

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ “ Информатика и вычислительная техника”

Кафедра “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”

Коледов Л.В.

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО для выполнения лабораторных работ по курсу "Ис-
следование операций"

часть 3.

«Симплекс-метод решения ЛП»

Пособие предназначено для студентов специальностей 010503, 230105

РОСТОВ - НА - ДОНУ

2014

Задание ЛР3. Решить «ВАШУ» задачу в среде LiPS, сохраняя протоколы модификации симплекс-таблиц для вклейки в отчет. К «вклейкам» добавьте комментарии по образцу, приведенному ниже и графические иллюстрации (поточнее, ручками или в графическом редакторе), подтверждающие решение, данное аналитически.

Пример выполнения. При всей «очевидности» интерфейса, предлагаемого нам LiPS, введем в него задачу.

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } Z = 3x_1 + 2x_2 \\ & \text{при ограничениях } \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 14, \\ x_1 - x_2 &\leq 3, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

Вот как выглядит запись этой задачи в текстовой форме LiPS:

max: $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 < 4$;
 - $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 < 14$;
 $x_1 - x_2 < 3$;

Сохраняем работу под именем «LiPS Model46.lpx».

Жмём F5 > Переходим в окно «LiPSReport46» ->

Сохранить как «LiPSReport1.rtf».

Теперь этот файл можно в WORD`е можно рассмотреть подробно. Вставляю последовательные таблицы отчета.

*** Фаза II --- Старт ***

Базис	x1	x2	s3	s4	s5	ССЧ
s3	-1	2	1	0	0	4
s4	3	2	0	1	0	14
s5	1	-1	0	0	1	3
цф	3	2	0	0	0	0

Переменная, вводимая в базис -> x1
 Соотношения: ССЧ/Столбец x1 -> { - 14/3 3 }
 Переменная, исключаемая из базиса -> s5

Столбец «Базис» содержит текущий набор базисных переменных. Столбец ССЧ – столбец свободных членов - содержит текущие значения базисных переменных. Строка «s3» соответствует преобразованному в равенство соотношению « $-x_1 + 2 \cdot x_2 < 4$ », куда внесена неотрицательная переменная s3, преобразующая неравенство в равенство: « $-x_1 + 2 \cdot x_2 + s_3 = 4$ ». Аналогично строка «s4» соответствует преобразованию неравенства « $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 < 14$ » в равенство « $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_4 = 14$ ». Далее, строка «s5» соответствует преобразованию неравенства « $x_1 - x_2 < 3$ » - в равенство « $x_1 - x_2 + s_5 = 3$ ». Строка «ЦФ» содержит значения коэффициентов

преобразованной целевой функции для текущей итерации. Полагая $x_1=x_2=0$, находим значения базисных переменных, $s_3 = 4$, $s_4 = 14$, $s_5 = 3$. Повезло! Это допустимое решение. Переменная, которая должна войти в базис – определяется по максимальному коэффициенту строки ЦФ. Следующие таблицы получены по F5:

*** фаза II --- итерация 1 ***

Базис	x1	x2	s3	s4	s5	ССЧ
s3	0	1	1	0	1	7
s4	0	5	0	1	-3	5
x1	1	-1	0	0	1	3
цф	0	5	0	0	-3	9

Переменная, вводимая в базис -> x2
 Соотношения: ССЧ/Столбец x2 -> { 7 1 - }
 Переменная, исключаемая из базиса -> s4

*** фаза II --- итерация 2 ***

Базис	x1	x2	s3	s4	s5	ССЧ
s3	0	0	1	-0.2	1.6	6
x2	0	1	0	0.2	-0.6	1
x1	1	0	0	0.2	0.4	4
цф	0	0	0	-1	0	14

