ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

Методические указания по математике

«Матрицы. Определители. Решение систем линейных уравнений с применением матриц и определителей»

Автор

О.А. Игнатова

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Методические указания составлены для студентов-иностранцев и содержат базовый теоретический материал по разделу «Матрица и определители», а также практическое его приложение для решения систем линейных уравнений и задания для самостоятельной работы.

Автор

к.т.н., доц. О. А. Игнатова;

Оглавление

Матрицы **4**
Определение 1 4
Пример 1 5
Пример 2 5
Пример 3 6
Пример 4 7
Определители **8**
Определение 2 8
Определение 3 8
Определение 4 9
Определение 5 9
Определение 6 10
Пример 5 10
Пример 6 11
Задания для самостоятельной работы **12**

Матрицы

Определение 1

Матрица – это система $m \ n$ чисел, записанных в виде таблиц из m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы А.

mxn - размер матрицы А.

Если $m = n$, матрица называется квадратной.

Если все элементы матрицы $a_{ij} = 0$, то матрица называется нуль – матрицей.

Матрица Е называется единичной, если

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами:

1. Сложение матриц

Суммой матриц А и В размера mxnназывается матрица С размера mxn, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц А и В.

Пример 1

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -5 & 6\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 7\\ 3 & 1 & 5\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

1. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы А размера *m*x *n* на число k называется матрица С размера *m*x *n*, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы А на число k.

Пример 2

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix};\ k=2$$

$$A=k\cdot A=\begin{pmatrix}-6 & 8 & 10 & 2\\ 4 & -2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

2. Умножение матриц

Произведением матрицы А размера *m*x *p*на матрицу В размера *p*x *n* называется матрица С размера

*m*x *n*, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы А на соответствующие элементы j – того столбца матрицы В.

$$\underline{AB\neq BA}$$

Пример 3

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 1 & 5 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 1 & 5 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 1+1\cdot(-2) & 1\cdot(-4)+2\cdot 5+1\cdot 2 & 1\cdot 5+2\cdot 1+1\cdot 0\\ 4\cdot 3+0\cdot 1+2\cdot(-2) & 4\cdot(-4)+0\cdot 5+2\cdot 2 & 4\cdot 5+0\cdot 1+2\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 8 & 7\\ 8 & -12 & 20\end{pmatrix};$$

Для решения систем линейных уравнений с числом уравнений больше или равным 3 применяется метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}u=d_1 & (1)\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}u=d_2 & (2)\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}u=d_3 & (3)\\ a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}u=d_4 & (4)\end{cases}$$

Выполняем следующие действия:

1. Делим уравнение (1) на a_{11}.
2. Умножаем полученное в пункте 1. уравнение на a_{21} и вычитаем из уравнения (2).
3. Умножаем полученное в пункте 1. уравнение на a_{31} и вычитаем из уравнения (3).
4. Умножаем полученное в пункте 1. уравнение на a_{41} и вычитаем из уравнения (4).

Теперь система уравнений имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
x + в_{12}y + в_{13}z + в_{14}u = f_1 & (5) \\
в_{22}y + в_{23}z + в_{24}u = f_2 & (6) \\
в_{32}y + в_{33}z + в_{34}u = f_3 & (7) \\
в_{42}y + в_{43}z + в_{44}u = f_4 & (8)
\end{cases}
$$

Затем повторяем действия для уравнений (6), (7), (8).

В результате получим следующий вид системы уравнений:

$$
\begin{cases}
x + в_{12}y + в_{13}z + в_{14}u = f_1 \\
y + c_{23}z + c_{24}u = p_2 \\
z + c_{34}u = p_3 \\
u = p_4
\end{cases}
$$

Пример 4

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$
\begin{cases}
3x + 2y + z = 5 \\
x + y - z = 0 \\
4x - y + 5z = d_3
\end{cases}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim C_1 \times C_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_2 \sim -2C_1 \\ C_3 \; -4C_1 \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim -C_2 \\ C_3 \; -5C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right) -\frac{1}{11}C_3
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad y - 4z = -5 \\ \qquad z = 2 \end{cases}$$

Используем метод подставки и получаем:

$z = 2; \quad y = 3; \quad x = -1$

Ответ: (-1; 3; 2)

Определители

Любой квадратной матрице А порядка *n*x *n* можно поставить в соответствие число, которое называется определителем (детерминантом) *n* – ного порядка.

Пусть $n = 2$, тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определение 2

Определитель второго порядка – это число Δ_2, которое находится по формуле:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пусть $n = 3$, тогда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 3

Определитель третьего порядка – это число Δ_3, которое находится по формуле:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Существуют и другие формулы для вычисления Δ_3.

Определение 4

Минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя III порядка – это определитель II порядка, который получится, если из определителя III порядка вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец.

Например. $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определение 5

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для определителя Δ_3:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Таким образом,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Можно доказать, что определитель III порядка может быть аналогично разложен по элементам любой строки или столбца.

Определение 6

ОпределительIII порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример 5

Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-2-0) + 2\cdot(4-6) + 1\cdot(0-2) = -6-4-2 = -12$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = в_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = в_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = в_3, \end{cases}$$

тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ - главный определитель системы;

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} & a_{13} \\ в_2 & a_{22} & a_{23} \\ в_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_Y = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 & a_{13} \\ a_{21} & в_2 & a_{23} \\ a_{31} & в_3 & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & в_3 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z$ - вспомогательные определители системы.

Решение системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}, \qquad \Delta \neq 0 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} \end{cases}$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Пример 6

Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(5-21)-2\cdot(-3-6)+1\cdot(21+10)=1(-16)-2(-9)+1\cdot 31=$$

$$=-16+18+31=33$$

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(5-21)-2\cdot(-1-24)+1\cdot(7+40)=33$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1-24)-4\cdot(-3-6)+1\cdot(24-2)=33$$

$$\Delta_Z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-40-7)-2\cdot(24-2)+4\cdot(21+10)=33$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{33}{33}=1;\ \ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{33}{33}=1;\ \ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{33}{33}=1.$$

Ответ: (1; 1;1)

Задания для самостоятельной работы

1. Найти сумму матриц А и В, если:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 5\\ -2 & 4 & 11\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2 & -4 & 5\\ 0 & -1 & -3\\ -8 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$б)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 2 & 3\\ 7 & -4 & 5 & -10\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

2. Найти произведение матрицы А на число k, если:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -3 & 4 & 6\\ -1 & 2 & -8\end{pmatrix}\quad ,k=\frac{1}{2}$$

$$б)\ A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4 & 0\\ 5 & 6 & -7 & 5\\ -3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad ,k=-3$$

3. Найти произведение матриц А·В, если:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -5\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 7 & -1\end{pmatrix}$$

$$б)\ A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & -3 & 6\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 4 & 3\\ -1 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$а)\ \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = -3 \\ x + 3y - 3z = 2 \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = -1 \\ 4x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} 4x - 2y + z = 8 \\ x + y - 3z = -6 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases} \qquad г)\ \begin{cases} 2x + y + 5z = 5 \\ x - y - 3z = -6 \\ 3x + z = -2 \end{cases}$$

5. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$а)\ \begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} x + y - z = 36 \\ x + z - y = 13 \\ y + z - x = 7 \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases} \qquad г)\ \begin{cases} x + y + z = 36 \\ 2x - 3y = -17 \\ 6x - 5z = 7 \end{cases}$$