ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Естественные науки»

Учебное пособие

по математике для студентов – иностранцев предвузовского этапа обучения

«Тригонометрия»

Авторы
Соломатина Н.В.
Ковалева Т.Г.

Ростов-на-Дону,

2012

Аннотация

Предназначено для иностранных граждан, обучающихся по программе предвузовской подготовки факультета «Международный».

Авторы

Старший преподаватель

Соломатина Н.В.

Старший преподаватель

Ковалева Т.Г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Пособие составлено в соответствии с требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки обучающихся факультетов и отделений предвузовской формы подготовки иностранных граждан (отраслевого стандарта), с программой высших учебных заведений технического профиля по математике.

В пособии содержатся структурированный учебный материал по тригонометрии, необходимые методы решения наиболее распространённых видов тригонометрических уравнений, словарь формул и банк упражнений для закрепления изучаемого материала.

Предлагаемые тексты адаптированы к уровню знаний студентов по научному стилю речи на соответствующем этапе обучения.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для любого угла α понятия $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ определены в курсе геометрии.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔABC, где AB – гипотенуза,

AC и BC – катеты.

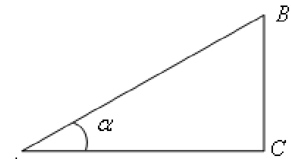


Рис.1

Пусть $\angle A = \alpha$.

Определение. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Косинус угла α обозначается так: cos α.

На рис 1: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$.

Определение. Синусом острого угла α (обозначается sin α) называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB (рис.1)

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

Определение. Тангенсом острого угла α (обозначается tg α) называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему AC (рис. 1)

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Косинус, синус и тангенс угла зависят только от градусной или радианной меры угла (от величины угла).

В геометрии рассматривают повороты отрезка OA около точки O на любой угол. Возьмем окружность с центром в точке O и радиусом $|OA| = 1$. При повороте около точки O на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB. Тогда: (см. рис. 2)

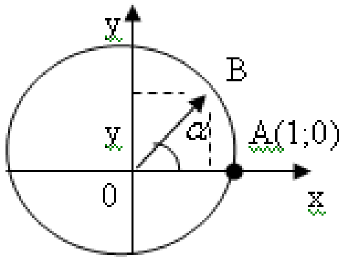


рис. 2

Абсцисса x точки B числовой единичной окружности называется косинусом угла α:

$$x = \cos\alpha$$

Ордината y точки B числовой единичной окружности называется синусом угла α:

$$y = \sin\alpha$$

Отношения синуса угла α к его косинусу называется тангенсом угла α:

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Отношение косинуса угла α к его синусу называется котангенсом угла α:

$$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Величина, обратная косинуса угла α, называется секансом угла α:

$$cec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Величина, обратная синусу угла α, называется косекансом угла α:

$$\cos ec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Теперь можно говорить о тригонометрических функциях произвольного угла x, таких как:

$y = \sin x;$

$y = \cos x;$

$y = tgx;$

$y = ctgx;$

$y = sekx;$

$y = \cos ecx.$

На основании определений решить задачу: для данного угла α в прямоугольной системе координата измерить $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$. Решение покажем на рисунке 3:

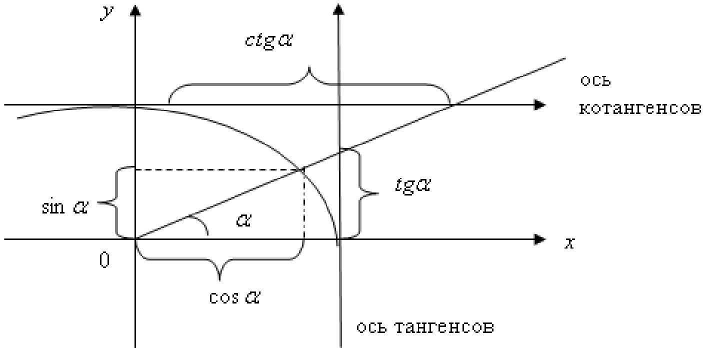


рис. 3

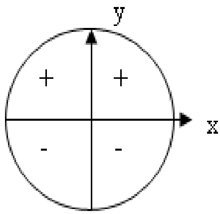
Упражнения для самостоятельного решения:

На прямоугольной системе координат показать

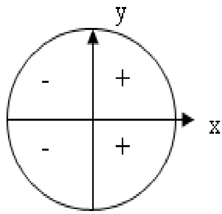
$\cos 30^0; \sin 120^0; tg45^0; ctg200^0; \cos 90^0; \sin 90^0; ctg270^0; tg180^0.$

<u>Знаки тригонометрических функций по четвертям.</u>

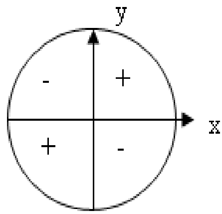
Из определений тригонометрический функций следует, что знак $\sin\alpha$ совпадает со знаком ординаты точки B, а знак $\cos\alpha$ совпадает со знаком абсциссы точки B. (рис. 4)



знаки синуса



знаки косинуса



знаки тангенса и котангенса

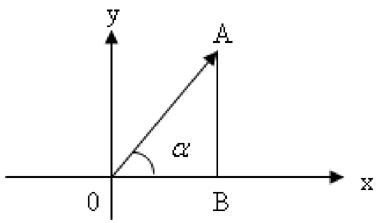
2. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Пусть $|\vec{OA}| = 1$. Построим $AB \perp OX$ и $\angle AOB = \alpha$. Тогда по теореме Пифагора:

$OB^2 + BA^2 = OA^2$, где $OB^2 = \sin^2 \alpha$;

$BA^2 = \cos^2 \alpha$;

$OA^2 = 1$



$$\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$$

$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$

$1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = tg\,\alpha}$$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\boxed{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = ctg\,\alpha}$$