>> Оптимальное решение НАЙДЕНО
 >> Максимум = 14

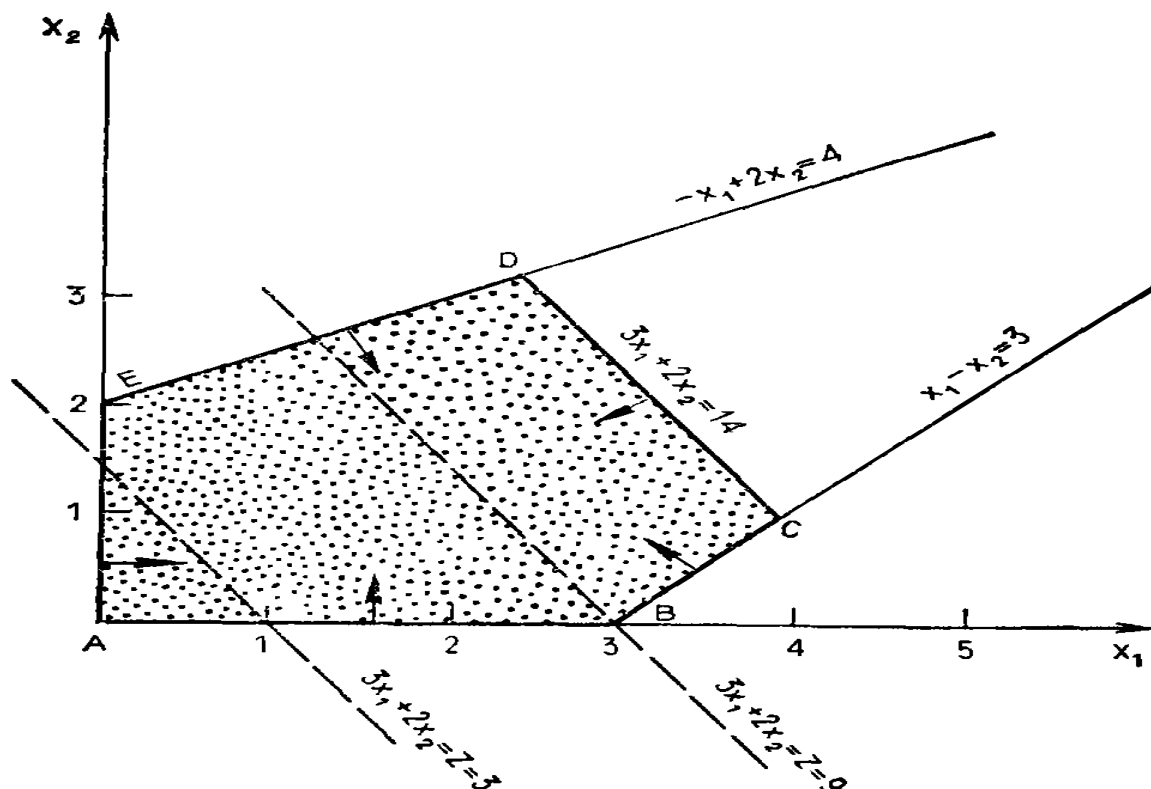
*** РЕЗУЛЬТАТЫ - ПЕРЕМЕННЫЕ ***

Переменная	Значение	Коефф. цф	Оценочный коефф.
x1	4	3	0
x2	1	2	0

*** РЕЗУЛЬТАТЫ - ОГРАНИЧЕНИЯ ***

Ограничение	Значение	ССЧ	Двойств. оценка
Row1	-2	4	0
Row2	14	14	1
Row3	3	3	0

Допустимая область для рассмотренной задачи.



Приложение

В этом месте приводится фрагмент из [1], достаточный для понимания алгоритма работы LiPS в нашем случае.

4.3. Задача линейного программирования в стандартной форме

Задача ЛП в стандартной форме с m ограничениями и n переменными имеет следующий вид:

максимизировать или минимизировать $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

при ограничениях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \dots \quad x_n \geq 0,$$

$$b_1 \geq 0, \quad b_2 \geq 0 \quad \dots \quad b_m \geq 0.$$

Задачи ЛП в стандартной форме можно записать в компактных матричных обозначениях следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{максимизировать или минимизировать } Z = cx \\ \text{при ограничениях } Ax = b, \quad x \geq 0, \quad b \geq 0, \end{array}$$

где A — матрица размерности $m \times n$, x — вектор-столбец размерности $n \times 1$, b — вектор-столбец размерности $m \times 1$, а c — вектор-строка размерности $1 \times n$.

Обычно A называется *матрицей коэффициентов*, x — *вектором переменных*, b — *вектором ресурсов*, c — *вектором оценок задачи* ЛП.

При решении задачи ЛП симплекс-методом требуется, чтобы задача была представлена в стандартной форме. Однако не все задачи ЛП имеют стандартную форму. Часто ограничения имеют вид не равенств, а неравенств. В некоторых задачах не все переменные можно считать неотрицательными. Таким образом, первый этап решения задачи ЛП состоит в приведении ее к стандартной форме.

4.3.1. Преобразование неравенств

Ограничения в виде неравенств можно преобразовать в равенства при помощи введения так называемых *остаточных* или *избыточных* переменных. Например, неравенство вида

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 25 \quad (4.1)$$

можно преобразовать в равенство при помощи введения *остаточной* переменной S_1 :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + S_1 = 25.$$

Переменная S_1 неотрицательна и соответствует разности правой и левой частей в неравенстве (4.1). Аналогично неравенство вида

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 12$$

можно преобразовать в равенство путем введения *избыточной* переменной S_2 :

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 - S_2 = 12.$$

Следует подчеркнуть, что дополнительные переменные столь же необходимы, как и исходные переменные задачи. Дополнительные переменные могут принимать положительные значения, а их значения в оптимальном решении позволяют судить о том, являются ли ограничения в виде неравенств *активными*.

