ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Естественные науки»

Учебное пособие «Фигуры планиметрии»

по дисциплине

«Математика»

Автор
Игнатова О.А.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Учебное пособие «Фигуры планиметрии» предназначено для иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ очной и дистанционной форм обучения экономической, инженерно-технической и технологической, естественнонаучной направленности при изучении дисциплины «Математика»

Автор

кандидат технических наук,
доцент кафедры
«Естественные науки»
Игнатова О.А.

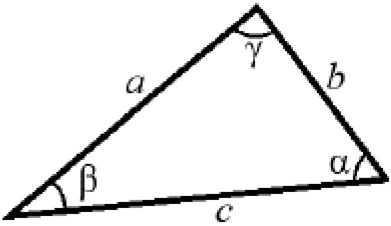
Оглавление

1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Определение

Треугольник – это замкнутая ломаная их трех отрезков.

Пусть имеется произвольный треугольник:



Сумма углов треугольника равна:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi \text{ рад}$$

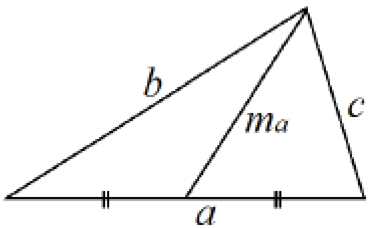
Сумма любых двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны.

Линии треугольника

1. **Медиана**

Определение

Медиана треугольника – это отрезок, проведенный через вершину треугольника и середину противоположной стороны этого треугольника.



$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Формула медианы

Свойства медиан треугольника:

- Все три медианы пересекаются в одной точке.

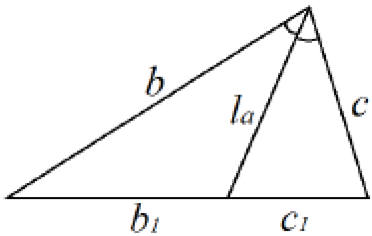
- Медианы делят треугольник на шесть треугольников одинаковой площади.
- В точке пересечения медианы делятся в отношении 2:1, считая от вершин.

2. Биссектриса

Определение

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника между его вершиной и противоположной стороной.

Биссектриса делит угол на два равных угла.



$$\frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}$$

Свойство биссектрисы

Теорема.

Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис (все три биссектрисы пересекаются в этой точке).

Формулы биссектрисы:

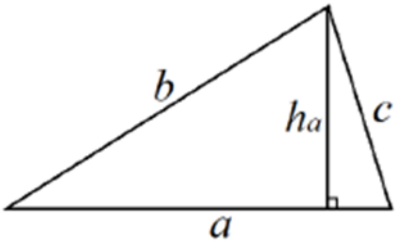
$$l_a=\sqrt{bc-b_1c_1}$$

$$l_a=\frac{\sqrt{cb(b+c+a)(b+c-a)}}{c+b}$$

3. Высота

Определение

Высота треугольника – это отрезок перпендикуляра между вершиной треугольника и противоположной стороной или ее продолжением.



$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Формула высоты

Основное свойство высот треугольника:

$$\frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$$

Все три высоты в треугольнике пересекаются в одной точке. Положение точки пересечения определяется типом треугольника:

- Если треугольник остроугольный, то точка пересечения высот находится внутри треугольника.
- В прямоугольном треугольнике высоты пересекаются в вершине прямого угла.
- Если треугольник тупоугольный, то точка пересечения высот находится за пределами треугольника.

3. Средняя линия

Определение

Средняя линия треугольника – это отрезок перпендикуляра между серединами двух сторон треугольника.

Теорема о средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Теорема косинусов

В любом треугольнике

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

Теорема синусов

В любом треугольнике

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

,

где R – радиус описанной окружности.

Теорема

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении срединных перпендикуляров.

Срединный перпендикуляр – это линия, проведенная через середину стороны треугольника перпендикулярно ей.

Все три срединных перпендикуляра пересекаются в одной этой точке.

Определение

Правильный треугольник - это треугольник, у которого все стороны (и углы) равны.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Площадь правильного треугольника находится по формуле::

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Теорема Пифагора для прямоугольного треугольника:

$c^2 = a^2 + b^2$,

где c - гипотенуза, a и b – катеты.