если $\sin \alpha \neq 0$ $\alpha \neq \pi k$

$ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$

$$\boxed{tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1}$$

$tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha}$

если $\begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \pi k \end{cases}$

Разделим левую и правую части равенства (1) на $\cos^2\alpha \neq 0$ (на $\sin^2\alpha \neq 0$)

Получим:

$$\boxed{1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha}$$

$$\boxed{1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\cos ec^2\alpha}$$

Упражнения для самостоятельного решения: Упростить: (устно)

1. $\sin^2 5^0+\cos^2 5^0=$
2. $1-\cos^2 3\beta=$
3. $\sin^2(d-\beta)-1=$
4. $\cos^2(d-\beta)-tg\alpha\cdot ctg\alpha=$
5. $\sin^2 2\alpha-ctg\alpha\cdot tg\alpha=$

Упростить (самостоятельно):

1. $(\sin\beta+\cos\beta)^2-2\sin\beta\cos\beta=$
2. $\dfrac{\cos^2\alpha-2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha+(1+\sin\alpha)\cos\alpha}\cdot\dfrac{2(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha}=$

Доказать тождества:

1. $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=tg^2\alpha$
2. $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Найти значения:

$\cos\alpha, tg\alpha,$ если $\sin\alpha=-\dfrac{7}{25}$ и $\alpha\in\left]\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right[$

3. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

Функция	Аргумент α						
	0^0 / 0	30^0 / $\frac{\pi}{8}$	45^0 / $\frac{\pi}{4}$	60^0 / $\frac{\pi}{3}$	90^0 / $\frac{\pi}{2}$	180^0 / π	270^0 / $3\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Можно говорить о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе не только угла, но и числа, используя радианную меру угла:

$$1_{рад.} = \left(\frac{180^0}{\pi}\right) \approx 57^0, \quad 1^0 = \frac{\pi}{180}\,рад. \approx 0{,}017\,рад.$$

Например, $\sin 4 \approx \sin\left(4 \cdot 57^0\right) = \sin 228^0$,

$$\cos 225^0 = \cos\left(225 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}.$$

4. ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если при повороте вокруг точки 0 на угол X начальный радиус OA переходит в радиус OB, а при повороте на угол (-X) начальный радиус OA переходит в радиус OB_1, симметричный OB относительно оси абсцисс (рис. 4)

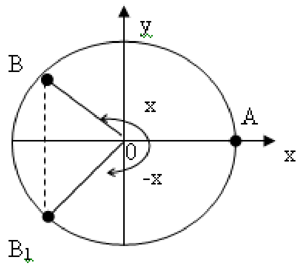


рис. 4

то абсциссы точки B и B_1 равны, а ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку. Это значит, что:

$\cos(-x) = \cos x$ - чётная функция;

$$\left.\begin{array}{l} \sin(-x) = -\sin x \\ tg(-x) = -tgx \\ ctg(-x) = -ctgx \end{array}\right\} \Rightarrow$$ нечетные функции.

5. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определение: Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, то при любом α из области определения функции числа $\alpha \pm T$, также принадлежат этой области и выполняется равенство: $f(\alpha \pm T) = f(\alpha)$. В этом случае число T называется периодом функции f, ее периодами являются также числа вида $nT,\ n \in Z,\ n \neq 0$. Все тригонометрические функции периодические.

Наименьший положительный период для синуса и косинуса равен 2π, а для тангенса и котангенса он равен π.

Периодичность тригонометрических функций можно выразить тождествами:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k), k \in Z$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k), k \in Z$$
$$tg\,\alpha = tg(\alpha + \pi k), k \in Z$$
$$ctg\,\alpha = ctg(\alpha + \pi k), k \in Z$$

При этом $T = 2\pi$ - основной период $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;
$T = \pi$ - основной период $tg\,\alpha$ и $ctg\,\alpha$

Пример. Вычислить $\sin 765^0$.

Решение.

$$\sin 765^0 = \sin(45^0 + 720^0) = \sin(45^0 + 2\cdot 360^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Вычислить: 1) $\cos 3660^0$; 2) $2\cos 4{,}5\pi + \sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)$; 3) $\sin(-300^0) - tg(-150^0)$; 4) $tg\left(\frac{13\pi}{4}\right) + ctg\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

6. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Формулы приведения позволяют выразить тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$ через тригонометрические функции угла α, где α - острый угол. Это формулы, которые применяют для замены функций любых углов функциями острых углов.

функция / аргумент	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha(90^0-\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha(90^0+\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi-\alpha(180^0-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi+\alpha(180^0+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha(270^0-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha(270^0+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi-\alpha(360^0-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$2\pi+\alpha(360^0+\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$

При применении формул приведения нужно использовать следующие правила:

1. Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

2. Знак, с которым нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находится по знаку левой части, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Пример. Вычислить $\sin 225^0$.

Решение $\sin 225^0 = \sin\left(180^0 + 45^0\right) = -\sin 45^0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Вычислить: 1) $\cos 150^0$; 2) $tg 135^0$; 3) $\cos 240^0$; 4) $\sin 330^0$

7. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

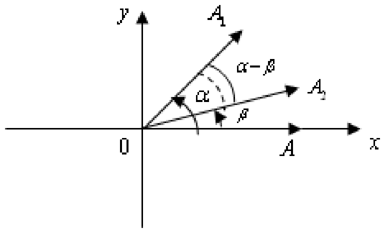


Рис. 1

Пусть $\left|\vec{OA}\right| = 1$ (рис. 5)

Сделаем поворот этого вектора на угол α, потом на β. Найдем скалярное произведение этих векторов.

$$\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_2} = \left|\vec{OA_1}\right| \cdot \left|\vec{OA_2}\right| \cdot \cos$$

$$= \cos(\alpha - \beta) \qquad (\mathrm{I})$$

Скалярное произведение можно выразить и через координаты векторов.

$$\vec{OA_1} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}; \qquad \vec{OA_2} = \{\cos\beta, \sin\beta\}$$

$$\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_2} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad (\mathrm{II})$$

Из равенства I и II следует:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

б)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta),$$

применяя правила четности и нечетности функций, получаем формулу

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta$$

Применяя формулы дополнительных углов, получаем формулу:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

г)
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$
применяя правила четности и нечетности, получаем

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

д) $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$,

разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq 0$, получим

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

$$\boxed{e)\quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1. Дано: $ctg\,\alpha=\dfrac{8}{15}$; $ctg\,\beta=-\dfrac{7}{24}$; $\alpha\in\left]0^0,90^0\right[$, $\beta\in\left]90^0,180^0\right[$

Найти: $\cos(\alpha-\beta)$.

