

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ “ Информатика и вычислительная техника”

Кафедра “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”

Коледов Л.В.

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО для выполнения лабораторных работ по курсу "Ис-
следование операций"

часть 4.

«Двойственные задачи ЛП»

Пособие предназначено для студентов специальностей 010503, 230105

РОСТОВ - НА - ДОНУ

2014

Задание ЛР4. Исходя из постановки «ВАШЕЙ» задачи, выпишите двойственную задачу (см. Приложение) и решите её в среде LiPS. Сохраняя протоколы модификации симплекс-таблиц для вклейки в отчет о решении прямой (уже было) и двойственной задачи. Объедините результаты с ответами, полученными в ЛР3 в отчет к ЛР4.

Пример выполнения. Приведем решение задачи (7)-(10) (см. пример ниже) посредством интерфейса, предлагаемого нам LiPS.

исходная задача:

$$\text{максимизировать } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \quad (7)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 &\leq 16, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 25, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0; \end{aligned} \quad (8)$$

Вот как выглядит запись этой задачи в текстовой форме LiPS:

max: 4*x1 + 5*x2 + 9*x3 ;
x1 + x2 + 2*x3 < 16;
7* x1 + 5* x2 + 3*x3 < 25;

Сохраняю работу под именем «Dua01.lpx».

Жмём F5 > Переходим в окно «DuaRep01» ->

Сохранить как «DuaRep01». (Внимание! Равширение «rtf» может «потеряться» – вставьте вручную.)

двойственная задача:

$$\text{минимизировать } 16y_1 + 25y_2 \quad (9)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} 1y_1 + 7y_2 &\geq 4, \\ 1y_1 + 5y_2 &\geq 5, \\ 2y_1 + 3y_2 &\geq 9, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Вот как выглядит запись этой задачи в текстовой форме LiPS:

min: 16*x1 + 25*x2 ;
x1 + x2 > 4;
x1 + 5* x2 > 5;
2* x1 + 3 * x2 > 9;

Сохраняем работу под именем «Dua01a.lpx».

Жмём F5 > Переходим в окно «DuaRep01a» ->

Сохранить как «DuaRep01a».

Теперь этот файл можно открыть в WORD`е и рассмотреть подробно. Вставляем его последовательные таблицы отчета.

Приложение

В этом месте приводятся фрагменты из [1, т.1], полезные для понимания существа проблемы чувствительности решения задачи ЛП к изменению условий задачи.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Однако в теории линейного программирования существует понятие **двойственности**, которое позволяет унифицированным образом устанавливать взаимосвязи для всех приемов и методов анализа моделей на чувствительность. Для тех, кто не знаком с линейным

программированием, понятие двойственности может показаться абстрактным и, следовательно, весьма непривычным. Только со временем это впечатление уступает место пониманию исключительной важности и полезности этого понятия.

Мы начнем с определения двойственности и сразу же приведем ряд примеров. В последующих разделах будет показано, каким образом двойственность используется при анализе на чувствительность моделей линейного программирования.

Исходная¹⁾ и двойственная задачи. Рассмотрим две следующие задачи линейного программирования:

$$\text{максимизировать } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

и

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (4)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

Для определенности условно назовем первую задачу [соотношения (1) — (3)] **исходной**, а вторую [соотношения (4) — (6)] **двойственной** (по отношению к первой).

В качестве иллюстрации рассмотрим следующие две задачи:
исходная задача:

$$\text{максимизировать } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \quad (7)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 &\leq 16, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 25, \end{aligned} \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0;$$

двойственная задача:

$$\text{минимизировать } 16y_1 + 25y_2 \quad (9)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} 1y_1 + 7y_2 &\geq 4, \\ 1y_1 + 5y_2 &\geq 5, \\ 2y_1 + 3y_2 &\geq 9, \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Грубо говоря, двойственная задача — это на 90° повернутая исходная задача. Действительно,

1) j -й столбец, составленный из коэффициентов, фигурирующих в ограничениях исходной модели, совпадает с j -й строкой, составленной из коэффициентов, фигурирующих в ограничениях двойственной модели;

2) строка, составленная из коэффициентов в выражении для целевой функции, совпадает со столбцом, составленным из констант, фигурирующих в правых частях ограничений двойственной модели;

3) столбец, составленный из констант, фигурирующих в правых частях ограничений исходной модели, совпадает со строкой, составленной из коэффициентов в выражении для целевой функции двойственной модели;

4) направление знаков неравенства в исходной модели противоположно направлению знаков неравенства в двойственной модели; требование максимизации в исходной задаче в двойственной задаче заменено требованием минимизации.