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен:

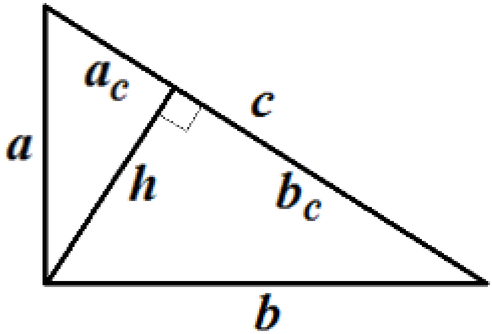
$$R = \frac{c}{2}$$

Площадь прямоугольного треугольника находится по формулам:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc$$,

где h – высота, опущенная на гипотенузу.

Свойства высоты, опущенной на гипотенузу прямоугольного треугольника:



$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = a_c \cdot c$$

$$b^2 = b_c \cdot c$$

Определение

Подобные треугольники – это треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Сходственные стороны подобных треугольников – это стороны, которые лежат напротив равных углов.

В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы, средние линии) пропорциональны.

Коэффициент подобия - это число k, равное отношению сходственных сторон подобного треугольника.

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Отношение длин биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров равно коэффициенту подобия.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Признаки подобия треугольников:

- По двум углам. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

- По двум сторонам и углу между ними. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы между этими сторонами равны, то треугольники подобны.
- По трём сторонам. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сходственным сторонам другого, то треугольники подобны.

Формулы площади треугольника

Площадь треугольника через две стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Площадь треугольника через сторону и высоту, опущенную на неё:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b$$

Формула Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Площадь треугольника через радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Полупериметр треугольника находится по следующей формуле:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется треугольником?
2. Чему равна сумма внутренних углов треугольника?
3. Какие основные линии можно провести в треугольнике?
4. Что называется медианой треугольника?
5. Что называется биссектрисой треугольника?
6. Что называется высотой треугольника?
7. Что называется средней линией треугольника?
8. Какие свойства имеет медиана треугольника?
9. Какие свойства имеет биссектриса треугольника?
10. Какие свойства имеет высота треугольника?
11. Какие свойства имеет средняя линия треугольника?

12. Где находится центр окружности, описанной около треугольника?
13. Какой треугольник называется правильным?
14. Какие треугольники называются подобными?
15. Какие признаки подобия треугольников вы знаете?

2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

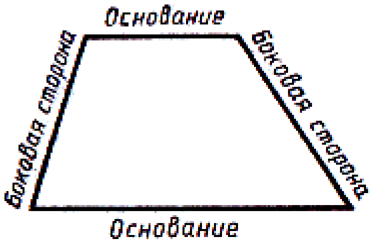
Определение

Четырехугольник – это замкнутая ломаная их четырех отрезков.

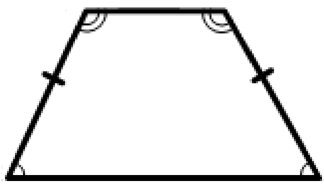
Трапеция

Трапеция - это четырёхугольник, у которого две противоположных стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее основаниями; непараллельные стороны трапеции называются ее боковыми сторонами.



Трапеция называется равнобедренной (равнобочной), если ее боковые стороны равны. В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны.



Трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции.

Теорема о средней линии трапеции

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

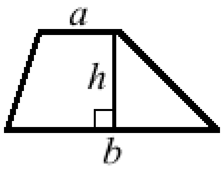
Длина средней линии трапеции:

$$l = \frac{a+b}{2}$$

Свойства трапеции:

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям.
- Отрезок, который соединяет середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.
- В трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон находятся на одной прямой.
- Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника. Треугольники, сторонами которых являются основания, подобны. Треугольники, сторонами которых являются боковые стороны, имеют равные площади..
- Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90 градусов, то отрезок, который соединяет середины оснований, равен полуразности оснований.
- У равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.
- У равнобедренной трапеции диагонали равны.
- В равнобедренной трапеции высота, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой - полуразности оснований.