2. Упростить выражения:

а) $\sin 12^0\cos 18^0+\sin 18^0\cos 12=$

б) $\sin 4{,}25\cdot\cos 1{,}11-\sin 1{,}11\cdot\cos 4{,}25=$

в) $\sin\dfrac{3\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{21}-\cos\dfrac{3\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{21}=$

г) $\dfrac{ctg\,40^0-tg\,20^0}{ctg\,40^0\cdot tg\,20^0+1}=$

д) Найти: $tg(\alpha+\beta)$, если $tg\alpha=5$, $tg\beta=1{,}5$

3. Доказать тождества:

а) $\dfrac{1-tg(\alpha-45^0)}{1+tg(\alpha-45^0)}=ctg\,\alpha$

б) $(tg\alpha+tg\beta)\cdot ctg(\alpha+\beta)+(tg\alpha-tg\beta)ctg(\alpha-\beta)=2$

4. Закрепить тему «Формулы сложения»

1) Чему равно? (устно)

а) $\cos 43^0 \cdot \cos 17^0 - \sin 43^0 \sin 17^0$

б) $\cos^2 45^0 \cdot \cos^2 15^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 15^0$

в) $\sin 107^0 \cos 17^0 - \cos 107^0 \cdot \sin 17^0$

г) $\dfrac{tg\dfrac{\pi}{15} + tg\dfrac{4\pi}{15^0}}{1 - tg\dfrac{\pi}{15} \cdot tg\dfrac{4\pi}{15}}$

д) $\dfrac{tg 82^0 - tg 22^0}{1 + tg 82^0 \cdot tg 22^0}$

2) Вычислить: $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\sin\beta = -\dfrac{4}{5}$,

0< $\alpha\ 2\dfrac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \dfrac{3}{2}\pi$

3) $tg\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha^0\right)$, если $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

4) Доказать: $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = tg\left(45^0 + \alpha\right)$

8. ФОРМУЛЫ ДВОЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

Вспомнить и записать формулы сложения

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Пусть $\alpha=\beta$, тогда

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$ или

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Эти формулы позволяют выразить $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Из формулы $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$, положив $\alpha=\beta$ получим

$$tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

где $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in z$ и $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in z$

Упражнения для самостоятельного решения:

1. Закрепить формулы.
2. Чему равно? (устно)

а) $\sin 15^0\cos 15^0=$

б) $\dfrac{2tg15^0}{1-tg^2 15^0}=$

в) $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=$

г) $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

д) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=$

е) $1-8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=$

3. Доказать:

а) $\dfrac{\cos 2\alpha}{ctg^2\alpha - tg^2\alpha} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$

б) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$

4. Упростить: $\dfrac{1+tg2\alpha \cdot tg\alpha}{ctg\alpha + tg\alpha}$

9. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

Вспомним формулы $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$.

$$+\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta & (A)\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta & (B)\end{cases}$$

Сложим левые и правые части равенства (А) и (В)

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$, выразим произведение через сумму:

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}}$$

формулы $\cos(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$:

$$+\begin{cases}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta & (C)\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta & (Д)\end{cases}$$

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}}$$

чим:

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}} \quad (3)$$

1)

$$\sin 15^0\cdot\cos 75^0=\frac{\sin 90^0-\sin 60^0}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

2) $\cos\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{2}$

II. Пусть в формулах (1), (2), (3)

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha=\frac{x+y}{2};\quad \beta=\frac{x-y}{2}$$

Из формулы (1) получим:

$$\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{2}$$ или

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}}$$

Заменив y на –y из формулы (4) легко получить:

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}}\qquad(5)$$

Из формулы (3) получим:

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2}$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\boxed{tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

Аналогично доказывается формула

$$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Например: Преобразовать в произведение выражения:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha$, 2) $2\cos\alpha+1$, 3) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

Решение:

1)

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(90^0 - \alpha\right) = 2\sin\frac{\alpha + 90^0 - \alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - 90^0 + \alpha}{2} =$$
$$= 2\sin 45^0\cdot\cos\left(45^0 - \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(45^0 - \alpha\right)$$

2)

$$2\cos\alpha + 1 = 2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot 2\cos\frac{\alpha + \frac{\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{3}}{2} =$$
$$= 4\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

3)

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2} = \frac{2\sin(\beta+\alpha)\sin(\alpha-\beta)}{2} =$$
$$= \sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\alpha-\beta)$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1. Упростить:

а) $2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - \cos 3\alpha =$

б) $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) =$

в) $\cos 2\alpha\cdot\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha =$

2. Преобразовать в произведение:

а) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha =$

б) $\sin^2\alpha - \frac{3}{4} =$

в) $1 - 3ctg^2\alpha =$

10. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

Если в формулах $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$; $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ предположить, что $x = \frac{\alpha}{2}$, то получим:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \Rightarrow}$$

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}$$

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Знак $\pm$ не берём, т.к. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = tg\frac{\alpha}{2}$

По этим формулам, например, можно вычислить без таблиц

$tg15^0$

$$tg15^0=\frac{\sin 30^0}{1+\cos 30^0}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}-2}{3-4}=\frac{\sqrt{3}-2}{-1}=2-\sqrt{3}$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1.Дано: $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Найти: $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$

2.Вывести формулы: $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

3.Упростить:

а) $1+tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

б) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

4.Доказать: $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=tg\frac{\alpha}{2}$

Выражение тригонометрических функций $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,$

через $tg\frac{\alpha}{2}$.

