

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ “ Информатика и вычислительная техника”
Кафедра “Программное обеспечение вычислительной техники и
автоматизированных систем”

Коледов Л.В.

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО для выполнения лабораторных работ
по курсу "Исследование операций",
часть 1.

«Содержательные задачи ЛП. Применение ППП для решения ЛП» Пособие
предназначено для студентов специальностей 010503, 230105

РОСТОВ - НА - ДОНУ 2014

1.1. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО

Линейное программирование (ЛП) — это раздел математического программирования, в котором рассматриваются методы решения экстремальных задач с линейным функционалом и линейными ограничениями, которым должны удовлетво*

Рассмотрим несколько простых примеров содержательной постановки задач линейного программирования и построим их математические модели.

Задание. Решить с использованием ППП LIPS, MATLAB, MsExcel (или любого другого) задачу из приведенного ниже перечня. Номер Вашей задачи сравним по модулю 10 с последней цифрой номера Вашей зачетки. В отчет включите вывод формальной постановки и документы, отвечающие за трассировку решения Вашей задачи.

Задача об использовании сырья

Предположим, что некоторое предприятие после выполнения основной производственной программы располагает запасами сэкoнoмленнoгo сырья трех видов — s_1, s_2, s_3 соответственно в количествах B_1, B_2, B_3 условных единиц. Из этого сырья может быть изготовлено два вида изделий — P_1 и P_2 . Известны: a_{ij} — количество единиц s_i -го вида сырья, идущего на изготовление единицы P_j -го вида изделия, и C_j — доход, получаемый от реализации одной единицы каждого вида изделия. Все указанные величины представлены в табл. 1.1.

Задача сводится к тому, чтобы составить такой план выпуска продукции, при котором доход предприятия от реализации всей продукции был бы максимальным.

Для построения математической модели данной задачи введем следующие обозначения: x_1 — количество единиц изделий вида P_1 , x_2 — количество единиц изделий вида P_2 , которые может выпускать предприятие.

Зная количество сырья каждого вида, идущее на изготовление одной единицы изделия, и запасы сырья можем составить систему ограничений, определяющую область возможных значений x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 15; \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 30; \\ 2x_2 &\leq 16. \end{aligned}$$

Полученная система ограничений устанавливает, что количество сырья, расходуемое на изготовление всех изделий, не может превысить имеющихся на предприятии запасов. Исходя из физического смысла, на переменные налагаются дополнительные ограничения, требующие неотрицательности их значений: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (x_1 и x_2 будут равны нулю, если соответствующий вид изделия не выпускается). Тогда доход, получаемый предприятием от реализации x_1 единиц изделий P_1 и x_2 единиц изделий P_2 составит $F = 3x_1 + 2x_2$.

Окончательно задача формулируется следующим образом. Найти такой вектор $X = |x_1, x_2|$, при котором достигается и максимум целевой функции $F = 3x_1 + 2x_2$ и выполняется следующая система ограничений:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ 2x_2 &\leq 16; \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

В общем случае математическая модель такой задачи имеет следующий вид.

Найти вектор $X = |x_1, x_2, \dots, x_n|$, максимизирующий функцию $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Таблица 1.1

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на изделие	
		P_1	P_2

3	21	3	1
1	30	2	2
«	(b_2)	(Д21)	(a_{21})
2	16	0	3
	(b_1)		(a_{12})

Примечание. Прибыль от продажи единицы изделия P_1 равна 3 руб., от продажи единицы изделия P_2 — 2 руб.

Задача 1. На одном из предприятий в специализированных бассейнах разводят на продажу два вида рыб: карпов и окуней. При этом используются два вида корма: A_1 и A_2 . Средняя масса карпа составляет 2 кг, окуня - 1 кг. Карп в среднем потребляет 1 единицу корма A_1 и 3 единицы корма A_2 в день, окунь - 2 единицы корма A_1 и 1 единицу корма A_2 . Ежедневный запас корма A_1 составляет 500 единиц, корма A_2 - 900 единиц. В каком количестве следует разводить каждый вид рыбы, чтобы максимизировать их общую массу? При этом чтобы выполнить имеющийся заказ окуней должно быть не менее 50 особей.

Ответ: $x_1 = 200, x_2 = 120, Z_{\max} = 640$.