4.3.2. Преобразование неограниченных по знаку переменных

В некоторых случаях возникает необходимость рассмотрения переменных, принимающих как положительные, так и отрицательные значения. Поскольку переменные задачи ЛП в стандартной форме предполагаются неотрицательными, неограниченные переменные следует заменить разностью двух неотрицательных. Например, если s_1 — неограниченная переменная, то используется следующая замена переменных:

$$s_1 = s_1^+ - s_1^-, \quad s_1^+ \geq 0, \quad s_1^- \geq 0.$$

Значение s_1 может быть положительным или отрицательным в зависимости от соотношения величин s_1^+ и s_1^- .

Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу ЛП, записанную в нестандартной форме.

Пример 4.5

Максимизировать $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$

при ограничениях $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$, (4.2)

$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$, (4.3)

$3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$, (4.4)

$x_1, x_2 \geq 0$.

где x_3 — переменная, не ограниченная по знаку.

Преобразуем эту задачу к стандартной форме.

1. Заменим x_3 на $x_4 - x_5$, где $x_4, x_5 \geq 0$.

2. Умножим обе части уравнения (4.4) на -1 .

3. Введем дополнительные переменные x_6 и x_7 в ограничения (4.2) и (4.3) соответственно.

4. Припишем нулевой коэффициент переменным x_6 и x_7 , целевая функция при этом не меняется.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к следующей задаче ЛП в стандартной форме:

максимизировать $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5$

при ограничениях $x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7$,

$x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2$,

$-3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5$,

$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$.

Используя стандартную форму задачи ЛП в матричных обозначениях:

$$\text{максимизировать } Z = cx$$

при ограничениях $Ax = b, x \geq 0$,

можно сформулировать основные определения следующим образом.

1. *Допустимое решение* представляет собой неотрицательный вектор x , для которого выполняются ограничения $Ax = b$.

2. *Допустимая область*, обозначаемая через S , состоит из всех допустимых решений. Формально это определение можно записать в следующем виде:

$$S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}.$$

Если допустимая область S пуста, задача ЛП называется *противоречивой*.

3. *Оптимальным решением* называется такой допустимый вектор x^0 , для которого соответствующее ему значение целевой функции (cx^0) больше, чем для любого другого допустимого решения. Таким образом, вектор x^0 является оптимальным решением задачи тогда и только тогда, когда $x^0 \in S$ и $cx^0 \geq cx$ для всех $x \in S$.

4. *Оптимальное значение* задачи ЛП представляет значение целевой функции, соответствующее оптимальному решению. Если Z^0 — оптимальное значение, то $Z^0 = cx^0$.

5. *Неединственность оптимального решения*. В том случае, когда задача ЛП имеет более одного оптимального решения, говорят, что у нее имеются *различные оптимальные решения*. При этом существует более одного допустимого решения со значениями целевой функции, равными оптимальному (Z^0).

6. *Единственность оптимума*. Говорят, что оптимальное решение задачи ЛП *единственно*, если не существует других оптимальных решений.

7. *Неограниченный оптимум*. В том случае, когда задача ЛП не обладает конечным оптимумом (т. е. $\max Z \rightarrow +\infty$ или $\min Z \rightarrow -\infty$), говорят, что задача имеет *неограниченный оптимум*.

4.4. Основы симплекс-метода

Рассмотрим общую задачу ЛП с m ограничениями и n переменными, записанную в стандартной форме:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ &\text{при ограничениях } \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ &x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

Как правило, число уравнений задачи меньше числа переменных (т. е. $m < n$), поэтому множество ее допустимых решений бесконечно. Следовательно, выбор наилучшего допустимого решения, максимизирующего Z , нетривиален.

Известен классический метод решения систем линейных уравнений, называемый *методом Гаусса — Жордана* (см. приложение В). Основная идея этого метода состоит в сведении системы m уравнений с n неизвестными к *каноническому* или *ступенчатому виду* при помощи элементарных операций над строками. При использовании первых m переменных (x_1, \dots, x_m) каноническая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1 + \bar{a}_{1, m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1s}x_s + \dots + \bar{a}_{1n}x_n &= \bar{b}_1, \\ x_r + \bar{a}_{r, m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n &= \bar{b}_r, \\ x_m + \bar{a}_{m, m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{ms}x_s + \dots + \bar{a}_{mn}x_n &= \bar{b}_m. \end{aligned} \quad (S1)$$

Переменные x_1, \dots, x_m , входящие с единичными коэффициентами только в одно уравнение системы и с нулевыми — в остальные, называются *базисными* или *зависимыми*. В канонической системе каждому уравнению соответствует ровно одна базисная переменная. Остальные $n - m$ переменных (x_{m+1}, \dots, x_n) называются *небазисными* или *независимыми* переменными.

