



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Естественные науки»

Учебное пособие
«Математика. Начальный курс. Тождественные преобразования»
по дисциплине

«Математика»

Авторы
Ковалева Т. Г.,
Юршкіна Т. Г.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы иностранных слушателей (иностранцев студентов) дополнительных общеобразовательных программ при изучении темы «Тождественные преобразования» Учебное пособие адаптировано в соответствии с программой русского языка. Каждая тема включает тексты, лексико-грамматические материалы, слова и словосочетания, вопросы для контроля и упражнения.

Рекомендуется для самостоятельной работы иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ при изучении тем: степень, одночлены, многочлены, тождественные преобразования целых рациональных выражений и подготовки к текущему контролю.

Авторы:

ст. преподаватель кафедры «Естественные науки» Ковалева Т.Г.

преподаватель кафедры «Естественные науки» Юрушкина Т.Г.



ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ.	6
2. ДЕЙСТВИЯ НАД СТЕПЕНЯМИ.....	6
3. СТЕПЕНИ С НУЛЕВЫМ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ.	7
4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ	9
4.1. ОДНОЧЛЕНЫ. МНОГОЧЛЕНЫ.	9
4.2. Действия над одночленами и многочленами.....	10
4.3. Разложение многочленов на множители.	11
5. Слова и словосочетания	11
6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ	13
ЛИТЕРАТУРА И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ	17





ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ при изучении темы «тождественные преобразования» дисциплины «Математика». Учебное пособие является частью рабочей программы дисциплины (РПД) и фонда оценочных средств (ФОС) по математике для иностранных слушателей дополнительных общеобразовательных программ и предназначено для использования при подготовке к текущему контролю и итоговой аттестации.

Действия со степенями, одночлены и многочлены, тождественные преобразования рациональных выражений – это одни из базовых тем курса математики для иностранных студентов предвузовской подготовки.

Оно включает основные положения теории, формулы, определения и подробное решение типовых задач различной степени трудности, а также задачи для самостоятельного решения.

1. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ.

Определение

Степень с натуральным показателем – это произведение одинаковых множителей, т.е.

$$a^n = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_{n \text{ раз}}, \text{ где } n \in \mathbb{N}, n > 1$$

раз

a – основание степени;

n – показатель степени;

a^n – степень.

Действие – возведение в степень.

Читаем: a^2 – a в квадрате (a – квадрат);

a^3 – a в кубе (a -куб);

a^4 – a в четвертой степени (a в степени 4).

a^{10} – a в десятой степени (a в степени 10);

a^n – a в n -ой степени (a в степени n).

Запомните:

a в какой степени?

a в степени + числительные (Им.п.)

2. ДЕЙСТВИЯ НАД СТЕПЕНЯМИ.

1. Умножение степеней с одинаковыми основаниями.

$$a^n * a^m = a^{n+m}, \text{ где } a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}.$$

Например: $2^2 * 2^3 = 2^5 = 32$

2. Деление степеней с одинаковыми основаниями:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \text{ где } a \in \mathbb{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbb{N}, n-m > 0.$$

Например: $7^4 : 7^2 = 7^2 = 49$

3. Возведение степени в степень.

$$(a^n)^m = a^{n*m}, \text{ где } a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n, m \in \mathbb{N}.$$

Например: $(2^3)^2 = 2^6 = 64.$



4. Степень произведения:

$$(ab)^n = a^n * b^n, \text{ где } a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Например: } (2*3)^3 = 2^3 * 3^3 = 216$$

5. Степень частного:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \text{ где } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Например: } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

3. СТЕПЕНИ С НУЛЕВЫМ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

$$\text{Например: } (3,5)^0 = 1; (-5)^0 = 1.$$

Если $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\text{Например: } 3^{-1} = \frac{1}{3}; (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

Аналогично, если $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Например:

$$\text{Вычислить } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \quad 1) 5^{-2} * 5^4 - 12^0 - 3^{-2} : 3^{-3}$$

$$\text{Решение: } 5^{-2} * 5^4 - 12^0 - 3^{-2} : 3^{-3} = 5^{-2+4} - 1 - 3^{-2-(-3)} = 5^2 - 1 - 3 = 25 - 4 = 21$$



Слова и словосочетания

Степень, основание степени

Показатель степени

Возвести в степень

Вопросы:

- 1) Что такое степень с натуральным показателем?
- 2) Какой знак имеет степень положительного числа?
- 3) Какой знак имеет степень отрицательного числа?
- 4) Какие действия над степенями вы знаете?
- 5) Чему равна степень с нулевым показателем?

