

Министерство образования и науки РФ

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»

**Методы формализованного представления
систем управления**

Методические указания
по курсу «Исследование систем управления»

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2004

УДК 00000000

Методы формализованного представления систем управления: Методические указания по курсу «Исследование систем управления»/ Сост.: Росс С.И. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 3004. 00 с.

Содержат описание методов линейного, сетевого и динамического программирования. Приведена методика и примеры использования данных методов, а также наборы задач для самостоятельного решения.

Предназначены для подготовки дипломированных специалистов по специальности 061100 – «Менеджмент организации» и бакалавров по направлению 521500 - «Менеджмент», а также могут быть полезны экономистам других специальностей.

Учреждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

В данных указаниях рассматриваются не технические или биологические, а только социально-экономические системы, или как их еще называют хозяйственные системы.

В хозяйственных системах смысл процесса управления состоит в изменении их организованности, причем осуществляется процесс управления в форме принятия и реализации хозяйственных решений, другой формы проявления управления в системах этого класса не существует.

Принятие решений при управлении хозяйственной системой возможно только на основе сбора и анализа информации о системе управления, в том числе с помощью формализованных математических, экономико-математических методов и моделей.

В теме 1 указаний рассматривается применение линейного программирования, в теме 2 – сетевого планирования и в теме 3 – динамического программирования к задаче исследования систем управления. Приводятся примеры практического использования данных методов, а также задачи для самостоятельного решения.

Тема 1. Линейное программирование в исследовании систем управления

Исследование систем управления в части формализованных методов (т.е. нахождение оптимального способа действия в условиях определенных экономических ограничений) сводится к построению математических моделей и анализу их характеристик. Совокупность математических методов, позволяющих проводить такой анализ, образует раздел математики, называемый математическим программированием [4,5,7].

Построение математической модели означает определение целевой функции $Z = f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и множества Ω , на котором она задана: $\vec{x} \in \Omega$. Множество Ω называется областью допустимых планов задачи.

Тот план, на котором целевая функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения – оптимальный план. Это и есть решение задачи. Методы нахождения оптимального плана зависят от конкретного вида функции $f(x)$ и множества Ω . Поэтому математическое программирование со-

быль от продажи 1 кг продукции и количество ресурсов, которыми фабрика располагает на один день:

Таблица 1.1

Ресурсы	Печенье, на 1 кг	Торты, на 1 кг	Дневной запас ресурса
Сахар	0,4 кг	0,4 кг	120 кг
Яйца	3 шт.	5 шт.	1 500 шт.
Мука	0,5 кг	0,25 кг	100 кг
Прибыль у.е./кг	3	6	

Требуется составить дневной план выпуска продукции, при котором фабрика получит наибольшую прибыль.

Математическая формулировка

Главным моментом построения математической модели является идентификация переменных (искомых величин данной задачи). Далее следует определить ограничения на переменные, которые диктуются условиями исходной задачи. Эти ограничения и зададут множество Ω . Теперь нужно определить цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи. Формулировка этой цели на математическом языке и приведет к построению целевой функции.

Пусть x_1 - количество (в килограммах) печенья, выпускаемого фабрикой в день, x_2 - количество (в килограммах) тортов, выпускаемых фабрикой в день.

Тогда количество сахара, расходуемого фабрикой в день: $0,4x_1 + 0,4x_2$. Эта величина не должна превышать имеющийся у фабрики дневной запас сахара в 120 кг. Количество яиц, расходуемое в день: $3x_1 + 5x_2$. Но их дневной запас - 1 500 штук. Количество муки, необходимое на день: $0,25x_1 + 0,5x_2$. Ее в наличии имеется 100 кг на день.

Очевидны следующие ограничения:

$$0,4x_1 + 0,4x_2 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 1500$$

$$0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 100$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2$ (условие неотрицательности переменных). Прибыль за сутки составит $3x_1 + 6x_2$ условных денежных единиц и ее, естественно, нужно максимизировать. Таким образом, целевая функция имеет вид:

$$Z = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

1.2 Задача о диете

Для поддержания отменного здоровья собаку следует кормить мясом и овсянкой. В среднем в день большая собака съедает 10 кг пищи. При этом кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Ограничиваясь, для простоты, только тремя компонентами – белками, жирами и углеводами – можно сказать, что дневной рацион собаки должен содержать: не менее 20% белков, не менее 10%, но не более 40% жиров, не менее 30% углеводов.

В таблице приведены данные по содержанию питательных веществ в каждом виде корма и стоимость 1 кг корма:

Таблица 1.2

Корм	Белки, на 1 кг	Жиры, на 1 кг	Углеводы, на 1 кг	Стоимость, в у.е.
Мясо	0,25	0,15	0,35	5
Овсянка	0,08	0,04	0,6	2

Сколько мяса и сколько овсянки должна получать собака в день, чтобы были соблюдены все требования по питательности пищи, а затраты на ее содержание при этом были минимальны?

Математическая формулировка

Выберем переменные: x_1 - содержание мяса (в кг) в дневном рационе собаки, x_2 - содержание овсянки (кг) в дневном рационе собаки.

Теперь приступим к выводу ограничений. Общий вес дневной пищи составляет $x_1 + x_2$ кг, и эта величина должна равняться 10 кг. Заметим, что если оптимальное решение будет соответствовать расходу пищи, строго равному 10 кг (в день), ограничение, представленное в виде неравенств $x_1 + x_2 \geq 10$ не будет препятствовать получению такого решения.

Теперь вспомним о требованиях, предъявляемых к пище с точки зрения ее питательности.

Содержание белков в дневном рационе $0,25x_1 + 0,08x_2$ должно быть не менее $0,2(x_1 + x_2)$. Жиров должно быть не менее 10%: $0,15x_1 + 0,04x_2 \geq 0,1(x_1 + x_2)$, но и не более 40%: $0,15x_1 + 0,04x_2 \leq 0,4(x_1 + x_2)$. Углеводов требуется не менее 30%: $0,35x_1 + 0,6x_2 \geq 0,3(x_1 + x_2)$. Эти ограничения можно упростить, объединив в левых частях неравенств члены, содержащие x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 10 \\0,05x_1 - 0,12x_2 &\geq 0 \\0,05x_1 - 0,06x_2 &\geq 0 \\0,25x_1 + 0,36x_2 &\geq 0 \\0,05x_1 + 0,3x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2$ (условие неотрицательности переменных).

Минимизацией расходов по поддержанию отменного здоровья собаки

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

завершается построение математической модели данной задачи.

1.3 Планирование работы автобусного парка

Сбор и обработка необходимой информации показали, что минимальное количество автобусов, которым можно удовлетворить потребности в перевозках пассажиров по данному маршруту в микрорайоне, существенно меняется в течение суток. Их количество можно считать величиной постоянной в пределах следующих четырехчасовых интервалов:

Таблица 1.3

6:00 – 10:00	10:00 – 14:00	14:00–18:00	18:00 –22:00	22:00 – 2:00
10 авт.	4 авт.	6 авт.	12 авт.	4 авт.

В период с 2:00 до 6:00 автобусы не требуются. Также было установлено, что с учетом затрат времени на текущий ремонт и обслуживание, непрерывное использование автобуса на линии должно продолжаться только по 8 часов в сутки.

Требуется определить количество автобусов в каждой из смен, при учете, что оно должно быть не меньше минимальной потребности в них, а также, чтобы общее количество автобусов, выходящих на линию в течение суток, было минимальным.

