ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

«Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Составители

Соломатина Н.В.
Ковалева Т.Г.

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Учебное пособие «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» содержат основные материалы по комбинаторике, формуле Бинома Ньютона и теории вероятностей. Разделы снабжены кратким теоретическим материалом, формулами и примерами. В конце пособия упражнения для самостоятельной работы.

Составители

Соломатина Н.В., ст. преподаватель

Ковалева Т.Г., ст. преподаватель

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» предназначено для иностранных обучающихся технического, экономического и естественнонаучного профилей предвузовского этапа обучения. В учебном пособии рассматриваются основные элементы комбинаторики, статистическое и классическое понятия вероятности, методы вычисления вероятности наступления события, а также задачи, при решении которых используются данные методы.

В первой части под названием «Элементы комбинаторики» описаны основные математические методы, применяемые при подсчёте возможных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу. Первая часть пособия содержит следующие разделы: 1) перестановки; 2) размещения; 3) сочетания; 4) формула Бинома Ньютона; 5) свойства биномиального разложения.

Во второй части под называнием «Теория вероятностей» приведены статистическое и классическое определения вероятности, основные теоремы вычисления вероятности наступления события. Вторая часть содержит следующие разделы: 1) определение вероятности; 2) теоремы сложения вероятностей; 3) теоремы умножения вероятностей. Каждый раздел учебного пособия содержит упражнения по изложенной в нём теории, а так же образцы их решения.

В третьей части пособия предложены упражнения для самостоятельной работы, приведены ответы для проверки полученных результатов.

Учебное пособие «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» является частью учебно-методического комплекса по разделу дополнительного материала при изучении математики. Оно предназначено для использования на занятиях по математике и организации самостоятельной работы иностранных обучающихся предвузовского этапа обучения. Основной целью издания пособия является удовлетворение потребностей обучающихся в адаптированном учебном материале.

ЧАСТЬ 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И БИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Элементы комбинаторики

В разделе математики, который называется «Элементы комбинаторики», решаются задачи, в которых производится подсчет всех возможных различных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу.

1.1. Перестановки

Задача. Между тремя обучающимися, избранными в студпрофком, надо распределить три различные должности. Скольками способами может быть проведено это распределение?

Решим эту задачу. Обозначим должности числами 1, 2, 3, а избранные обучающиеся – буквами *а, в, с.* Возможные комбинации распределения должностей представляются так:

1	2	3	1	2	3
а	*в*	*с*	*в*	*с*	*а*
а	*с*	*в*	*с*	*а*	*в*
в	*а*	*с*	*с*	*в*	*а*

Видно, что в таблице приведены все возможные комбинации. Их оказалось 6. поставленная задача решена. При решении задачи было упорядочено множество трех элементов а, в и с шестью способами. Упорядочение состояло в закреплении за каждым элементом определенного номера.

Упорядочить n- элементное множество – это значит выбрать какой-либо элемент в качестве первого, затем какой-либо другой элемент – в качестве второго и т.д. Наконец, последний элемент – в качестве n - го.

Определение. Любой установленный в конечном множестве порядок, называется перестановкой его элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n, где P – первая буква французского слова «permutation», что значит «перестановка».

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad (1.1)$$

P_n равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно. Это произведение принято обозначать $n!$ (читаем: «эн факториал»). При этом полагают: $0! = 1$; $1! = 1$. Равенство (1.1.)

Можно записать в виде: $P_n = n!$

Пример 1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 так, чтобы ни одна цифра не повторялась?

Решение. Искомое количество пятизначных чисел равно числу перестановок из пяти элементов: $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Пример 2. Сколько пятизначных чисел, кратных пяти, можно составить из этих же цифр при условии, что в числе повторяющихся цифр нет?

Решение. Если составить всевозможные перестановки из элементов 1,2,3 и 4 и к каждой из них на последнее место приписать цифру 5, то получим все числа, кратные 5, составленные из данных цифр. Количество таких чисел равно $P_4 = 4! = 24$.

