



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по математике

«Планиметрия»

Раздел 1

Автор

Игнатова О.А.

Полисмаков А.И.

Соломатина Н.В.

Ковалева Т.Г.

Ростов-на-Дону, 2013



Аннотация

Методические указания по математике предназначены для студентов-иностранцев предвузовского этапа обучения.

Автор

Кандидат технических наук, доцент Игнатова О.А.

Кандидат технических наук, доцент Полисмаков А.И.

Старший преподаватель Соломатина Н.В.

Старший преподаватель Ковалева Т.Г.





Оглавление

Занятие 1.....	4
ТЕМА 1. Геометрические фигуры	4
ТЕМА 2. Измерение отрезков и углов.....	5
ТЕМА 3. Взаимное расположение прямых на плоскости...	6
Занятие 2.....	8
ТЕМА 4. Определения, аксиомы, теоремы.....	8
ТЕМА 5. Свойства углов при пересечении двух параллельных прямых третьей.....	9
ТЕМА 6 . Операции с векторами.	10
Занятие 3.....	15
ТЕМА 7. Треугольники, их виды и свойства.	15
ТЕМА 8. Основные линии в треугольнике	17








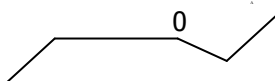
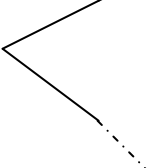
ЗАНЯТИЕ 1

ТЕМА 1. Геометрические фигуры

1. Читайте текст, обратите внимание на новые слова. Постарайтесь понять содержание текста.

Геометрия изучает свойства геометрических фигур. Первая часть геометрии - планиметрия. Она изучает свойства геометрических фигур на плоскости. Геометрическая фигура - это множество точек плоскости или пространства. Геометрические фигуры - это модели реальных объектов.

Примеры:

1.  Это точка А.
2.  Это прямая а.
3.  Это луч (полупрямая) [OB].
O- начало луча.
4.  Это отрезок [AB]. Отрезок-это часть прямой, которая ограничена двумя точками.
5.  Это вектор CD. Вектор -это отрезок, который имеет направление.
6.  Это ломаная MNOPR. Она состоит из отрезков MN, NO, OP, PR.
7.  Это угол AOB. Угол образуют два луча [OA] и [OB], которые имеют общее начало-точку O.

2. Ответьте на вопросы:

1. Что изучает геометрия?
2. Что изучает планиметрия?

3. Что такое геометрическая фигура?
4. Какие геометрические фигуры Вы знаете?
5. Изобразите отрезок, вектор, ломаную, угол.

ТЕМА 2. Измерение отрезков и углов

1. Читайте текст, найдите в тексте ответы на вопрос, как измеряются отрезки и углы.

Отрезки измеряются в единицах длины. Основная единица длины – это 1 метр (1м). Любой отрезок АВ имеет длину $|AB| > 0$, если А и В - различные точки. Длина любого отрезка АВ равна длине отрезка ВА, $|AB| = |BA|$. Чтобы измерить длину отрезка или линии, применяются и другие единицы длины: 1 дециметр (10дм=1м); 1сантиметр (100 см=1м); 1 миллиметр (1000мм=1м).

Величина угла измеряется в единицах угловой меры:

1 градус (1°); 1 радиан (1рад); 1минута ($60' = 1^{\circ}$); 1 секунда ($60'' = 1'$).

Примеры:

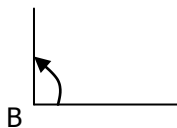
1.



Это развёрнутый угол. Величина развёрнутого угла равна:

$$\alpha = 180^{\circ} = \pi \text{ рад.} \approx 3.14 \text{ рад.}$$

2.



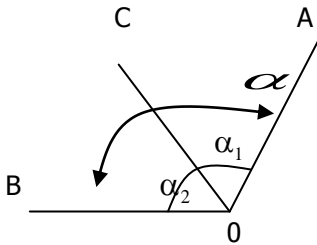
Это прямой угол. Величина прямого угла равна:

$$\beta = 90^{\circ} = \pi/2 \text{ рад.} \approx 1.57 \text{ рад.}$$

$$1 \text{ рад.} \approx \frac{180^{\circ}}{3,14} \approx 57^{\circ}17'$$

Можно вычислить:

$$1^{\circ} \approx \frac{3,14}{180^{\circ}} \approx 0,017 \text{ рад.}$$



Лучи, которые образуют угол-это стороны угла (ОА, ОВ). Общее начало лучей - это вершина угла (точка О). Углы равны, если равны их величины ($\alpha_1 = \alpha_2$, поэтому $\angle AOC = \angle COB$).

