ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

Комплексные числа

Методические указания по математике для студентов-иностранцев предвузовского этапа обучения

Автор
О.А.Игнатова

Ростов-на-Дону, 2012

Аннотация

Методические указания включают учебный материал для групп экономического профиля уровню подготовки студентов-иностранцев предвузовского этапа обучения, содержат большое число решений задач, а также задания для самостоятельной работы учащихся.

Автор

к.т.н., доцент О.А.Игнатова

Оглавление

1. Понятия о комплексном числе.

Для определения комплексных чисел сначала введем некоторый символ i, который назовем мнимой единицей. Пусть мнимая единица имеет свойство удовлетворять уравнению
$x^2+1=0$:
$i^2+1=0$, или $i^2=-1$.

Рассмотрим множество всех выражений (двухчленов) вида $a+bi$, где a, b – любые действительные числа, и условимся производить над такими двухчленами действия сложения, вычитания и умножения по правилам алгебры с единственным дополнительным условием:
$i\cdot i=i^a=-1$.

Так определенное множество выражений вида $a+bi$ называется множеством комплексных чисел. Выражение $z=a+bi$, где a и b – действительные числа, называется комплексным числом.

В комплексном числе $a+bi$ число a называется его действительной частью, b – мнимой частью, или коэффициентом при мнимой единице.

Условие равенства двух комплексных чисел

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части. Это означает, что если $a_1+b_1i=a_a+b_ai,$ то $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$, то и $a_1+b_1i=a_2+b_2i$.

Все действительные числа рассматриваются как частный случай комплексных. Если мнимая часть комплексного числа равна нулю, то вместо $z=a+0\cdot i$ пишут $z=a$ и не отличают такого комплексного числа от действительного числа *a.*

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его действительная и мнимая части. Это означает, что если $a+bi=0$, то $a=0$ и $b=0$ и, обратно, если $a=0$ и $b=0$, то и $a+bi=0$.

Комплексное число называется мнимым, если $b\neq 0$. Если в мнимом числе $a=0$, то оно называется чисто мнимым. Чисто мнимое число $0+bi$ обозначает bi. Чисто мнимое число $1\cdot i$ обозначается i.

Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются комплексно-сопряженными и обозначаются $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$. Комплексные числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются противоположными.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

В определении комплексных чисел было указано, что действия над ними определяются как действия над алгебраическими выражениями.

Сумма (разность) двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ есть комплексное число, действительная и мнимая части которого равны соответственно сумме (разности) действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2.

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$
$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Пример. Дано: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 + 7i$, $z_2 = 5 - 11i$. Вычислить $z_1 - z_2 + z_3$.

Решение.

$$z_1 - z_2 + z_3 = [2 - (-4) + 5] + [3 - 7 + (-11)]i = 11 - 15i$$

Сумма двух сопряженных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ есть действительное число, а разность – чисто мнимое число.

$$z + \bar{z} = (a + a) + [b + (-b)]i = 2a,$$
$$z - \bar{z} = (a - a) + [b - (-b)]i = 2bi.$$

Произведение $z_1 z_2$ комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ определяется как произведение двухчленов с применением правила раскрытия скобок:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi =$$
$$= ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Пример. Вычислить произведение чисел $z_1 = -2 + 4i$, $z_2 = 5 - 3i$.

Решение.

$$z_1z_2 = (-2+4i)(5-3i) =$$
$$= [(-2)5 - 4\cdot(-3)] + [(-2)(-3) + 5\cdot 4]i = 2 + 26i$$

Произведение двух сопряженных комплексных чисел есть неотрицательное действительное число:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = [aa - b(-b)] + [a(-b) + ab]i =$$
$$= a^2 + b^2$$

Число $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ называется модулем или абсолютной величиной комплексного числа $a + bi$. В частности, когда $b = 0$, число $z = a$ действительное, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ - модуль действительного числа.

Частное от деления двух комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$ есть комплексное число z_3, так что $z_2 \cdot z_3 = z_1$, если $z_2 \neq 0$. Пусть $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$; $z_3 = x + yi$. По определению частного $(x + yi)(c + di) = a + bi$.

