ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Социально-культурный сервис и туризм»

Методические указания по математике для студентов-иностранцев предвузовского этапа обучения

«Элементы аналитической геометрии»

Автор

Игнатова О.А.

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Методические указания включают учебный материал, адаптированный к уровню подготовки студентов-иностранцев предвузовского этапа обучения, содержат число примеров решений задач, а также задания для самостоятельной работы учащихся.

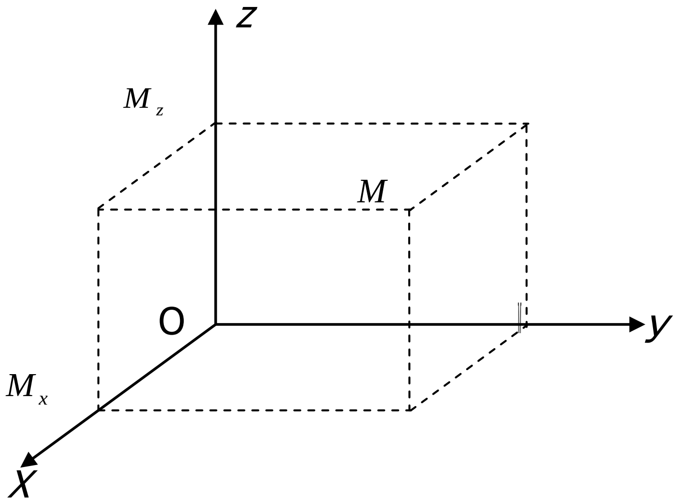
Автор

к.т.н., доц. Игнатова О.А.

Оглавление

Основные понятия

Три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом O и одинаковой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в пространстве (рис.1.):



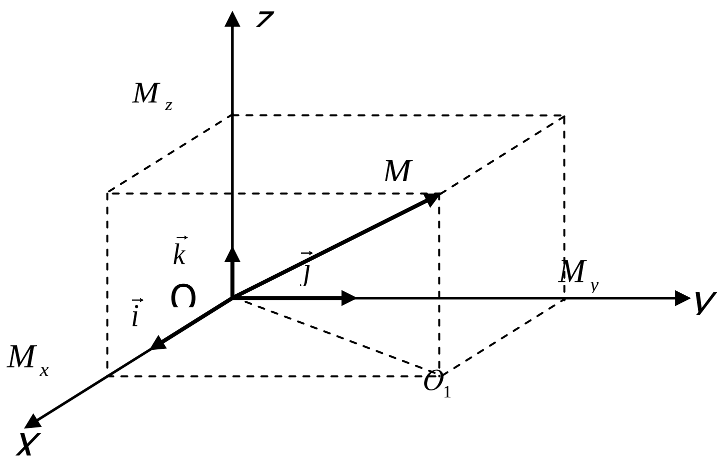
Ось *OX* называется осью абсцисс, ось *OY* – осью ординат, ось *OZ* – осью аппликат.

Пусть *M* – любая точка пространства, M_x, M_y, M_z – её проекции на координатные оси (рис.1)

Координатами точки M называются число $x=OM_x$, $y=OM_y$, $z=OM_z$.

Координаты *x*, *y*, *z* точки M называются соответственно ее абсциссой, ординатой и аппликатой.

Символ *M (x, y, z)* обозначает, что точка M имеет координаты *x, y, z* на рисунке 2.



Построим три вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направления которых совпадают с направлениями координатных осей *OX, OУ, OZ* соответственно, и длина каждого вектора равна единице, то есть $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$(рис.2).

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются ортами, единичными векторами, или прямоугольным базисом.

Любой точке пространства *M* можно поставить в соответствие вектор $\vec{OM}$.

Пусть точка O_1– проекция точки *M* на плоскость *x* о *y*

$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{OM}_z$, но $\vec{OO_1} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_z$,следовательно, $\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z$.

Так как векторы $\vec{OM}_x, \vec{OM}_y, \vec{OM}_z$, коллинеарны, то существуют такие три числа *x, y, z,* что выполняется равенство: $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$.

Это формула разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по координатным осям.

Числа *x, y, z* называются координатами вектора $\overrightarrow{OM}$.

Если *M* – любая точка пространства, то координаты точки *M* совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$; $M(x; y; z)$.

Действия над векторами, заданными координатами

1. Сложение и вычитание векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{в} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Напишем разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ по координатным осям:

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{в} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, тогда

$$\vec{a} + \vec{в} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{в} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$$

Таким образом, координаты суммы и разности векторов имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{в} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

$$\vec{a} - \vec{в} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$$

Правило 1.

Координаты суммы (разности) векторов равны сумме (разности) соответствующих координат.

Пример 1. $\vec{a} = \{2;1,-3\}$; $\vec{в} = \{-5,4,-1\}$.

$\vec{a} + \vec{в} = \{2-3;1+5;-3-4\}$; $\vec{a} - \vec{в} = \{2-(-5);1-4;-3-(-1)\}$

$\vec{a} + \vec{в} = \{-1;6;-7\}$; $\vec{a} - \vec{в} = \{7;-3;-2\}$.