При записи системы в каноническом виде все ее решения можно получить, присваивая независимым переменным произвольные значения и решая затем получающуюся каноническую систему относительно зависимых переменных. Для приведения системы к каноническому виду можно использовать два типа элементарных операций над строками.

1. Умножение любого уравнения системы на положительное или отрицательное число.

2. Прибавление к любому уравнению другого уравнения системы, умноженного на положительное или отрицательное число.

Определение

Элементарное преобразование представляет собой последовательность элементарных операций над строками, в результате которой коэффициент при некоторой переменной становится равным единице в одном из уравнений системы и нулем в остальных уравнениях.

Определение

Базисным решением системы в каноническом виде называется решение, полученное при нулевых значениях небазисных переменных.

Например, в системе (S1) одно из базисных решений задается как $x_1 = \bar{b}_1, \dots, x_m = \bar{b}_m, x_{m+1} = \dots = x_n = 0$. Если $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m$ к тому же неотрицательны, то полученное решение называется допустимым базисным решением.

Определение

Базисное решение называется допустимым базисным решением, если значения входящих в него базисных переменных неотрицательны.

В системе (S1) для удобства записи в качестве базисных используются первые m переменных. В действительности для получения канонической системы уравнений и базисного решения любые m из n переменных можно выбрать в качестве базисных. Это означает, что максимальное число базисных решений задачи ЛП с m ограничениями и n переменными, записанной в стандартной форме, конечно и выражается следующим образом:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Каждое допустимое базисное решение по определению является базисным решением. Следовательно, максимальное число допустимых базисных решений также ограничено приведенной величиной.

В конце разд. 4.2 указывалось, что если задача ЛП обладает оптимальным решением, то хотя бы одна из вершин допустимой области оптимальна. Можно доказать, что любая вершина допустимой области соответствует некоторому допустимому решению системы ограничений. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП можно найти путем перебора допустимых базисных решений. Такой процесс будет конечным, поскольку число допустимых базисных решений не превосходит величины $\binom{n}{m}$.

Интуитивный подход к решению задачи ЛП, обладающей оптимальным решением, состоит в нахождении при помощи метода Гаусса — Жордана всех возможных допустимых базисных решений и последующем выборе решения, которому соответствует наилучшее значение целевой функции. Однако при решении задач ЛП симплекс-метод оказывается более эффективным, так как при этом анализируется лишь часть всех допустимых базисных решений. Ниже приводится подробное описание симплекс-метода.

Симплекс-метод разработан Дж. Данцигом. Он представляет собой итеративную процедуру решения задач ЛП, записанных в стандартной форме. При этом требуется, чтобы система ограничений-равенств была приведена к каноническому виду, что дает возможность легко находить допустимое базисное решение. Алгоритм симплекс-метода включает следующие основные шаги:

1. Выбор начального допустимого базисного решения.
2. Переход от начального решения к другому допустимому базисному решению с лучшим значением целевой функции. На этом шаге исключаются из рассмотрения все допустимые базисные решения, которые хуже текущего решения. В силу этого обстоятельства симплекс-метод гораздо эффективнее упомянутого выше «прямого» подхода к решению задач ЛП.

3. Продолжение поиска допустимых базисных решений, улучшающих значение целевой функции. Если некоторое допустимое базисное решение нельзя улучшить, оно является оптимальным, и алгоритм симплекс-метода завершает свою работу.

Рассмотрим шаг 2 симплекс-метода в предположении, что базисное решение, задаваемое системой (S1), допустимо. Пусть допустимое базисное решение задано в следующем виде:

Базисные переменные $x_i = \bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$,

Небазисные переменные $x_j = 0$, $j = m+1, \dots, n$.

Множество базисных переменных называется *базисом* и обозначается через x_B . Вектор коэффициентов при базисных переменных обозначается через c_B . Для начального базиса

$$x_B = (x_1, \dots, x_m), \quad c_B = (c_1, \dots, c_m).$$

Поскольку небазисные переменные равны нулю, значение целевой функции Z , соответствующее начальному допустимому базисному решению, равно

$$Z = c_B x_B = c_1 \bar{b}_1 + \dots + c_m \bar{b}_m.$$

Симплекс-метод дает возможность проверить существование допустимого базисного решения с бóльшим значением Z . Для этого сначала проводится проверка оптимальности рассматриваемого решения. Если оно не оптимально, симплекс-метод позволяет перейти к *смежному допустимому базисному решению* с бóльшим (или по крайней мере не меньшим) значением Z .

Определение

Смежное допустимое базисное решение отличается от рассматриваемого только одной базисной переменной.

