ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Естественные науки»

Учебное пособие для иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ

МАТЕМАТИКА НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Авторы: Дудукалова Д.С.,
Игнатова О.А.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ, обучающихся в группах экономической, инженерно-технической и технологической, естественнонаучной направленности, при изучении дисциплины «Математика».

Учебное пособие содержит учебный материал по теме «Неравенства и системы неравенств», соответствует уровню подготовки иностранных слушателей предвузовского этапа обучения, содержит большое число решений заданий, а также упражнения для самостоятельной работы обучающихся.

Рекомендуется для самостоятельной работы иностранных слушателей при изучении темы «Неравенства и системы неравенств».

Авторы:

Игнатова О.А. – к.т.н., доцент кафедры «Естественные науки»
Дудукалова Д.С. –преподаватель кафедры «Естественные науки»

Оглавление

1. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Метод интервалов решения неравенств основан на следующем алгоритме:

Решаем уравнение $f(x) = 0$ и находим нули функции (если $f(x)$ — дробно-рациональная, то находим нули числителя и нули знаменателя).

Отмечаем полученные значения на числовой оси нули. Нули знаменателя всегда выколотые точки, нули числителя выколотые, если неравенство строгое; закрашенные, если неравенство нестрогое.

Полученные точки разбивают числовую ось на интервалы. В каждом интервале определяем знак функции $f(x)$.

Если при переходе через закрашенную точку знак не меняется, то эта точка (если она не находится внутри промежутка решения) является изолированной точкой-решением.

2. ВИДЫ НЕРАВЕНСТВ И ИХ РЕШЕНИЕ

2.1. Линейные неравенства

Неравенство – это два алгебраических выражения, которые соединяются знаками <, >, ≤, ≥.

Решить неравенство f (x)> (<) g(x) - это значит найти все числа x, для которых числовое неравенство f(a)> (<) g(a) будет верным, или доказать, что таких чисел нет.

Линейное неравенство – это неравенство вида $ax + b > (<)0$ или $ax + b \geq (\leq)0,\ \ a \neq 0$.

a - коэффициент, b - свободный член, x –неизвестная.

Решение линейного неравенства:

1) если $a > 0$, то $x > (<) -\frac{b}{a}$;

2) если $a < 0$, то $x < (>)\frac{b}{a}$

Например:

Решить неравенство $\frac{7}{4}x + 7 < 0$

$\frac{7}{4} > 0$, то $x < -7 * \frac{4}{7}, x < -4$

Решить неравенство $-4x \geq 3$

$-4 < 0, \text{то } x \leq -\frac{3}{4}$

2.2. Квадратные неравенства

Квадратное неравенство - это неравенство вида
$$ax^2 + bx + c > 0$$
a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член, x -неизвестная, $(a \neq 0)$.
Правило:
Если трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет отрицательный дискриминант, то если подставить любое значение x, знак трехчлена будет такой же, как знак коэффициента a.

Примеры решения квадратного неравенства

Квадратные неравенства можно **решать путем построения графиков или построения интервалов.**

Примеры.

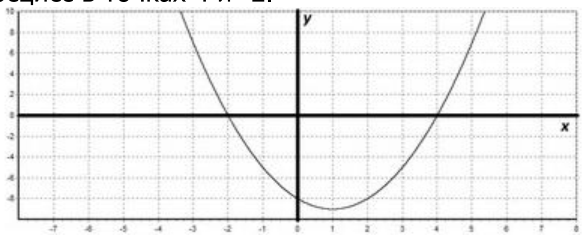
1. Решить неравенство: $x^2 - 2x - 8 < 0$

Решение:

Найдем корни уравнения $x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_1 = 4$ и $x_2 = -2$

Построим график квадратного трехчлена. График пересекает ось абсцисс в точках 4 и -2.



Квадратный трехчлен принимает значения меньше нуля там, где график функции расположен ниже оси абсцисс.

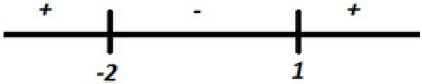
График функции показывает, что $x^2 - 2x - 8 < 0$ при $-2 < x < 4$

Ответ: $-2 < x < 4$.

2. Решить неравенство: $x^2 + x - 2 < 0$

Решение:

Найдем корни квадратного трехчлена и расположим их на координатной прямой: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$



Если $x > 1$ и $x < -2$,то квадратный трехчлен положительный.

Если $x > -2$ и $x < 1$, то квадратный трехчлен отрицательный, следовательно, эти интервалы является решением неравенства.