2. Умножение вектора на число.

Пусть $\vec{a} = \{x;y,z\}$. $p \in R$, тогда $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $p\vec{a} = px\vec{i} + py\vec{j} + pz\vec{k}$, следовательно, вектор $p\vec{a}$, имеет координаты: $p\vec{a} = \{px; py; pz\}$

Правило 2.

Чтобы умножить вектор на число, надо каждую координату вектора умножить на это число.

Пример 2. $\vec{a} = \{5;-2,1\}$; $p = -3$

$p\vec{a} = \{-3 \cdot 5;-3 \cdot (-2);-3 \cdot 1\}$

$p\vec{a} = \{-15;6;-3\}$

3. Скалярное произведение векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{в} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Напишем разложение этих векторов по координатным осям: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{в} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, тогда

$$\vec{a}\vec{в} = x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{i}\vec{j} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{i}\vec{k} + z_1y_2\vec{j}\vec{k} + z_1z_2\vec{k}\vec{k}$$
.

Так как базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину получим: $\vec{i}\vec{i} = 1$; $\vec{i}\vec{j} = 0$; $\vec{i}\vec{k} = 0$; $\vec{j}\vec{j} = 1$; $\vec{j}\vec{k} = 0$; $\vec{k}\vec{k} = 1$, от куда имеем:

$$\vec{a}\vec{в} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Правило 3.

Если два вектора заданы координатами, то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

<u>Следствие:</u>

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{в} = \{x_2, y_2, z_2\}$ является равенства: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Пример 3. $\vec{a} = \{3, -2, -5\}$; $\vec{в} = \{1, -4, 3\}$.

$$\vec{a}\vec{в} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) + (-5) \cdot 3 = 3 + 8 - 15 = -4$$

Вычисление длины вектора $\vec{OM}$.

Пусть $\vec{OM}=\{x,y,z\}$ (см.рис.2). Найдем скалярное произведение $\vec{OM}\cdot\vec{OM}=\left|\vec{OM}\right|^2=x^2+y^2+z^2$, следовательно, $\left|\vec{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Пример 4. $\vec{OM}=\{2,7,-1\}$

$$\left|\vec{OM}\right|=\sqrt{2^2+7^2+(-1)^2}=\sqrt{4+49+1}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

Вычисление расстояния между двумя точками, заданными координатами

Пусть две точки заданы координатами: $M_1=(x_1,y_1,z_1)$, $M_2=(x_2,y_2,z_2)$. Определим расстояние $\left|M_1M_2\right|$.

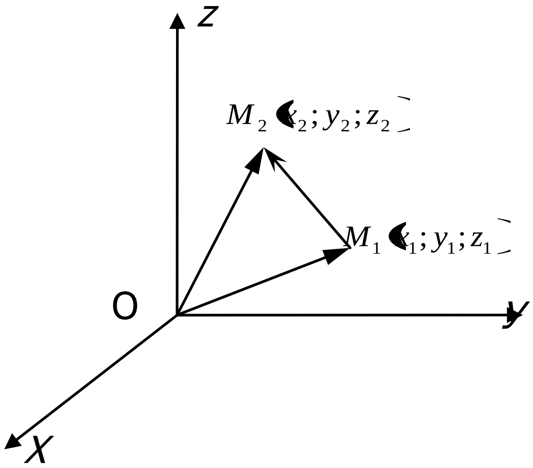


Рис.3

Точкам M_1 и M_2 поставим в соответствие векторы $\vec{OM_1} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{OM_2} = (x_2, y_2, z_2)$ соответственно, тогда $\vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1}$ (рис.3.)

Используем Правило 1 и вычисляем координаты вектора $\vec{M_1M_2}$:

$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, тогда

$$\left|\vec{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример 5. $M_1 = (-3,0,4)$, $M_2 = (1,-2,3)$

$$\left|\vec{M_1M_2}\right| = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}.$$

Вычисление угла между векторами, заданными координатами

Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$; $\vec{в} = (x_2, y_2, z_2)$. По определению скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{в})$, откуда

$\cos(\vec{a}, \vec{в}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{в}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{в}|}$, но $\vec{a} \cdot \vec{в} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \quad |\vec{в}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Таким образом, угол между векторами определяется по формуле:

$$\cos(\widehat{\vec a, \vec b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Пример 6. $\vec a = \{3,-4,0\}$ и $\vec b = \{5,2,-1\}$

$$\cos(\widehat{\vec a, \vec b}) = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot 2 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{15 - 8 + 0}{\sqrt{9 + 16 + 0} \cdot \sqrt{25 + 4 + 1}} = \frac{7}{5\sqrt{30}} = \frac{7\sqrt{30}}{150}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти координаты векторов $\vec a + \vec b$, $\vec a - \vec b$, если:

а) $\vec a = \{-5;3;-4\}$; $\vec b = \{-1;-3;0\}$

б) $\vec a = \{7;-2;-1\}$; $\vec b = \{7;-4;3\}$

в) $\vec a = \{5;0;-6\}$; $\vec b = \{-8;-4;3\}$

2. Найти координаты вектора $p\vec a$, если:

а) $\vec a = \{7;8,-3\}$; $p = -2$

б) $\vec a = \{-2,4,-1\}$; $p = \frac{1}{2}$

в); $\vec{a} = \{15,-2,6\}$ $p = -\dfrac{2}{3}$

3. Вычислить скалярное произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$,если:

а) $\vec{a} = \{3;-2;-3\}$; $\vec{в} = \{3;6;-1\}$

б) $\vec{a} = \{5;0;-1\}$; $\vec{в} = \{2;-2;7\}$

в) $\vec{a} = \{3;-5;4\}$; $\vec{в} = \left\{\dfrac{2}{3};-3;-2\right\}$

4. Вершины треугольника находятся в точках *А (1;4;2), В (3;2;6), С (-1;0;4)*. Найти координаты векторов $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$.

5. Даны точки *А (1; -2; -3), В (2; -3;0), С(3;1;-9), Д (-1;1;-12).*

Вычислить расстояние между: а) *А* и *С*, б) *В* и *Д*, в) *С* и Д.

6. Вычислить расстояния от начала координат *О* до точек А *(4;-2;-4), В (-4;12;6), С(12;-4;3), Д(12;16;-15).*

7. Доказать, что треугольник с вершинами *А (3;-1;6), В (-1;7;-2), С (1;-3;2)*, прямоугольный.

8. Вершины треугольника находятся в точках *А (2;-1;4), В (3;2;-6), С (-5;0;2)*.

Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины *А*.

9. Вершины треугольника находятся в точках *А (4;5;1), В (2;3;0),*

С (2;1;-1). Вычислить длину медианы *ВД.*

10. Вершины равнобедренного треугольника находятся в точках

А (2;3;1), В (1;3;3), С (2;4;3). Вычислить длину основания.

11. Найти, при каких значениях m длина вектора $\vec{a} = \{m;\sqrt{5};4\}$ больше 5.

12. Найти длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{в}$, если

а) $\vec{a} = \{3;1;0\}$, $\vec{в} = \{-1;1;-3\}$,

б) $\vec{a} = \{3;-2;1\}$, $\vec{в} = \{-2;4;-3\}$.

13. Даны две вершины *А (2; -3; -5), В (-1; 3; 2)* параллелограмма *АВСД*

и точка пересечения его диагоналей *Е (4; -1; 7).* Определить две

другие вершины параллелограммы.

14. Даны три вершины *А (3; -1; 2), В (1; 2; -4) и С (-1; 1; 2*)

параллелограмма АВСД. Найти его четвертую вершину *Д*.

15.Найти длины диагоналей параллелограмма *АВСД*, если *А (1; -3; 0),*

В (-2; 4; 1), С(-3; 1; 1).

16.Даны две координаты вектора $\vec{a}$: $x = 4, y = -12$. Определить его третью координату Z, если $|\vec{a}| = 13$.

17. Найти косинус угла между векторами:

а) $\vec{a} = \{1;2;3\}$ и $\vec{в} = \{3;1;5\}$

б) $\vec{c} = \{6;-3;4\}$ и $\vec{d} = \{2;-2;1\}$

в) $\vec{n} = \{2;-4;4\}$ и $\vec{m} = \{-3;2;6\}$

18. Определить перпендикулярны или нет векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CД}$, если

А (-1; 2; 4), В (-4; 5; 4), С (-1; -2; 2), Д (2; 1; 5).

19. Определить, при каких значениях m векторы $\vec{a} = \{3;7;5\}$ и $\vec{в} = \{m;4;1\}$

перпендикулярны.

20. Определить, перпендикулярны или нет диагонали четырехугольника, если его вершины находятся в точках:

а) *А (1; 2; 3), В (7; 3; 2), С (-3; 0; 6), Д (9; 2; 4)*

б) *А (2; -1; 0), В (-2; 3; 2), С (0; 0; -4), Д (1; -2; 3).*

21. Вершины треугольника находятся в точках *А(-1; 3; 2), В (3; 5; -2),*

С (3; 3; -1). Найти косинус угла $BA\hat{C}$.

22. Даны вершины треугольника *A (-1; -2; 4), B (-4; -2; 0)* и *C (3; -2; 1)*.

Определить его внутренний угол при вершине *B*.

23. Вершины треугольника находится в точках *A (3; -2; 1), B (3; 1; 5),*

C (4; 0; 3).

Вычислить: а) величину угла $\widehat{BAC}$; б) длину медианы AA_1.

24. Вершины треугольника находятся в точках *A (-1; 2; -1),*

B (-3; 1; 1),C (0; 4; -3).

Вычислить: а) величину угла $\widehat{A}$; б) площадь треугольника *ABC*.