Для получения смежного допустимого базисного решения симплекс-метод превращает одну из базисных переменных в небазисную и вводит одну из небазисных переменных в базис. Необходимо выбрать базисную и небазисную переменные так, чтобы замена одной из них на другую давала максимальное приращение целевой функции.

В любом допустимом базисном решении базисные переменные положительны, а небазисные равны нулю. Следовательно, превращение небазисной переменной в базисную приводит к увеличению ее значения от нуля до некоторой положительной величины. Вводимая в базис переменная должна давать улучшение значения Z . Для выбора вводимой в базис переменной следует присвоить небазисной переменной значение, равное единице, и вычислить изменение целевой функции.

Для иллюстрации рассмотрим небазисную переменную x_s . Пусть ей присвоено значение, равное единице; исследуем получаемое при этом изменение целевой функции. Заметим сначала, что,

поскольку рассматриваются только смежные допустимые базисные решения, остальные базисные переменные по-прежнему равны нулю, так что систему (S1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + \bar{a}_{1s}x_s = \bar{b}_1, \\ & \vdots \\ x_r & + \bar{a}_{rs}x_s = \bar{b}_r, \\ & \vdots \\ x_m & + \bar{a}_{ms}x_s = \bar{b}_m. \end{array} \quad (S2)$$

Из системы (S2) при возрастании x_s от 0 до 1 получаем новое решение

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{b}_i - \bar{a}_{is}, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_s &= 1, \quad x_j = 0, \quad j = m+1, \dots, n, \quad j \neq s. \end{aligned}$$

Новое значение целевой функции равно

$$Z = \sum_{i=1}^m c_i (\bar{b}_i - \bar{a}_{is}) + c_s.$$

Обозначим через \bar{c}_s приращение величины Z , получающееся при увеличении значения x_s на единицу. Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{c}_s &= \text{Новое значение } Z - \text{Старое значение } Z = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i (\bar{b}_i - \bar{a}_{is}) + c_s - \sum_{i=1}^m c_i \bar{b}_i = \\ &= c_s - \sum_{i=1}^m c_i \bar{a}_{is}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Величина \bar{c}_s называется *относительной оценкой* небазисной переменной x_s , тогда как c_s является исходной оценкой x_s в целевой функции. Если $\bar{c}_s > 0$, то можно добиться увеличения значения целевой функции Z , вводя переменную x_s в базис. Уравнение (4.5), определяющее относительную оценку, известно под названием *правила скалярного произведения*.

Правило скалярного произведения

Относительная оценка небазисной переменной x_j , обозначаемая через \bar{c}_j , равна

$$\bar{c}_j = c_j - c_B \bar{P}_j,$$

где c_B соответствует оценкам базисных переменных, а \bar{P}_j представляет собой j -й столбец в канонической системе, соответствующей рассматриваемому базису.

Условие оптимальности

Если относительные оценки небазисных переменных допустимого базисного решения задачи максимизации *отрицательны* или *равны нулю*, то решение оптимально.

Ясно, что если $\bar{c}_j \leq 0$ для всех небазисных переменных, то любому смежному допустимому базисному решению соответствует значение целевой функции, не превосходящее уже достигнутого. Отсюда следует, что в рассматриваемой точке имеется локальный максимум. Поскольку целевая функция Z линейна, локальный максимум совпадает с глобальным.

С целью пояснения предположим, что $\bar{c}_s = \max \bar{c}_j > 0$ и, следовательно, начальное допустимое базисное решение неоптимально. Поскольку величина \bar{c}_s положительна, при увеличении значения небазисной переменной x_s на единицу Z возрастает на \bar{c}_s . Чем больше увеличение значения x_s , тем больше приращение величины Z , поэтому необходимо, чтобы значение x_s было возможно большим. С другой стороны, при увеличении x_s значения остальных базисных переменных также меняются, и их новые значения находятся из системы (S2):

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}x_s, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.6)$$

Если $\bar{a}_{is} < 0$, то x_i возрастает вместе с x_s , а при $\bar{a}_{is} = 0$ значение x_i не меняется. Однако если $\bar{a}_{is} > 0$, переменная x_i убывает с ростом x_s и становится отрицательной при неограниченном увеличении x_s , а решение — недопустимым. Таким образом, максимальное допустимое значение x_s определяется следующим правилом:

$$\max x_s = \min_{\bar{a}_{is} > 0} [\bar{b}_i / \bar{a}_{is}]. \quad (4.7)$$

Пусть $\bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} [\bar{b}_i / \bar{a}_{is}]$.

