ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Естественные науки»

Учебное пособие

«Математика. Тождественные преобразования иррациональных выражений»
по дисциплине

«Математика»

Авторы
Ковалева Т. Г.,
Юрушкина Т. Г.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ при изучении темы «Тождественные преобразования иррациональных выражений» дисциплины «Математика». Учебное пособие содержит теоретический материал, изложенный в структурированном виде, слова и словосочетания, вопросы и упражнения для самостоятельной работы.

Рекомендуется для удовлетворения потребностей слушателей всех направленностей в адаптированном учебном материале.

Авторы

ст. преподаватель кафедры «Естественные науки» Ковалева Т.Г.,
преподаватель кафедры «Естественные науки» Юрушкина Т.Г.

Оглавление

Элементы оглавления не найдены.

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ всех направленностей при изучении темы «Тождественные преобразования иррациональных выражений». Учебное пособие является частью рабочей программы дисциплины и фонда оценочных средств по математике для иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ и предназначено для использования при подготовке к текущему контролю и итоговой аттестации.

Действия с корнями и тождественные преобразования иррациональных выражений - это одни из базовых тем курса математики для иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ всех направленностей.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Корень n-ой степени. Арифметический корень и его свойства

Арифметический корень степени n

$$b^n = a \leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b,$$

где n - показатель корня

a - подкоренное выражение

Читаем:

$\sqrt{a}$ - корень квадратный из a

$\sqrt[3]{a}$ - корень кубический из a

$\sqrt[4]{a}$ - корень четвертой степени из a (корень степени 4 из a)

$\sqrt[5]{a}$ - корень пятой степени из a

$\sqrt[n]{a}$ - корень энной степени из a (корень степени n из a)

$\sqrt[n+m]{a}$ - корень степени $n+m$ из a

$\sqrt{25} = 5$, $5^2 = 25$; $\sqrt[3]{27} = 3$, $3^3 = 27$;

$\sqrt{4} = -2$, $(-2)^2 = 4$; $\sqrt[3]{-8} = -2$; $(-2)^3 = -8$

Арифметический корень степени n из неотрицательного числа a – это неотрицательное число b, для которого $b^n = a$: $\sqrt[n]{a} = b$, где $a \ge 0$; $b \ge 0$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{4} &= 2\\ \sqrt[4]{81} &= 3\\ \sqrt[3]{8} &= 2\end{aligned}\right\}$$ это арифметические корни

Свойства арифметического корня

1. $\sqrt[m]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, если $a\geq 0,\ b\geq 0$;
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если $a\geq 0,\ b>0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$, если $a\geq 0$
4. $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$, если $a\geq 0$
5. $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, если $a\geq 0$

Например:

$$\sqrt[3]{8\cdot 27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=2\cdot 3=6$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}=\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$$

2. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ

2.1. Вынести множитель за знак корня

$$\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt{a^6 b}=a^3\cdot\sqrt{b}\ ;\ \sqrt[3]{a^4 b^5}=ab\sqrt[3]{ab^2}$$

2.2. Внести множитель под знак корня.

$$6\sqrt{7}=\sqrt{6^2\cdot 7}=\sqrt{36\cdot 7}=\sqrt{252}$$

$$5\sqrt[3]{3}=\sqrt{5^3\cdot 3}=\sqrt[3]{375}$$

2.3. Привести корни к общему показателю.

а) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[4]{3}$ приведем корни к общему показателю

12 (12=НОК(4;3))

по свойству 4 арифметического корня получим:

$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\cdot 4]{5^4}=\sqrt[12]{5^4}$ и $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\cdot 3]{3^3}=\sqrt[12]{3^3}$

корни имеют одинаковые показатели

б) $\sqrt{2x}$ и $\sqrt[3]{y}$ приведем корни к общему показателю 6 (6=НОК (2;3))

$\sqrt[2\cdot 3]{(2\cdot x)^3}=\sqrt[6]{8\cdot x^3}$; $\sqrt[3\cdot 2]{y^2}=\sqrt[6]{y^2}$ корни имеют одинаковые показатели

2.4. Освободить дроби от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=5$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

3.СТЕПЕНЬ С ДРОБНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Для степени с дробным рациональным показателем сохраняется основное свойство степени с целым показателем

$a^{\frac{m_1}{n_1}}\cdot a^{\frac{m_2}{n_2}}=a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}$, где $m_1,m_2\in Z$; $n_1,n_2\in N$

Если $a>0$, то $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, где $m\in Z, n\in Z$

Если $a=0$ и $\dfrac{m}{n}>0$, то $a^{\frac{m}{n}}=0$

Например $(0,2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(0,2)^3}$; $3^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Вычислить:

1) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$ 2) $0,01^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0,01}} = \frac{1}{0,1} = 10$

3) $0,16^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0,16^3}} = \frac{1}{0,16\sqrt{0,16}} = \frac{1}{0,16 \cdot 0,4} = 15,625$

4) $81^{\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$

Свойства степени с дробным рациональным показателем

1) Если $a > 0$, $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ - дробные рациональные числа, то $a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}$

Следствие. $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

2) Если $a > 0$, $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ - дробные рациональные

Числа, то $\left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}}$

3) Если $a > 0$, $b > 0$, $\frac{m}{n}$ - дробное рациональное число,

то $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

1. Выполнить действия:

1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$;

2) $(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{5}})^{\frac{-1}{3}} = a^{\frac{-1}{9}} \cdot b^{\frac{-2}{15}}$

3) $\left(\frac{9^2}{25^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{25}$