Выполните действия:

1. $(2)^4$; $-(2)^3$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; $a^2 \cdot a^3$; $a^5 : a^2$; $(a^2)^3$; $(3^2)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3$;

$\frac{a^{-9}}{(a^2)^{-3}}$; $(m^{-6})^{-2} \cdot m^{-14}$; $\frac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$; $(10^{-10} \cdot 100^6)^{-1}$;

$(10^8)^2 \cdot 100^{-6}$; $\frac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$; $\frac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{6^{-12}}$; $(27 \cdot 3^{-4})^2$; $16 \cdot (2^{-3})^2$;

2. $(5 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 5^{-1}) : 10^{-2}$;

3. $81^{\frac{1}{4}} - 3,5^0 - 1,5^3 \cdot 1,5^{-2} + 2^2 : 2^{-3}$;

4. $4^2 \cdot 4^{-3} - 1,5^0 - 2 : 2^{-2} + 64^{\frac{1}{3}}$;

5. $6,5^0 - 3^2 : 3^{-1} - 81^{\frac{1}{4}} + 2^3 \cdot 2^{-6}$

6. $32^{\frac{1}{5}} + 5^{-2} \cdot 5^4 - 12^0 - 3^{-2} : 3^{-3}$;

7. $5^2 : 5^{-1} + 3^0 - 4^2 \cdot 4^{-3} - 27^{\frac{2}{3}}$



4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Тождественное преобразование выражения – это замена его другим выражением, которое тождественно равно данному выражению.

Тождественные преобразования целых выражений включают в себя действия над многочленами, разложением многочленов на множители.

4.1. ОДНОЧЛЕНЫ. МНОГОЧЛЕНЫ.

Определение. Одночлены – это такие выражения, которые содержат числа, натуральные степени переменных и их произведения.

Например: $2a^2b$; x^2y^3z ; $0,4c^3d$ – это одночлены.

Два одночлена называются подобными, если они одинаковые или отличаются только коэффициентами.

Например: $2ab$; $-7ab$; $0,2ab$
 $3x^2y$; $-5x^2y$; $0,7x^2y$ } это подобные одночлены

Степень одночлена – это сумма показателей степеней всех его переменных.

Например: $5a^3b^2c$ – одночлен 6-ой степени ($3+2+1=6$)

$2xyz$ – одночлен 3-ой степени ($1+1+1=3$)

17 – одночлен 0-ой степени.

Определение: Многочлен – это сумма одночленов.

Например: $2ab+c^2$; $3a+2b-1$ – это многочлены.

Старший член многочлена – это член, который имеет наибольшую степень.



Степень многочлена - это степень его старшего члена.

Например: $5a^3b+ab$ – это многочлен 4-ой степени

Подобные члены многочлены – это члены, которые отличаются только числовыми коэффициентами. Привести подобные члены – это значит сложить их числовые коэффициенты.

Например. В многочлене $4x^2y^3 +xy -2x^2y^3$ подобные члены $4x^2y^3$ и $-2x^2y^3$

$$4x^2y^3 +xy - 2x^2y^3 = (4-2) x^2y^3 +xy = 2 x^2y^3 +xy$$

4.2. Действия над одночленами и многочленами

Сложение и вычитание.

Чтобы сложить или вычесть одночлены и многочлены надо раскрыть скобки и привести подобные члены.

$$\text{Например: } 2av^2 - 3a^2b - (-av^2 - 4a^2b) = 2av^2 - 3a^2b + av^2 + 4a^2b = 3av^2 + a^2b$$

Умножение.

Чтобы умножить многочлен на одночлен – надо каждый член многочлена умножить на одночлен и результаты сложить.

$$\text{Например: } (3av^2 - 2a^2b + 4ab) * av = 3a^2v^3 - 2a^3b^2 + 4a^2v^2$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен – надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и результаты сложить.

$$(x+y) (x^2-3) = x^3-3x+x^2y-3y$$

При умножении многочлена на многочлен можно использовать формулы сокращенного умножения.

$$\text{Например: } (a+b) (a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Так можно получить и другие формулы сокращенного умножения:



$$(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ав+в^2$$

$$(a+v)^3=a^3+3a^2в+3ав^2+в^3$$

$$(a-v)^3=a^3-3a^2в+3ав^2-в^3$$

$$(a-v)(a^2+ав+в^2) = a^3-в^3$$

$$(a+v)(a^2-ав+в^2) = a^3+в^3$$

4.3. Разложение многочленов на множители.

4.3.1. Разложить многочлен на множители

1. Способ вынесения общего множителя за скобку

$$3a^3в-2a^2в+6a^2=a^2(3ав-2в+6)$$

$$36x^5y^4+27x^4y^3-9x^3y^2=9x^3y^2(4x^2y^2+3xy^{-1})$$

2. Способ группировки

$$ax+ay+2x+2y=(ax+ay)+(2x+2y)=a(x+y)+2(x+y)=(x+y)(a+2)$$

$$11x+11y-x^2-xy=11(x+y)-x(x+y)=(x+y)(11-x)$$

3. По формулам сокращенного умножения

$$81x^2-4y^4=(9x-2y^2)(9x+2y^2)$$

$$0,25a^4-0,16b^2=(0,5a^2-0,4b)(0,5a^2+0,4b)$$

5. СЛОВА И СЛОВСОЧЕТАНИЯ

одночлен подобные члены способ (метод)

многочлен привести подобные члены преобразовать

старший член раскрыть скобки

преобразование группировка

вынесение за скобку тождественные преобразования

Упражнения.