Математическая формулировка

Заметим, что если ориентироваться на общепринятый восьмичасовой график работы 6:00 – 14:00; 14:00 – 22:00; 22:00 – 6:00, то очевидно, что в первой смене должно работать не меньше 10 автобусов; во второй – не меньше 12 автобусов; а в третьей – не меньше 4 автобусов. Итого, минимальное количество автобусов, задействованных в течение суток, будет равняться $10+12+4=26$. Однако более выгодным может оказаться график работы с накладывающимися друг на друга сменами. Например, рассмотрим следующий график работы автобусов.

Пусть x_1 - число автобусов, выходящих на линию в 6:00, x_2 - число автобусов, выходящих на линию в 10:00, x_3 - число автобусов, выходящих на линию в 14:00, x_4 - число автобусов, выходящих на линию в 18:00, x_5 - число автобусов, выходящих на линию в 22:00, x_6 - число автобусов, выходящих на линию в 2:00. Тогда мы получаем следующую математическую модель. Ограничения:

$$\begin{aligned}x_1 + x_6 &\geq 10 \\x_1 + x_2 &\geq 4 \\x_2 + x_3 &\geq 6 \\x_3 + x_4 &\geq 12 \\x_4 + x_5 &\geq 4 \\x_5 + x_6 &\geq 0 \\x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, 6\end{aligned}$$

Целевая функция: $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$

Отметим, что последнее неравенство в системе неравенств выполняется автоматически, следовательно, его можно исключить. Анализ данной модели приводит к следующему оптимальному решению: требуется только 22 автобуса. Таким образом, варьирование выбора начала смен позволяет существенно улучшать решение – уменьшать суточную потребность в автобусах.

1.4 Задача о раскрое или минимизации обрезков

Ателье по пошиву женских кожаных курток располагает кусками кожи определенного размера. Для модели, которая шьется в этом сезоне, требуется 2 детали типа А, 3 детали типа В и 4 детали типа С. В результате анализа всех возможных способов раскроя материала были получены пять разных вариантов, схематически представленных на рис.1.

Первый вариант 16 кв. дм

А	В	***** *****
---	---	----------------

Второй вариант 8 кв. дм

В	С	*****
	С	*****

Третий вариант

А	С
	С

Четвертый вариант 24 кв. дм

В	В	***** *****
---	---	----------------

Пятый вариант 8 кв. дм

А	А	*
		*

Рис.1. Пять вариантов раскроя кожи

Заштрихованная часть представляет собой отходы. На деталь А уходит 40 кв.дм кожи, на деталь В – 32 кв.дм кожи и деталь С – 24 кв.дм кожи. Ателье имеет заказ на 100 курток. Требуется найти сочетание вариантов раскроя кожи, при котором имеющийся заказ будет удовлетворен с минимальными потерями.

Математическая формулировка

Определим переменные следующим образом: $x_j, j = 1, 2, \dots, 5$ - количество кусков кожи, раскроенных по j -му варианту. Тогда деталей типа А получим $x_1 + x_3 + 2x_5$ штук, типа В , $x_1 + x_2 + 2x_4$ штук и типа С штук.

Обозначим через y_1, y_2, y_3 избыточное количество деталей А, В, С, соответственно. Тогда

$$y_1 = x_1 + x_3 + 2x_5 - 200$$

$$y_2 = x_1 + x_2 + 2x_4 - 300$$

$$y_3 = 2x_2 + 2x_3 - 400$$

Общее выражение для суммарной величины потерь кожи (в единицах площади) будет иметь следующий вид:

$$16x_1 + 8x_2 + 24x_4 + 8x_5 + 40y_1 + 32y_2 + 24y_3$$

Таким образом, мы получили следующую математическую модель:

$$x_1 + x_3 + 2x_5 - y_1 = 200$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 - y_2 = 300$$

$$0x_1 + 2x_2 + 2x_3 - y_3 = 400$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5; y_k \geq 0, k = 1, 2, 3.$$

$$Z = 16x_1 + 8x_2 + 24x_4 + 8x_5 + 40y_1 + 32y_2 + 24y_3 \rightarrow \min$$

Решение этих и подобных задач осуществляется с помощью разных методов линейного программирования (графического, симплекс-метода, ветвей и границ и др.). В настоящее время оно реализовано на основе применения электронных таблиц MS Excel.

1.4 Задачи линейного программирования

для самостоятельного решения

Задача 1. На одном из предприятий в специализированных бассейнах разводят на продажу два вида рыб: карпов и окуней. При этом используются два вида корма: k_1 и k_2 . Средняя масса карпа составляет 2 кг, окуня – 1 кг. Карп в среднем потребляет 1 единицу корма k_1 и 3 единицы корма k_2 в день, окунь – 2 единицы корма k_1 и 1 единицу корма k_2 . Ежедневный запас корма k_1 составляет 500 единиц, корма k_2 - 900 единиц. В каком количестве следует разводить каждый вид рыбы, чтобы максимизировать их общую массу? При этом чтобы выполнить имеющийся заказ окуней должно быть не менее 50 особей.

Ответ: $x_1 = 200, x_2 = 120, Z_{\max} = 640$.

Задача 2. Фирма «Русский чайный дом» производит и продает две марки чая – «Боярский» и «Купеческий». Для их изготовления используются одни и те же сорта чая в разных пропорциях, которые указаны в таблице. В этой же таблице указаны дневные запасы ингредиентов и прибыль от продажи 1 кг готовой продукции:

Таблица 1.4

Ингредиенты	«Боярский»	«Купеческий»	Запас на день, кг
Цейлонский чай	0,6	0,3	54
Индийский чай	0,3	0,2	48
Грузинский чай	0,1	0,5	36
Прибыль, у.е.	18	14	

Составить дневной план выпуска продукции, при котором прибыль фирмы будет максимальной.

Ответ $x_1 = 60, x_2 = 60, Z_{\max} = 1920$.

Задача 3. В ресторанах «McDonald's» был проведен конкурс на самую популярную продукцию. Наибольшее признание получили два вида сендвичей: чизбургеры и гамбургеры. Для приготовления сендвичей требуется горчица, кетчуп, мясо, и сыр в пропорциях, которые указаны в таблице:

Таблица 1.5

Ингредиент	Чизбургер	Гамбургер	Запас ресурсов на 1 час
Горчица	0,6 мл	0,6 мл	27 мл
Кетчуп	8 мл	5 мл	300 мл

Мясо	40 г	65 г	2 600 г
Сыр	15 г	0	450 г
Прибыль, у.е.	20	15	

Какое количество сендвичей каждого вида нужно изготавливать в час, чтобы прибыль ресторана была максимальной? При этом нужно учесть, что для обеспечения ассортимента сендвичей каждого вида должно приготавливаться не менее 15 штук в час.

Ответ: $x_1 = 25, x_2 = 20, Z_{\max} = 800$.

Задача 4. Предприятие по производству сплавов цветных металлов специализируется на производстве латуни и нейзильберов. Затраты ресурсов на изготовление каждого сплава, их дневной запас и прибыль от продажи одной тонны сплава представлены в таблице:

Таблица 1.6

Ресурсы	Латунь на 1 т	Нейзильберы на 1 т	Дневной запас ресурса, т
Медь	0,5	0,75	8,25
Никель	0,04	0,1	1
Цинк	0,45	0,25	5
Прибыль, у.е.	600	1 120	

Составить дневной план выпуска продукции, при котором предприятие получит максимальную прибыль.

