
А.И. ПОЛИСМАКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Ростов-на-Дону
Издательство Ростовского университета
2005

УДК 519.86(075.8)
ББК 22.11я73
П

ВВЕДЕНИЕ

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор ДГТУ

М.А. Краплин;

кандидат физико-математических наук, доцент ДГТУ

В.М. Поркисян;

доктор экономических наук, профессор РГУ

В.М. Белоусов

Настоящее учебное представляет собой обобщение автором многолетнего опыта преподавания математической экономики студентам международного факультета ДГТУ, обучающимся по специальности «Мировая экономика». Пособие состоит из трех глав, каждая из которых содержит три параграфа. Главы имеют независимую нумерацию задач, формул и рисунков. Изучение учебного материала можно в принципе начинать с любой главы. В конце каждого параграфа дается по десять вариантов контрольных заданий для самостоятельного решения и приводится в качестве образца решение одиннадцатого варианта.

Содержание учебного пособия соответствует требованиям государственного стандарта по математике для студентов экономических специальностей, относящимся к разделу «Экономико-математические методы и модели», который обычно изучается в четвертом семестре. Для понимания содержания требуется владение математическим аппаратом и знание основ экономической теории в пределах требований государственных программ вузов по этим дисциплинам.

Данное учебное пособие может оказаться полезным и для студентов средних экономических учебных заведений, изучающих экономико-математические методы и модели в рамках спецкурсов или курсов по выбору. В этом случае некоторые параграфы можно пропустить без особого ущерба для понимания последующего материала.

Кроме того, благодаря большому количеству рассмотренных типовых задач это пособие можно рекомендовать студентам заочных отделений для самостоятельного изучения учебного материала и подготовки к выполнению контрольных заданий.

Полисмаков А.И.

П Математическая экономика: Учебное пособие. – Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 2005. – 164 с.

ISBN

В учебном пособии рассматриваются экономико-математические методы и модели, применяемые в микро- и макроэкономике. Содержание учебного пособия соответствует требованиям государственного стандарта по математике для специальностей «Мировая экономика», «Менеджмент» и др.

Рекомендуется для студентов экономических специальностей вузов.

Б 470246000 – 41 Без объявл.
М 175(03) – 2004

УДК 519.86(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN

© Полисмаков А.И., 2005
© Оформление. Издательство
Ростовского университета, 2005

§ 1. Элементы линейного программирования

1.1. Примеры задач линейного программирования

В экономике часто возникают задачи, в которых требуется найти так называемое оптимальное решение при строго определенных условиях. Искомое оптимальное решение, в зависимости от характера задачи, должно обеспечивать максимум (или минимум) какой-либо переменной величины, заданной в виде функции. Эту функцию мы будем называть далее целевой функцией. Совокупность условий, которым должны удовлетворять независимые переменные целевой функции, обычно записывается в виде системы уравнений или системы неравенств. Если все эти уравнения и неравенства линейны и целевая функция также является линейной, то задача нахождения максимума (или минимума) целевой функции называется *задачей линейного программирования*.

Принято считать, что задачи линейного программирования более характерны для так называемой плановой экономики, в которой экономические переменные являются достаточно стабильными и не подвержены воздействию «рыночной стихии». Однако и в рыночной экономике встречаются случаи, когда оптимальное решение определенной экономической задачи может быть найдено в форме задачи линейного программирования. Приведем несколько характерных задач подобного типа.

1. Задача составления оптимального рациона питания

Для кормления животных фермер использует два вида корма – А и В. Известно, что 1 кг корма А содержит 3 единицы белка, 1 единицу жиров и 1 – углеводов; 1 кг корма В содержит

1 единицу белка, 6 – жиров и 2 – углеводов. Стоимость корма А – 4 денежные единицы за 1 кг. Стоимость корма В – 6 денежных единиц за 1 кг. Согласно рекомендациям диетологов каждое животное должно получить в течение дня не менее 9 ед. белка, 12 ед. жиров и 8 ед. углеводов. Найдите оптимальное соотношение кормов А и В в рационе питания.