Следовательно, при увеличении x_s до \bar{b}_r / \bar{a}_{rs} базисная переменная x_r первой среди базисных переменных обращается в нуль и заменяется в базисе переменной x_s . Переменная x_s становится новой базисной переменной в r -й строке, причем новое допустимое базисное решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{b}_i - \bar{a}_{is} (\bar{b}_r / \bar{a}_{rs}) \text{ при всех } i, \\ x_s &= \bar{b}_r / \bar{a}_{rs}, \\ x_j &= 0 \text{ для всех остальных небазисных переменных,} \\ &\quad j = m+1, \dots, n, \quad j \neq s. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку при увеличении x_s на единицу приращение Z составляет \bar{c}_s , для нового решения общее приращение Z равно

$$(\bar{c}_s) (\bar{b}_r / \bar{a}_{rs}) > 0.$$

Уравнение (4.7), на основании которого определяются базисные переменные, выводимые из базиса, носит название *правила минимального отношения*. При использовании симплекс-метода вычисление относительных оценок всех небазисных переменных текущего допустимого базисного решения (4.8) и проверка его оптимальности проводятся до тех пор, пока не будут выполнены условия оптимальности.

Проиллюстрируем теперь на примере основные шаги симплекс-алгоритма.

Пример 4.6

Используем симплекс-метод для решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{при ограничениях } & -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ & x_1 - x_2 \leq 3, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Приведение задачи к стандартной форме при помощи дополнительных переменных дает:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{при ограничениях } & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14, \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

В допустимом базисном решении системы уравнений в каноническом виде базисными переменными являются x_3 , x_4 и x_5 . Последовательные итерации симплекс-метода удобно представить в компактном виде, используя таблицу для записи ограничений и целевой функции. При этом вспомогательные вычисления (например, с использованием правила скалярного произведения, правила минимального отношения и элементарных преобразований) можно проводить при помощи стандартных процедур. Использование табличной формы записи делает симплекс-метод более удобным и эффективным при реализации на ЭВМ.

Элементы таблиц представляют собой коэффициенты задачи (в табл. 1 содержится начальное допустимое базисное решение для примера 4.6). Заметим, что для каждого ограничения записаны лишь коэффициенты при входящих в него переменных. Коэффициенты целевой функции c_j находятся над коэффициентами соответствующих им переменных x_j . Понятие *базис* обозначает совокупность базисных переменных начальной таблицы (x_3 для ограничения 1, x_4 для ограничения 2 и x_5 для ограничения 3), а символом c_B обозначена совокупность значений оценок переменных c_j базиса. Из табл. 1 легко находится начальное допустимое базисное решение: $x_3 = 4$, $x_4 = 14$, $x_5 = 3$, $x_1 = x_2 = 0$. Значение целевой функции Z

задается скалярным произведением вектора c_B и вектора правых частей уравнений:

$$Z = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Для проверки оптимальности найденного допустимого базисного решения следует вычислить относительные оценки переменных (пользуясь правилом скалярного произведения). Заметим, что относительные оценки $\bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5$ будут нулевыми, поскольку соответствующие переменные — базисные. Небазисные переменные x_1 и x_2

Таблица 1

c_j							
		3	2	0	0	0	
c_B	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Постоянные
0	x_3	-1	2	1	0	0	4
0	x_4	3	2	0	1	0	14
0	x_5	①	-1	0	0	1	3
\bar{c} -строка		3	2	0	0	0	$Z = 0$

имеют положительные относительные оценки. Следовательно, рассматриваемое допустимое базисное решение неоптимально. Небазисная переменная x_1 имеет наибольшую относительную оценку, поэтому ее следует ввести в базис.

Для определения переменной, выводимой из базиса, применяется правило минимального отношения (4.7). Вычисляются соответствующие отношения для всех ограничений с положительным коэффициентом при x_1 :

Номер строки	Базисная переменная	Отношение
1	x_3	∞
2	x_4	14/3
3	x_5	3/1

Заметим, что для первой строки это отношение не вычисляется (оно принимается равным ∞), поскольку коэффициент при x_1 в строке 1 отрицателен. Это означает, что можно неограниченно увеличивать x_1 , причем при этом значение x_3 остается положительным. С другой стороны, из значения 14/3 для отношения во второй строке следует, что x_4 станет равным нулю при возрастании x_1 до 14/3. Аналогично

если x_1 возрастет до 3, то x_5 обратится в нуль. Минимальное отношение равно 3, поэтому при возрастании x_1 от 0 до 3 первой среди базисных переменных обратится в нуль x_5 ; она заменится в базисе переменной x_1 . Третья строка называется *ведущей строкой*, а коэффициент при x_1 в ведущей строке называется *ведущим элементом* (в табл. 1 он обведен кружком). Элементарное преобразование приводит к системе с новыми базисными переменными x_3 , x_4 и x_1 :

1) прибавить ведущую строку (строку 3) к первой, чтобы исключить переменную x_1 ;

2) умножить ведущую строку на (-3) и прибавить ее ко второй строке, чтобы исключить x_1 .