По определению произведения

$$(x + yi)(c + di) = (xc - yd) + (xd - cy)i$$

По условию равенства двух комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} xc - yd = a, \\ xd + cy = b, \end{cases}$$

Решив эту систему относительно x и y, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = c^2 + d^2 \neq 0; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} a & -d \\ d & c \end{vmatrix} = ac + bd;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = cb - ad$$

Система имеет единственное решение, так как по условию $c^2 + d^2 \neq 0$ (c и d одновременно не равны нулю).

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \ y = \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}.$$

Таким образом, $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{cb - ad}{c^2 + d^2}i$

Итак, мы доказали, что частное двух комплексных чисел определено для всех комплексных чисел, если $c+di \neq 0+i\cdot 0$. При делении комплексных чисел в алгебраической форме используют следующий практический прием: умножают числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное знаменателю. Покажем, что полученный при этом результат совпадает с предыдущим:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

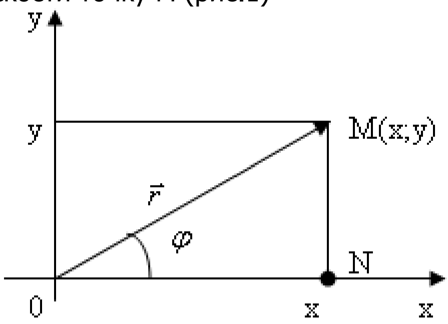
Пример. Найти частное от деления комплексных чисел: $\frac{7-i}{3+i}$.

Решение.

$$\frac{7-i}{3+i}=\frac{7-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{21-7i-3i+1}{9+1}=\frac{20-10i}{10}=2-i$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Если имеется комплексное число $z=x+yi$, то, считая x и y координатами точки M, можно построить в системе координат на плоскости точку M (рис.1)



(рис. 1)

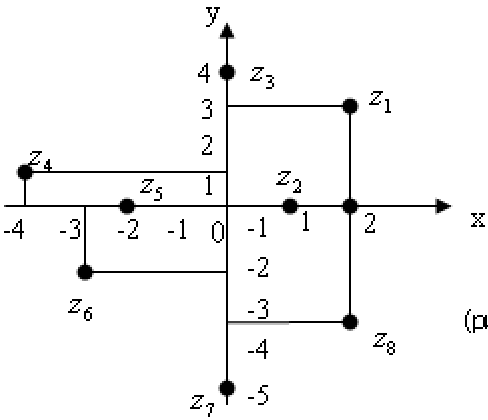
При использовании координатной плоскости для изображения комплексных чисел ось Ox называют действительной осью (так как действительная часть числа принимается за абсциссу

точки), а ось - Oy - мнимой осью (так как мнимая часть числа принимается за ординату точки). Комплексное число z , изображаемое точкой M(a,b), называется аффиксом этой точки. При этом действительные числа изображаются точками, лежащими на действительной оси, а все чисто мнимые числа bi (при $a=0$) – точками, лежащими на мнимой оси. Чисто нуль изображается точкой О.
На рис. 2 построены изображения чисел

$$z_1 = 2+3i,\ z_2 = 1,\ z_3 = 4i,\ z_4 = -4+i,\ z_5 = -2,$$
$$z_6 = -3-2i,\ z_7 = -5i,\ z_8 = 2-3i$$

.

Два комплексно сопряженных числа изображаются точками, симметричными относительно оси Ox (точки z_1 и z_8 на рис.2).



(рис. 2)

Каждому комплексному числу соответствует одна и только одна точка плоскости xOy , и, наоборот, каждой точке плоскости xOy соответствует одно и только одно комплексное число. В таком случае говорят, что множество комплексных чисел и множество точек М плоскости xOy находятся во взаимноодно-значном соответствии.

Если на плоскости xOy построить вектор $O\vec{M} = \vec{r}$ (рис. 1), то его длина $|\vec{r}|$ есть модуль комплексного числа.

$$|\vec{r}| = |O\vec{M}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол φ, который вектор $\vec{r}$ образует с осью ОХ, называется аргументом комплексного числа Z.