А)

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Б) $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}}$$

В) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\alpha}}{\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\; k\in Z$$

$$\alpha \neq \pi + 2\pi n,\quad n\in Z$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1.Найти значение $\dfrac{tg\alpha - \sin\alpha}{tg\alpha + \sin\alpha}$, если $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{15}$

2.Вычислить $ctg\dfrac{\alpha}{4}$, если $0 < \dfrac{\alpha}{4} < 90^0$ и $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

3.Дано: $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$; $\alpha \in \left]\pi; 1{,}5\pi\right[$. Найти $\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Ответ $\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$

4.Дано: $\sin\alpha = -0{,}28$; $\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$. Найти $tg\dfrac{\alpha}{2}$.

Ответ $-\dfrac{1}{7}$

5.Доказать тождества:

а) $\dfrac{1 + tg\alpha \cdot tg\left(8\pi + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{ctg\dfrac{\alpha}{2} - tg\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}tg\alpha$

б) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} \cdot \dfrac{\cos(\alpha - 8\pi)}{1 + \cos 2\alpha} = tg\dfrac{\alpha}{2}$

11. ФОРМУЛЫ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ

Знаем, что $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, а $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$, находим, что $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, аналогично находим, что $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Эти формулы называются формулами понижения степени. Используя эти формулы, можно получить следующие равенства:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

Например. Доказать тождество:

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Решение:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=tg\frac{x}{2}$$

12. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения $\sin x = \alpha$; $\cos x = \alpha$; $tgx = \alpha$; $ctgx = \alpha$ называют простейшими тригонометрическими уравнениями.

1. $\sin x = \alpha$

Синусом называется ордината единичного вектора, поэтому посмотрим на чертеже, какой вектор имеет ординату а. (рис. 6) Уравнение имеет смысл, если $|a| \le 1$

если а=0, то $\sin x = 0$, $x = k\pi$, $k \in Z$;

если а=1, то $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$;

если а= -1, то $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$

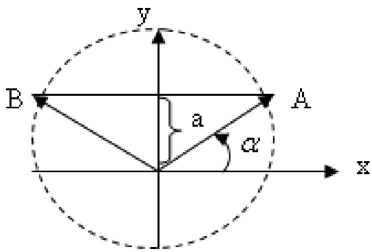


рис.6

Если а>0, тогда векторы $O\vec{A}\, u\, O\vec{B}$ имеют ординату а. вектор $O\vec{A}$ показывает углы $x_1 = \alpha + 2\pi k$; вектор $O\vec{B}$ показывает углы $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$, $k \in Z$. Преобразуем формулы:

$x_1 = \alpha + 2 \cdot \pi k$; $x_2 = -\alpha + \pi(2k+1)$

Эти формулы можно объединить в одну:

$x = (-1)^k \alpha + \pi k,\ k \in Z$.

При $k = 2\pi$, получим x_1, при $k = 2k+1$, получим x_2. α - это главное значение угла.

Можно доказать, что для любого $a \in [-1;1]$ справедлива формула

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$. Тогда общая формула решения уравнения $\sin x = a$, где -1<a<0 будет иметь $x = (-1)^{k+1}\arcsin a + \pi k \;\; k \in Z$.

Главное значение угла называется арксинусом числа а, поэтому: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$. $a \in [-1;1]$

Определение. Арксинусом числа а называется угол из интервала $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен а. $\arcsin a = \alpha$, если $\sin\alpha = a$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

Например:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$,

так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$,

так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} u -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{\pi}{2}$

Решить уравнения:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi, \;\; k \in Z$$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi,$$

$$x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + k\pi, \quad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi .$$

2. Решить уравнение: $\cos x = a$

Уравнение имеет смысл, если $|a| \le 1$. При

a=0, $\cos x = 0, \; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in Z$;

a=1, $\cos x = 1, x = 2\pi k$, $k \in Z$;

a= -1, $\cos x = -1, \; x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

Косинусом угла называется абсцисса единичного вектора. Пусть 0<a<1, векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ имеют абсциссу а. (рис. 7)

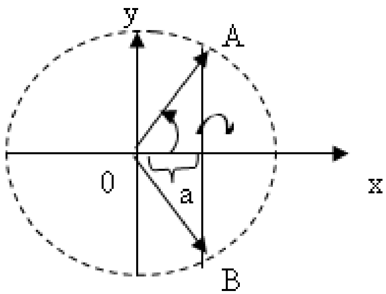


рис. 7

Вектор $\vec{OA}$ показывает углы $x_1 = \alpha + 2\pi k$, вектор $\vec{OB}$ показывает углы $x_2 = -\alpha + 2\pi k$. Поэтому, уравнение $\cos x = a$ имеет формулу решения: $x = \pm\alpha + 2\pi k, \; k \in Z$.

α - главное значение угла и называется арккосинусом числа *а*. Если 0<a<1, то α заканчивается в первой четверти, если -1<a<0, то α заканчивается во второй четверти $\in [-1;1]$. Арккосинусом числа *а* называется угол на интервале $[0;\pi]$, косинус которого равен *а*. $\arccos a = \alpha$, если $\cos\alpha = a, \; 0 \le \alpha \le \pi$

Для уравнения $\cos x = a$, $x = \pm\arccos\alpha + 2k\pi$, $k \in Z$. Можно доказать, что для любого $a \in [-1;1]$ справедлива формула $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Тогда общая формула решения уравнения $\cos x = a$, где -1<a<0 будет иметь вид $x = \pm(\pi - \arccos\alpha) + 2k\pi \; k \in Z$.