Для проверки оптимальности полученного в табл. 2 допустимого базисного решения необходимо вычислить вектор относительных оценок (строку \bar{c}). Это можно выполнить, пользуясь правилом скалярного произведения. С другой стороны, новую строку \bar{c} можно вычислить, применяя элементарное преобразование. Относительная

Таблица 2

c_B	Базис	c_j					Постоянные
		3	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	1	1	0	1	7
0	x_4	0	⑤	0	1	-3	5
3	x_1	1	-1	0	0	1	3
\bar{c} -строка		0	5	0	0	-3	$Z = 9$

оценка переменной x_1 должна быть равна нулю, поскольку x_1 вошла в базис. Равенства нулю можно добиться, умножая третью строку на -3 и прибавляя ее к строке \bar{c} . В результате автоматически получается новая строка \bar{c} табл. 2.

Рис. 4.5 графически иллюстрирует переход от табл. 1 к табл. 2. Символами $ABCDE$ обозначена допустимая область примера 4.6. Пунктирные прямые соответствуют значениям целевой функции $Z=3$ и $Z=9$. Допустимое базисное решение, представленное в табл. 1, соответствует вершине A . Из рассмотрения строки \bar{c} в табл. 1 видно, что для увеличения Z в базис можно ввести любую из переменных x_1 или x_2 . На рис. 4.5 видно, что увеличение любой из них вызывает рост значения Z . В пределах допустимой области значение x_1 можно увеличить не более чем на три (точка B). Эта величина и составляет минимальное отношение, задаваемое симплекс-методом. Следовательно, табл. 2 соответствует точке B на рис. 4.5.

Строка \bar{c} табл. 2 все еще содержит положительный элемент, что указывает на возможность введения в базис небазисной переменной.

ной x_2 , улучшающей значение целевой функции. Применяя правило минимального отношения, находим минимум из набора $(7/1, 5/5, \infty)$. Переменная x_2 должна занять место базисной переменной x_4 . В табл. 3 представлено следующее допустимое базисное решение, полученное после выполнения элементарной операции. Поскольку в табл. 3 все элементы строки \bar{c} неположительные, она оптимальна. Оптимальное решение имеет следующий вид: $x_1=4$, $x_2=1$, $x_3=6$, $x_4=0$, $x_5=0$, а оптимальное значение Z равно 14.

Таблица 3

c_B	Базис	c_j					Постоянные
		3	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	6
2	x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1
3	x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	4
\bar{c} -строка		0	0	0	-1	0	$Z = 14$

Неединственность оптимума. Небазисная переменная x_5 в табл. 3 имеет нулевую относительную оценку. Следовательно, изменение x_5 не приведет к изменению значения целевой функции. Таким образом, переменную x_5 можно ввести в базис, причем для соответствующего допустимого базисного решения значение целевой функции Z также равно 14. По определению любое

Таблица 4

c_B	Базис	c_j					Постоянные
		3	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{15}{4}$
2	x_2	0	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{4}$
3	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$
\bar{c} -строка		0	0	0	-1	0	$Z = 14$

допустимое решение, для которого соответствующее значение Z равно оптимальному, также оптимально. Следовательно, в данном случае у задачи ЛП имеются различные оптимальные решения. Одно из них получается, если переменную x_5 ввести в базис. Согласно правилу минимального отношения, из базиса необходимо вывести переменную x_3 ; при этом получается оптимальная табл. 4.