Луч [OC), который делит угол на два равных угла - это биссектриса угла.

Если угол α меньше 90° ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), то это острый угол.

Если угол α больше 90° ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), то это тупой угол.

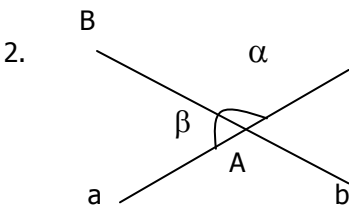
2. Ответьте на вопросы:

1. Какие единицы длины Вы знаете?
2. Какую длину имеет отрезок AA?
3. Какую длину имеет отрезок АВ, если $|BA| = 3\text{см}$?
4. Какие единицы угловой меры Вы знаете?
5. Какую величину имеет развёрнутый угол, прямой угол?
6. Что такое биссектриса угла?
7. Что такое острый угол, тупой угол?

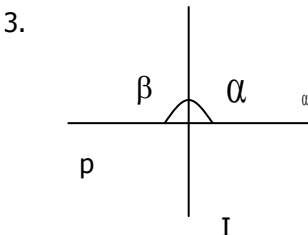
ТЕМА 3. Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Читайте текст, найдите в тексте ответ на вопрос: "Как могут располагаться прямые на плоскости?"

1. $\begin{array}{c} m \\ \text{-----} \\ n \\ \text{-----} \end{array}$ Прямые m и n параллельны. Они не имеют общей точки и лежат в одной плоскости. ($m \parallel n$)



Прямые a и b пересекаются, если они имеют одну общую точку A . Точка A - это точка пересечения прямых $(a \cap b)$. Углы α и β - это смежные углы. Они имеют одну общую сторону $[AB)$. Сумма смежных углов равна 180° .



Прямые I и p пересекаются и образуют равные смежные углы. ($\alpha = \beta = 90^\circ$). Эти прямые перпендикулярны ($I \perp p$). Читаем: прямая I перпендикулярна прямой p , или прямые I и p взаимно перпендикулярны.

2. Ответьте на вопросы:

1. Какие прямые параллельны?
2. Какие прямые пересекаются?
3. Какие прямые перпендикулярны?
4. Что такое смежные углы?

Домашнее задание

1. Запомните слова и словосочетания: геометрия, геометрическая фигура, планиметрия, точка, прямая, плоскость, луч, отрезок, вектор, ломаная, угол, единица длины, единица угловой меры, измерить, градус, радиан, биссектриса, сторона угла, вершина угла, смежные углы, прямые параллельны, прямые перпендикулярны, прямые пересекаются, развернутый угол, прямой угол.

2. Читайте темы: тема 1, тема 2, тема 3. Напишите ответы на вопросы занятия.

3. Вычислите величину этих углов: $\pi/4$ рад; $\pi/6$ рад; 2π рад

ЗАНЯТИЕ 2

ТЕМА 4. Определения, аксиомы, теоремы.

1. Читайте текст.

В математическом тексте можно встретить различные математические предложения: определения, аксиомы, теоремы и другие.

Определение - это предложение, которое объясняет новое понятие. Например:

Определение 1.

Два несмежных угла, которые образуются при пересечении двух прямых линий, называются вертикальными углами.

Аксиома - это предложение, которое не доказывают, но считают правильным.

Например:

Аксиома 1.

Через две различные точки можно провести только одну прямую.

Теорема - это предложение, которое состоит из двух частей:

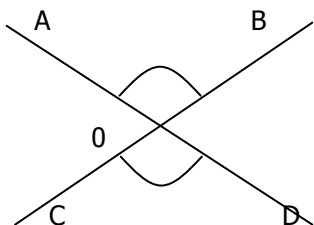
A - условие, B - заключение. Доказать теорему – это дать логическое объяснение, почему из A следует B.

Например:

Теорема 1.

Если $\angle AOB$ и $\angle COD$ - вертикальные углы, то они равны ($\angle AOB = \angle COD$).

Доказательство:



1) $\angle AOB$ и $\angle BOD$ - смежные углы, поэтому $\angle AOB + \angle BOD = 180^\circ$;

2) $\angle BOD$ и $\angle COD$ - смежные углы, поэтому $\angle COD + \angle BOD = 180^\circ$.

