ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для иностранных обучающихся
предвузовского этапа обучения

«Системы алгебраических уравнений с двумя переменными»

Автор
О.А.Игнатова

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Методические указания включают учебный материал для групп экономического, технического, естественно-научного профилей, соответствуют уровню подготовки иностранных обучающихся предвузовского этапа обучения, содержат большое число решений задач, а также задания для самостоятельной работы учащихся.

Печатается по решению методической комиссии факультета «Международный»

Автор

к.т.н., доцент Игнатова О.А.

Оглавление

1. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными – это система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

где x и y – переменные величины; a_1, a_2, b_1, $b_2 \in R$ - коэффициенты системы;

c_1, $c_2 \in R$ - свободные члены.

Решение системы – это упорядоченная пара чисел (x_0; y_0), которая является решением каждого уравнения системы.

Решить систему уравнений – это значит найти множество ее решений.

Системы уравнений относительно одних и тех же переменных называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Основные методы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

А) Метод подстановки.

Пример

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 9x + 4y = 11 \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения найдем $y = 3 - 3x$ и подставим во второе уравнение.

Получим:

$9x + 4(3 - 3x) = 11$, или

$9x + 12 - 12x = 11$;

$-3x = -1$;

$x = \frac{1}{3}$;

тогда $y = 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 - 1 = 2$;

$y = 2$.

Решением данной системы является пара чисел $(\frac{1}{3};\ \ 2)$, то есть множество решений состоит из одного элемента $(\frac{1}{3};\ \ 2)$.

Ответ: $(\frac{1}{3};\ \ 2)$.

Задание 1. Решить системы уравнений методом подстановки:

1.1 $\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 3x + 4y = 253 \\ y = 5x \end{cases}$ 1.4 $\begin{cases} 9x - 4y = 98 \\ x = \frac{3}{5}y \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$ 1.6 $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 3x + 4y = -3{,}4 \\ 6x - 4y = 5{,}2 \end{cases}$ 1.8 $\begin{cases} 4x - 2y = 2{,}8 \\ 7x + 4y = -2{,}6 \end{cases}$

1.9 $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}5y = -0{,}9 \\ 2{,}1x + y = 7{,}2 \end{cases}$

Б) Метод алгебраического сложения.
Решить систему уравнений:
Пример

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & 1) \\ x + 2y = 3 & 2) \end{cases}$$

Решение.

Умножим обе части уравнения (1) на -2, а обе части уравнения (2) – на 3 и сложим полученные уравнения:

$$+\begin{cases} -4x + 6y = -2 \\ \underline{3x - 6y = 9} \\ -x \qquad = 7, \end{cases}$$

откуда $x = -7$.

Умножим обе части уравнения (2) на -2 и сложим полученное уравнение с уравнением (1):

$$+\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ \underline{-2x + 4y = -6} \\ \qquad y = -5, \end{cases}$$

откуда $y = -5$.

Ответ: (-7;-5)

Задание 2. Решить системы уравнений методом алгебраического сложения:

2.1 $\begin{cases} x + y = 13 \\ 2x - y = 12{,}5 \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 3x + 8y = 59 \\ 6x + 5y = 107 \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} 8x + 3y = 2 \\ 6x + 5y = -4 \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} 18x - 21y = 2 \\ 24x - 15y = 7 \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} 15x - 8y = 29 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x + 6y = -7 \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} 5x + 6y = 13 \\ 7x + 18y = -1 \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} 4(2x - 7) - 3y = -2x - 52 \\ 2x + 3y = -12 \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 2(3x - 4) + y = -2x - 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

В) Метод определителей.

Систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (1)

можно решать по формулам Крамера:

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$, когда $\Delta \neq 0$,

где $\Delta,\ \ \Delta x,\ \ \Delta y$ - определители системы (1) .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \mathrm{b}_1 \\ a_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1;$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & \mathrm{b}_1 \\ c_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & \mathrm{c}_1 \\ a_2 & \mathrm{c}_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Пример.
Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x - 3y = -1 \\ 4x - 5y = -17 \end{cases}$$

Решение.
Вычисляем определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-5) - 4 \cdot (-3) = -35 + 12 = -23;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -17 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) = (-17) \cdot (-3) = 5 - 51 = -46;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -17 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-17) - 4 \cdot (-1) = -110 + 4 = -115.$$

По формулам Крамера находим:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-46}{-23} = 2;$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-115}{-23}=5.$$

Ответ: (2; 5).

Задание 3. Решить системы уравнений методом определителей:

3.1 $\begin{cases}15x+23y=-10\\3x+4y=-2\end{cases}$

3.2 $\begin{cases}4x+3y+4=0\\6x+5y+7=0\end{cases}$

3.3 $\begin{cases}3x+5y=4\\7x-3y=2\end{cases}$

3.4 $\begin{cases}7x-3y=15\\5x+6y=27\end{cases}$

3.5 $\begin{cases}\dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y}{5}=-2\\[2mm]\dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{3x}{4}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

3.6 $\begin{cases}7+\dfrac{x-3y}{4}=2x-\dfrac{y+5}{3}\\[2mm]\dfrac{10(x-y)-4(1-x)}{3}=y\end{cases}$

3.7 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5}\\[2mm]\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x\end{cases}$

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ, ПРОВОДЯЩИЕСЯ К ЛИНЕЙНЫМ.