Например:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0\le\frac{\pi}{6}\le\pi$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0\le\frac{5\pi}{6}\le\pi$.

Решить уравнения:

1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$$

2) $\cos x=-\frac{1}{2}$,

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k,$$

$$x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi k,$$

$$x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

3. $tgx=a$

Уравнение $tgx=a$, решается по формуле: $x=arctg\,\alpha+\pi k$, $k\in Z$. $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$ctgx=a$

Уравнение $ctgx=a$, решается по формуле $x=arcctg\,\alpha+\pi k$, $k\in Z$. $(0;\pi)$

4. Для отрицательного а $(a\in\,]-\infty;0\,[\,)$ формулы решений имеют вид: для $tgx=a$: $x=-arctg\,\alpha+\pi k$, $k\in Z$ и для

$ctgx = a$: $x = (\pi - arcctg\,\alpha) + \pi k$, $k \in Z$.

Упражнения для самостоятельного решения:

Решить уравнения:

1. $\sin x = \dfrac{1}{2}$
2. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$
3. $2\cos 2x = -1$
4. $\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $tg\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
6. $2ctg\,\dfrac{x}{2} = \sqrt{3}$
7. $\sin\dfrac{x}{2} = -5$
8. $\sin x \cdot ctgx = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
9. $\cos\dfrac{2x}{5} = \sin(-30^0)$
10. $2\cos^2 x + \cos x = 0$
11. $3\sin^2 x - 2\sin x = 1$
12. $\sin^2 x - \sin x = 0$
13. $3\cos 2x = 7\sin x$
14. $\sin 2x = 2\sin x$
15. $\cos 2x = 2\sin^2 x$
16. $2\sin^2 x + \cos^2 x = \dfrac{3}{2}\sin 2x$
17. $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$
18. $\cos(90^0 - x) + \cos^2 x = \dfrac{1}{4}$
19. $\sin(180^0 - x) - \sin^2(270^0 + x) = 1$

20. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$

21. $2\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x=0$

22. $\sin 3x=\sin x$

13. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Если уравнение не простейшее, то проблема в том, чтобы получить из данного уравнения одно или несколько простейших уравнений, объединение которых эквивалентно данному уравнению.

Для этого познакомимся с некоторыми методами решения не простейших тригонометрических уравнений.

Для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех определяется знанием тригонометрических формул и навыками решения упражнений.

1. <u>Введение нового неизвестного</u>

Уравнение вида:

$f(\cos^2 wx, \sin wx) = 0$,

$f(\cos^2 wx, \cos wx) = 0$,

$f(\sin^2 wx, \cos wx) = 0$,

$f(\sin^2 wx, \sin wx) = 0$, где f - некоторая функция данных аргументов, решаем с помощью формул $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Получаем уравнение квадратного вида.

Замечание: получаем ту функцию, которая есть в данном уравнении в меньшей степени.

Например: $\cos^2(x + 2\pi) + \cos(-x) = \sin^2(4\pi - x)$.

Применяя формулы периодичности и четности тригонометрических функций, имеем: $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x, \cos^2 x + \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0, \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1$
.

Обозначим $\cos x = t$, тогда получим $2t^2 + t - 1 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, найдем корни квадратного уравнения: $t_1 = -1, t_2 = \dfrac{1}{2}$

1) $\cos x = -1, x_1 = \pi(2n + 1)$;

2) $\cos x = -\dfrac{1}{2}, x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$$S = \left\{ x \ \middle| x = \pi(2n+1) \text{ или } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in Z \ \right\}.$$

К этому методу сводятся решения уравнений вида:

$f\left(tg^2 wx, tgwx\right) = 0$,

$f\left(ctg^2 wx, ctgwx\right) = 0$

Уравнения $f\left(\sin^4 wx, \sin^2 wx\right) = 0$, $f\left(\cos^4 wx, \cos^2 wx\right) = 0$ решаем как биквадратные. Уравнения для самостоятельного решения.

1) $8\sin^2 x - 2\cos x - 5$.
2) $2\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$
3) $5\cos 2x = 4\sin x$
4) $\sin^2(6\pi + x) + 3tg\frac{3\pi}{4} - \sin(2\pi - x)$.
5) $tg^3 3x + 2tg^2 x + 3tgx = 0$
6) $tg^2(2x - 3\pi) + tg(\pi - 2x) = 6\sin\frac{5\pi}{2}$
7) $\sin 3x + \cos 2x = 1$.

<u>2. Получение одной тригонометрической функции</u>

В этом методе как и в I получаем уравнения для одной тригонометрической функции, а затем используем введение новой переменной. Для этого применяем формулы понижения степени и выражаем тригонометрические функции через тангенс половинного угла.

Знаем $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $tg^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$,

$$ctg^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$$

Например $6tg^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$.

Применяя формулы $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ и $tg^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$, где $x \neq \frac{\pi}{2} - +\pi n$, $n \in Z$ $\left(x = \frac{\pi}{2} \text{ не яявляетскорнемууравнени} \right)$, получим

$$\frac{6(1-\cos 2x)}{1+\cos 2x}-(1+\cos 2x)=\cos 2x$$

Обозначим $\cos 2x = t$, тогда данное уравнение можно переписать в виде $\dfrac{2t^2+9t-5}{1+t}=0$. Найдем корни уравнения: $2t^2+9t-5=0;\ t=1/2, t=-5$.

1) $\cos 2x=\dfrac{1}{2}, x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$

2) $\cos 2x=-5$ не имеет решения, так как $-5\notin[-1,1]$

$$S=\left\{x\,\middle|\,x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z\right\}$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1) $8\cos^6 x=3\cos 4x+\cos 2x+4$

2) $4\cos 3x-3\cos x=a$

Тригонометрические уравнения вида $f(\sin x,\cos x, tgx, ctgx)=0,$ где f - некоторая функция данных аргументов, решают заменой всех тригонометрических одной функцией $tg\dfrac{a}{2}$ с помощью формул универсальной подстановки :

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ tgx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}},$$

$$ctgx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}.$$

В этих формулах левые части определены для всех значений x, а правые для всех x, кроме $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. Поэтому при использовании такого метода нужно вначале подставить эти значения в данное уравнение и проверить, является или нет эти углы решениями.