1.2. Размещения

Пусть множество состоит из трех элементов, которые обозначим *а, в,* и *с*. Из них можно составить всевозможные соединения:

по одному: *а; в; с;*

по два: *ав; ас; вс; ва; са; св;*

по три: *авс, асв, вас, вса, сав, сва.*

Рассмотрим все возможные соединения по 2. Они отличаются друг от друга или элементами (*ав* и *ас*), или порядком элементов (*ав* и *ва*). Но число элементов в них одно и тоже. Такие соединения называются размещениями из трех элементов по два.

Определение. Размещениями из m элементов по n называются такие соединения, из которых каждое содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и которые отличаются одно от другого или самими элементами, или порядком этих элементов.

Понятно, что $n \le m$. Символом A_m^n обозначаем число всевозможных размещений из m элементов по n. В этом обозначении А – начальная буква французского слова «arrangement», что значит «размещение».

Это число находится по формуле:

$$A_m^n = \frac{\mathrm{m}!}{(\mathrm{m} - \mathrm{n})!} \qquad (2.1.)$$

или, после сокращения:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)....(m-n+1) \qquad (2.2.)$$

Рассмотрим частный случай формулы (2.2.) когда $n = m$. Имеем $A_m^m = m(m-1)(m-2)....(m-m+1)$.

Замечая, что $m - m + 1 = 1$, получим:

$$A_m^m = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... m = m! = P_m$$

Следовательно, число размещений из m элементов по m равно числу перестановок из m элементов, то есть перестановки есть размещения из m элементов по m.

Пример 1. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если есть материал пяти различных цветов?

Решение. Всевозможные расположения цветок по полосам флага представляют собой, очевидно, всевозможные размещения из 5 элементов по 3; поэтому всех способов размещений должно быть $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Пример 2. В чемпионате по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются три медали. Сколькими способами они могут быть распределены?

Решение. Очевидно, что речь идет о размещениях из 17 команд по 3, а способов таких размещений будет $A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$

1.3. Сочетания

Определение. Пусть имеется множество, состоящее из m элементов. Все его подмножества, содержащие n элементов из данных m элементов, называются сочетаниями из m элементов по n элементов.

Число сочетаний из m элементов по n элементов обозначается символом C_m^n (С есть начальная буква французского слова «combinaison», что означает «сочетание»).

Обозначается:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad (3.1.)$$

Или $$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} \qquad (3.2.)$$

При решении задач часто используются свойства сочетаний:

Свойство 1. Имеет место соотношение:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \quad (0 \le n \le m) \qquad (3.3.)$$

Свойство 2. Справедлива формула:

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n \qquad (3.4.)$$

Пример 1. Землячество студентов состоит из 25 обучающихся. Надо выбрать трех делегатов на конференцию. Сколькими способами может быть сделан выбор?

Решение. Искомое число составляет число всевозможных сочетаний из 25 элементов по 3. $C_{25}^{3} = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$

<u>Пример 2.</u> Вычислить: $C_6^4 + C_5^0$.

<u>Решение.</u>

$$C_6^4 + C_5^0 = \frac{6!}{4!(6-4)!} + 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} + 1 = 15 + 1 = 16$$

1.4. Формула Бинома Ньютона

При изучении формул сокращенного умножения, были рассмотрены правила возведения в степень двучлена с натуральным показателем: $(x+a)^1 = x + a$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3a^2x + a^3$$

Теперь выведем общую формулу для $(x+a)^n$, используя некоторые формулы комбинаторики.

Умножим два многочлена, отличающихся только вторыми членами: $(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2$.

Умножим три многочлена:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = \left[x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2\right](x+a_3) =$$

$$= x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3$$

По аналогии находим:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x^3 +$$

$$+ (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)x^2 +$$

$$+ (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4)x + a_1a_2a_3a_4$$

В результате такого умножения получаются многочлены, составленные по правилу:

- каждый многочлен расположен по убывающим степеням переменной *x*;
- степень многочлена равна числу перемножаемых биномов; у каждого последующего слагаемого показатель степени *x* уменьшается на 1;

- старший коэффициент многочлена равен 1; коэффициент второго члена есть сумма всех свободных коэффициентов перемножаемых биномов; коэффициент третьего слагаемого есть сумма всех произведений свободных членов, взятых по два; коэффициенты четвертого члена есть сумма всех произведений свободных членов, взятых по три. Последний (свободный) член есть произведение всех свободных членов.

Произведение любого числа биномов подчиняется этому правилу.