Ответ: $x_1 = 3,75, x_2 = 8,5, Z_{\max} = 11770$.

Задача 5. Фармацевтическая фирма для изготовления двух видов сердечных препаратов использует три полуфабриката: фенотерол, динарий, эналаприл. Их дневной запас составляет 400, 1500 и 900 кг, соответственно. В результате смешивания этих трех компонент в пропорции 1:3:1 получают сердечный препарат энап, а при смешивании в пропорции 1:5:3 – сердечный препарат энвас.

Прибыль от реализации одного килограмма энапа составляет 300 у.е., а от реализации одного килограмма энваса – 400 у.е. определить дневной план выпуска продукции, при котором фирма получит максимальную прибыль.

Ответ: $x_1 = 250, x_2 = 150, Z_{\max} = 135000$

Задача 6. Комбинат по переработке фруктово-ягодной продукции производит мармелад и фруктовый концентрат. Для изготовления каждого вида продукции необходимы вода, сахар и фрукты. Пропорции, в которых они используются, а также прибыль от продажи продукции указаны в таблице.

Сколько тонн мармелада и фруктового концентрата должен выпускать комбинат, чтобы получить максимальную прибыль?

Таблица 1.7

Ресурсы	Мармелад, т	Фруктовый концентрат, т	Дневной запас ресурса, т
Вода	0,5	1	6
Сахар	1	1	8
Фрукты	2	1	14
Прибыль, у.е.	7	10	

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 4, Z_{\max} = 68$.

Задача 7. В результате проведенного технико-экономического анализа на пивоваренном заводе выяснилось, что разработка, производство и продвижение на рынке большого ассортимента пива «съедают» громадную часть прибыли.

Проведя маркетинговое исследование потребительского спроса, руководство завода пришло к выводу, что большинство потребителей предпочитают давно известные, привычные сорта пива. Было принято решение о дальнейшем выпуске только двух сортов пива – «С» и «П». Для производства пива требуются солод, хмель и вода.

На основе имеющихся данных о затратах каждого ресурса на один литр пива перед экономистами была поставлена задача рассчитать дневной план выпуска продукции, при котором пивоваренный завод получит наибольшую прибыль.

Таблица 1.8

Ресурсы	«С»	«П»	Дневной запас ресурса, л
Солод	0,3	0,4	800
Хмель	0,1	0,2	400
Вода	0,6	0,4	1 000
Прибыль, у.е.	10	12	

Ответ: $x_1 = 666 \frac{2}{3}, x_2 = 1500, Z_{\max} = 24666 \frac{2}{3}$.

Задача 8. Экспериментальная лаборатория «Эвента» в качестве новейшей разработки начала выпуск и продажу опытной партии образцов – крема для быстрого роста ногтей и крема для тела, способствующего снижению веса. Для изготовления каждого уникального крема используются активные вещества – гиалурон, карбопол и аллантоин (остальные ингредиенты имеются в

избытке). Поскольку партия является опытной, дневной запас ресурсов невелик. Затраты каждого ресурса на изготовление одного флакона крема, прогнозируемая прибыль от продажи одного флакона крема и количество ресурсов, которыми лаборатория располагает на один день приведены в таблице:

Таблица 1.9

Ресурс	Крем для тела, г	Крем для ногтей, г	Дневной запас ресурса, г
Гиалурон	1	1	5
Карбопол	3	2	12
Аллантоин	5	1	15
Прибыль, у.е.	6	5	

Необходимо составить дневной план выпуска продукции, при котором лаборатория получит наибольшую прибыль.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3, Z_{\max} = 27$.

Задача 9. На конезаводе «Восход» занимаются племенной работой по разведению двух пород лошадей – чистокровная верховая и тракененская. Для обеспечения нормальных условий выращивания лошадей, они должны получать в день определенное количество кормов, которое указано в таблице. Также в таблице указано общее количество корма каждого вида, которым конезавод располагает на день и прибыль от реализации лошади данной породы в у.е.

Таблица 1.10

Вид корма	Чистокровная верховая, кг	Тракененская, кг	Дневной запас корма, кг
Сено	2	3	180
Овес	4	1	240
Ячмень	6	7	426
Прибыль, у.е.	1 600	1 200	

Сколько лошадей каждой породы нужно выращивать, чтобы прибыль конезавода была максимальной?

Ответ: $x_1 = 57, x_2 = 12, Z_{\max} = 105600$

Задача 10. Горнолыжный курорт предоставляется на определенное время для тренировок олимпийской сборной, а в остальное время открыт для любительского катания. Он работает ежедневно с 10 часов до 22 часов. Мощность местной электростанции такова, что она вырабатывает электроэнергию на сумму не более 1 000 у.е. в неделю, из которой 100 у.е. необходимо затрачивать на освещение.

Остальные средства идут на работу подъемников. Во время тренировок сборной на склоне работает один подъемник, который затрачивает электроэнергию на 5 у.е. в час, для коммерческого катания (в среднем количество катающихся составляет 50 человек) запускают четыре аналогичных подъемника.

Среди отдыхающих 100% пользуются подъемником, прибыль от которого составляет 4 у.е., 60% берут на прокат снаряжение, что приносит прибыль 3 у.е. в час за комплект, 10% нанимают инструктора, что приносит курорту еще по 5 у.е. дохода с каждого обучающегося.

Рассчитать, какое количество часов в неделю склон должен быть предоставлен олимпийской сборной и какое должен быть открытым для любительского катания, если сборная платит за аренду склона 105 у.е. в час (сюда включен подъемник) и ей необходимо для тренировок не менее двадцати часов в неделю. Прибыль от работы горнолыжного курорта должна быть максимально возможной.

Ответ: $x_1 = 52, x_2 = 32, Z_{\max} = 15540$.

Тема 2. Исследование процессов управления на основе сетевых методов

Одним из эффективных способов представления и управления сложными процессами являются методы сетевого планирования и управления (СПУ) [2,3,6].

Методы СПУ применяются в различных сферах: при проведении маркетинговых исследований, проектировании опытно-конструкторских разработок, освоении опытного и серийного производства продукции, управлении строительством объектов, разработке бизнес-планов и проектов, реструктуризации действующего производства, подготовке и расстановке различных категорий персонала, управлении инновационной деятельностью и т.п.

В основе СПУ лежит сетевая модель, графическое представление которой называется сетевым графиком. Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в виде сети, в которой отражаются все логические и хронологические взаимосвязи и результаты выполняемых работ, необходимые для достижения конечной цели планирования.

Сетевой график указывает работы, их последовательность, а также время их выполнения, необходимые для окончания всех видов деятельности не позже заданного или планируемого срока.

Основными элементами сетевой модели являются работы и события.

Работа представляет собой выполнение некоторого мероприятия, например, выполнение определенной технологической, управленческой или другой операции. Работа связана с затратами времени и ресурсов, она должна иметь начало и конец. На сетевом графике работа изображается стрелкой. Событиями называют начальные и конечные точки работы, например, начало или окончание производственной операции.

Предполагается, что событие не имеет продолжительности и не требует затрат ресурсов. Событие может начаться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие. Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится. События на графике изображаются кружками. Выделяют исходное и завершающее события. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

2.1 Построение и расчет сетевой модели

Сетевой график составляется на начальном этапе планирования процесса.