3) $\angle AOB = 180^\circ - \angle BOD$
 $\angle COD = 180^\circ - \angle BOD$. Отсюда следует, что $\angle AOB = \angle COD$

Теорема доказана.

В геометрии все математические предложения говорят о свойствах геометрических фигур. Содержание геометрии зависит



от системы основных понятий и аксиом.

Например:

Аксиома Евклида о параллельных.

Через точку, которая не принадлежит данной прямой, можно провести только одну прямую, которая параллельна данной прямой.

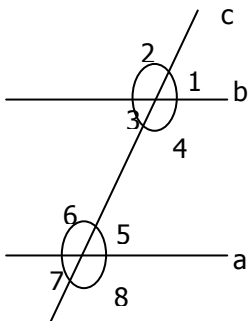
Эта аксиома характеризует геометрию Евклида. Другие варианты этой аксиомы характеризуют геометрию Лобачевского и Римана. Мы изучаем геометрию Евклида, которой уже 2500 лет. (Евклид -3 в. до н.э.)

2. Ответьте на вопросы:

1. Какие математические предложения Вы знаете?
2. Что такое определение?
3. Что такое аксиома?
4. Что такое теорема?
5. Приведите примеры: а) определения;
б) аксиомы;
в) теоремы.
6. В теореме 1 найдите условие, заключение.
7. Как читается теорема Евклида?

ТЕМА 5. Свойства углов при пересечении двух параллельных прямых третьей.

1. Читайте текст, постарайтесь понять главную информацию и ответить на вопросы после текста.



Если две параллельные прямые пересекает третья, то образуется восемь углов, которые обозначены на чертеже цифрами. Можно доказать следующие свойства:

1. Все острые углы равны:
 $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$.
2. Все тупые углы равны: $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8$.

3. Сумма любого острого и тупого угла

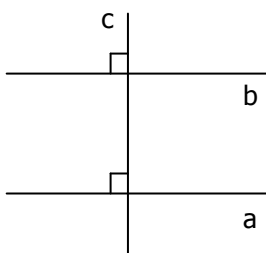


Теория менеджмента: теория организации

равна 180° .

Углы $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ называются накрест лежащими.

Если две любые прямые a и b пересекает третья прямая c и выполняется одно из этих свойств, то $a \parallel b$.



Если $a \parallel b$ и $c \perp a$, то $c \perp b$ и все углы, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой c , равны 90° .

Через любую точку плоскости можно провести только одну прямую, которая перпендикулярна данной прямой

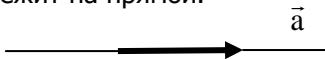
2. Ответьте на вопросы:

1. Почему $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 5 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 4$?
2. Почему $\angle 1 + \angle 4 = 180^{\circ}$, $\angle 6 + \angle 5 = 180^{\circ}$?
3. Если $\angle 1 = \angle 5$, то можно сказать, что $a \parallel b$?
4. Сколько перпендикулярных прямых можно провести к прямой a через точку A , которая принадлежит a ?

ТЕМА 6 . Операции с векторами.

1. Читайте текст.

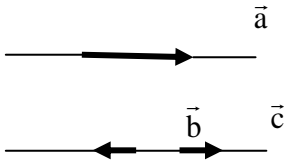
Вектор характеризуется длиной и направлением. Любой вектор лежит на прямой.



Определение 2.

Если векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то они коллинеарные.

Пример:



Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - коллинеарные.

Векторы \vec{a} и \vec{c} - одинаково направлены (сонаправлены).
 $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$.

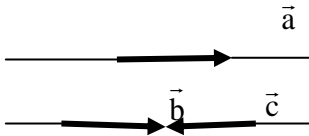
Векторы \vec{a} и \vec{b} - противоположно направлены. ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$).

Модуль вектора $|\vec{a}|$ - это его длина.

Определение 3.

Векторы равны, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют равные модули.

Пример:



Векторы \vec{a} и \vec{b} равны: $\vec{a} = \vec{b}$,
 но $\vec{a} \neq \vec{c}$ и $\vec{b} \neq \vec{c}$.

Определение 4.

Произведение вектора \vec{a} на число k - это вектор $k\vec{a}$, коллинеарный вектору \vec{a} , такой, что:

- 1) $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$
- 2) $\vec{a} \uparrow \uparrow k\vec{a}$, если $k > 0$
- 3) $\vec{a} \uparrow \downarrow k\vec{a}$, если $k < 0$
- 4) $k\vec{a} = \vec{0}$, если $k = 0$

Нуль-вектор $\vec{0}$ - это вектор, коллинеарный любому вектору. $|\vec{0}| = 0$.