Например $\sin 2x+\cos 2x=-1$

Если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ имеем

$$\frac{2tgx}{1+tg^2x} + \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = -1 \ \frac{2(tgx+1)}{1+tg^2x} = 0,$$

$tgx = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Но, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, так же является решением данного уравнения, так $\sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -1$.

$$S = \left\{ x \middle| x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \right\}$$

Замечание: уравнение, к которому приводит метод универсальной подстановки, часто получается сложным. А так же проверка корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ иногда трудная. Поэтому нужно искать другие методы решения и только, если их нет, использовать метод универсальной подстановки.

Упражнения для самостоятельного решения:

1) $\sin x + ctgx : 2 = 2$
2) $\sin 2x - \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 1$
3) $5\sin 2x - 5\cos 2x = tgx + 5$
4) $3\cos x + 4\sin x = 5$

<u>3. Однородные уравнения</u>

Однородными уравнениями называются уравнения вида:

$a \sin kx + b \cos kx = 0$,

$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 ks = 0$,

$a \sin^3 kx + b \sin^2 kx \cos kx + c \sin kx \cos^2 ks + d \cos^3 ks = 0$,

где $a, b, c, d \in R$, или

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 c + ... + a_n \cos^n x = 0$$

, где $a_0, a_1, ... a_n$ - действительные числа, x - неизвестные угол.

Уравнение $a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = d$, где $d \neq 0$, так же однородное, поэтому числа d можно заменить выражением $d\left(\sin^2 kx+\cos^2 kx\right)$. Тогда имеем эквивалентное однородное уравнение: $(a-d)\sin^2 kx+b\sin kx\cos kx+(c-d)\cos^2 kx=0$.

В этих уравнениях $\cos kx\neq 0$ для любого угла x, так как если $\cos kx=0$, тогда получим уравнение $\sin kx=0$, но нет такого угла, для которого синус и косинус одновременно равны нулю.

Разделим обе части однородного уравнения на $\cos^n kx$, где n - это старшая степень уравнения. В результате получим уравнение: $atg^n kx+a_1 tg^{n-1}kx+...+a_n=0$, которое решаем введением новой переменной (1). Например. $3\sin^2 x\cos(3\pi:2+x)+3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\sin^2(x-\pi:2)\cos x=0$.

Для решения данного уравнения используем формулы приведения, имеем:

$$3\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^3 x$.

Получим $3tg^3x+3tg^2x-tgx-1=0$,

$\left(3tg^2x-1\right)(tgx+1)=0$.

1) $3tg^2-x-1=0,\ tgx=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow, x=\frac{\pi}{6}(6+1), n\in Z.\pi$

2) $tgx+1=0, tgx=-1, x=\frac{\pi}{4}(4k-1), k\in Z$.

$$S=\left\{x\left|x=\frac{\pi}{6}(6n+1), x=-\frac{\pi}{4}(4k-1), n,k\in Z\right.\right\}$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1) $5\cos^2(6\pi-x)+4\cos x\sin(2\pi-x)-2ctg\,\frac{9\pi}{4}-3\sin(4\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

2) $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$

3) $2\sin^3 x=\cos x$

4) $3\sin^2(x+2\pi)-5\sin x\cos(6\pi-x)+8\cos^2 x=2tg\,\frac{5\pi}{4}$

4. Разложение на множители

Уравнения вида: $\sin ax \pm \sin bx = 0$,

$$\cos ax \pm \cos bx = 0 \qquad (2)$$

решаем с помощью формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Например. $\sin 6x + \sin 4x = 0$

По формуле $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ имеем эквивалентное уравнение:

$2\sin 5x\cos x = 0$. Это уравнение равносильно двум уравнениям:

1) $\sin 5x = 0, x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z$

2) $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$$S = \left\{ x \middle| x = \frac{\pi n}{5}, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, n, k \in Z \right\}$$

Замечание: уравнения $\sin ax \pm \cos ax = 0$ можно преобразовать в уравнения (2), если использовать формулы приведения.

Упражнения для самостоятельного решения.

1) $\sin(x + 2\pi) = \cos 2x$.

2) $\sin^2 3x - \sin^2 5x = 0$

3) $\cos 3x = \sin x$

Преобразование уравнения методом разложения на множители по формулам сокращенного умножения или выделением общего множителя часто бывает наиболее коротким путем решения.

Например. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x - \sin x - \cos 2x - 1 = 0$.

Данное уравнение эквивалентно следующему уравнению:

$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x - \cos x - (1 + \cos 2x) = 0$,

$2\sin 2x\cos x + 2\sin xcox - \cos x - 2\cos^2 x = 0$,

$\cos x(2\sin 2x + 2\sin x - 1 - 2\cos x) = 0$.

Преобразуем выражение в скобке:

$4\sin x\cos x + 2\sin x - 1 - 2\cos x = 2\sin x(1 + 2\cos x) - (1 + 2\cos x) = ($

.