Анализ задачи 1. Обозначим: x_1 – количество корма А (кг); x_2 – количество корма В (кг) в искомом оптимальном рационе. Тогда целевая функция данной задачи будет иметь вид:

$$C = 4x_1 + 6x_2.$$

Эта функция при выбранных значениях x_1, x_2 позволяет найти стоимость ежедневного рациона питания животного. Очевидно, задача фермера заключается в том, чтобы выбрать x_1 и x_2 так, что целевая функция стоимости примет наименьшее значение, при условии соблюдения рекомендаций диетологов:

$$\text{по белкам: } 3x_1 + 1x_2 \geq 9,$$

$$\text{по жирам: } 1x_1 + 6x_2 \geq 12,$$

$$\text{по углеводам: } 1x_1 + 2x_2 \geq 8.$$

Таким образом, мы получили задачу линейного программирования:

Найти x_1 и x_2 так, чтобы $C = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$, при условии выполнения системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение данной задачи будет дано в п. 1.2.

2. Задача оптимального распределения ресурсов

Мебельная фабрика выпускает шкафы двух типов. Для изготовления первого требуется 1 кв. м фанеры, 2 кв. м досок и 1 человеко-день трудозатрат. Для изготовления второго требуется 3,5 кв. м фанеры, 0,5 кв. м досок и 1 человеко-день трудозатрат. Шкаф первого типа стоит 1000 рублей, второго типа – 2000 рублей. Фабрика располагает 350 кв. м фанеры, 240 кв. м досок. Кроме того, оплачено в форме аванса 250 человеко-дней. Требуется найти, сколько шкафов первого типа и сколько шка-

фов второго типа должна выпустить фабрика, чтобы стоимость ее продукции была максимальной.

Анализ задачи 2. Обозначим: x_1 – количество шкафов 1-го типа, x_2 – количество шкафов 2-го типа. Тогда целевая функция данной задачи имеет вид:

$$C = 1000x_1 + 2000x_2.$$

Требуется найти значения x_1 и x_2 , при которых целевая функция принимает наибольшее значение при условии выполнения ограничений:

$$x_1 + 3,5x_2 \leq 350,$$

$$2x_1 + 0,5x_2 \leq 240,$$

$$x_1 + x_2 \leq 250.$$

Решение задачи 2 будет дано в п. 1.4.

3. Задача составления оптимального плана перевозок (транспортная задача)

На двух железнодорожных станциях сосредоточено топливо для трех электростанций. На C_1 имеется 300 т, на C_2 – 500 т. На электростанцию E_1 нужно доставить 500 т, на E_2 – 200 т, на E_3 – 100 т. Стоимость перевозки 1 т топлива для каждого маршрута задана таблицей:

	\mathfrak{D}_1	\mathfrak{D}_2	\mathfrak{D}_3	
C_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	300 T
C_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	500 T
	500 T	200 T	100 T	

Необходимо составить план перевозок.

Анализ задачи 3. Обозначим $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ — количество топлива, перевозимого по маршрутам, указанным в таблице. Требуется найти такие числовые значения этих шести неизвестных, чтобы общая стоимость перевозок, т.е. $C = 7x_{11} + 9x_{12} + 8x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23}$ (целевая функция), приняла наименьшее значение, при условии выполнения системы ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 500, \\ x_{12} + x_{22} = 200, \\ x_{13} + x_{23} = 100, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 500. \end{array}$$

Решение этой задачи приведено в п. 1.3.

Перейдем к более общей постановке задачи линейного программирования.

1.2. Общая постановка задачи линейного программирования

Сформулируем задачу линейного программирования в каноническом виде. Найти значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые:

1) удовлетворяют системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \text{--- --- ---} \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{aligned} \right. \quad (1)$$

2) являются неотрицательными:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; \quad (2)$$

3) дают наименьшее (наибольшее) значение целевой функции:

$$L = L(\bar{x}) = L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (3)$$

При решении задач линейного программирования в канонической постановке могут встретиться следующие пять случаев:

1) Система уравнений (1) несовместна (т.е. не имеет решений).

2) Система уравнений (1) совместна, но ни одно из решений не удовлетворяет неравенствам (2).

3) Система уравнений (1) имеет бесконечное множество допустимых решений (т.е. удовлетворяющих неравенствам (2)), но целевая функция не является ограниченной на этом множестве, и поэтому среди допустимых решений нет единственного оптимального.

4) Система уравнений (1) имеет единственное решение, которое является допустимым.