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y} + \dfrac{18}{3x-2y} = 13 \\ \dfrac{27}{3x-2y} - \dfrac{2}{2x-3y} = 1 \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $\dfrac{1}{2x-3y} = U$; $\dfrac{1}{3x-2y} = V$, тогда получим:

$$\begin{cases} 11U + 18V = 13 \\ 27V - 2U = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 11U + 18V = 13 \\ -2U + 27V = 1 \end{cases}$$

Решим систему методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 18 \\ -2 & 27 \end{vmatrix} = 11 \cdot 27 - (-2) \cdot 18 = 297 + 36 = 333$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = 13 \cdot 27 - 18 \cdot 1 = 351 - 18 = 333$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \cdot 1 - 13 \cdot (-2) = 11 + 26 = 37$$

$U = \dfrac{\Delta_U}{\Delta} = \dfrac{333}{333} = 1$; $V = \dfrac{\Delta_V}{\Delta} = \dfrac{37}{333} = \dfrac{1}{9}$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y} = 1 \\ \dfrac{1}{3x-2y} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$, откуда $$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

Используем метод алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & \cdot\ (-2) \\ 3x - 2y = 9 & \cdot\ 3; \end{cases} \qquad + \begin{cases} -4x + 6y = -2 \\ 9x - 6y = 27 \end{cases}$$

$$5x = 25$$

$$x = 5.$$

Из уравнения $2x - 3y = 1$ определим:

$$y = \frac{2x-1}{3} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{3} = \frac{10-1}{3} = \frac{9}{3} = 3; \quad y = 3.$$

Ответ: (5 ; 3).

Задание 4. Решить системы уравнений:

4.1 $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2 \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{6}{x+y} = 5 \\ \dfrac{3}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = 5 \end{cases}$

4.4 $\begin{cases} \dfrac{4}{x+2y} + \dfrac{3}{x-2y} = 7 \\ \dfrac{5}{x+2y} - \dfrac{1}{x-2y} = 4 \end{cases}$

4.5 $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-2} + \dfrac{1}{x-y+2} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{2}{x+y-2} + \dfrac{1}{x-y+2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

3. СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

А) Системы двух уравнений, из которых одно линейное.

Пример 1.
Решить системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Решение.
Используем метод подстановки. Из второго уравнения находим $y = 2 - x$.

Подставим вместо y это выражение в первое уравнение и получим:

$$3x^2 - 4(2 - x)^2 = -1;$$
$$3x^2 - 16 + 16x - 4x^2 = -1;$$
$$-x^2 + 16x - 15 = 0;$$
$$x^2 - 16x + 15 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 15.$$

Находим значения y:

$$y_1 = 2 - x_1 = 2 - 1 = 1; \quad y_1 = 1.$$
$$y_2 = 2 - x_2 = 2 - 15 = -13; \quad y_2 = -13.$$

Ответ: (1; 1) ; (15; -13).

Пример 2.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Решение.
Решаем эту систему, используя теорему, обратную теореме Виета. Значения x и y можно рассматривать как корни квадратного уравнения

$$z^2 - 5z + 4 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$z_1 = 1; \quad z_2 = 4.$$

Решением данной системы уравнений является множество пар чисел (1; 4) и (4; 1).

Ответ: (1; 4); (4; 1).

Пример 3.

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 18 \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему уравнений так:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7 \\ x \cdot (-y) = -18 \end{cases}$$

Значения *x* и *(-y)* – корни квадратного уравнения

$$z^2 - 7z - 18 = 0$$

Корни этого уравнения:

$z_1 = -2$; $z_2 = 9$.

Решением данной системы уравнений является множество пар чисел (-2; -9) и (9; 2).

Ответ: (-2; -9); (9; 2).

Задание 5. Решить системы уравнений:

5.1 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 39 \\ x - y = 7 \end{cases}$

5.2 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$

5.3 $\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

5.4 $\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 + 2xy - 4x - 33 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

5.5 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

5.6 $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$

5.7 $\begin{cases} x - y = 16 \\ xy = -48 \end{cases}$

5.8 $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ xy = 2 \end{cases}$

Б) Системы двух уравнений, каждое из которых второй степени.

Пример

Решить системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 28 \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28 \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения вычитаем второе и получим:

$x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$.

Из уравнений системы видно, что x и y одновременно не могут быть равны нулю.

Пусть $y \neq 0$. Разделим обе части полученного уравнения на y^2:

$$(\frac{x}{y})^2 - 4 \cdot \frac{x}{y} + 4 = 0.$$

Пусть $\frac{x}{y} = t$, получим уравнение:

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

Корни этого уравнения:

$$t_1 = t_2 = 2.$$

Получим $\frac{x}{y} = 2$, $x = 2y$.

Подставим значение $x = 2y$ в первое уравнение системы и получим:

$$2 \cdot (2y)^2 - 2y \cdot y + y^2 = 28;$$

$$8y^2 - 2y^2 + y^2 = 28;$$

$$7y^2 = 28;$$

$$y^2 = 4;$$

$y_1 = -2$, тогда $x_1 = -4$;

$y_2 = 2$, тогда $x_2 = 4$.

Ответ: (-4; -2); (4;2)

Задание 6.
Решить системы уравнений:

6.1 $\begin{cases} 7x^2 - 3xy + 2y^2 = 53 \\ 2x^2 + 5xy - 12y^2 = 0 \end{cases}$

6.2 $\begin{cases} 2x^2 + 5xy - 7y^2 = 0 \\ x^2 - xy + 3y^2 = 3 \end{cases}$

6.3 $\begin{cases} 3x^2 - 3xy + 2y^2 = 8 \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 8 \end{cases}$

6.4 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80 \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56 \end{cases}$

6.5 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4 \\ 4x^2 - 4xy - y^2 = 8 \end{cases}$

6.6 $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$

6.7 $\begin{cases} 3y^2 - 2xy = 4 \\ y^2 - 3xy - 2x^2 = -16 \end{cases}$

6.8 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 4y^2 = 10 \\ 3x^2 - xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$