Векторы \vec{a} и $-\vec{a}$ - противоположные векторы.

Признак коллинеарности векторов.

Если существует число k , такое, что $\vec{a} = k\vec{b}$, то \vec{a} и \vec{b} - коллинеарные векторы.

Любой ненулевой вектор имеет начало и конец.



Точка A - начало ; точка B - конец вектора \vec{AB} .

Можно написать: $\vec{a} = \vec{AB}$.

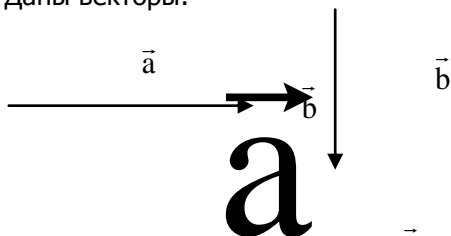
Противоположный вектор: $-\vec{a} = \vec{BA}$.

Правило результирующего вектора.

Чтобы найти алгебраическую сумму векторов, нужно построить ломаную из слагаемых векторов и найти их результирующий вектор.

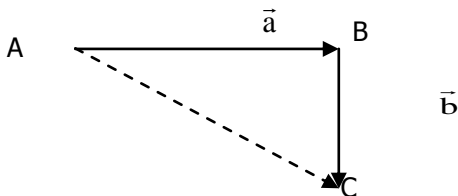
Пример:

Даны векторы:



Чтобы построить вектор $\vec{a} + \vec{b}$, построим вектор $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, где A - любая точка плоскости. Точку B возьмем как точку начала вектора $\vec{BC} = \vec{b}$.

Получим ломаную ABC :

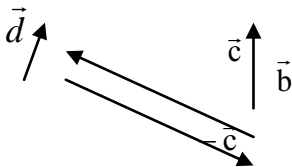


Теория менеджмента: теория организации

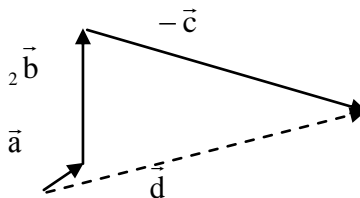
Результирующий вектор \vec{AC} - это сумма векторов $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{BC}$, то есть:

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} \text{ (правило треугольника).}$$

Задача. Построить вектор $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, если



Решение: (.) A - начало ломаной, любая точка плоскости,
(.) B - конец ломаной, \vec{AB} - результирующий вектор.



2. Ответьте на вопросы:

1. Какие векторы называются коллинеарными?
2. Какие векторы называются равными?
3. Что такое модуль вектора?
4. Какой признак коллинеарности Вы знаете?
5. Какие векторы называются противоположными?

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Запомните слова и выражения: определение, аксиома, теорема, условие, заключение, доказать теорему, доказательство, вертикальные углы, коллинеарные векторы, противоположные векторы, признак коллинеарности, правило, результирующий вектор.

2. Читайте тексты: темы 4, 5, 6.
3. Постройте векторы:



Теория менеджмента: теория организации

а) $\vec{a} - \vec{b}$,

б) $-\vec{a} + 2\vec{b}$,

в) $3\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2\text{см}$, $|\vec{b}| = 3\text{см}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$,

4. Запомните все определения, аксиомы и доказательство теоремы 1.

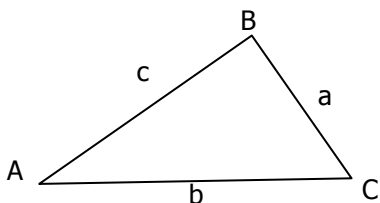
ЗАНЯТИЕ 3

ТЕМА 7. Треугольники, их виды и свойства.

1. Читайте текст.

Определение 1.

Треугольник - это замкнутая ломаная, состоящая из трёх отрезков.



Точки A, B, C - вершины треугольника.

Отрезки AB, BC, AC - стороны $\triangle ABC$. Если $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$, то $P=a+b+c$ - это периметр $\triangle ABC$.

Треугольник имеет три внутренних угла:

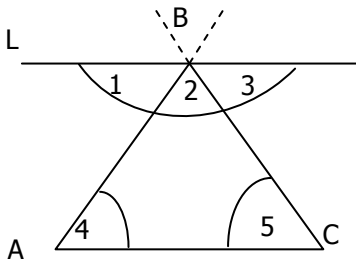
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Стороны и углы треугольника - это его элементы.

Определение 2.