Площадь трапеции:

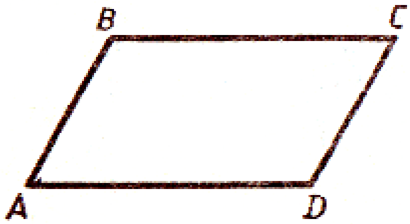


$$S = l \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Параллелограмм

Определение

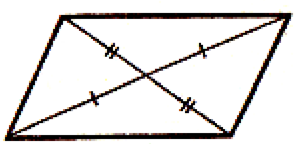
Параллелограмм - это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Свойства параллелограмма:

- Противоположные стороны параллелограмма равны.
- Противоположные углы параллелограмма равны.
- Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
- Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180 градусов.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон.





Признаки параллелограмма:

Первый признак параллелограмма.

Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

Второй признак параллелограмма.

Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

Третий признак параллелограмма.

Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.

Площадь параллелограмма через сторону и высоту, опущенную на неё:

$$S = bh$$

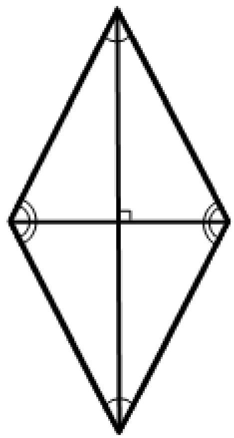
Площадь параллелограмма через две стороны и угол между ними:

$$S = ab \cdot \sin \gamma$$

Ромб

Определение

Ромб - это параллелограмм, у которого все стороны равны.



Свойства ромба:

- Ромб является параллелограммом и имеет все свойства параллелограмма.
- Диагонали ромба перпендикулярны.
- Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

Площадь ромба:

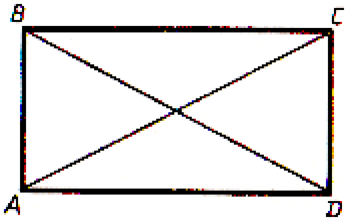
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 = a^2 \sin \gamma$$

(первая формула - через две диагонали, вторая - через длину стороны и угол между сторонами)

Прямоугольник

Определение

Прямоугольник - это параллелограмм, у которого все углы прямые.



Свойства прямоугольника:

- Прямоугольник является параллелограммом и имеет все свойства параллелограмма.
- Диагонали прямоугольника равны.
- Стороны прямоугольника являются одновременно его высотами.
- Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его не противоположных сторон (по теореме Пифагора).
- Около любого прямоугольника можно описать окружность, при этом диагональ прямоугольника равна диаметру описанной окружности.

Признак прямоугольника.

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм - прямоугольник.

Площадь прямоугольника через две смежные стороны:

$$S = ab$$

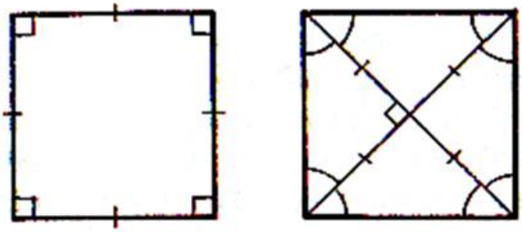
Квадрат

Определеие

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат есть частный вид прямоугольника, а также частный вид ромба, поэтому он имеет все их свойства, в том числе:

- Все углы квадрата прямые
- Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.



Площадь квадрата через длину его стороны:

$$S = a^2$$

Площадь квадрата через длину его диагонали:

$$S = \frac{1}{2}d^2$$

Произвольные фигуры

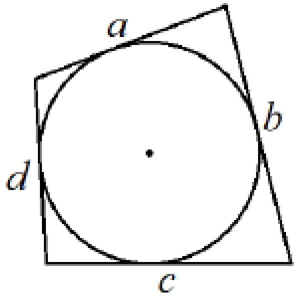
Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника через две диагонали и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$$

Связь площади произвольной фигуры, её полупериметра и радиуса вписанной окружности (формула выполняется только для фигур, в которые можно вписать окружность, в том числе для любых треугольников):

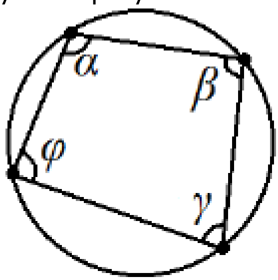
$$S = p \cdot r \qquad r = \frac{S}{p}$$