Ответ: $x > -2$ и $x < 1$

2.3. Целые рациональные неравенства

Рациональное неравенство — это неравенство, которое можно свести к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} V 0$,

где P(x), Q(x) — многочлены. (∨ — один из знаков ⩾, ⩽, >, <) Например, следующие неравенства являются рациональными:

$$\frac{1}{x+1} \geq 0; \; x + 2 + \frac{x-1}{x+3} < 1; \; x^2 + x - 2 \leq 0$$

2.4. Дробно-рациональные неравенства

Основной способ решения рациональных неравенств

Перенести все ненулевые элементы левую сторону от знака неравенства.

Привести все дроби к общему знаменателю (если таких дробей несколько), привести подобные члены, затем разложить числитель и знаменатель на множители, если это возможно. В результате мы получим неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)} V 0$, где «V» — знак неравенства.

Приравнять числитель к нулю: P(x)=0. Решаем это уравнение и получаем корни $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Находим значения x, при которых дробь не имеет смысла. Для этого решаем уравнение Q(x)=0, и получаем корни $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots$

Отмечаем все эти корни (и со звёздочками, и без звёздочек) на числовой прямой, причём корни без звёздочек закрашиваем, а со звёздочками - нет.

Расставляем знаки «плюс» и «минус», выбираем те интервалы, которые нам нужны. Если неравенство имеет вид $f(x) > 0$, то в ответ пишем интервалы со знаком «плюс». Если $f(x) < 0$, пишем интервалы со знаком «минус».

Например: Решить неравенство $\frac{(7x+1)(11x+2)}{13x-4} \geq 0$

Решение. Это нестрогое неравенство вида $f(x) \geq 0$. Все ненулевые элементы находятся слева, разных знаменателей нет. Переходим к уравнениям.

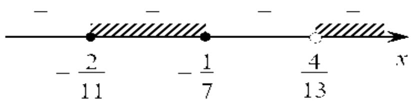
Числитель:

$$(7x+1)(11x+2) = 0$$
$$7x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{7}$$
$$11x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{2}{11}$$

Знаменатель:

$$13x - 4 = 0$$
$$x^* = \frac{4}{13}$$

Отмечаем все три корня на числовой прямой:



Ответ: $x \in \left[-\frac{2}{11}; -\frac{1}{7}\right] \cup \left(\frac{4}{13}; +\infty\right)$

2.5. Неравенства с модулем

Неравенства вида «Модуль меньше функции»

Требуется решить неравенство вида: $|f| < g$

В роли функций f и g может выступать любое выражение, но обычно это многочлены.

Примеры таких неравенств: $|2x+3| < x+7$;

$$|x^2 + 2x - 3| + 3(x+3) > 0.$$

Такие неравенства надо решать по схеме:

$$|f| < g \rightarrow -g < f < g \qquad \left(\rightarrow \begin{cases} f < g \\ f > -g \end{cases}\right)$$

Алгоритм решения неравенств $|f| < g$:

1.Изолировать модуль в левой части неравенства, для этого перенести все другие слагаемые в правую часть неравенства. В результате мы получим неравенство вида $|f| < g$.

2.Выполнить действия по схеме.

3.Найти пересечения решений двух полученных неравенств.

Например: 1. Решите неравенство: $|2x+3| < x+7$

Решение: $\begin{cases} 2x+3 < x+7 \\ 2x+3 > -(x+7) \end{cases}$

$\begin{cases} x < 4 \\ 3x > -10 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 4 \\ x > -\frac{10}{3} \end{cases}$

Ответ: $x \in (-\frac{10}{3}; 4)$

Неравенства вида «Модуль больше функции»

Требуется решить неравенство вида: $|\mathrm{f}| > \mathrm{g}$

Такие неравенства надо решать по схеме:

$$|\mathrm{f}| > \mathrm{g} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{f} > \mathrm{g} \\ \mathrm{f} < -\mathrm{g} \end{array}\right.$$

В этом случае неравенства объединяются квадратной скобкой, то есть мы решаем совокупность двух неравенств.

Обратите внимание ещё раз: перед нами не система, а совокупность, поэтому в ответе мы пишем объединение, а не пересечение множеств.