Имеет место следующая важная теорема:

Т е о р е м а д в о й с т в е н н о с т и. а) Если и исходная и двойственная ей задачи имеют допустимые решения, то: 1) существует оптимальное решение x_j^* ($j = 1, 2, \dots, n$) исходной задачи; 2) существует оптимальное решение y_i^* ($i = 1, 2, \dots, m$) двойственной задачи; 3) имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*. \quad (11)$$

б) Если исходная (двойственная) задача допускает оптимальное решение, для которого значение целевой функции ограничено, то соответствующая ей двойственная (исходная) задача допускает оптимальное решение при том же значении целевой функции.

Приступая к доказательству утверждений, составляющих в совокупности теорему двойственности, покажем прежде всего, что *любое* допустимое решение задачи линейного программирования накладывает ограничение на оптимальное значение целевой функции соответствующей двойственной задачи.

Пусть переменные x_j удовлетворяют ограничениям исходной модели, а переменные y_i удовлетворяют ограничениям двойственной модели. Умножим каждое i -е ограничение исходной задачи на y_i , а каждое j -е ограничение двойственной задачи на x_j . Поскольку

$y_i \geq 0$ и $x_j \geq 0$, направление неравенств в результате указанных действий не изменится. Сложив отдельно правые и соответственно левые части всех соотношений, получаемых после выполнения указанных выше операций над ограничениями исходной модели, получим

$$\sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^n b_j x_j. \quad (12)$$

(При сложении нескольких неравенств с одинаковым направлением знака неравенства, естественно, получаем неравенство с тем же направлением знака неравенства.)

Поскольку выражения в левых частях неравенств (12) и (13) совпадают, имеем

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i. \quad (14)$$

Следовательно, значение целевой функции, соответствующее некоторому допустимому решению (включая оптимальное) задачи линейного программирования, не является независимым от значения целевой функции для *любого* допустимого решения (включая оптимальное) соответствующей двойственной задачи.

В частности, для исходной и двойственной задач, представленных соотношениями (7) — (10), имеем

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \leq 16y_1 + 25y_2 \quad (15)$$

для любых допустимых решений как исходной задачи, так и её двойственной. Одно из допустимых решений исходной задачи имеет вид $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 8$; при этом целевая функция принимает значение, равное 72. Двойственная задача допускает решение $y_1 = 5$, $y_2 = 0$; значение целевой функции при этом равняется 80. Следовательно, оптимальное значение целевой функции как для исходной задачи, так и для двойственной лежит в интервале от 72 до 80.

Теорема двойственности имеет место и в том случае, когда исходная и двойственная задачи записаны в приведенном выше каноническом виде. В этой связи полезно усвоить следующую схему соответствия:

Исходная задача

Максимизация

Константы в правых частях ограничений

Целевая функция

j -й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

i -я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

j -я неотрицательная переменная

j -я переменная, не имеющая ограничения в знаке

i -е неравенство вида \leq

i -е соотношение в виде равенства

Двойственная задача

Минимизация

Целевая функция

Константы в правых частях ограничений

j -я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

i -й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

j -е неравенство вида \geq

j -е соотношение в виде равенства

i -я неотрицательная переменная

i -я переменная, не имеющая ограничения в знаке

РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Оптимальные значения переменных двойственной задачи.

а) Коэффициенты при свободных переменных в строке 0 на последней симплекс-итерации при решении задачи максимизации совпадают с оптимальными значениями переменных двойственной задачи.

б) Коэффициент при x_j в строке 0 на последней симплекс-итерации представляет собой разность между левой и правой частями j -го ограничения двойственной задачи, соответствующую оптимальному решению последней. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу распределения ресурсов¹⁾, решение которой дано в разд. 4.4:

$$\text{максимизировать } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

при наличии следующих ограничений:

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 15,$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Легко показать, что двойственная задача формулируется следующим образом:

$$\text{минимизировать } 15y_1 + 120y_2 + 100y_3 \quad (1)$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} 1y_1 + 7y_2 + 3y_3 &\geq 4, \\ 1y_1 + 5y_2 + 5y_3 &\geq 5, \\ 1y_1 + 3y_2 + 10y_3 &\geq 9, \\ 1y_1 + 2y_2 + 15y_3 &\geq 11, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Литература.

1. Вагнер Г. Основы исследования операций: в 2-х книгах, М. Мир, 1985.