Получаем уравнение: $\cos(1 + 2\cos x)(2\sin x - 1) = 0$, которое эквивалентно трем уравнениям:

1) $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k_1$,

2) $1+2\cos x=0, x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k_2,$

3) $2\sin x-1-0, x=(-1)^k,\dfrac{\pi}{6}+\pi k,$

$$S=\left\{x \middle| x=\frac{\pi}{2}+kn, x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi, x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+m\pi, k,n,m\in Z\right\}$$

Уравнения для самостоятельного решения:

1) $2\sin^3 x+\cos^2 2x=\sin x$

2) $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0$

3) $\cos\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}x\cdot\cos\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}x=1$

4) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1$

5) $\cos x\sin 7x=\cos 3x\sin 5x$

<u>5. Введение нового угла</u>

Уравнения вида $a\sin\omega\mathrm{x}+b\cos\omega\mathrm{x}=c,\text{где } a,b,c\omega\in R,\text{если } |c|\le\sqrt{a^2+b^2} \text{ и } a^2+b^2\ne 0$

разделим на число $\sqrt{a^2+b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega\mathrm{x}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

Очевидно $\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$<1, $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$<1, и

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+a^2}}\right)^2=1$$

Тогда можно обозначить:

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\cos\varphi \text{ и } \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi, \text{где } \varphi$ - новый угол,

такой что $tg\varphi=\dfrac{b}{a}$, $\varphi=arctg\dfrac{b}{a}+\pi k, k\in Z$.

Данное уравнение эквивалентно следующему

$$\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Используем формулу для синуса суммы углов: $\sin(\omega x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Получим простейшее тригонометрическое уравнение $Wx = -\varphi + (-1)^a \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n,$

$$X = -\frac{1}{w} arctg \frac{b}{a} + \frac{(-1)^n}{w} \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{\pi}{w}(n-k)n, k \in Z$$

.

Например. $\sin 2x + \cos 2x = -1$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$, получим

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, или

$\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, 2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$,

$2x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$,

$$x = \frac{\pi}{8}\left[(-1)^{n+1} - 1\right] + \frac{\pi n}{2} n \in Z$$

$$S = \left\{ x \middle| x = \frac{\pi}{8}\left[(-1)^{n+1} - 1\right] + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \right\}.$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1) $12\cos x - 5\sin x = -13$

2) $\sqrt{3}\cos(x + 2\pi) - \sin(4x - x) - tg\frac{\pi}{4}$

3) $\sin x + 7\cos x = 5$.

6. Оригинальная замена переменных

Уравнения вида:

$f(\sin x + \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$, где f - некоторая функция данных аргументов, решают заменой $t = \sin x \pm \cos x$.

Знаем $(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \pm 2\sin x \cdot \cos x = 1 \pm 2\sin x \cdot \cos x$, тогда

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2-1}{2} \text{ или } \sin x \cdot \cos x = \frac{1-t^2}{2}$$

Тогда данное уравнение эквивалентно уравнению $F\left(t, \frac{t^2-1}{2}\right) = 0$.

Например $\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x = 0$.

Обозначим $\sin x + \cos x = t$, тогда $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Имеем $\sqrt{2}t^2 - t - t\sqrt{2} = 0$. Корнями этого квадратного уравнения будут числа $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Решение данного уравнения эквивалентно решению двух тригонометрических уравнений: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ и $\sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Используем метод введения нового угла и умножим обе части этих уравнений на число $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1$,

$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 1$,

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -1/2$

$\sin(x + \pi/4) = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{\pi+1}\pi/6 - \pi/4 + \pi k$,

$x = (-1)^{\pi+1}\pi/6 + \pi\left(\frac{4k-1}{4}\right), k \in Z$

$$S=\left\{x\left|x=\pi/4+2\pi k,\ x=(-1)^{n+1}\pi/6+\pi\left(\frac{4k-1}{4}\right),\ n,k\in Z\right.\right\}$$

Упражнения для самостоятельного решения:

1) $\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x=1$

2) $\sin x+\cos x=1-\sin 2x$

$$\sin(2x+6\pi)+\sin(\pi/2-4x)-\cos x\cdot\sin(2\pi-x)=tg\,\frac{13\pi}{4}$$

Замечание: целочисленные параметры в разных множествах решений одного уравнения можно обозначить разными буквами n и k или одной буквой n.

Другие методы решения тригонометрических уравнений рассмотрим на конкретных примерах.

Решить уравнения:

Пример 1. $\sin x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\cos 2x=1/2$

Левая часть этого уравнения формула косинуса разности двух углов.

Имеем $\cos x=1/2,\ x=\pm\pi/3+2\pi k,\ k\in Z$

$$S=\{x|x=\pm\pi/3+2\pi k,\ k\in Z\}.$$

Пример 2. $\cos x\cdot\sin x\cdot\cos 2x=1/8$.

Для решения данного уравнения дважды используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$.

$$1/2\sin 2x\cdot\cos 2x=1/8,\ 1/4\sin 4x=1/8,\ \sin 4x=1/2,$$

$$4x=(-1)^n\pi/6+\pi n,\ x=(-1)^n\pi/24+\pi n/4,\ n\in Z$$

$$S=\{x|x=(-1)^n\pi/24+\pi\,\pi/4,\ n\in Z\}$$

Пример 3. $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x=1/8$.

Умножим обе части уравнения на $8\sin x$, только в результате обязательно уберем из ответа решение уравнения $\sin x=0$ т.е. $x=\pi n,\ n\in Z$.

Получим эквивалентное уравнение $8\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x=\sin x$.

Последовательно три раза используем формулу синуса двойного угла.

Имеем: $4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x=\sin x$

$2\sin 4x\cdot\cos 4x=\sin x$

$\sin 8x = \sin x, \sin 8x - \sin x = 0$.

Преобразуем левую часть уравнения в произведение:

$\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{9x}{2} = 0$, откуда

1) $\sin\frac{7x}{2} = 0, x = 2\pi k/7, k \in Z$.

2) $\cos\frac{9x}{2} = 0, x = \frac{\pi(2m+1)}{9}, m \in Z$

Если $k = 7n$, то $x = 2\pi n$, если $m = 9\pi + 4$, то $x = \pi(2n+1)$ поэтому

$$S = \{x | x = 2\pi k, k = 7n, x = \pi(2m+1) : 9, m \neq 9n + 4, k, n, m, \in Z\}$$

.