Формула произведения биномов, отличающихся только вторыми членами, имеет вид:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots\cdot(x+a_{n-1})(x+a_n)= \tag{4.1.}$$

$$= x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \ldots + S_{n-1}x^n + S_n, \text{ где}$$

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n;$$

$$S_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-2}a_n + a_{n-1}a_n;$$

$$S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n;$$

$$S_{n-1} = a_1a_2a_3\ldots\ldots a_{n-1} + a_2a_3a_4\ldots a_n;$$

$$S_n = a_1a_2a_3\ldots\ldots a_n$$

Формула Ньютона записывается в виде:

$$(x+a)^n = C_n^0a^0x^n + C_n^1a^1x^{n-1} + + C_n^2a^2x^{n-2} + \ldots + C_n^na^nx^0 \tag{4.2.}$$

Коэффициент C_n^k в формуле (4.2.) называются биномиальными коэффициентами, а правая часть формулы (4.2) – разложением бинома.

1.5. Свойства биномиального разложения

1. В разложении *n-й* степени бинома содержится *n+1* слагаемое.
2. Разложение бинома есть однородный многочлен относительно *a* и *x*, то есть все слагаемые разложения имеют одну и ту же степень *n* относительно *a* и *x*. При этом показатели *x* последовательно убывают от *n* до 0, а показатели *a* последовательно возрастают от 0 до *n*.
3. Коэффициент разложения вычисляются по следующему закону: $C_n^0 = 1$, C_n^1, C_n^2, C_n^3, …, то есть коэффициент *(к+1)* – го члена равен C_n^k.
4. Если обозначить *i*-ый член биномиального разложения (4.2);

(4.1) символом T_i, где *i=1,2,3,…,m+1*. Тогда получим следующую формулу общего члена биномиального разложения:

$$T_i = C_m^{i-1} a^{i-1} x^{m-(i-1)} \qquad (5.1.)$$

5. Биномиальные коэффициенты, равностоящие от концов разложения равны между собой.
6. Если показатель степени бинома четный, то биномиальный коэффициент среднего слагаемого разложения наибольший; если же показатель степени бинома нечетный, то в разложении имеются два средних слагаемых с одинаковым наибольшим коэффициентом.
7. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n, где *n* – показатель бинома.
8. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах.
9. Рассмотрим два последовательных члена биномиального разложения: $T_i = \frac{m(m-1)\ldots(m-(i-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot i} a^i x^{m-i}$;

$$T_{i+2} = \frac{m(m-1)\ldots(m-(i-1))(m-i)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot i(i+1)} a^{i+1} x^{m-i-1}$$

Следовательно, для получения коэффициента следующего члена достаточно умножить предыдущий биномиальный коэффициент на показатель степени *x* в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому.

<u>Пример.</u> $(x+a)^5 = x^5 + \ldots$

Берем 1, умножаем на 5 и делим на 1, получаем 5: $(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + \ldots$

Берем 5, умножаем на 4 и делим на 2, получаем 10 : $(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + \ldots$

Выписаны слагаемые до середины разложения. Остальные члены получим на основании свойства 5: $(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

10. Положим в формуле (4.2.) *x=a=1*, получим: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$. Следовательно, сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.

<u>Пример.</u> Сумма биноми- альных коэффициентов в раз-

ложении $(x+a)^5$ равна: *1+5+10+10+5+1=32=*2^5*.*

<u>Пример.</u> Вычислить произведения биномов. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$; используя формулу (4.1.) получим: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+(1+2+3+4)x^3+(1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+2\cdot3+2\cdot4+3\cdot4)x^2+$
$+(1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4)x+1\cdot2\cdot3\cdot4=x^4+10x^3+35x^2+50x+24.$

<u>Пример.</u> Записать разложение бинома $(x+2)^7$;

$$(x+2)^7 = x^7 + 7x^6\cdot 2 + 21x^5\cdot 2^2 + 35x^4\cdot 2^3 + 35x^3\cdot 2^4 +$$
$$+ 21x^2\cdot 2^5 + 7x\cdot 2^6 + 2^7 = x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 +$$
$$+ 672x^2 + 448x + 128$$

<u>Пример.</u> Вычислить шестой член разложения бинома $(x+y)^{10}$.

