнить данные, полученные на основе
6. Построить графики динамики системы при ненулевых начальных условиях.
7. Ответить на контрольные вопросы.
8. Оформить отчет и защитить работу.

Методический пример

Произведем расчет фильтра Калмана для системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}$$

и параметрами $Q = 1$, $R = 0.01$.

1. Произведем расчет фильтра Калмана в Matlab.

Для это необходимо в командную строку ввести:

```
sys=ss(tf(100,[1 1 100]));
```

```
[A,B,C,D]=ssdata(sys);
```

```
P=ss(A, [B B], C, [D D]);
```

```
Kest=kalman(P,1,0.01);
```

2. Выполним моделирование системы управления с наблюдателем. Для этого с учетом $x_1 = x1$, $x_2 = x2$, $\hat{x} = x3$, $\hat{x} = x4$, введем следующие матрицы:

```
A1=[-1 -6.25 0 0; 16 0 0 0; 0 54 1 -60.2; 0 41.5 16 -41.5];
```

```
B1=[2 2 0; 0 0 0; 2 0 17.3; 0 0 13.3];
```

```
C1=[0 3.125 0 0; 0 0 0 3.125];
```

2. Входом системы управления с наблюдателем является вектор $u1=[u; w; v]$, выходом – $y1 = [y; \hat{y}]$. Здесь $y = 3.125y2$, $\hat{y} = 3.125y4$. Ниже приведен фрагмент программы моделирования и результаты (рис. 3, рис.4)

```
t=0:0.001:5;
```

```
u=ones(size(t));
```

```
w=randn(size(t))*1000^0.5;
```

```
v=randn(size(t))*10^0.5;
```

```
S=ss(A1, B1, C1, 0);
```

```
u1=[u; w; v];
```

```
[y1 y4]= lsim(S, u1', t);
```

```
plot(t, y1(:,1),'-b',t,y1(:,2),'b'), grid on
```

```
plot(t, v'+y1(:,1), ':g', t,y1(:,2),'-b'), grid on
```

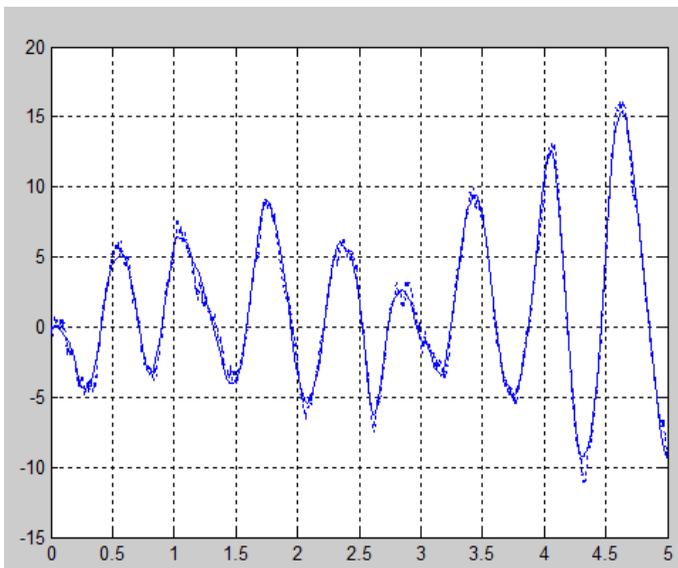


Рис. 3. – Сравнение измеренного и точного выходных сигналов.

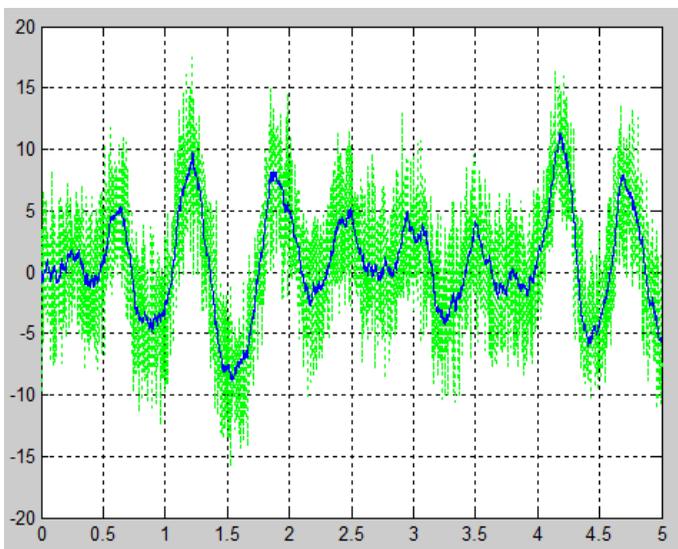


Рис. 4. – Сравнение зашумленного и точного значения выхода системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лапшин В.П., Туркин И.А., Бочаров К.П. К вопросу устойчивости синтезированной методом АКАР электромеханической системы с нелинейной нагрузкой. В сборнике: динамика технических систем "ДТС - 2017" Сборник трудов хiii международной научно-технической конференции. Министерство Образования и Науки Российской Федерации, Донской государственный технический университет. 2017. с. 8-11.

2. В.П. Лапшин, И.А. Туркин. Руководство к выполнению курсового проекта по дисциплинам «Синтез систем управления движением», «Синтез оптимальных регуляторов» Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2018.- 24 с.

3. Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде MATLAB: Учебное пособие. – М.: МГАПИ, 2002. – 88 с.