1. $(x + y)(x - y) =$

2. $5^2 - 3^2 =$

3. $4 + 4x + x^2 =$

4. $(c - 2)^2 =$

5. $(a + 5)^2 =$

6. $(1 + 2x)(1 - 2x + 4x^2)$

7. $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1)$

8. $(a - 3)^3 =$

9. $(2 + \theta)^3 =$

10. $(4^2 - 7^2) : (11 \cdot 4 - 11) =$

11. $\frac{0,6 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 1,2}{0,2^2 - 0,4^2} =$

12. $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

13. $9y - (1 + 3y)^2$

14. $(1 - 2xy)^2$

15. $(2b + 3)^3$

16. $(2x + 2y)^3$

17. $(4x + 3y)^2 - (4x - 3y)^2$

18. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

19. $(2 - x)(4 + 2x + x^2)$

20. $(x - 3y^2)$

21. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Вопросы:

- 1) Что такое одночлен (многочлен)?
- 2) Чему равна степень одночлена?
- 3) Что такое старший член многочлена?
- 4) Что такое подобные члены?
- 5) Как умножить многочлен на одночлен?
- 6) Как умножить многочлен на многочлен?
- 7) Какие формулы сокращенного умножения вы знаете?
- 8) Какие способы разложения многочлена на множители вы знаете?

Разложите многочлен на множители:

1. $x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 18$



2. $2x^3 + 19x^2 + 41x + 15$

3. $x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x - 2$

4. $x^3 + 6x^2 + 12x + 6$

5. $x^6 + 5x^3 + 6$

6. $25x^2 - 30xy + 9y^2$

7. $4a + 24ab - 8b - 12a^2$

8. $(16m^2 - 9n^2) + (-20m + 15n)$

9. $\frac{(4a + 2b)(4a - 2b)}{16a^2 + 4b^2 - 16ab}$

10. $a^4 - 12a^3 + 48a^2 - 64a$

12. $x^3 - 3xy - 5x^2y + 15y^2$

Вопросы:

- 1) Что такое тождественные преобразование выражения?
- 2) Какие способы разложения многочлена на множители вы знаете?

6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Алгебраическая дробь – это выражение, в котором есть деление на переменную.

Например: $\frac{x+3}{x-1}$; $\frac{2}{3a-2}$.

Основное свойство дроби.

Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же выражение, которое



равно нулю.

Область определения дроби. Чтобы найти область определения дроби, нужно приравнять знаменатель дроби к нулю и исключить найденные значения из множеств.

Дробь $\frac{x}{x-2}$ имеет смысл, если $x-2 \neq 0$, $x \neq 2$

Следовательно, область определения дроби:

$$D = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$$

Дробь $\frac{5}{x^2-9}$ имеет смысл, если $x^2-9 \neq 0$; $x \neq 3$; $x \neq -3$ значит,

$$D = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

Тождественные преобразования дробных выражений

Преобразовать дробное рациональное выражение – это упростить или преобразовать его в алгебраическую дробь. Для тождественного преобразования дробного рационального выражения надо:

Упражнения.

1) Найти область определения выражения:

$$1. \frac{ac - a^2}{c^2} : \frac{c - a}{c} \qquad 3. \frac{2a}{a - b} + \frac{a - b}{b}$$

$$2. \frac{a^2 + 3b^2}{(a - b)^2} \qquad 4. \frac{x - 1}{x + 2} - \frac{x}{2 - x}$$

2) Упростить:

$$1. \left(\frac{a + 3b}{(a - b)^2} + \frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{a - 3b} \right) : \frac{a^2 + 3b^2}{(a - b)^2}$$

2.
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

3.
$$\frac{c-3}{c} - \frac{c^2-9}{c} \cdot \frac{1}{c-3}$$

4.
$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{b^2 - a^2}{ab}$$

5.
$$\frac{a^2 - 4}{a} \cdot \frac{1}{a+2} - \frac{a+2}{a}$$

6.
$$(c+2)(c-3) - (c-1)^2$$

7.
$$\frac{a^2}{a^2 - 25} : \frac{a}{5a + 25}$$

8.
$$\frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

9.
$$\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{a^2c^2}{(a-b)(c-b)} + \frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)}$$

10.
$$\frac{5a - 5b}{b} \cdot \frac{b^2}{a - b}$$

11.
$$\frac{2x - 2y}{x - y}$$

12.
$$\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2} + \frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{a-3b}\right) : \frac{a^2 + 3b^2}{(a-b)^2}$$

13.
$$\frac{y-z}{(x-y)} + \frac{z-x}{(y-x)(y-z)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)}$$



$$14. \frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}$$

$$15. \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$16. \frac{a+x}{a} : \frac{ax+x^2}{a^2}$$



ЛИТЕРАТУРА И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1. Математика. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для иностранных граждан, обучающихся на подготовительных факультетах вузов/ под общ. ред. А.И. Лобанова.- Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1987.- 304 с.
2. Практикум по дисциплине «Математика» для всех технологических и технических направлений подготовки. Электронный ресурс. Ковалева Т.Г., ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2015. <http://de.dstu.edu.ru>