Условие, при выполнении которого возможно вписать окружность в четырёхугольник:



$$a + c = b + d$$

Условие, при выполнении которого возможно описать окружность вокруг четырёхугольника:



$$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180^\circ$$

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется четырехугольником?
2. Какая фигура называется трапецией?
3. Какая фигура называется параллелограммом?
4. Какая фигура называется ромбом?
5. Какая фигура называется прямоугольником?
6. Какая фигура называется квадратом?
7. Какие виды трапеции вы знаете?
8. Какие свойства трапеции вы знаете?
9. Какие свойства параллелограмма вы знаете?
10. Какие признаки параллелограмма вы знаете?
11. Какие свойства ромба вы знаете?
12. Какие свойства прямоугольника вы знаете?
13. Какой признак прямоугольника вы знаете?
14. Какие свойства квадрата вы знаете?

3. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Определение

Выпуклым многоугольником называется многоугольник, все точки которого лежат по одну сторону от любой прямой, которая проходит через две его соседние вершины.

Сумма внутренних углов плоского выпуклого n-угольника равна:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180^\circ \cdot (n-2) = \pi \cdot (n-2) \text{ рад}$$

Число диагоналей многоугольника равно:

$$N_d = \frac{n \cdot (n-3)}{2},$$

где n – число сторон многоугольника.

Определение

Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, у которого все стороны между собой равны и все углы между собой равны.

Внутренний угол правильного многоугольника равен:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$$

Центральный угол правильного n-угольника равен:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} \text{ рад}$$

Площадь правильного многоугольника с числом сторон n, длиной стороны a, радиусом описанной окружности R, полупериметром p и радиусом вписанной окружности r, может быть рассчитана по следующим формулам:

$$S = r \cdot p = \frac{n}{2} \cdot r \cdot a$$

$$S = \frac{n}{4} \cdot a^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

$$S = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$S = r^2 \cdot n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется выпуклым многоугольником?
2. Чему равна сумма внутренних углов плоского выпуклого n-угольника?
3. Какая фигура называется правильным многоугольником?

4. ОКРУЖНОСТЬ

Определение

Окружность – это фигура, которая состоит из всех точек плоскости, которые находятся на равном расстоянии от данной точки.

Эта точка является центром окружности.

Отрезок, который соединят две точки окружности, называется хордой. Хорда, которая проходит через центр окружности, называется диаметром. Радиус окружности равен половине ее диаметра.

Часть окружности, которую отсекает хорда, называется дугой окружности.

Угол, вершина которого находится в центре окружности, называется центральным углом.

Величина центрального угла равна угловой мере соответствующей дуги.

Угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами, называется вписанным углом.

Величина вписанного угла равна половине угловой меры соответствующей дуги.

Определение

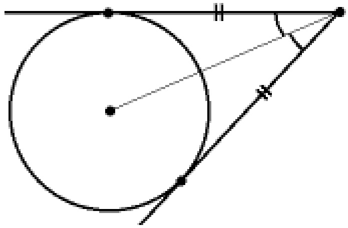
Круг – это часть плоскости, которая ограничена окружностью.

Сектор – это часть круга, которая ограничена двумя радиусами и дугой окружности.

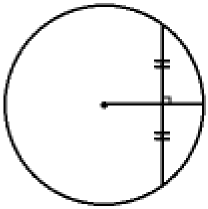
Сегмент – это часть круга, которая ограничена хордой и дугой.

Приведем кратко некоторые теоремы об окружностях.