Пример 4. $\sin^6 x + \cos^6 x = a$, где а- заданное число.

Преобразуем левую часть данного уравнения как сумму кубов:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 -$$

$$1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

Знаем, что $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cdot \cos x$, тогда получим эквивалентное уравнение:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a, \sin^2 2x = \frac{4(1-a)}{3}$$

Если $0 \le \frac{4(1-a)}{3}$ <1, т.е. $\frac{1}{4}$ <a<1, то уравнение

$\sin 2x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}$ имеет решение:

$$x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}\right) + \pi n/2, n \in Z.$$

В частности при a=1 решением уравнения $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ являются числа $x = \pi n/2, n \in Z$.

Пример 5. $\sin x + \cos x = 1, k \in N$.

Легко догадаться, что числа $x = \pi n/2 (n \in Z)$ являются решениями уравнения, значит данное уравнение не имеет решений отличных от $x = \pi n/2, n \in Z$.

$$S = \{x | x = \pi n/2, n \in Z\}.$$

Пример 6. $\sin(\pi \cos 2x) = 1$.

$$\sin(\pi \cos 2x) = 1, \pi \cos 2x = \pi/2 + 2\pi k, \cos 2x = \frac{1}{2} + 2k, k \in Z$$

.

Но $\cos 2x < 1$, поэтому $k = 0$. Имеем $\cos 2x = \frac{1}{2}; 2x = \pi/3 + 2xk$

$$x = \frac{\pi}{6}(6k+1), k \in Z .$$

$$S = \left\{ x \middle| x = \frac{\pi}{6}(6k+1), k \in Z \right\}.$$

<u>Задачи повышенной трудности</u>.

Решить уравнения:

1) $\cos 3x - \sin = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.
2) $8\cos z \cdot \cos(60^0 - z)\cos(60^0 + z) + 1 = 0$
3) $7 + 4\sin x \cdot \cos x + 1{,}5tgx + ctgx = 0$
4) $\frac{1}{\cos 3t} - 6\cos 3t - 4\sin 3t = 0$
5) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$
6) $1 - \sin 3x - (\sin x/2 - \cos x/2)$
7) $(\sin x)^{-1} + (tg)^{-1} = tg\frac{x}{2}$

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Соотношения между единицами измерения углов

$$n^0 = \frac{\pi n}{180}\,\text{рад} \approx 0{,}01745n\ \text{рад},$$

$$\alpha\ \text{рад} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right) \approx 57{,}296\alpha^0,$$

$$1^0 \approx 0{,}017453\,\text{рад},\ 1\,\text{рад} \approx 57^0 17' 44'',8.$$

Основные тригонометрические тождества

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}. \qquad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \cos ec^2 x.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Формулы приведения

Наименование функций	Значения аргумента				
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$2\pi \pm \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$
ctg	$-ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$$

<u>Формулы двойного аргумента</u>

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$$

$$\cos 2x - \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 3x = \sin x\left(3\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

$$\cos 3x = \cos x\left(\cos^2 x - 3\sin^2 x\right)$$

$$tg\,2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$$

$$ctg\,2x = \frac{ctg^2x-1}{2ctgx}$$

<u>Формулы половинного аргумента</u>

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$tg\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

<u>Формулы понижения степени</u>

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{2^2}\left(3\sin x - \sin 3x\right)$$

$$\sin^9 x = \frac{1}{2^2}\left(3\cos x + \cos 3x\right)$$

Преобразование сумм в произведения

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$tgx \pm tgy = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$ctgx + ctgy = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y}$$

Преобразование произведений в суммы

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

Выражение тригонометрических функций через $tg\,\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\,\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2 \frac{x}{2}}$$

Выражение одних тригонометрических функций через другие

	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$
$\sin x$		$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{tgx}{\pm\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2 x}}$	$\frac{ctgx}{\pm\sqrt{1+ctg^2 x}}$
tgx	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\frac{1}{ctgx}$
$ctgx$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{tgx}$	

Формулы для решения треугольников

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Формулы Мольвейде

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

Теорема тангенсов

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

$$ctgA=\frac{\frac{c}{a}-\cos B}{\sin B}=\frac{\frac{b}{a}-\cos C}{\sin C}.$$

$$tg\frac{A}{2}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{r}{p-a}.$$

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Формулы площади треугольника:

$$S=\frac{bc\sin A}{2},\qquad S=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B},$$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - формула Герона

$$r=\frac{S}{p}=(p-a)tg\frac{A}{2}=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\quad R=\frac{abc}{4S}=\frac{a}{2\sin A}$$

где a, b, c – стороны треугольника; p – полупериметр треугольника; r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В текстах аудиторных занятий выдерживается единая логическая структура: тема, определение и основные понятия, методы решения, алгоритм выполнения конкретного примера, задания для аудиторной и домашней самостоятельных работ. Содержащиеся в пособии практические задания обеспечивают изучение студентами соответствующих разделов тем и направлены на самостоятельную организацию учебной деятельности. Учебный материал сопровождается банком контрольных задач, что, по нашему мнению, способствует формированию у иностранных обучающихся навыков решения различных тригонометрических уравнений и потребности в самообразовании.

Материалы учебного пособия нацелены на обеспечение развития навыков комплексного преодоления трудностей, возникающих при восприятии и осмыслении иноязычной речи, навыков мыслительной переработки информации и её фиксации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для подготовительных факультетов вузов/ А.А.Шишкин, В.И.Евсин В.И., Н.А.Корнева. - М.: Высш. Шк., 1984. – 256 с., ил.
2. Тригонометрия: дополнительный материал к курсу геометрии 9, 10 классов/ П.В.Стратилатов. – издательство «Просвещение» Москва 1967 г. 80 с.
3. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидоров, Н.Е.Федорова, М.И.Шабунин – 10-е изд.-М.: Посвящение, 2002.-384 с.: ил.-ISBN 5-09-011021-2.