ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по математике

для студентов-иностранцев предвузовского этапа обучения

«Планиметрия»

раздел 2

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Методические указания включают учебный материал по первой части геометрии-планиметрии, соответствующий уровню подготовки иностранных обучающихся предвузовского этапа обучения. В методические указания включены контрольные вопросы, аудиторные и домашние задания, упражнения и задачи по основным темам планиметрии.

Составители

канд. техн. наук, доц. Игнатова О.А.

канд. техн. наук, доц. Полисмаков А.И.

ст. преп. Соломатина Н.В.

ст. преп. Ковалева Т.Г.

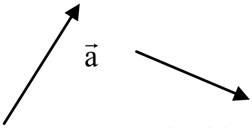
Оглавление

ЗАНЯТИЕ 4.

Тема 9. Скалярное произведение векторов.

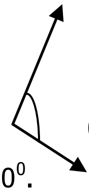
1.Читайте текст.

Угол между двумя любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ -это угол между соответственно равными им векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими общее начало.



$\vec{a}_1 = \vec{a}$

$\vec{b}_1 = \vec{b}$



Угол между двумя векторами не может быть больше 180^0.

$$0^0 \le a \le 180^0 \qquad \text{или} \qquad \alpha \in \left[0^0;180^0\right]$$

Определение 1.

Скалярное произведение двух векторов - это произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними.

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2$ (свойство скалярного квадрата)
2. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$ (свойство коммутативности)
3. $\left(k\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = k\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (свойство скалярного множителя)
4. $((\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2)\cdot\vec{b}) = \left(\vec{a}_1\vec{b}\right) \pm \left(\vec{a}_2\vec{b}\right)$
5. если $\left|\vec{a}\right| \ne 0$ и $\left|\vec{b}\right| \ne 0$, $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = 0, \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Докажем свойство 5.

Доказательство:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a};\hat{\ }\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a};\hat{\ }\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a;\hat{\ }\vec{b}\right) = 90^0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Задача:

$\left|\vec{a}\right| = 5$; $\left|\vec{b}\right| = 4$; $(\vec{a};\hat{\ }\vec{b}) = 60^0$

Вычислить $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$

Решение:

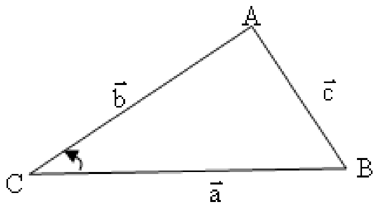
По свойствам 1, 2, 3, 4 можно написать:

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+4\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)-2\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=$$

$$=2\left|\vec{a}\right|^2+3\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-2\left|\vec{b}\right|^2=2\cdot5^2+3\cdot5\cdot4\cos60^0-2\cdot4^2=48.$$

С помощью скалярного произведения векторов можно доказать важные теоремы.

Теорема косинусов



В любом Δ ABC квадрат длины одной стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos\angle C$$

Доказательство:

Пусть Δ ABC образован векторами:

$$\vec{a}=\vec{CB},\vec{b}=\vec{CA},\vec{c}=\vec{AB}\ \ (\left|\vec{a}\right|=a;\left|\vec{b}\right|=b;\left|\vec{c}\right|=c),$$

тогда

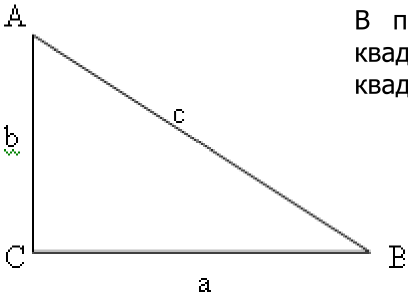
$$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}\Rightarrow(\vec{c})^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\Rightarrow\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle C\Rightarrow c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$$

Теорема доказана.

Из теоремы косинусов следует теорема Пифагора.

Теорема Пифагора.



В прямоугольном треугольнике Δ ABC квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Доказательство:

Теорема Пифагора следует из теоремы косинусов, если угол $\angle$C=90^0,тогда cos$\angle$C=0 и $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \angle C$, значит $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема доказана.

Ответьте на вопросы:

1. Как найти угол между двумя любыми векторами?
2. Докажите свойства 1,2 и 3 с помощью определения скалярного произведения.
3. Чему равен по теореме косинусов квадрат стороны CB (CB=a) любого треугольника Δ ABC ?
4. Можно ли доказать теорему Пифагора, не зная теорему косинусов?

Тема 10. Решение треугольников. Признак равенства треугольников. Подобные треугольники.

1.Читайте текст.

Решить треугольник - это значит найти все его неизвестные элементы (углы и стороны) по данным известным элементам. Решить треугольник можно, если знать три элемента (за исключением трёх углов).

