

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ “ Информатика и вычислительная техника”

Кафедра “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”

**Коледов Л.В.**

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО для выполнения лабораторных работ по курсу "Ис-  
следование операций"

часть 5.

«Решение задач ЛП средствами MATLAB»

Пособие предназначено для студентов специальностей 010503, 230105

РОСТОВ - НА - ДОНУ

2014

**Задание ЛР5.** Исходя из постановки «ВАШЕЙ» задачи, выпишите спецификации, необходимые для решения средствами MATLAB'a основной и двойственной задачи. Решите её в среде MATLAB. Сохраняя протоколы исполнения, сравните их с результатами предыдущих работ.

**Пример выполнения.** Продолжим решение задачи (7)-(10) (см. МУ к ЛР4) посредством интерфейса, предлагаемого в MATLAB'е.

исходная задача:

$$\text{максимизировать } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \quad (7)$$

при следующих ограничениях:

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 16,$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 25, \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0;$$

Вот как выглядит запись этой задачи в тексте скрипта, вызываемого для решения этой задачи в среде MATLAB'a.

```
clear all
clc
diary 123.txt

% Решение задач линейного программирования
% максимизировать F(x1,x2,x3) = 4*x1 + 5*x2 + 9*x3
% при следующих ограничениях:
% 1*x1 + 1*x2 + 2*x3 <= 16;
% 7*x1 + 5*x2 + 3*x3 <= 25;
% x1, x2, x3 >= 0;

f = [ - 4; -5; -9];
Aeq = [ ];
beq = [ ];

A = [ 1 1 2; 7 5 3]; b = [16; 25];

LB = zeros(3,1);

[X,FVAL1]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB)

diary off
```

Результат, выведенный программой:

```
X =
    0.0000
    0.2857
    7.8571
```

```
FVAL1 =
```

-72.1429

двойственная задача:

минимизировать  $16y_1 + 25y_2$  (9)

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} 1y_1 + 7y_2 &\geq 4, \\ 1y_1 + 5y_2 &\geq 5, \\ 2y_1 + 3y_2 &\geq 9, \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

```
clear all
clc
diary 234.txt

% Решение задачи линейного программирования
% минимизировать G(y1,y2) = 16*x1 + 25*y2
% при следующих ограничениях:
% 1*y1 + 7*y2  => 4;
% 1*y1 + 5*y2  => 5;
% 2*y1 + 3*y2  => 9;
% y1, y2 >= 0;
% Преобразование в приемлемую форму неравенства:
% -1*y1 - 7*y2  <= -4;
% -1*y1 - 5*y2  <= -5;
% -2*y1 - 3*y2  <= -9;
% y1, y2 >= 0;

g = [ 16; 25];
Aeq = [ ];
beq = [ ];

B = [ -1 -7; -1 -5; -2 -3]; c = [-4 ; -5; -9];

LB1 = zeros(3,1);

[Y,FVAL1]=linprog(g,B,c,Aeq,beq,LB1)

diary off
```

Результат, выведенный программой:

```
Y =
    4.2857
    0.1429
FVAL2 =
    72.1429
```

## Приложение

В этом месте приводятся фрагменты из [1, стр. 653-659], необходимые для организа-

ции решения задачи ЛП в среде MATLAB и переведенные на русский язык сообщения help-системы MATLAB.

# Линейное программирование

Для решения задачи линейного программирования в MATLAB используется функция `linprog`. Область поиска для нее задается следующими условиями:

- $A \cdot x \leq b$  — линейные неравенства ( $A$  — матрица,  $b$  — вектор);
- $A_{eq} \cdot x = b_{eq}$  — линейные уравнения ( $A_{eq}$  — матрица,  $b_{eq}$  — вектор);
- $lb \leq x \leq ub$  — ограничения на координаты ( $lb$ ,  $ub$  — два вектора).

Целевая функция  $f' \cdot x$  в `linprog` задается вектором коэффициентов  $f$ .

$f$ ,  $x$ ,  $b$ ,  $b_{eq}$ ,  $lb$  и  $ub$  это векторы, тогда как  $A$  и  $A_{eq}$  — матрицы.

Формы обращения к этой функции:

```
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
[x,fval] = linprog(...)
[x,fval,exitflag] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output,lamda] = linprog(...)
```

$x = \text{linprog}(f,A,b)$  возвращает  $\min f' \cdot x$  так что  $A \cdot x \leq b$ .

$x = \text{linprog}(f,A,b,A_{eq},b_{eq})$  решает эту проблему при дополнительном ограничении  $A_{eq} \cdot x = b_{eq}$ . Присвоить  $A = []$  и  $b = []$  если нет ограничений - неравенств.

$x = \text{linprog}(f,A,b,A_{eq},b_{eq},lb,ub)$  решает проблему минимизации в наличии нижних и верхних границ, определяющих  $x$ , так, что для каждой координаты  $lb \leq x \leq ub$ . Присвоить  $A_{eq} = []$  и  $b_{eq} = []$  если нет ограничений-равенств.