Задача 2. Фирма «Русский чайный дом» производит и продает две марки чая «Боярский» и «Купеческий». Для их изготовления используются одни и те же сорта чая в разных пропорциях, которые указаны в таблице. В этой же таблице указаны дневные запасы ингредиентов и прибыль от продажи 1 кг готовой продукции:

Таб. ищ 1.4

Ингредиенты	«Боярский»	«Купеческий»	Запас на день, кг
Цейлонский чай	0.6	0.3	54
Индийский чай	0.3	0.2	48
Грузинский чай	0.1	0.5	36
Прибыль. у.е.	18	14	

Составить дневной план выпуска продукции, при котором прибыль фирмы будет максимальной.

Ответ $x_1 = 60, x_2 = 60, Z_{\max} = 1920$.

Задача 3. В ресторанах «McDonald's» был проведен конкурс на самую популярную продукцию. Наибольшее признание получили два вида сендвичей: чизбургеры и гамбургеры. Для приготовления сендвичей требуется горчица, кетчуп, мясо, и сыр в пропорциях, которые указаны в таблице:

Таблица 1.5

Ингредиент	Чизбургер	Гамбургер	Запас ресурсов на 1 час
Горчица	0,6 мл	0,6 мл	27 мл
Кетчуп	8 мл	5 мл	300 мл

Мясо	40 г	65 г	2 600 г
Сыр	15 г	0	450 г
Прибыль, у.е.	20	15	

Какое количество сэндвичей каждого вида нужно изготавливать в час, чтобы прибыль ресторана была максимальной? При этом нужно учесть, что для обеспечения ассортимента сэндвичей каждого вида должно приготавливаться не менее 15 штук в час.

Ответ: $x_1 = 25$, $x_2 = 20$, $Z_{max} = 800$.

Задача 4. Предприятие по производству сплавов цветных металлов специализируется на производстве латуни и нейзильберов. Затраты ресурсов на изготовление каждого сплава, их дневной запас и прибыль от продажи одной тонны сплава представлены в таблице:

Таблица 1.6

Ресурсы	Латунь на 1 т	Нейзильберы на 1 т	Дневной запас ресурса, т
Медь	0.5	0.75	8.25
Никель	0,04	0.1	1
Цинк	0,45	0,25	5
Прибыль, у.е.	600	1 120	

Составить дневной план выпуска продукции, при котором предприятие получит максимальную прибыль.

Ответ: $x_1 = 3,75$, $x_2 = 8,5$, $Z_{max} = 1177,5$

Задача 5. Фармацевтическая фирма для изготовления двух видов сердечных препаратов использует три полуфабриката: фенотерол, динатрий, эналаприл. Их дневной запас составляет 400, 1500 и 900 кг, соответственно. В результате смешивания этих трех компоненте пропорции 1:3:1 получают сердечный препарат энап, а при смешивании в пропорции 1:5:3 - сердечный препарат энвас.

Прибыль от реализации одного килограмма энапа составляет 300 у.е., а от реализации одного килограмма энваса - 400 у.е. определить дневной план выпуска продукции, при котором фирма получит максимальную прибыль. Ответ: $x_1 = 250$, $x_2 = 150$, $Z_{max} = 135000$

Задача 6. Комбинат по переработке фруктово-ягодной продукции производит мармелад и фруктовый концентрат. Для изготовления каждого вида продукции необходимы вода, сахар и фрукты. Пропорции, в которых они используются, а также прибыль от продажи продукции указаны в таблице.

Сколько тонн мармелада и фруктового концентрата должен выпускать комбинат, чтобы получить максимальную прибыль?

Таблица 1.7

Ресурсы	Мармелад, т	Фруктовый концентрат, т	Дневной запас ресурса, т
Вола	0,5	1	6
Сахар	1	1	8
Фрукты	2	1	14
Прибыль, у.е.	7	10	

Ответ: $g_1 = 4, x_1 = 4, Z_{max} = 68$.

Задача 7. В результате проведенного технико-экономического анализа на пивоваренном заводе выяснилось, что разработка, производство и продвижение на рынке большого ассортимента пива «съедают» громадную часть прибыли.