Два треугольника равны, если соответственно равны все их элементы.

Теорема 1.

Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180° .



Доказательство:

Через (.) B проведём прямую $L \parallel AC$. Прямая AB пересекает L и AC и образуются острые углы $\angle 1$ и $\angle 4$.

Из материала занятия 2 мы знаем, что $\angle 1 = \angle 4$. Прямая BC тоже пересекает L и AC и образуются углы: $\angle 3 = \angle 5$.

Имеем: $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, так как углы $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ образуют развёрнутый угол.

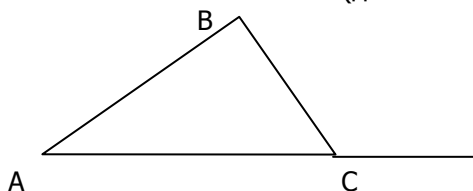
Теорема доказана.

Если продолжать любую сторону треугольника, то образуется внешний угол треугольника. Можно построить 6 внешних углов.

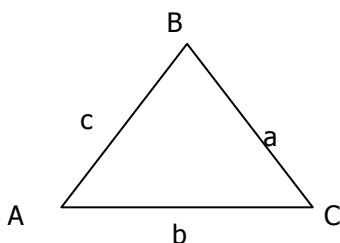
Теорема 2.

Любой внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

(доказать самостоятельно)

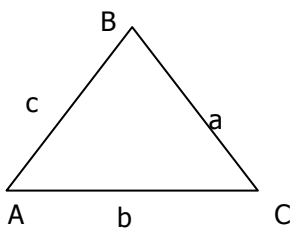


Существуют разные виды треугольников:

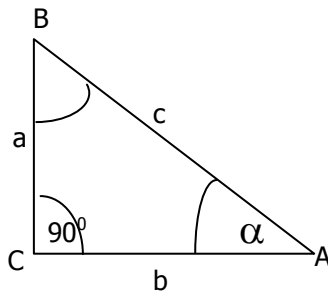


1. Равносторонний треугольник - это треугольник, у которого все стороны - равные отрезки, а все углы равны.

($a=b=c$, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$)



2. Равнобедренный треугольник - это треугольник, у которого две стороны равны ($c=a$). Противоположные равным сторонам углы тоже равны ($\angle A = \angle C$). Сторона AC - это основание равнобедренного треугольника, AB и BC - боковые стороны.



3. Прямоугольный треугольник - это треугольник, у которого один угол равен 90° . Гипотенуза-сторона, противоположная этому углу. Другие стороны прямоугольного треугольника - это катеты. ($\angle C=90^\circ$, значит, AB - гипотенуза, BC и AC - катеты).

Отношения длин и сторон в прямоугольном ΔABC обозначаются так:

$$a/c = \sin \alpha (= \cos \beta) \qquad b/c = \cos \alpha (= \sin \beta)$$

$$a/b = \operatorname{tg} \alpha (= \operatorname{ctg} \beta) \qquad b/a = \operatorname{ctg} \alpha (= \operatorname{tg} \beta)$$

(*читайте:* синус альфа, косинус бета, тангенс альфа, котангенс бета)

2. Ответьте на вопросы:

1. Что такое треугольник?
2. Какие виды треугольников вы знаете?
3. Какие элементы треугольника вы знаете?
4. Какие треугольники равны?
5. Расскажите теорему о сумме внутренних углов треугольника.
6. Как обозначаются отношения длин сторон в прямоугольном ΔABC ?

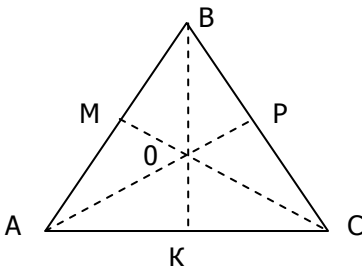
ТЕМА 8. Основные линии в треугольнике

1. Читайте текст.

Определение 3.

Биссектриса треугольника - это отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника между его вершиной и противоположной стороной.

AP - это биссектриса треугольника ABC , если $\angle BAP = \angle PAC$



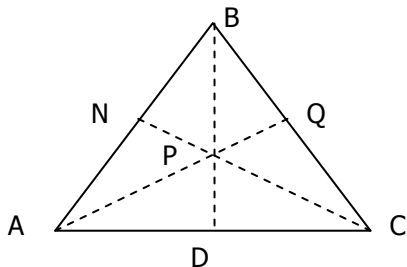
В любом ΔABC можно провести три биссектрисы (AP , BK ,

CM). Биссектрисы треугольника всегда пересекаются в одной точке внутри треугольника (точка O).