Вначале планируемый процесс разбивается на отдельные работы, составляется перечень работ и событий, продумываются их логические взаимосвязи и последовательность выполнения, работы закрепляются за ответственными исполнителями. С их помощью оценивается длительность каждой работы. Затем составляется сетевой график. После упорядочения сетевого графика рассчитываются параметры событий и работ. Далее проводится анализ и оптимизация сетевого графика, который при необходимости строится заново с пересмотром параметров событий и работ. При построении сетевого графика необходимо соблюдать ряд правил: 1. В сетевой модели не должно быть событий, из которых не выходит ни одна работа (дуга), за исключением завершающего события. 2. В сетевой модели не должно быть событий, в которые не входит ни одна работа (дуга), за исключением исходного события. 3. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними самими. 4. Любые два события должны быть непосредственно связаны не бо-

лее, чем одной работой. **5. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.**

Если в составленной сети указанные правила не соблюдаются, то целесообразно обеспечить их выполнение с помощью введения фиктивных работ и событий.

Каждая работа кодируется индексом с номерами событий, между которыми она заключена. Совершение события зависит от окончания самой длинной из всех входящих в него работ. Последовательные работы и события формируют пути, которые ведут от исходного события к завершающему. Полный путь - любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец - с завершающим. Наиболее продолжительный полный путь в сетевой модели называется критическим. Он определяет время выполнения проекта в целом. Основная задача сетевого планирования - нахождение критического пути и определение возможностей его сокращения (оптимизации).

При анализе сетевых моделей, прежде всего, вычисляют их временные параметры. К основным временным параметрам относятся продолжительность критического пути (критический срок), резервы времени событий и резервы времени работ.

Критический путь — это наиболее протяженный по времени полный путь; его продолжительность и определяет критический срок (t_{kp}). Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j — это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(j) = \max_{(i,j) \in U_j^+} (t_p(i) + t(i,j)), \quad (2.1)$$

где U_j^+ — множество работ, заканчивающихся j -м событием; $t_p(i)$ — ранний срок свершения начального события работы (i,j) ; $t(i,j)$ — продолжительность работы $t(i,j)$. Предполагается, что $t_p(I) = 0, t_p(S) = t_{kp}$, где I, S - исходное и завершающее события, соответственно.

Поздний срок $t_n(i)$ свершения события i — такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием:

$$t_n(i) = \min_{(i,j) \in U_i^-} (t_n(j) - t(i,j)), \quad (2.2)$$

где U_i^- — множество работ, начинающихся i -м событием; $t_n(j)$ — поздний срок свершения конечного события работы (i, j) . Для завершающего события S предполагается, что $t_n(S) = t_p(S) = t_{kp}$.

Резерв времени $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i) \quad (2.3)$$

Ранний срок начала работы (i, j)

$$t_{p,n}(i, j) = t_p(i). \quad (2.4)$$

Ранний срок окончания работы (i, j)

$$t_{p,o}(i, j) = t_p(i) + t(i, j) \quad (2.5)$$

Поздний срок начала работы (i, j)

$$t_{n,n}(i, j) = t_n(j) - t(i, j) \quad (2.6)$$

Поздний срок окончания работы (i, j)

$$t_{n,o}(i, j) = t_p(j) \quad (2.7)$$

Ранний срок свершения события j часто находят по формуле

$$t_p(j) = \max_{(i, j) \in U_j^+} t_{p,o}(i, j), \quad (2.8)$$

а поздний срок свершения события i — по формуле

$$t_n(i) = \min_{(i, j) \in U_i^-} t_{n,n}(i, j), \quad (2.9)$$

Полный резерв времени $R_n(i, j)$ работы (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершён в критический срок:

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j) = t_n(j) - t_{p,o}(i, j) \quad (2.10)$$

Свободный резерв времени $R_c(i, j)$ работы (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушатся ранние сроки начала всех последующих работ:

$$R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j) = t_p(j) - t_{p,o}(i, j) \quad (2.11)$$

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

Методику расчетов проиллюстрируем на примере сетевого графика, изображенного на рис.2, б. Здесь каждый кружок, моделирующий событие, разделен диаметрами на четыре сектора (рис. 2, а).

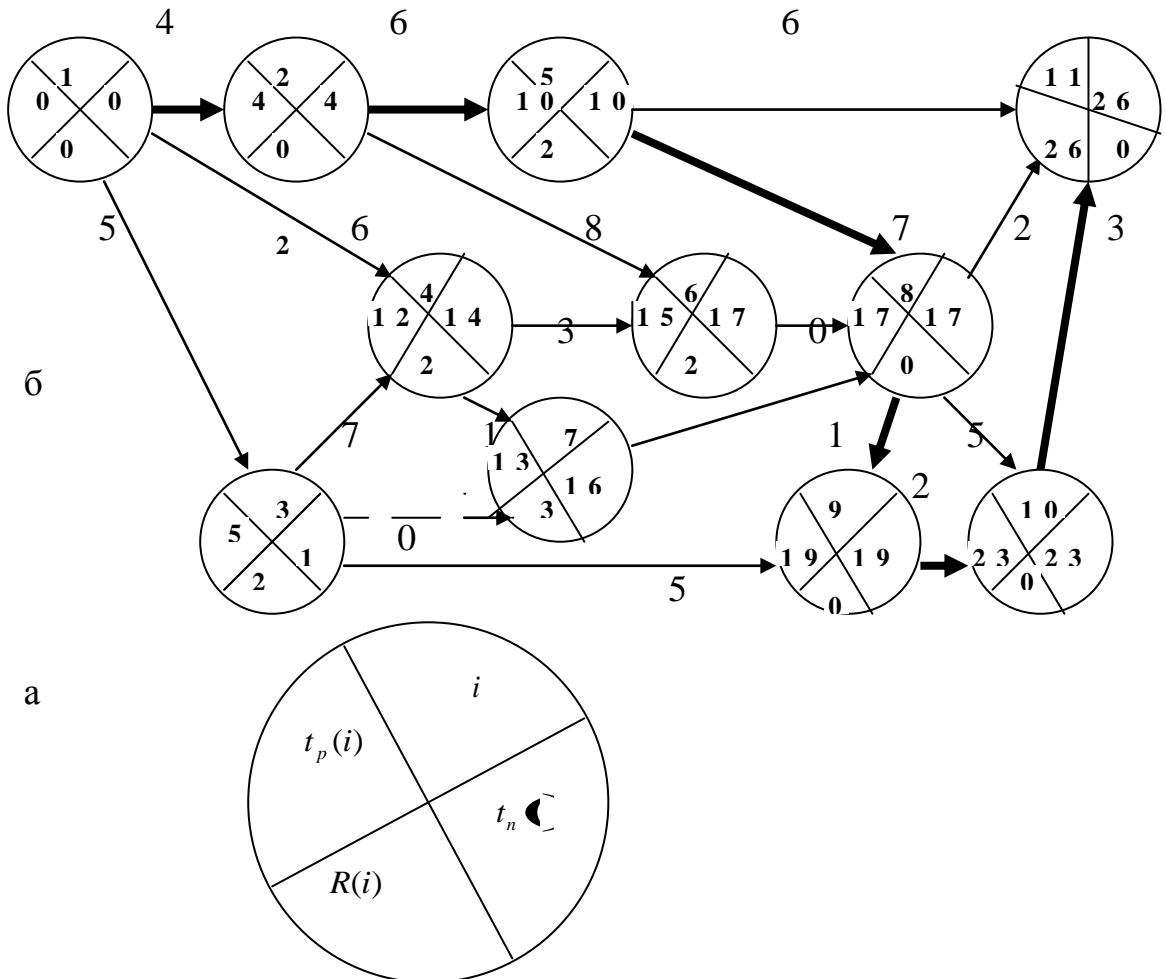


Рис.2. Объяснение в тексте

В верхнем секторе запишем номер (шифр) i события, в левом по мере вычислений будем записывать ранний срок $t_p(j)$ совершения события i , в правом — поздний срок $t_n(i)$, в нижнем — резерв $R(i)$ времени события. Расчеты проводят в четыре этапа: вычисляют $t_p(j)$, $t_n(i)$, $R(i)$ и выделяют критический путь.