Проведя маркетинговое исследование потребительского спроса, руководство завода пришло к выводу, что большинство потребителей предпочитают давно известные, привычные сорта пива. Было принято решение о дальнейшем выпуске только двух сортов пива - «С» и «П». Для производства пива требуются солод, хмель и вода.

На основе имеющихся данных о затратах каждого ресурса на один литр пива перед экономистами была поставлена задача рассчитать дневной план выпуска продукции, при котором пивоваренный завод получит наибольшую прибыль.

Ресурсы	«С»	«П»	Дневной запас ресурса, л
Солод	0,3	0,4	800
Хмель	0,1	0,2	400
Вода	0,6	0,4	1 000
Прибыль, у.е.	10	12	

Ответ: $x_1 = 666 \frac{2}{3}, x_2 = 150, Z_{max} = 24666 \frac{2}{3}$.

Задача 8. Экспериментальная лаборатория «Эвенга» в качестве новейшей разработки начала выпуск и продажу опытной партии образцов крема для быстрого роста ногтей и крема для тела, способствующего снижению веса. Для изготовления каждого уникального крема используются активные вещества - гиалурон, карбопол и аллантоин (остальные ингредиенты имеются в

избытке). Поскольку партия является опытной, дневной запас ресурсов невелик. Затраты каждого ресурса на изготовление одного флакона крема, прогнозируемая

прибыль от продажи одного флакона крема и количество ресурсов, которыми лаборатория располагает на один день приведены в таблице:

Таблица 1.9

Ресурс	Крем для тела, г	Крем для ногтей,г	Дневной запас ресурса, г
Г иалурон	1	1	5
Карбопол	3	2	12
Аллантоин	5	1	15
Прибыль, у.е.	6	5	

Необходимо составить дневной план выпуска продукции, при котором лаборатория получит наибольшую прибыль.

Ответ: $V_x = 2, x_{max} = 27$

Задача 9. На конезаводе «Восход» занимаются племенной работой по разведению двух пород лошадей - чистокровная верховая и тракененская. Для обеспечения нормальных условий выращивания лошадей, они должны получать в день определенное количество кормов, которое указано в таблице. Также в таблице указано общее количество корма каждого вида, которым конезавод располагает на день и прибыль от реализации лошади данной породы в у.е.

Таблица 1.10

Вид корма	Чистокровная верховая, кг	Тракененская, кг	Дневной запас корма, кг
Сено	2	3	180
Овес	4	1	240
Ячмень	6	7	426
Прибыль.у.е.	1 600	1 200	

Сколько лошадей каждой породы нужно выращивать, чтобы прибыль конезавода была максимальной?

Ответ: $d_{opt} = 57, x_{opt} = 27, Y_{max} = 105600$

Задача 10. Горнолыжный курорт предоставляется на определенное время для тренировок олимпийской сборной, а в остальное время открыт для любительского катания. Он работает ежедневно с 10 часов до 22 часов. Мощность местной электростанции такова, что она вырабатывает электроэнергию на сумму не более 1 000 у.е. в неделю, из которой 100 у.е. необходимо затрачивать на освещение.

Остальные средства идут на работу подъемников. Во время тренировок сборной на склоне работает один подъемник, который затрачивает электроэнергию на 5 у.е. в час, для коммерческого катания (в среднем количество катающихся составляет 50 человек) запускают четыре аналогичных подъемника.

Среди отдыхающих 100% пользуются подъемником, прибыль от которого составляет 4 у.е., 60% берут на прокат снаряжение, что приносит прибыль 3 у.е. в час за комплект, 10% нанимают инструктора, что приносит курорту еще по 5 у.е. дохода с каждого обучающегося.

Рассчитать, какое количество часов в неделю склон должен быть предоставлен олимпийской сборной и какое должен быть открытым для любительского катания, если сборная платит за аренду склона 105 у.е. в час (сюда включен подъемник) и ей необходимо для тренировок не менее двадцати часов в неделю. Прибыль от работы горнолыжного курорта должна быть максимально возможной.

Ответ: $лг, = 52, *, = 32, Z_{m,,} = 1554$ а Литература.

1. Методы формализованного представления систем управления: Методические указания по курсу «Исследование систем управления»/ Сост.: Росс С.И. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2. Морозов В. В. и др. Исследование операций в задачах. М: Высшая школа, 1986.