Определение 4.

Медиана треугольника - это отрезок между вершиной треугольника и серединой противоположной стороны.

BD - это медиана $\triangle ABC$, если $(|AD| = |DC|)$.



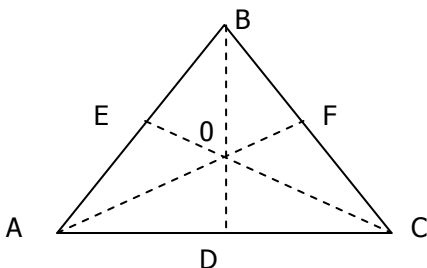
В любом $\triangle ABC$ можно провести три медианы (BD, AQ, CN). Медианы треугольника всегда пересекаются в одной точке, внутри треугольника (точка P), которая делит каждую медиану в отношении 2:1 от вершины.

$$\frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|BP|}{|PD|} = \frac{|CP|}{|PN|} = \frac{2}{1}.$$

Определение 5.

Высота треугольника - это отрезок перпендикуляра между вершиной треугольника и противоположной стороной или её продолжением.

BD, AF, CE-это высоты $\triangle ABC$.



Прямые, на которых лежат высоты треугольника, всегда пересекаются в одной точке. (внутри или вне треугольника)

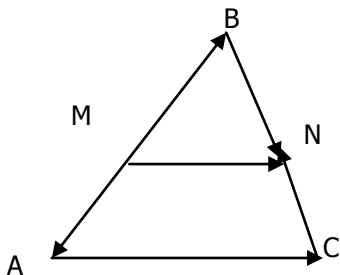
Определение 6.

Средняя линия треугольника - это отрезок между серединами двух сторон треугольника.

В любом треугольнике можно провести три средних линии.

Теорема 3.

(О средней линии треугольника)



Если MN-средняя линия ΔABC (точка M - середина стороны AB и точка N - середина стороны BC), то:

1. $MN \parallel AC$
2. $|MN| = \frac{1}{2} |AC|$

Доказательство:

На сторонах ΔABC построим векторы: \vec{MA} , \vec{MB} , \vec{BN} , \vec{CN} , \vec{AC} . По правилу результирующего вектора можно написать:

$$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BN}$$

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}$$

$$2\vec{MN} = (\vec{MA} + \vec{MB}) + \vec{AC} + (\vec{BN} + \vec{CN})$$

Суммы векторов $\vec{MB} + \vec{MA}$ и $\vec{BN} + \vec{CN}$ равны нуль-вектору, потому что векторы \vec{MA} и \vec{MB} , \vec{BN} и \vec{CN} - противоположные векторы.

Следовательно, $\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{AC}$, значит:

1. \vec{MN} и \vec{AC} - коллинеарные векторы, следовательно, $MN \parallel AC$

$$2. |MN| = \frac{1}{2} |AC|$$

Теорема доказана

2. Ответьте на вопросы:



Теория менеджмента: теория организации

1. Какие основные линии можно провести в треугольнике?
2. Что такое биссектриса треугольника?
3. Что такое медиана треугольника?
4. Что такое высота треугольника?
5. Что называется средней линией треугольника?

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Запомните новые слова и выражения: замкнутая ломаная, треугольник, вершина треугольника, сторона, периметр, внутренний угол, элемент треугольника, соответственно равны, внешний угол, равносторонний, равнобедренный, прямоугольный, гипотенуза, катет, синус, косинус, тангенс, котангенс, медиана, высота, средняя линия, середина.

2. Читайте тексты (темы 7, 8), ответьте на вопросы.

3. Запомните определения и доказательства теорем 1 и 3.

4. Докажите теорему 2.

5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике, у которого один угол равен 30° , противоположный этому углу катет равен половине гипотенузы

6. Докажите, что в равностороннем треугольнике любая биссектриса - это одновременно высота и медиана.

7. Доказать, что срединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка равноудалена от вершин треугольника.

8. Решите задачи:

а) В треугольнике ABC угол $\angle A=60^\circ$, угол $\angle B=20^\circ$. Найти величину третьего угла.

б) В треугольнике MNK угол $\angle M=55^\circ$. Найти величину угла $\angle NML$, где ML-продолжение MK.

в) В треугольнике ABC угол $\angle B=25^\circ$, $\angle C=84^\circ$. Найти величину внешнего угла $\angle BAK$.