Например, знаем две стороны и один угол. Чтобы решить треугольник, применяют:

1. Теорему о сумме углов треугольника.
2. Теорему Пифагора (если треугольник прямоугольный)
3. Теорему косинусов.
4. Теорему синусов.

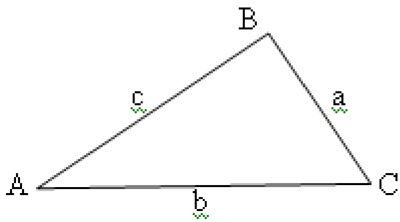
Теорема синусов.

В любом треугольнике Δ ABC: $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{b}{\sin\angle B}=\dfrac{c}{\sin\angle C}$

Доказательство: смотрите занятие 7.

Задача.

В треугольнике ABC даны: a=4см, $\angle B=30^0$, $\angle C=120^0$.
Найти все неизвестные элементы треугольника ABC.



Решение:

1) $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ $\quad\angle A=180^0-\angle B-\angle C=180^0-30^0-120^0$

2) по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}\Rightarrow\frac{4}{\sin 30^0}=\frac{b}{\sin 30^0}\Rightarrow b=4\text{см}$$

3) по теореме косинусов:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C=16+16-32\cos120^0=32-32(-\cos60^0)=32+16=48\text{см}^2$, значит c= 48см$^2 \Rightarrow c=\sqrt{48} \Rightarrow c=4\sqrt{3}$см

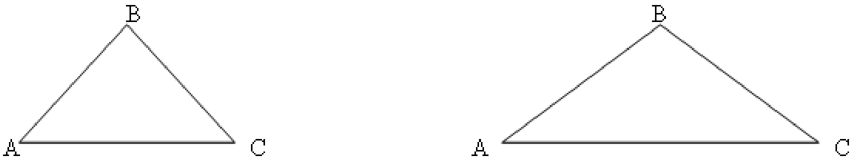
Ответ: $\angle$A=30^0; b=4см; c=4$\sqrt{3}$ см.

Признак равенства треугольников.

Если два треугольника имеют по три соответственно равных элемента (но не три угла), то эти треугольники равны.

Определение 2.

Два треугольника называются подобными, если они имеют по три соответственно равных угла или если их стороны соответственно пропорциональны.



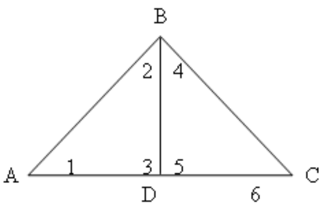
$$\Delta ABC \approx \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \begin{cases} \angle A = \angle A_1 \\ \angle B = \angle B_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = k$$

k-коэффициент подобия.(Если k=1,то треугольники равны).

Задача.

Найти высоту BD прямоугольного треугольника ABC, если даны:

$\angle$B=90^0; |AD|=16 см; |DC|=9см



Решение: Обозначим углы, как на чертеже. Имеем:

1. $\angle 3=\angle 5=90^0$,так как BD-высота.
2. $\left.\begin{array}{l}\angle 1+\angle 2=90^0 \\ \angle 1+\angle 6=90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 2=\angle 6$
3. $\left.\begin{array}{l}\angle 1+\angle 6=90^0 \\ \angle 4+\angle 6=90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 1=\angle 4$
4. Δ ABC~Δ BDC,так как их углы соответственно равны.

Противоположные этим равным углам стороны пропорциональны.

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|BD|}{|DC|} \Rightarrow |BD|^2 = |AD| \cdot |DC| \Rightarrow |BD| = \sqrt{16 \cdot 9} \Rightarrow |BD| = 12\text{см}$$

2. Ответьте на вопросы:

1. Можно ли решить прямоугольный треугольник, если известны его катеты?

Какие теоремы нужно применить?

2. Как читается признак равенства треугольников?

3. Какие треугольники называются подобными?

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1.Запомните новые слова и выражения: скалярное произведение, коммута-тивность, теорема Пифагора, решить треугольник, подобные треугольники,

соответственно пропорциональны, подобие.

2.Читайте тексты (тема 9,10),запомните определения.

3.Найдите произведение $(\vec{a}\cdot 3\vec{b})(2\vec{a}-3\vec{b})$,если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

4.Докажите, что любая точка, которая принадлежит биссектрисе угла, находится на равном расстоянии от сторон угла.

5.Найдите все неизвестные элементы треугольника ABC, если |BC|=4см,

$\angle$B=30^0, $\angle$C=120^0.

6.В треугольнике ABC проведён отрезок MN||AC.Найдите |MN|,если | AC|=9см,

|AM|=2см,|AB|=6см.

8.Решить треугольник ABC, если: $\angle$A=80^0; a=16; b=10.