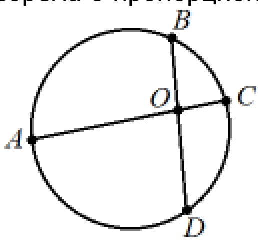
Свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки:



Свойство хорды:

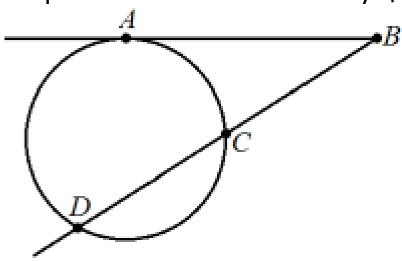


Теорема о пропорциональных отрезках хорд:



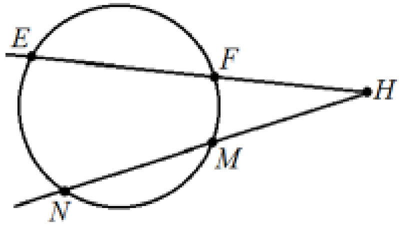
$$BO \cdot OD = AO \cdot OC$$

Теорема о касательной и секущей:



$$BA^2 = BC \cdot BD$$

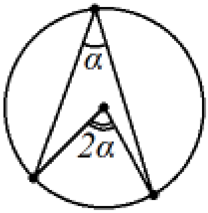
Теорема о двух секущих:



$$HF \cdot HE = HM \cdot HN$$

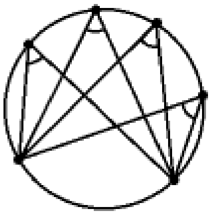
Теорема о центральном и вписанном углах

Величина центрального угла в два раза больше величины вписанного угла, если они опираются на общую дугу:

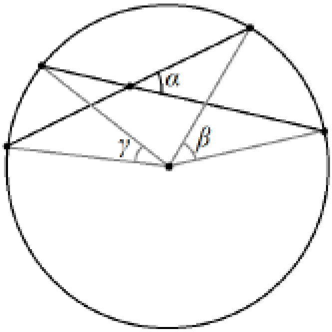


Свойство вписанных углов

Все вписанные углы, которые опираются на общую дугу, равны между собой:

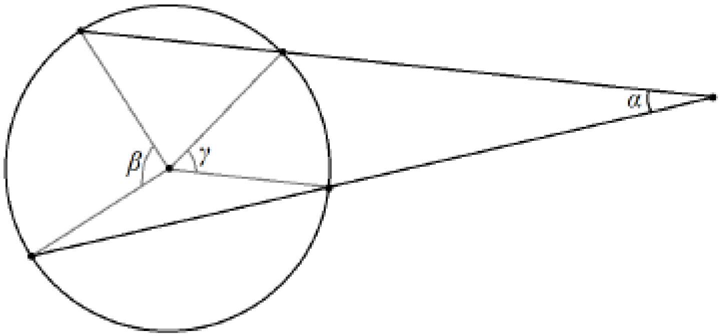


Свойство центральных углов и хорд:



$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Свойство центральных углов и секущих:



$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Длина окружности равна:

$$L = 2\pi R$$

Длина дуги окружности равна:

$$L_{\text{дуги}} = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha_{\text{град}}}{180} = \alpha_{\text{рад}} R$$

Площадь круга равна:

$$S = \pi R^2$$

Площадь сектора равна:

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha_{\text{град}}}{360} = \frac{\alpha_{\text{рад}} R^2}{2}$$

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется окружностью?
2. Что называется хордой?
3. Что называется диаметром?
4. Что называется дугой окружности?
5. Какой угол называется центральным?
6. Какой угол называется вписанным?
7. Чему равна величина вписанного угла?
8. Какая фигура называется кругом?
9. Что называется сектором?
10. Что называется сегментом?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. HTTPS://BUDU5.COM/MANUAL/CHAPTER/3332
2. HTTPS://MATHTER.PRO/PESOCHNICA/4_2_TREUGOLNIKI.HTML
3. HTTPS://PLAYCOOLMATH.COM/RU/MATH-LESSONS/MATH-FOR-KIDS/BASIC-GEOMETRIC-SHAPES/ALL-ABOUT-TRIANGLES
4. HTTPS://MATHTER.PRO/PESOCHNICA/4_3_CHETYREHUGOLNIKI.HTML
5. HTTPS://IK-STUDY.RU/EGE_MATH/TIEORIIA_I_PRAKTIKA_PO_CHIETYRIEKHUGHOL_NIKAM
6. HTTPS://WIKI.FENIX.HELP/MATEMATIKA/VYPUKLYY-CHETYREKHUGOLNIK-2