ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

Математика. Элементы линейной алгебры

методические указания для иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ

по дисциплине

«Математика»

Автор
Игнатова О.А.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Методические указания «Математика. Элементы линейной алгебры» предназначены для иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ дневной формы обучения экономической направленности.

Автор

доцент, к.т.н.,
доцент.
кафедра «Естественные науки»
Игнатова О.А.

Оглавление

МАТРИЦЫ

Определение 1

Матрица – это система $m\ n$ чисел, записанных в виде таблиц из m строк и n столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы А.

m х n - размер матрицы А.

Если $m=n$, матрица называется квадратной.

Если все элементы матрицы $a_{ij}=0$, то матрица называется нуль – матрицей.

Матрица Е называется единичной, если

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами:

1. Сложение матриц

Суммой матриц А и В размера m х n называется матрица С размера m х n, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц А и В.

Пример 1

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -5 & 6\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 7\\ 3 & 1 & 5\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы А размера m x n на число k называется матрица С размера m x n, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы А на число k.

Пример 2

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix};\quad k=2$$

$$A=k\cdot A=\begin{pmatrix}-6 & 8 & 10 & 2\\ 4 & -2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц

Произведением матрицы А размера m x p на матрицу В размера p x n называется матрица С размера m x n, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j – того столбца матрицы B.

$$\underline{AB \neq BA}$$

Пример 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) & 1\cdot(-4) + 2\cdot 5 + 1\cdot 2 & 1\cdot 5 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 4\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 4\cdot(-4) + 0\cdot 5 + 2\cdot 2 & 4\cdot 5 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & -12 & 20 \end{pmatrix};$$

Для решения систем линейных уравнений с числом уравнений больше или равным 3 применяется метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = d_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = d_2 & (2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = d_3 & (3) \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}u = d_4 & (4) \end{cases}$$

Выполняем следующие действия:

1. Делим уравнение (1) на a_{11}.
2. Умножаем полученное в пункте 1. уравнение на a_{21} и вычитаем из уравнения (2).
3. Умножаем полученное в пункте 1. уравнение на a_{31} и вычитаем из уравнения (3).
4. Умножаем полученное в пункте 1. уравнение на a_{41} и вычитаем из уравнения (4).

Теперь система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x + в_{12}y + в_{13}z + в_{14}u = f_1 & (5) \\ \quad в_{22}y + в_{23}z + в_{24}u = f_2 & (6) \\ \quad в_{32}y + в_{33}z + в_{34}u = f_3 & (7) \\ \quad в_{42}y + в_{43}z + в_{44}u = f_4 & (8) \end{cases}$$

Затем повторяем действия для уравнений (6), (7), (8).

В результате получим следующий вид системы уравнений:

$$\begin{cases} x + в_{12}y + в_{13}z + в_{14}u = f_1 \\ y + c_{23}z + c_{24}u = p_2 \\ z + c_{34}u = p_3 \\ u = p_4 \end{cases}$$

Пример 4

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = d_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad C_1 \ \text{x} \ C_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_2 \ -2C_1 \\ C_3 \ -4C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -C_2 \\ C_3 \ -5C_2 \end{array} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right) -\frac{1}{11}C_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 4z = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Используем метод подставки и получаем:

$z = 2; \quad y = 3; \quad x = -1$

Ответ: (-1; 3; 27

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Любой квадратной матрице А порядка *n* x *n* можно поставить в соответствие число, которое называется определителем (детерминантом) *n* – ного порядка.

Пусть *n* =2 , тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определение 2

Определитель второго порядка – это число Δ_2, которое находится по формуле:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пусть *n* =3 , тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 3

Определитель третьего порядка – это число Δ_3, которое находится по формуле:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Существуют и другие формулы для вычисления Δ_3.

Определение 4

Минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя III порядка – это определитель II порядка, который получится, если из определителя III порядка вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец.

Например. $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определение 5

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для определителя Δ_3:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Таким образом,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Можно доказать, что определитель III порядка может быть аналогично разложен по элементам любой строки или столбца.

Определение 6

Определитель III порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример 5

Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 3\cdot(-2-0) + 2\cdot(4-6) + 1\cdot(0-2) = -6-4-2 = -12$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = в_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = в_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = в_3, \end{cases}$$

тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - главный определитель

системы;

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} & a_{13} \\ в_2 & a_{22} & a_{23} \\ в_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_Y = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 & a_{13} \\ a_{21} & в_2 & a_{23} \\ a_{31} & в_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & в_3 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z$ - вспомогательные определители системы.

Решение системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}, \qquad \Delta \neq 0 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} \end{cases}$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Пример 6

Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(5-21) - 2\cdot(-3-6) + 1\cdot(21+10) = 1(-16) - 2(-9) + 1\cdot 31 =$$

$$= -16+18+31 = 33$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(5-21) - 2\cdot(-1-24) + 1\cdot(7+40) = 33$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1-24) - 4\cdot(-3-6) + 1\cdot(24-2) = 33$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-40 - 7) - 2 \cdot (24 - 2) + 4 \cdot (21 + 10) = 33$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1; \; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: (1; 1;1)

Задания для самостоятельной работы

1. Найти сумму матриц А и В, если:

$$a)\; A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 11 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ -8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$б)\; A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 & 3 \\ 7 & -4 & 5 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Найти произведение матрицы А на число k, если:

$$а)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -8 \end{pmatrix},\ k=\frac{1}{2}$$

$$б)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -7 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ k=-3$$

3. Найти произведение матриц A·B, если:

$$а)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$б)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$а)\ \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ 2x-y+z=-3 \\ x+3y-3z=2 \end{cases}\qquad б)\ \begin{cases} 3x+y-z=3 \\ x-2y+z=-1 \\ 4x-y+z=4 \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} 4x-2y+z=8 \\ x+y-3z=-6 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}\qquad г)\ \begin{cases} 2x+y+5z=5 \\ x-y-3z=-6 \\ 3x+z=-2 \end{cases}$$

5. Решить систему уравнений по формулам

Крамера:

$$a)\ \begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} x+y-z=36 \\ x+z-y=13 \\ y+z-x=7 \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases} \qquad г)\ \begin{cases} x+y+z=36 \\ 2x-3y=-17 \\ 6x-5z=7 \end{cases}$$