I этап. При вычислении ранних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от исходного события 1 вправо, по мере возрастания номеров событий.

Поскольку $t_p(1) = 0$, в левый сектор кружка 1 записываем 0. Затем рассматриваем событие 2, в которое входит только одна работа (1, 2). В соответствии с формулой (2.1) складываем число $t_p(1) = 0$ с числом $t(1,2) = 4$ и результат $t_p(2) = 4$ записываем в левый сектор кружка 2. Аналогично находим $t_p(3) = t_p(1) + t(1,3) = 0 + 5 = 5$ и записываем в левый сектор кружка 3.

При вычислении $t_p(4)$ учитываем, что в событие 4 входят две работы: (1, 4) и (3, 4). Составляем две суммы: $t_p(1) + t(1,4)$ и $t_p(3) + t(3,4)$. По формуле (2.1) находим

$$t_p(4) = \max(t_p(1) + t(1,4), t_p(3) + t(3,4)) = \max(0 + 6, 5 + 7) = 12,$$

поэтому в левый сектор кружка 4 записываем 12. Аналогично вычисляем ранние сроки и всех остальных событий, помня, что продолжительность фиктивной работы принимается равной 0. В конце вычислений находим $t_p(11) = 26$, т. е. критический срок. Итак, $t_{kp} = 26$.

II этап. При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от завершающего события влево, по мере убывания номеров событий. Поскольку $t_n(S) = t_p(S)$, то в правый сектор кружка 11 записываем число $t_p(11) = 26$.

Рассматриваем далее предшествующее событие 10, из которого выходит только одна работа (10, 11) продолжительностью $t(10,11) = 3$. Следовательно, по формуле (2.2) получаем $t_n(10) = t_n(11) - t(10,11) = 26 - 3 = 23$. Этот результат и записываем в правый сектор кружка 10. Аналогично находим $t_n(9) = t_n(10) - t(9,10) = 23 - 4 = 19$.

Из события 8 выходят три работы: (8, 9), (8, 10), (8, 11), поэтому определяем поздний срок по каждой из этих работ, т. е. составляем три разности: $t_n(9) - t(8,9)$, $t_n(10) - t(8,10)$ и $t_n(11) - t(8,11)$. В соответствии с формулой (2.2) выбираем из них минимальную, которая и определит $t_n(8)$, т. е. $t_n(8) = \min(19 - 2, 23 - 5, 26 - 2) = 17$. Это число и записываем в правый сектор кружка 8. Аналогично определяются поздние сроки свершения и всех остальных событий сетевого графика. Заметим только, что результатом расчетов должно быть равенство $t_n(I) = t_p(I) = 0$.

III этап. Для определения резервов времени событий в соответствии с формулой (2.3) достаточно из чисел, записанных в правых секторах кружков,

вычесть числа, записанные в левых секторах. Полученные значения записываются в нижние секторы.

IV этап. У критических событий резерв времени равен 0, так что ранние и поздние сроки свершения совпадают. В нашем примере критическими являются события 1, 2, 5, 8, 9, 10 и 11, они и определяют критические работы и критический путь: 1—2—5—8—9—10—11. Все остальные временные параметры (сроки начала и окончания работ, резервы времени работ) легко определяются по найденным значениям t_p и t_n на основе формул (2.4)—(2.11). Так, для определения полного резерва времени работы надо из числа, стоящего в правом секторе кружка, изображающего конечное событие работы, вычесть число, записанное в левом секторе кружка, соответствующего начальному событию этой работы, и продолжительность работы. Например, $R_n(4,7) = 16 - 12 - 1 = 3$.

Построение сетевой модели и ее последующий анализ рассмотрим на конкретном примере.

2.2 Пример сетевого планирования

Перечень работ по организации на промышленной выставке зала для демонстрации образцов продукции, выпускаемой производственным объединением, приведен в таблице 2.1. Построить сетевой график выполнения комплекса работ.

Таблица 2.1

Содержание работы	Исходная работа	Опирается на работу
1	2	3
Обор образцов продукции для выставки	a_1	-
Изготовление информационных и рекламных материалов, указателей, надписей и т.д.	a_2	a_1
Изготовление стендов и другого оборудования для установки образцов в демонстрационном зале	a_3	a_1
Доставка образцов в демонстрационный зал	a_4	a_1
Доставка в демонстрационный зал стендов и другого оборудования	a_5	a_4
Монтаж стендов и другого оборудования	a_6	a_5
Установка образцов продукции на стендах	a_7	a_3, a_6
Оформление залов и стендов указателями, надписями, рекламными и информационными материалами	a_8	a_2, a_7

Репетиция открытия выставки	a_9	a_8
-----------------------------	-------	-------

Решение.

Обозначим работы в порядке их следования через a_1, a_2, \dots, a_9 и дополним данную таблицу 1 столбцом 2. Учитывая технологическую зависимость друг от друга работ, установим их последовательную связь, т. е. для каждой работы укажем, на какие работы она «опирается» (в данную таблицу добавляем еще один столбец).

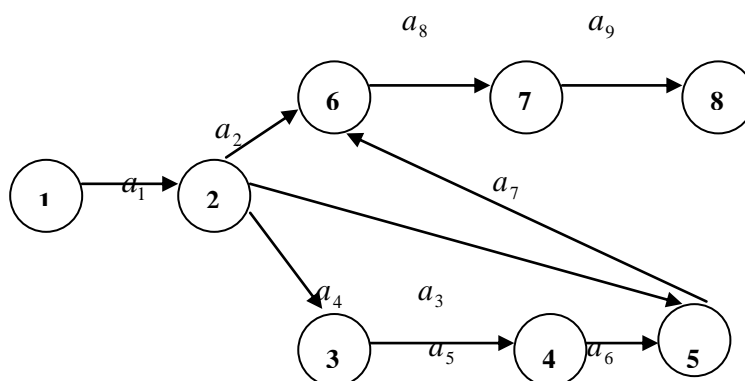


Рис.3. Объяснение в тексте

Приступая к построению сетевого графика (рис. 3), замечаем, что работа a_1 , не опирается ни на какую работу, поэтому она изобразится дугой, выходящей из события 1, означающего исходный момент, с которого начинается выполнение рассматриваемого комплекса работ. На работу a_1 опираются работы a_2 , a_3 и a_4 , поэтому дуги, соответствующие этим работам, на сетевом графике будут следовать непосредственно за дугой a_1 (от события 2, означающего момент окончания работы a_1 и начало работ a_2 , a_3 и a_4). На работу a_4 опирается работа a_5 , а на нее — работа a_6 , что и отражено на сетевом графике следующими друг за другом дугами a_5 и a_6 . Работа a_7 опирается на работы a_3 и a_6 , поэтому дуга a_7 исходит из события 5, означающего момент, к которому завершены обе эти работы. Аналогичная ситуация имеет место и для работы a_8 , исходящей из события 6, которое означает факт выполнения работ a_2 и a_7 . Дуга a_9 соответствует последней работе, а конечное ее событие 8 означает момент завершения работ всего рассматриваемого комплекса.