По формуле общего члена разложения бинома имеем: $T_6 = T_{5+1} = C_{10}^5 x^{10-5} y^5 = 252x^5y^5$.

11. Для быстроты вычисления биномиальных коэффициентов рекомендуется пользоваться треугольником Паскаля.

n=0						1					
n=1					1	1					
n=2					1	2	1				
n=3				1	3	3	1				
n=4				1	4	6	4	1			
n=5			1	5	10	10	5	1			
n=6			1	6	15	20	15	6	1		
n=7		1	7	21	35	35	21	7	1		
n=8		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n=9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
n=10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

ЧАСТЬ 2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.6. Определение вероятности

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса испытаний. Всякий результат или исход испытания называется событием.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется случайным. В этом случае, когда событие непременно должно произойти, его называют достоверным, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, - невозможным.

События называются несовместными, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются совместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются противоположными, если в условиях испытания они несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события. Будем различать два разных определения понятия вероятности: классическое и статистическое.

Пусть число *M* появлений некоторого события *A* при *N* испытаниях называют частотой (абсолютной частотой), а отношение M/N - частостью (относительной частотой), то есть

$$W(A) = M/N. \tag{6.1}$$

Статистическое определение вероятности: вероятность появления события это постоянная величина, около которой группируются наблюдаемые значения частости.

Классическое определение вероятности. Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), то есть

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{6.2}$$

Вероятность любого события не может быть больше единицы и меньше нуля, то есть $0 \le P(A) \le 1$

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, достоверному - $P(A) = 1$.

<u>Пример 1.</u> Стрелок произвел 100 выстрелов. Он попал в цель 86 раз. Найти частость попадания в цель.

<u>Решение.</u> Здесь *M=100, N=86.* по формуле (6.1.) получим $W(A) = 86/100 = 0{,}86$.

Пример 2. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение. Обозначим событие появления черного шара через А. Общее число случаев $n = 5 + 3 = 8$.число случаев, благоприятствующих появлению события А, равно 3. по формуле (6.2) получим $P(A) = \frac{3}{8} = 0,375$.

Пример 3. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение. Обозначим событие, в появлении двух черных через А. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 по 2.

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$$

Число m, благоприятствующих событию А, составляет: $m = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$

По формуле (6.2) находим вероятность появления двух черных шаров: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} = 0,104$

2.7. Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (7.1)$$

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + ...A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \quad (7.2)$$

Теорема вероятностей совместных событий. Вероятность появления хоты бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (7.3)$$

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице. Обозначим событие противоположное $A, \overline{A}$. Тогда:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad (7.4)$$

Пример. Найти вероятность того, что случайно взятое двухзначное число, делится (с целым результатом деления) или на 3, или на 5, или на 3 и 5 одновременно.

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что случайно взятое число делится на 3, а В – в том, что оно делится на 5. Найдем $P(A+B)$, так как А и В совместные события, то используем формулу (7.3). Всего имеем 90 двузначных чисел: 10,11, …98,99. из них 30 делятся на три (благоприятствуют наступлению события А; 18-делятся на 5 (благоприятствуют наступлению события В) и 6 – делятся на 3 и 5 одновременно. (благоприятствуют наступлению события АВ). Тогда:

$$P(A) = 30/90 = 1/3$$

$$P(B) = 18/90 = 1/5$$

$$P(AB) = 6/90 = 1/15$$

$$P(A+B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} \approx 0.467$$

2.8. Теоремы умножения вероятностей

Теоремы умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \qquad (8.1)$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots \cdot P(A_n) \qquad (8.2)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \qquad (8.3)$$

Пример 1. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Пусть А – появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимые. Найдем $P(A) = 4/12 = 1/3$, $P(B) = 3/12 = 1/4$. По формуле (8.1) получим:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083 .$$

Пример 2. В ящике находятся 12 деталей, из которых 8 – стандартных. Рабочий берет две детали. Вычислить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение. Пусть А – первая взятая стандартная деталь, а В – вторая взятая стандартная деталь. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет $P(A) = 8/12 = 2/3$. Вероятность того, что вторая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, то есть условная вероятность события В, равно $P_A(B) = 7/11$.