Из ΔOMN (рис. 1):

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тогда

$z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа.

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно; если φ_0 - одно из его значений, то все его значения выражаются формулой

$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in z$.

Все значения аргумента в совокупности обозначаются символом $Arg\ z$.

Итак, всякому комплексному числу может быть поставлена в соответствие пара действительных чисел - модуль и аргумент данного числа, причем аргумент определяется неоднозначно. Напротив, заданным модулю $|z| = r$ и аргументу φ соответствует единственное число z, имеющее данные модуль и аргумент. Особыми свойствами обладает число нуль: его модуль равен нулю, аргумент не имеет никакого определенного значения.

Для достижения однозначности в определении аргумента комплексного числа можно условиться одно из значений аргумента называть главным. Его обозначают символом $\arg z$. Обычно в качестве главного значения аргумента выбирает значение, удовлетворяющее неравенству

$0 \le \arg z < 2\pi$

Обратим внимание на значения аргумента действительных и чисто мнимых чисел:

$$\arg a = \begin{cases} 0, \text{если } a > 0, \\ \pi, \text{если } \alpha < 0; \end{cases}$$

$$\arg bi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, \ \text{если } b > 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, \text{если b} < 0. \end{cases}$$

Действительная и мнимая части комплексного числа $z = a + bi$ как декартовы координаты точки выражаются через его модуль и аргумент по формулам

$$a = r\cos\varphi,\ \ b = r\sin\varphi, \quad (1)$$

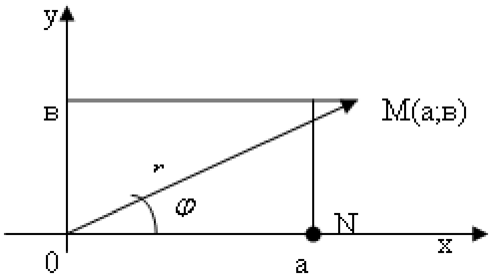
Комплексное число может быть записано в следующей тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Запись числа в виде $z = a + bi$ будем называть записью в алгебраической форме.

Условие равенства двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Два числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы равны или отличаются на целое число периодов 2π.



(рис. 3)

Переход от записи числа в алгебраической форме к его записи в тригонометрической форме и обратно совершается по следующим формулам:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, tg\varphi = \frac{b}{a}$$

(см. рис.3)

и формулам (1). При определении аргумента (его главного значения) можно пользоваться значением одной из тригонометрических функций $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$ и учитывать знак второй функции.

Пример. Записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

а) $6-6i$; б) $3i$; в) -10.

Решение. а) Имеем

$$r=\sqrt{6^2+(-6)^2}=6\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi=-\frac{6}{6\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $\varphi=7\pi/4$, и, следовательно,

$$6-6i=6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right);$$

б) $r=3,\ \cos\varphi=0,\ \sin\varphi=1,\ \varphi=\pi/2$;

$$3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

в) $r=10,\ \cos\varphi=-1,\ \sin\varphi=0,\ \varphi=\pi$;

$$-10=10(\cos\pi+i\sin\pi).$$

4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Тригонометрическая форма комплексного числа удобна для того, чтобы находить произведение и частное комплексных чисел, возводить в степень и извлекать корни.

Найдем произведение двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Получаем

$$z_1z_2=r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right]$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, можно упростить с помощью известных формул теорем сложения тригонометрических функций:

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2),$$

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \qquad (2)$$

Для умножения чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули надо перемножить, а аргументы сложить.

Это правило остается верным для любого количества сомножителей.

Пример. Найти произведение чисел

$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos 25^0 + i\sin 25^0\right),\ z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos 35^0 + i\sin 35^0\right).$

Решение.

$$z_1 z_2 = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}\left[\cos(25^0 + 35^0) + i\sin(25^0 + 35^0)\right] =$$
$$= 2\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Так как деление – действие, обратное умножению, то действует следующее правило:

Для выполнения деления двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, следует их модули разделить, а аргументы вычесть:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Пример. Найти частное от деления числа

$z_1 = 6\left(\cos 110^0 + i\sin 110^0\right)$ на число $z_2 = 2\left(\cos 80^0 + i\sin 80^0\right)$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Используем равенство (2) для возведения комплексного числа $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ в натуральную степень n:

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \qquad (3)$$

Равенство (3) называется формулой Муавра. Из нее следует правило:

Для возведения комплексного числа в любую натуральную степень его модуль нужно возвести в эту степень, а аргумент умножить на показатель степени.