В настоящее время сложные задачи сетевого программирования решаются с помощью компьютера на основе применения электронных таблиц MS Excel.

2.3 Задачи сетевого планирования для самостоятельного решения

Задача 1. На сетевых графиках, изображенных на рис.4, найти ошибки, считая, что каждый график имеет одно исходное I и одно завершающее S событие.

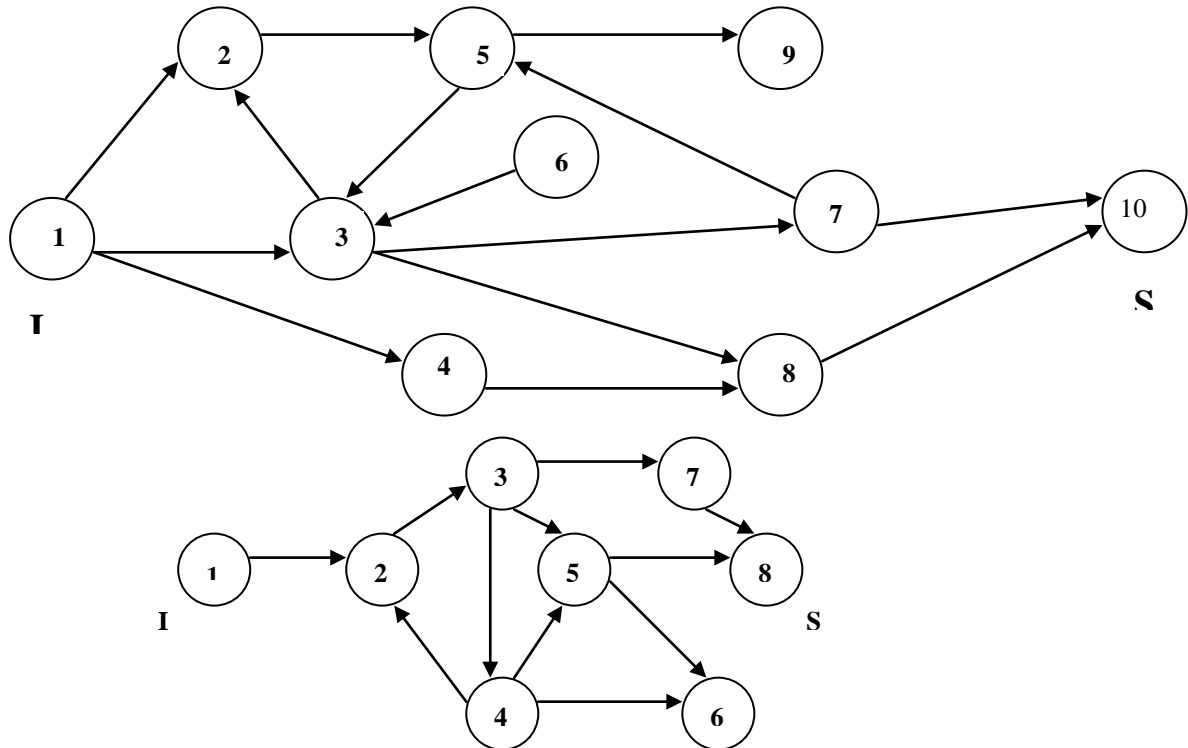


Рис.4. Объяснение в тексте

Задача 2. Построить фрагмент сетевого графика, включающего пять работ, если работы a_2 и a_3 начаты одновременно, работа a_4 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, a_3 , работа a_5 может начаться после выполнения работы a_3 .

Задача 3. Построить фрагмент сетевого графика, если начало работы a_5 зависит только от окончания работ a_1 и a_3 , начало работы a_4 — только от окончания работы a_3 , начало работы a_6 — только от окончания работ a_2 и a_3 .

Задача 4. Построить фрагмент сетевого графика, содержащего шесть работ, если начало работы a_4 зависит от результата выполнения работы a_2 , работа a_5 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2 , работа a_6 может быть начата после завершения работ a_3 и a_4 .

Задача 5. Построить фрагмент сетевого графика, если он включает семь работ и при этом работа a_3 выполняется после работ a_1 и a_4 , работа a_4 начина-

ется после выполнения работы a_2 , работа a_6 может быть выполнена после работ a_4 и a_5 , работа a_7 выполняется после завершения работ a_3 и a_6 .

Задача 6. Построить сетевой график по следующим данным: работы a_1, a_2, a_3 могут выполняться одновременно после свершения исходного события, работы a_4 и a_5 начинаются после окончания работы a_1 , работы a_6 и a_7 могут начаться после выполнения работ a_2 и a_4 , начало работ a_8 и a_9 зависит от результата работы a_3 , работа a_{10} может быть начата после выполнения работ a_5 и a_6 , к работе a_{11} можно приступить после завершения работ a_7 и a_8 , работу a_{12} следует начать после окончания работы a_9 , работа a_{13} будет выполняться после завершения работ a_{10} , a_{11} и a_{12} .

Задача 7. Построить сетевой график по следующим данным:

а)

Таблица 2.2

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	-
a_2	-
a_3	-
a_4	a_1
a_5	a_2
a_6	a_2
a_7	a_3, a_5
a_8	a_4, a_6, a_7

б)

Таблица 2.3

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	-
a_2	-
a_3	-
a_4	a_1, a_2
a_5	a_2, a_3
a_6	a_2, a_3
a_7	a_6
a_8	a_4, a_5, a_7

в)

Таблица 2.4

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	-

a_2	-
a_3	a_1, a_2
a_4	a_1
a_5	a_1
a_6	a_4, a_5
a_7	a_4, a_5
a_8	a_3, a_7

Задача 8. Строительная фирма-подрядчик пытается составить план работ, связанных со строительством дома по заказу. В таблице приводятся данные о последовательности работ, отношениях предшествования и продолжительностях работ. Постройте соответствующую сетевую модель для последовательности работ и проанализируйте ее.

Таблица 2.5

Работа	Описание работ	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работ, сутки
a	Начало		0
b	Рытье котлована и заливка основания	a	4
c	Заливка бетонного фундамента	b	2
d	Сооружение деревянного каркаса, в том числе крыши	c	4
e	Выполнение кирпичной кладки	d	6
f	Укладка канализационных и водопроводных труб в подвальном помещении	c	1
g	Заливка пола подвального помещения	f	2
h	Установка водопроводных труб	f	3
i	Прокладка проводов	d	2
j	Установка отопления и вентиляции	d,g	4
k	Крепление штукатурных труб и штукатурные работы	i,j,h	10
l	Кладка покрытия пола	k	3
m	Установка кухонной арматуры	l	1
n	Завершение слесарно-водопроводных работ	l	2
o	Завершение плотницких работ	l	3
p	Кровельные работы и нанесение гид-	e	2

	роизоляции		
q	Крепление водосточных труб	p	1
r	Кладка коллектора ливневых вод	c	1
s	Циклевка и покрытие полов лаком	o,t	2
t	Покраска	m,n	3
u	Завершение установки электрооборудования	t	1
v	Земляные работы	q,r	2
w	Заливка пешеходных дорожек и благоустройство территории	v	5
x	Окончание	s,u,v	0

Задача 9. Рассматривается проект по организации сбыта нового изделия. В таблице приводятся продолжительности работ, необходимых для выполнения проекта. Найдите минимальное время выполнения проекта.