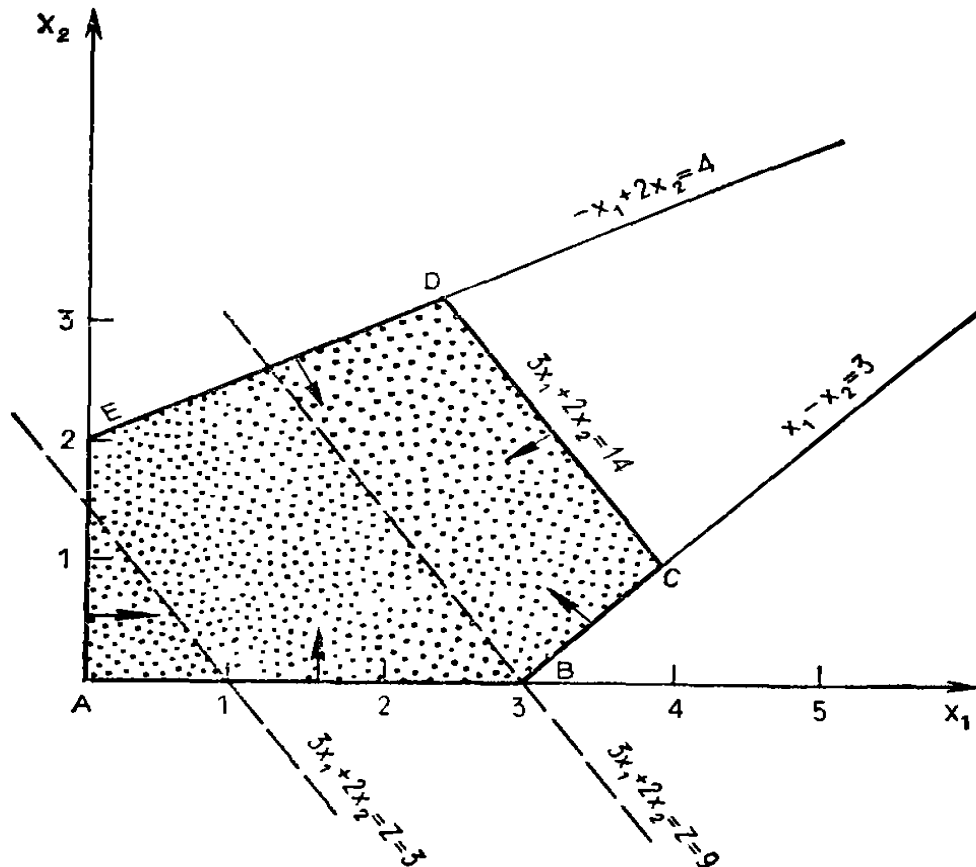


Рис 4.5. Допустимая область задачи из примера 4.6.

Ей соответствует оптимальное решение, отличное от первоначального: $x_1=5/2$, $x_2=13/4$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=15/4$.

Итак, если в оптимальной таблице имеется небазисная переменная с нулевой относительной оценкой (\bar{c}_j), то оптимальное решение неединственно. На рис. 4.5 переход от табл. 2 к табл. 3 при помощи симплекс-метода соответствует движению вдоль ребра BC допустимой области. Поскольку целевая функция Z равна $3x_1 + 2x_2$, ясно, что угловые точки C и D , а также все точки отрезка CD являются оптимальными.

Основные шаги вычислительного процесса

Основными шагами процесса вычислений в соответствии с симплекс-методом в табличной форме применительно к задаче максимизации являются следующие.

Шаг 1. Записать задачу в стандартной форме.

Шаг 2. Заполнить первоначальную таблицу с использованием начального допустимого базисного решения. (Процедура отыскания такого решения описывается ниже.)

Шаг 3. Вычислить вектор относительных оценок (строки \bar{c}) при помощи правила скалярного произведения.

Шаг 4. Если все оценки \bar{c}_j неположительные, текущее допустимое базисное решение оптимальное. В противном случае необходимо ввести в базис небазисную переменную с наибольшим значением \bar{c}_j .

Шаг 5. Определить при помощи правила минимального отношения переменную, выводимую из базиса.

Шаг 6. Применить элементарное преобразование для получения нового допустимого базисного решения и новой таблицы.

Шаг 7. Вычислить новые относительные оценки с использованием элементарного преобразования или правила скалярного произведения. Перейти к шагу 4.

Итерацией симплекс-метода называется выполнение шагов 4—7 описанного процесса. На каждой итерации получаются новая таблица и улучшенное допустимое базисное решение. Число допустимых базисных решений, просматриваемых при использовании симплекс-метода, представляет собой важную характеристику эффективности этого метода.

4.4.1. Задачи минимизации

Для решения задач минимизации можно использовать два подхода.

Подход 1. Преобразование задачи минимизации в эквивалентную задачу максимизации путем умножения целевой функции на -1 и последующего применения симплекс-метода к задаче максимизации.

Подход 2. Напомним, что относительные оценки в строке \bar{c} представляют изменение Z при увеличении небазисной переменной на единицу. Отрицательный коэффициент в строке \bar{c} указывает на уменьшение Z при увеличении соответствующей небазисной переменной. Следовательно, для задач минимизации в базис должны вводиться небазисные переменные x_j с отрицательными \bar{c}_j , поскольку они улучшают целевую функцию. Если все коэффициенты в строке \bar{c} неотрицательные, текущее решение оптимальное. Таким образом, для решения задач минимизации можно использовать семь шагов алгоритма, изменив шаг 4 симплекс-метода.

Модифицированный шаг 4. Если все коэффициенты в строке \bar{c} положительны или равны нулю, текущее допустимое базисное решение оптимальное. В противном случае необходимо ввести в базис небазисную переменную с наименьшим (т. е. отрицательным и максимальным по абсолютной величине) значением относительной оценки.

Литература.

1. Реклейтис Г. и др. Оптимизация в технике: в 2-х книгах, М. Мир, 1985.