$[x,fval] = \text{linprog}(\dots)$  возвращает значение целевой функции при найденном значении решения  $x$ :  $fval = f' \cdot x$ .

Пример 1. Задача максимизации дохода.

Рассмотрим условное производство столов и стульев.

Наименование ресурса	Продукция		Ограничения по ресурсу
	Стул	Стол	
Древесина (кг/ шт.)	5	25	500
Кожа (м <sup>2</sup> / шт.)	0.5	–	15
Клей (г/ шт.)	100	250	7500
Труд. затраты (чел.час/ шт.)	10	10	400
Доход (руб./ шт.)	10	20	

Математической моделью здесь являются задача ЛП в стандартной форме найти  $x_1$  и  $x_2$  такие, что функция  $f(x)=10x_1+20x_2$  достигает максимума при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 25x_2 &\leq 500 \\
 0.5x_1 &\leq 15 \\
 100x_1 + 250x_2 &\leq 7500 \\
 10x_1 + 10x_2 &\leq 400 \\
 x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Для обращения к функции `linprog` подготовим входную информацию:

- ☐ вектор коэффициентов целевой функции  $f=[10; 20];$
- ☐ матрицу коэффициентов системы линейных неравенств  $A=[5 \ 25; 0.5 \ 0; 100 \ 250; 10 \ 10];$
- ☐ вектор свободных членов системы линейных неравенств  $b=[500; 15; 7500; 400];$
- ☐ вектор нижних границ для переменных  $lb=zeros(2,1).$

Функция `linprog` ищет минимум, а в постановке задачи идет речь о максимуме, поэтому необходимо либо сменить знак коэффициентов целевой функции  $f$ , либо поставить знак минус перед именем этого вектора:

```
[x,fval] = linprog(-f,A,b,[],[],lb)
```

Получим следующие результаты:

```
x = [25 15]
fval = -550
```

Таким образом, найден оптимальный план мебельного производства: надо выпустить 25 стульев и 15 столов, при этом получится доход 550 руб. План получился целочисленным, однако в общем случае решение может оказаться и вещественным. Если целочисленность решения — обязательное требование, его надо включать в постановку задачи, однако в MATLAB нет специальных функций для решения общей задачи целочисленного линейного программирования.

Для любой ЗЛП можно сформулировать так называемую *двойственную задачу*. Пусть в исходной задаче требуется найти максимум  $f' \cdot x$  при  $A \cdot x \leq b$  и  $0 \leq x$ . Тогда в двойственной задаче требуется найти минимум  $b' \cdot y$  при  $A' \cdot y \geq f$  и  $0 \leq y$ .

Сформулируем задачу, двойственную к рассмотренной в примере 16.1. Чтобы привести неравенство к требуемому виду, умножим его на  $-1$ , получим  $-A' \cdot y \leq -f$ . Необходимо также скорректировать вектор нижних границ:

```
lb = zeros(4,1)
```

Обращение к функции `linprog` теперь имеет такой вид:

```
[y,gval] = linprog(b,-A',-f,[],[],lb)
```

Получим следующие результаты:

```
y = [0.50 0.00 0.00 0.75]
```

```
gval = 550.0000
```

Видим, что значения целевых функций совпадают (если учесть искусственно внесенный минус в целевой функции прямой задачи). Это совпадение не случайно, о нем говорит теорема двойственности в ЛП. Значения двойственных переменных имеют экономическую интерпретацию: они представляют собой *оценки ресурсов*. Так, нулевые значения переменных  $y_2$  и  $y_3$ , соответствующих ресурсам *кожа* и *клей*, говорят, что эти ресурсы не являются ценными, поскольку для производства 25 стульев и 15 столов имеющиеся количества этих ресурсов избыточны, в чем можно убедиться, подставив значения  $x_1=25$ ,  $x_2=15$  в левые части неравенств прямой задачи. Значение  $y_1=0.5$  говорит о том, что при увеличении ресурса *древесина* на некоторое небольшое количество  $\Delta_1$  можно получить дополнительный доход  $0.5 \cdot \Delta_1$ . Аналогично значение  $y_4=0.75$  говорит о том, что при увеличении ресурса *труд. затраты* на некоторое небольшое количество  $\Delta_4$  можно получить дополнительный доход  $0.75 \cdot \Delta_4$ .

Положим, например,  $\Delta_1=0$ ,  $\Delta_4=40$  т. е. возьмем  $b=[500; 15; 7500; 440]$ . Решив заново прямую ЗЛП, получим

```
x = [30 14]
```

```
fval = -580
```

Видим, что (с учетом измененного знака `fval`) доход действительно увеличился на  $0.75 \cdot \Delta_4=30$ .

## Литература.

1. Кетков Ю. Л. И др. MATLAB7: Программирование, численные методы. Гл. 16. СПб.: 2007г.