Таблица 2.6

Номер	Работы	Предшествующие работы	Продолжительность, недели
0	Планирование работ	-	3
1	Составление учебного плана	0	6
2	Отбор слушателей	0	4
3	Подготовка брошюры	0	3
4	Проведение учебных занятий	1,2,3	1
5	Поставка образцов продукции	0	4
6	Печатание брошюры	3	5
7	Подготовка рекламных материалов	0	5
8	Выпуск рекламных материалов	7	1
9	Распространение брошюры	6	2

Задача 10. Фундамент здания больницы состоит из четырех последовательно сооружаемых секций. Для сооружения каждой секции необходимо выполнение таких работ, как рытье котлована, монтаж арматуры и заливка бетоном.

Рытье котлована для какой-либо одной секции не может начинаться до завершения этой работы для предыдущей секции. Это же относится и к заливке бетоном. После того как все котлованы вырыты, могут начинаться слесарно-водопроводные работы, но до заливки бетона можно выполнить только 15% этой работы. После подготовки фундамента каждой секции можно начинать выполнение еще 10% слесарно-водопроводных работ, если

выполнены предыдущие 15% работы. Постройте сетевую модель для этого проекта.

Тема 3. Динамическое программирование в исследовании систем управления

Динамическое программирование – это общий метод решения управленческих задач, когда общее решение заменяется решением последовательности задач, в каждой из которых количество переменных меньше, чем число переменных во всей задаче [1,5].

Применим этот метод к управленческой задаче, известной как задача о распределении ресурсов.

3.1. Формулировка задачи

Пусть имеется некоторая сумма финансовых средств S_0 , которую нужно разделить между двумя отраслями производства. При этом известен годовой доход каждой отрасли при вложении в эту отрасль какого-то количества средств.

Пусть при вложении в первую отрасль количество финансовых средств, равное X , мы получаем годовой доход, равный $D_1(X)$, а в случае вложения во вторую отрасль финансовых средств Y , получаем годовой доход, равный $D_2(Y)$. При этом мы допускаем, что не все средства, вложенные в любую из этих отраслей, используются до конца.

Допустим, что $R_1(X)$ – остаток на конец года при инвестировании X средств в первую отрасль, а $R_2(Y)$ – при инвестировании средств Y во вторую отрасль.

Требуется так управлять распределением средств в обе отрасли, чтобы за n лет суммарный доход от обеих отраслей был бы максимальным. Мы допускаем, что в начале каждого года (кроме первого) между отраслями происходит перераспределение суммы средств, оставшихся от предыдущего года.

3.2. Математическая модель задачи

Пусть X_i и Y_i – это средства, которые вкладываются в первую и вторую отрасль в начале i -го года, и S_i – остаток средств на конец i -го года, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда $S_i = R_1(X_i) + R_2(Y_i)$, $S_{i-1} = X_i + Y_i$.

Следовательно $S_i = R_1(X_i) + R_2(S_{i-1} - X_i)$.

Суммарный доход за n лет запишется следующим образом:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^n (D_1(X_i) + D_2(Y_i)) \rightarrow \max. \text{ При этом должны}$$

выполняться следующие ограничения:

$$X_1 + Y_1 = S_0,$$

$$X_2 + Y_2 = S_1,$$

$$X_3 + Y_3 = S_2,$$

.....

$$X_n + Y_n = S_{n-1}.$$

3.3. Решение задачи

Данная задача решается с помощью применения принципа Беллмана, который лежит в основе динамического программирования. Этот принцип состоит в том, что решение задачи на каждом шаге должно строиться так, чтобы последующие шаги от данного шага до конца приводили к оптимальному решению всей задачи, а не только данного шага.

Чтобы следовать этому принципу задачу решают с конца. Сначала рассматривается n шаг, а именно выделение средств X_n и Y_n при условии, что предпоследний шаг закончился остатком средств S_{n-1} . Затем переходят к $n-1$ шагу и управляют выделением средств X_{n-1} и Y_{n-1} таким образом, чтобы суммарный доход за последние два года был максимальным, затем переходят к шагу $n-2$ и т.д., вплоть до первого.

Поясним подробнее эти шаги:

Первый шаг.

Найти наибольшее значение следующей функции:

$$D_n = \max\{D_1(X_n) + D_2(Y_n)\} = \max\{D_1(X_n) + D_2(S_{n-1} - X_n)\}$$

$$0 \leq X_n \leq S_{n-1} \quad 0 \leq X_n \leq S_{n-1}$$

Второй шаг.

Найти наибольшее значение следующей функции:

$$D_{n-1,n} = \max\{D_1(X_{n-1}) + D_2(Y_{n-1}) + D_n(S_{n-1})\} = \max\{D_1(X_{n-1}) + D_2(S_{n-2} - X_{n-1}) + D_n(R_1(X_{n-1}) +$$

$$0 \leq X_{n-1} \leq S_{n-2} \quad 0 \leq X_{n-1} \leq S_{n-2}$$

$$+ R_2(S_{n-2} - X_{n-1})\}.$$

Последним будет шаг, состоящий в выделении средств X_1 и Y_1 , причем общее количество выделяемых средств известно уже не условно, а точно. Оно равно S_0 .

Приведем конкретный пример решения данной задачи.

Пусть $S_0=100, n=3, D_1(X)=X^2, D_1(Y)=2Y^2, R_1(X)=0.8X, R_2(Y)=0.3Y$.

Доход за три года можно записать следующим образом:

$$F(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3) = \sum_{i=1}^3 (D(X_i) + D(Y_i)).$$

При этом $X_1 + Y_1 = 100,$

$$X_2 + Y_2 = S_1,$$

$$X_3 + Y_3 = S_2.$$

Запишем решение на первом шаге.

$$\begin{aligned} D_3 &= \max\{D_1(X_3) + D_2(Y_3)\} = \max\{D_1(X_3) + D_2(S_2 - X_3)\} = \\ & \quad 0 \leq X_3 \leq S_2 \quad \quad \quad 0 \leq X_3 \leq S_2 \\ &= \max\{X_3^2 + 2(S_2 - X_3)^2\} = \max\{X_3^2 + 2(S_2^2 - 2S_2X_3 + X_3^2)\} = \\ & \quad 0 \leq X_3 \leq S_2 \quad \quad \quad 0 \leq X_3 \leq S_2 \\ &= \max\{3X_3^2 + 2S_2^2 - 4S_2X_3\}. \\ & \quad 0 \leq X_3 \leq S_2 \end{aligned}$$

График функции (S_2 – параметр), стоящей в последних фигурных скобках, представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Поэтому ее максимальное значение лежит на концах отрезка $0 \leq X_3 \leq S_2$. Имеем

$$\begin{aligned} D_3(X_3 = 0) &= 2S_2^2, \\ D_3(X_3 = S_2) &= 3S_2^2 + 2S_2^2 - 4S_2S_2 = S_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, максимальное значение равно $2S_2^2$, когда $X_3 = 0$. Следовательно $Y_3 = S_2$. Рассмотрим теперь второй шаг:

$$\begin{aligned} D_{2,3} &= \max\{D_1(X_2) + D_2(Y_2) + D_3(S_2)\} = \max\{D_1(X_2) + D_2(S_1 - X_2) + D_3(R_1(X_2) + R_2(S_1 - X_2))\} \\ & \quad 0 \leq X_2 \leq S_1 \quad \quad \quad 0 \leq X_2 \leq S_1 \\ &= \max\{X_2^2 + 2(S_1 - X_2)^2 + 2(0.8X_2^2 + 0.3(S_1 - X_2))^2\} = \max\{0.5X_2^2 - 3.45S_1X_2 + 2.18S_1^2\}. \\ & \quad 0 \leq X_2 \leq S_1 \quad \quad \quad 0 \leq X_2 \leq S_1 \end{aligned}$$

Аналогично первому шагу получаем

$$\begin{aligned} D_{2,3}(X_2 = 0) &= 2.18S_1^2, \\ D_{2,3}(X_2 = S_1) &= 1.28S_1^2. \end{aligned}$$

Таким образом, максимальное значение равно $2.18S_1^2$, когда $X_2 = 0, Y_2 = S_1$.