Например: Решите неравенство: $|3x+1| > 5-4x$

$$|3x+1| > 5-4x \rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1 > 5-4x \\ 3x+1 < -(5-4x) \end{array}\right.$$

Решаем каждое неравенство совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 3x+4x > 4 \\ 3x-4x < -5-1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x > 4 \\ -x < -6 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x > \frac{4}{7} \\ x > 6 \end{array}\right.$$

Отмечаем каждое полученное множество на числовой прямой, а затем объединяем их

Ответ. $x \in (\frac{4}{7}; +\infty)$

Неравенства вида: $|\boldsymbol{f}| > |\boldsymbol{g}|$
$(|f|)^2 = f^2$ – применяем возведение в квадрат модуля числа.
Например: Решите неравенство: $|x+2| \geq |1-2x|$
Возводим обе части неравенства в квадрат:

$$(|x+2|)^2 \geq (|1-2x|)^2$$
$$(x+2)^2 \geq (2x-1)^2$$

Используем свойство чётности модуля:

$$(2x-1)^2 - (x+2)^2 \leq 0$$
$$((2x-1)-(x+2)) \times ((2x-1)+(x+2)) \leq 0$$
$$(2x-1-x-2) \times (2x-1+x+2) \leq 0$$
$$(x-3) \times (3x+1) \leq 0$$

Решаем неравенство методом интервалов.
Переходим от неравенства к уравнению:

$$(x-3) \times (3x+1) = 0$$
$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Ответ. $x \in \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

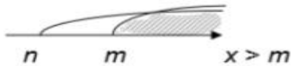
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ – ЭТО СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ ВИДА

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1 x + b_1 > 0} \\ \boldsymbol{a_2 x + b_2 > 0} \end{cases}$$

РЕШИТЬ СИСТЕМУ НЕРАВЕНСТВ **– ЭТО ЗНАЧИТ НАЙТИ ВСЕ ЧИСЛА, КОТОРЫЕ ЯВЛЯЮТСЯ РЕШЕНИЕМ КАЖДОГО НЕРАВЕНСТВА, ИЛИ ДОКАЗАТЬ, ЧТО ТАКИХ ЧИСЕЛ НЕ СУЩЕСТВУЕТ.**

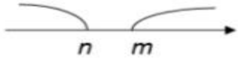
Возможны следующие случаи решения. Пусть $m > n$.

1) $\begin{cases} x > m \\ x > n \end{cases}$,



Ответ: $x \in (m; +\infty)$.

2) $\begin{cases} x > m \\ x < n \end{cases}$,

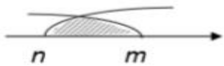


Ответ: $x \in \varnothing$.

3) $\begin{cases} x < m \\ x < n \end{cases}$,

Ответ: $x \in (-\infty; n)$.

4) $\begin{cases} x < m \\ x > n \end{cases}$,



Ответ: $x \in (n; m)$.

4. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решить неравенство:

Линейные неравенства:

$$5(14x - 2) + \frac{1}{4}(12 - 4x) \geq 3$$

$$7(3x - 1) + \frac{1}{3}(6x - 12) \leq 3$$

$$(x + 2)^2 + (x - 4)^2 \geq 2x^2$$

$$(x - 6)^2 - (5 - x)^2 < 3$$

$$4(2 - 3x) > 7 - 5x$$

Квадратные неравенства:

$$x^2 - 11x + 30 < 0$$

$$2x + 15 \geq x^2$$

$$3x^2 + 4x + 3 < 0$$

$$4x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$(x - 4)(2x + 3) > 0$$

$$x(2x - 3) < -2$$

$$7x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$2x^2-18<0$$
$$16x^2-24x+9>0$$

Дробно-рациональные неравенства:

1) $\frac{2x+3}{x^2+2x}-\frac{1-14x}{x^2-2x}+\frac{54}{(2-x)^2}\le 0$

2) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\ge\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

3) $\frac{3x+5}{x^3-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3-2x}{x^2-1}>0$

4) $\frac{(x^2+2x+2)(25-10x+x^2)}{(x-5)(17x^2+16)}\le 0$

5) $(\frac{x^2}{8}+\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{x})(1-x-\frac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2})\ge 0$

Неравенства с модулем:

$$|2x+3|<x+7$$
$$|x^2+5x|<6$$
$$|x^2-x-1|<x+2$$
$$|x^2+2x-3|>x$$
$$|x^2-x-6|>x+3$$
$$|2x^2-9x+15|\ge 20$$
$$|13-2x|\ge|4x-9|$$
$$|x^2-8x+15|\le|15-x^2|$$
$$|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|$$

2. Решить системы неравенств:

$$\begin{cases}5x+6\le x\\3x+12\le x+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}6+6{,}2x\ge 12-1{,}8x\\2-x\ge 3{,}5-2x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{3}<2\\\frac{13x-1}{2}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5x+8}{3}-x\ge 2x\\1-\frac{6-15x}{4}\ge x\end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - \dfrac{x-1}{3} \geq x \\ \dfrac{7x-1}{8} \geq 6 \end{cases}$$