Пример 3. Вычислить $\left[3\left(\cos 43^0 + i\sin 43^0\right)\right]^5$.

Решение. В соответствии с формулой Муавра (3)

$$\left[3\left(\cos 43^0 + i\sin 43^0\right)\right]^5 = 243\left(\cos 215^0 + i\sin 215^0\right).$$

Если число z задано а алгебраической форме a+bi, то для возведения его в степень с помощью формулы Муавра надо предварительно записать его в тригонометрической форме.

Рассмотрим задачу извлечения корня натуральной степени n из произвольного комплексного (в частности, действительного) числа z; при этом будем искать все возможные значения корня, действительные и комплексные.

Покажем, что корень n-й степени из комплексного числа имеет n значений.

Найдем $\sqrt[n]{z}$, где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Пусть $\sqrt[n]{z} = p(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. По определению

$$[p(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

$$p^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

По условию равенства

$$p^n = r,\ \ p = \sqrt[n]{r},\ \ n\alpha = \varphi + 2\pi\kappa,\ \ \kappa = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Для $k = 0$, 1, 2,…, $(n-1)$ получим n значений α и n значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Для $k \geq n$ получим повторение n значений для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, так как, начиная с $k = n$, значения α отличаются от значений α при $k = 0$, 1, 2,…, $(n-1)$ на 2π (2π - основной период функции синуса и косинуса).

Например,

$k = 0$, $\alpha_1 = \dfrac{\varphi}{n}$;

$k = n,$ $\alpha_{n+1} = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi$;

$\sin\alpha_1 = \sin\dfrac{\varphi}{n}$;

$$\sin\alpha_{n+1} = sim\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) = \sin(\alpha_1 + 2\pi) = \sin\alpha_1.$$

Таким образом, корень n-й степени имеет n различных значений на множестве комплексных чисел.

Этот результат можно при- менить для решения ных уравнений вида $x^n + a = 0$, где а – любое комплексное число. Это уравнение имеет n корней на множестве комплексных чисел.

5. Решение двучленных и трехчленных уравнений

Уравнение вида $ax^n + b = 0$, $a \neq 0$, называется двучленным.

Двучленное уравнение можно привести к виду $x^n + \frac{b}{a} = 0$.

Пусть $\left|\frac{b}{a}\right| = q$, получим $x^n \pm q = 0$. Введем новую переменную $x = y\sqrt[n]{q}$. Получим $\left(y\sqrt[n]{q}\right)^n \pm q = 0$; $y^n q \pm q = 0$; $y^n \pm 1 = 0$. Решение двучленных уравнений проводится к решению уравнений вида $y^n \pm 1 = 0$.

Если $n = 3$, то уравнение имеет вид $y^3 \pm 1 = 0$. Разложим левую часть уравнений $y^3 \pm 1 = 0$ на множители:

1) $y^3 + 1 = 0$, $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$.

Решение этого уравнения имеет вид:

а) $y + 1 = 0$, $y_1 = -1$

б) $y^2 - y + 1 = 0$; $y_{2,3} = \frac{+2 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$$S = \left\{-1;\ +\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2};\ +\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

2) $y^3 - 1 = 0$. Решение этого уравнения имеет вид:

$(y-1)(y^2 + y + 1) = 0$, $y_1 = 1$, $y_{2,3} = \frac{+1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$$S = \left\{1;\ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Если n=4, то $y^4 \pm 1 = 0$. Для решения этого уравнения разложим левую часть уравнений $y^4 \pm 1 = 0$ на множители:

3) $y^4 + 1 = 0$

$y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 = 0$

$(y^2 + 1)^2 - 2y^2 = 0$

$(y^2 + 1 - y\sqrt{2})(y^2 + 1 + y\sqrt{2}) = 0$

а) $y^2 - y\sqrt{2} + 1 = 0$, $y_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$;