4) $\left(64 \cdot a^6\right)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{16} \cdot a^{-4} = \frac{1}{16a^4}$

2. Сократить дробь:

$\frac{a-9}{a^{\frac{1}{2}}+3}$, где $a > 0$

Решение: Так как $a > 0$, выражение $a - 9$ можно представить в виде $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 3^2$, а потом сократить дробь:

$$\frac{a-9}{a^{\frac{1}{2}}+3}=\frac{(a^{\frac{1}{2}})^2-3^2}{a^{\frac{1}{2}}+3}=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-3)(a^{\frac{1}{2}}+3)}{a^{\frac{1}{2}}+3}=a^{\frac{1}{2}}-3$$

3. Заменить корень на степень с дробным показателем

1) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{6}}$

2) $\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}=\sqrt[3]{a^2\cdot a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{5}{2}}}=a^{\frac{5}{6}}$

3) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[4]{a^2\cdot a^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[4]{a^{\frac{8}{3}}}=a^{\frac{8}{12}}=a^{\frac{2}{3}}$

Слова и словосочетания

дробный рациональный
аналогично
следует (что?)
заменить (что?)
сохраняется (что?)

Ответьте на вопросы:

1. Какие основные свойства степени с дробным рациональным показателем вы знаете?
2. Какому множеству принадлежит основание a степени с дробным рациональным показателем?

Выполните упражнения:

1. Заменить корень выражением с дробным показателем:

а) $\sqrt[3]{12^2}$; б) $\sqrt[5]{\frac{1}{13}}$; в) $\sqrt[6]{a-b}$; г) $\sqrt{0,2}$

2. Вычислить:

а) $10000^{\frac{1}{4}}$; б) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}$; в) $0{,}64^{\frac{3}{2}}$; г) $\sqrt[5]{15^3}$

3. Упростить выражение:

а) $(125x^6)^{\frac{-2}{3}}$; б) $(64x^3)^{\frac{1}{3}}$; в) $(x^{-4})^{\frac{-1}{2}}$

4. Вычислить: $12^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{-1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$; $\dfrac{20^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}$

5. Разложить на множители: $a-b$

Слова и словосочетания

корень энной степени	корень из чего?
арифметический корень	извлечение корня
преобразование корня	показатель корня
общий показатель	подкоренное выражение

Ответьте на вопросы:

1. Что такое корень n-ной степени из числа a?
2. Что называется арифметическим корнем?
3. Какие свойства арифметического корня вы знаете?
4. Какие преобразования арифметических корней вы знаете?

Выполнить упражнения:

1. Вынести множитель из под знака корня

$\sqrt[3]{500}$; $\sqrt[4]{162}$; $\sqrt[5]{486}$; $\sqrt[3]{x^{10} \cdot y^7}$; $\sqrt[6]{a^8 b^{12}}$;

2. Внести множитель под знак корня

$6\sqrt{7}$; $5\sqrt[3]{3}$; $2n\sqrt[3]{m^2 n}$; $a^3\sqrt{ab}$;

3. Сократить показатели корней и подкоренных выражений

   $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt[10]{a^{12}b^{10}}$; $\sqrt[3]{a^{10}c^{15}}$; $\sqrt[18]{81a^{16}b^8}$

4. Освободить дроби от иррациональности в знаменателе

   $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}};$$

5. Сократить дробь:

$$\frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{ab}+a}{\sqrt{ab}+b};$$

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Иррациональное выражение – это выражение, в котором содержатся корни и степени с дробным рациональным показателем.

Например:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}};\ \sqrt{x}-\sqrt{y};\ \frac{1}{\sqrt{a+b}};\ (x^2-2)^{\frac{1}{3}}$$

Тождественные преобразования иррациональных выражений выполняются на основе свойств арифметического корня, степени с рациональным показателем с применением тождеств сокращенного умножения, а также на основе свойства алгебраической дроби.

Цель тождественных преобразований – упростить данное выражение. Для этого необходимо: найти область определения данного выражения; выполнить действия и получить более простое выражение.

Например: Найти область определения выражения и выполнить тождественные преобразования на множестве *D*

$$\sqrt{x}+\frac{\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{9}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Преобразование сложного квадратного корня

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}};$$

$A>0,\ B>0$

$A^2-B>0$

A^2-B - точный квадрат

Например:

Упростить

1.

$$\sqrt{11+\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{11+\sqrt{121-40}}}{2}+\sqrt{\frac{11-\sqrt{121-40}}{2}}=\sqrt{\frac{11+9}{2}}+\sqrt{\frac{11-9}{2}}=\sqrt{10}+1$$

2

$$\sqrt{15-\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{15+\sqrt{225-40}}}{2}-\sqrt{\frac{15-\sqrt{225-29}}{2}}=\sqrt{\frac{15+14}{2}}-\sqrt{\frac{15-14}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{58}-\sqrt{2})$$

3. $\sqrt{17+2\sqrt{30}}=\sqrt{15+2+2\sqrt{15\cdot 2}}=\sqrt{15}+\sqrt{2}$

ЛИТЕРАТУРА И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1 Математика. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для иностранных граждан, обучающихся на подготовительных факультетах вузов / под общ. ред. А.И. Лобанова. - Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1987. - 304 с.

2. Ковалева Т. Г. Практикум по дисциплине "Математика" для всех технологических и технических направлений подготовки бакалавров [Электронный ресурс]; ДГТУ. - Ростов н/Д, 2015. - Режим доступа: http:/skif.donstu.ru. - Рег. номер 2489 от 09.07.2015.