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартами, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33} \approx 0{,}424$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте всевозможные перестановки из элементов множества $A=\{a;в;c;d\}$

2. Вычислите:

1) A_7^3; 2) $A_8^4-A_8^3$; 3) $\dfrac{A_6^5-A_6^4}{A_5^4-A_5^3}$ 4) $A_5^2\cdot A_4^2\cdot A_3^2$

3. Вычислите значения следующих выражений:

1) $\dfrac{10!-8!}{89}$ 2) $\dfrac{5!+6!}{4!}$ 3) $6!(7!-3!)$

4. Сократите дроби:

1) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ 2) $\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!}$

5. Выполните действия:

1) $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}$ 2) $\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}$ 3) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-3)!}$

6. Вычислите:

1) C_{12}^{10}; 2) C_{100}^{98}; 3) C_8^5 4) $C_{100}^{100}+C_{100}^1$

5) $\dfrac{C_6^2\cdot P_3}{A_6^2}$; 6) $C_8^3+\dfrac{A_9^4}{P_4}$; 7) $\dfrac{A_{10}^6+P_{10}}{C_9^6\cdot 7!}$

7. Сколько прямых можно провести через 6 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

8. Сколько чисел: а) пятизначных; б) шестизначных можно составить из цифр 0;1;2;3;4;5?

9. Сколькими способами можно разместить четыре пассажира в четырехместном купе вагоне?

10. Из группы студентов в 16 человек, создаются две команды в 10 и 6 человек. Сколькими способами можно создать эти команды?

11. Решить уравнения:

1) $A_x^2=12$; 2) $P_x=24$; 3) $C_x^3=2x$

4) $C_{x+2}^4=x^2-1$ 5) $30P_x=P_{x+2}$ 6) $A_7^x-xA_7^{x-1}=0$

12. Найдите произведение биномов:

1) *(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)*
2) *(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)*

13. Запишите разложение биномов:

1) $(x+1)^6$; 2) $(x+y)^8$ 3) $(2x-1)^4$

14. Найдите:

1) восьмой член разложения бинома $(x+2)^{12}$

2) седьмой член разложения бинома $(2x+1)^9$

15. Найдите сумму биноминальных коэффициентов разложения $(x+y)^{10}$

16. Найдите седьмой член разложения $(x+y)^n$, если сумма биномиальных коэффициентов равна 256.

17. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 30 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жребиями. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

18. На соревнования по прыжкам в воду приехали 7 спортсменов из Венгрии, 6 из Швейцарии т 2 из Германии. Порядок выступлений определяется жребием. Найти вероятность того, что пятым будет выступать спортсмен из Швейцарии?

19. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпадет решка.

20. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что один раз выпадет орел, а другой - решка.

Ответы к упражнениям для самостоятельной работы

1). $P_4=24$;
2) 1.=210; 2.=1344; 3.=6; 4.=1440;
3) 1.=40320; 2.=35; 3.=3624280;
4) 1.=1/$n+1$ 2.=$(n-1)n(n+1)(n+2)^3$;
5) 1.= $n+2/(n+1)!$; 2. = $-n/(n+1)!$; 3. $n(n-1)(n-2)/(n-5)!$;
6) 1=66; 2=4950; 3=56; 4=101
7) 15;
8) а=600; б=600;
9) 24;
10) 8008;
11) 1.=4; 2.=4; 3.=5; 4.=4 ; 5=4; 6=4;
12) 1.=$x^4-10x^3+35x^2-50x+24$; 2.=$x^5+15x^4+85x^3+225x^2+274x+120$;
13) 1=$x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$; 2=$x^8+8x^7y+28x^6y^2+$ $+56x^5y^3+70x^4y^4+56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8$; 3=$16x^4-32x^3-24x^2-$ $-8x+1$;
14) 1=$10137x^5$; 2=$692x^3$;
15) 1024;
16) $n=8$; $T_7=28x^2y^6$;
17) 0,25;
18) 0,4;
19) 0,25;
20) 0,5.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н.В. Богомолов Практические занятия по математике: Учеб.пособие для техникумов. – М.: Высш. школа, 1979.-448с.

2. Математический энциклопедический словарь, под редакцией Ю.В. Прохоров, 1988 г.