б) $y^2 + y\sqrt{2} + 1 = 0$, $y_{3,4} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$. Отсюда

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Если n=6, то $y^6 \pm 1 = 0$. Для решения уравнения разложим левую часть уравнений $y^6 \pm 1 = 0$ на множители:

4. $y^6 + 1 = 0$; $(y^2)^3 + 1 = 0$; $(y^2 + 1)(y^4 - y^2 + 1) = 0$;

а) $y^2 + 1 = 0$; $y_{1,2} = \pm i$;

б) $y^4 - y^2 + 1 = 0$, $y^4 + 2y^2 + 1 - 3y^2 = 0$;

$(y^2 + 1)^2 - (y\sqrt{3})^2 = 0$; $(y^2 + 1 - y\sqrt{3})(y^2 + 1 + y\sqrt{3}) = 0$;

$y^2 - y\sqrt{3} + 1 = 0$, $y_{3,4} = \dfrac{\sqrt{3} \pm i}{2}$; $y^2 + y\sqrt{3} + 1 = 0$,

$y_{5,6} = \dfrac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$. Отсюда

$$S = \left\{ i; -i; \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right\}.$$

Пример. Решить уравнение: $2x^6 + 5 = 0$.

Решение. Разделив уравнение почленно на 2, получим

$x^6 + \dfrac{5}{2} = 0$. Пусть $x = \sqrt[6]{\dfrac{5}{2}}y$. Тогда $\left(\sqrt[6]{\dfrac{5}{2}}y\right)^6 + \dfrac{5}{2} = 0$;
$\dfrac{5}{2}y^6 + \dfrac{5}{2} = 0$, $y^6 + 1 = 0$. Это уравнение имеет следующие решения: $y_{1,2} = \pm i$, $y_{3,4,5,6} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$. Найдем

$$x = \sqrt[6]{\frac{5}{2}}y = \sqrt[6]{2{,}5}y$$.

Ответ.

$$S = \left\{-i\sqrt[6]{2{,}5};\ i\sqrt[6]{2{,}5};\ \sqrt[6]{2{,}5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right);\ \sqrt[6]{2{,}5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right); \sqrt[6]{2{,}5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right\}$$

Упражнения

1. Выполнить действия:

а) $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$; б) $\dfrac{4+i}{2-i} + \dfrac{5-3i}{3+i}$;
в) $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$; г) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i} - \dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

2. Построить на плоскости точки соответствующие следующим комплексным числам: а) $3+2i$; б) 3; в) $2+4i$; г) $3i$; д) $-1+2i$; е) -4; ж) $-2-3i$; з) $-4i$.

3. Записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

а) $2+2i$; б) $2-2i$; в) $6i$; г) -5; д) $-\sqrt{3}+i$; е) $-2i$;
ж) $1-\sqrt{3}i$; з) $\sin 48^0 + i\cos 48^0$; и) $\cos 111^0 - i\sin 111^0$.

4. Выполнить следующие действия:

а) $2(\cos 12^0 + i\sin 12^0)\cdot 4(\cos 37^0 + i\sin 37^0)$;

б) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)\cdot 5\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$;

в) $6\left(\cos 19^0 + i\sin 19^0\right)\cdot 8\left(\cos 31^0 + i\sin 31^0\right)\times \frac{1}{24}\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)$

5. Вычислить:

а) $\left[3\left(\cos 11^0 + i\sin 11^0\right)\right]^3$; б) $\left[\sqrt[10]{2}\,\left(\cos 9^0 + i\sin 9^0\right)\right]^5$;

в) $\left[\sqrt[5]{3}\,\left(\cos 6^0 + i\sin 6^0\right)\right]^{30}$; г) $\left(-2+2i\right)^4$; д) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}$;

е) $\left(1+i\right)^{20}$; ж) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^{8}$.

6. Решить уравнения:

а) $3x^3+1=0$; б) $y^4-1=0$; в) $2x^4+7=0$; г) $y^6-1=0$;

д) $x^5-243=0$; е) $4x^5-3=0$.