Третий шаг:

$$\begin{aligned} D_{1,2,3} &= \max\{D_1(X_1) + D_2(100 - X_1) + 2.18S_1^2\} = \\ & \quad 0 \leq X_1 \leq S_0 = 100 \end{aligned}$$

$$= \max\{D_1(X_1) + D_2(100 - X_1) + 2.18(0.8X_1 + 0.3(100 - X_1))^2\} =$$

$$0 \leq X_1 \leq S_0 = 100$$

$$= \max\{X_1^2 + 2(100 - X_1)^2 + 2.18(0.8X_1 + 0.3(100 - X_1))^2\}.$$

$$0 \leq X_1 \leq S_0 = 100$$

Аналогично шагам 1 и 2 получаем

$$D_{1,2,3}(X_1 = 0) = 21962 \quad D_{1,2,3}(X_1 = 100) = 23952$$

Итак, максимальное значение дохода за три хозяйственных года равно 23 952, когда $X_1 = 100, Y_1 = 0$.

Таким образом, оптимальное управление ресурсом в 100 единиц состоит в следующем:

1. В первый год первой отрасли следует выделить финансовых средств в количестве 100 единиц, а второй - 0 единиц.
2. Во второй год первой отрасли следует выделить 0 средств. Остаток средств после первого года хозяйствования будет равен следующей величине: $R_1(X_1 = 100) = 0.8 * 100 = 80$. Поэтому второй отрасли надо выделить, следуя полученному решению, 80 единиц финансовых средств.
3. В третий год первой отрасли надо снова выделить 0 средств. Остаток после второго года хозяйствования будет равен следующей величине: $R_2(Y_2 = 80) = 0.3 * 80 = 24$. Поэтому, следуя полученному решению, второй отрасли в третий год надо выделить 24 единицы.

Общий максимальный доход, как уже отмечалось, при этом составит 23 952 единицы.

Заметим, что если бы мы принимали все время интуитивное решение вкладывать все средства на каждом шаге (в начале каждого хозяйственного года) во вторую отрасль (более доходную), то получили бы следующий общий доход:

$$D_1 = 2Y^2 = 2 * 100^2 = 20000, \text{ остаток равен } 0.3 * 100 = 30,$$

$$D_2 = 2 * 30^2 = 1800, \text{ остаток равен } 0.3 * 30 = 9,$$

$$D_3 = 2 * 9^2 = 162.$$

Тогда общий доход за три года равнялся бы $20\,000 + 1\,800 + 162 = 21\,962$, что меньше, чем получилось при решении методом динамического программирования.

3.4 Задачи динамического программирования для самостоятельного решения

Задача 1. Имеется одно предприятие и начальный запас средств M , которые можно вкладывать в предприятие не целиком, а частично резервировать. Средства x , вложенные на k -ом шаге, дают прибыль $f_k(x)$ и уменьшаются до $\varphi_k(x)$. Требуется наилучшим образом распределить имеющиеся и оставшиеся средства на n лет, чтобы суммарная прибыль была максимальной. Наметить схему решения задачи методом динамического программирования, написать все нужные формулы, описать расчетную процедуру в следующих случаях:

- 1.1 Вложенные средства расходуются не полностью.
- 1.2 Вложенные средства расходуются целиком, $\varphi_k(x) = 0$.
- 1.3 Все функции прибыли одинаковы: $f_k(x) = f(x)$, а все вложенные средства расходуются целиком: $\varphi_k(x) = 0$.

Задача 2. Решить задачу 1 при следующих условиях:

- 2.1 $M = 300$; $n = 4$; $f_1(x) = 0,6x$, $\varphi_1(x) = 0,4x$; $f_2(x) = 0,3x$, $\varphi_2(x) = 0,7x$.
- 2.2 $M = 300$; $n = 3$; $f_1(x) = 0,001x^2$; $\varphi_1 = 0,7x$; $f_2(x) = 0,2x$; $\varphi_2(x) = 0,3x$.
- 2.3 Принять все исходные данные пункта 2.2 за исключением функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которые заданы в следующей таблице

Таблица 3.1

Прибыль	x					
	50	100	150	200	250	300
$f_1(x)$	6	10	16	24	28	30
$f_2(x)$	5	12	20	25	27	30

- 2.4 Принять исходные данные пункта 2.1 с дополнительным условием, что в качестве капиталовложения используется также полученная прибыль.
- 2.5 В задаче пункта 2.1 принять дополнительное условие, что финансирование ведется только за счет прибыли и вложенные средства не возвращаются.
- 2.6 В задаче пункта 2.1 принять, что прибыль полностью вкладывается в производство, но максимизируется только прибыль, получаемая после 4-го года.
- 2.7 В задаче пункта 2.1 принять, что ежегодно вкладывается половина прибыли и максимизируется общая сумма

остающейся после каждого года прибыли.

Список литература:

1. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1979.- 125 с.
2. Мотышина М.С. Исследование систем управления и системный анализ. Методические и прикладные аспекты: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2002.-116 с.
3. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Учебное пособие/А.В.Кузнецов, В.А.Сакович, Н.И. Холод и др.; Под общей редакцией А.В.Кузнецова. Минск: Высш. шк., 1995.- 382 с.
- 4 Соколова Ж.В. Линейное программирование для экономистов.- СПб.: Изд-во «Руна», 2003. -122 с.
- 5.Справочник по математике для экономистов / В.Е.Барбаумов, В.И.Ермаков, Н.Н.Кривенцова и др.; Под ред. В.И. Ермакова. М.: Высш. шк. – 1987. – 336 с.
- 6.Филипс Д., Гарсиа-Диаз А. Методы анализа сетей.- М.:Мир, 1984.- 496с.
7. Чернов В.П. Введение в линейное программирование.- СПб.: Наука, 2002.- 108 с.

Содержание

Тема 1. Линейное программирование в исследовании систем управления.....	3
1.1 Задача об ассортименте продукции.....	4
1.2 Задача о диете.....	6
1.3 Планирование работы автобусного парка.....	7
1.4 Задача о раскрое или минимизации обрезков.....	9
1.5 Задачи линейного программирования для самостоятельного решения.....	10
Тема 2. Исследование процессов управления на основе сетевых методов.....	15
2.1 Построение и расчет сетевой модели.....	16
2.2 Пример сетевого планирования.....	20
2.3 Задачи сетевого планирования для самостоятельного решения.....	22
Тема 3. Динамическое программирование в исследовании систем управления.....	25
3.1. Формулировка задачи.....	25
3.2. Математическая модель задачи.....	27
3.3. Решение задачи.....	27
3.4 Задачи динамического программирования для самостоятельного решения.....	30
Литература.....	31