5) Система (1) имеет бесконечное множество допустимых решений и целевая функция на этом множестве ограничена. Нетрудно заметить, что в случаях 1, 2, 3 – задача линейного программирования неразрешима. В случае 4 – единственное допустимое решение является оптимальным. В случае 5 – необходимо из бесконечного множества допустимых решений найти оптимальное. Именно этот случай и представляет наибольший интерес.

Пусть система (1) совместна и среди ее уравнений нет линейно зависимых, т.е. ни одно уравнение не является следствием остальных. Для того чтобы эта система имела бесконечное множество решений, нужно, чтобы число уравнений m было меньше числа неизвестных n . Предположим, что $k = n - m > 0$. Выделим m базисных неизвестных, которые можно выразить через остальные k свободных неизвестных. Деление неизвестных (переменных) на базисные и свободные является условным и зависит только от нашего выбора.

Допустим, что в системе уравнений (1) проведено одно из возможных разбиений переменных на базисные и свободные. Положим все свободные переменные равными нулю и определим из системы (1) соответствующие значения базисных переменных. Если эти значения неотрицательны, т.е. выполняется условие (2), то получено одно из допустимых решений, которое называется базисным (опорным).

Можно доказать следующую теорему, которая имеет важное значение в теории линейного программирования (см. [8]).

Теорема 1. Если оптимальное решение задачи линейного программирования существует, то оно является опорным.

Эта теорема делает возможным следующий алгоритм опорных решений:

- 1) Рассматриваются все возможные разбиения переменных на базисные и свободные.
- 2) Для каждого разбиения находят соответствующее опорное решение.
- 3) Из всех найденных опорных решений выбирают допустимые решения.
- 4) Подставляя каждое из допустимых решений в целевую функцию, находят искомое оптимальное решение.

Однако поиск опорных решений прямым перебором годится только при малом числе переменных. При большом числе n это

сделать довольно сложно, так как количество всевозможных разбиений переменных на базисные и свободные, равное C_n^m (число сочетаний) может оказаться неприемлемо большим. В этих случаях нужно применять другие методы.

В качестве иллюстрации метода опорных решений решим этим методом задачу 1 (п. 1.1).

Задача 1. Система ограниченной задачи 1 имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$C(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min.$$

Решение.

Преобразуем задачу к каноническому виду. Для этого введем неотрицательные вспомогательные переменные x_3, x_4, x_5 , так, чтобы неравенства системы (4) превратились в уравнения:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 6x_2 - x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 8, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5. \end{cases} \quad (5)$$

Количество базисных (опорных) решений системы (5) равно количеству всевозможных выборов трех базисных неизвестных из данных пяти. То есть:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Согласно методу опорных решений, необходимо из всех допустимых опорных решений выбрать то, которому соответствует наименьшее значение целевой функции $C(x) = 4x_1 + 6x_2$.

Найдем все опорные решения.

1) Пусть x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные; x_4, x_5 – свободные. Полагая свободные неизвестные равными нулю, получим из системы (5) следующую:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 6x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Решая ее, получим первое опорное решение: (6; 1; 10; 0; 0).
 2) Пусть x_1, x_2, x_4 – базисные; x_3, x_5 – свободные. При $x_3 = 0, x_5 = 0$ система (5) принимает вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 6x_2 - x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Решая ее, получаем второе опорное решение: (2; 3; 0; 8; 0).
 Следующие опорные решения находим аналогично:

- 3) x_1, x_2, x_5 – базисные. Опорное решение: $\left(\frac{42}{17}; \frac{27}{17}; 0; 0; -\frac{40}{17}\right)$;
 4) x_2, x_3, x_4 – базисные. Опорное решение: (0; 4; -5; 12; 0);
 5) x_2, x_4, x_5 – базисные. Опорное решение: (0; 9; 0; 42; 10);
 6) x_2, x_3, x_5 – базисные. Опорное решение: (0; 2; -7; 0; -4);
 7) x_1, x_3, x_4 – базисные. Опорное решение: (8; 0; 12; -4; 0);
 8) x_1, x_3, x_5 – базисные. Опорное решение: (12; 0; 27; 0; 4);
 9) x_1, x_4, x_5 – базисные. Опорное решение: (3; 0; 0; -9; -5);
 10) x_3, x_4, x_5 – базисные. Опорное решение: (0; 0; -9; -12; -8).

Исключая те опорные решения, которые содержат отрицательные значения неизвестных, получим следующие четыре допустимых решения:

- 1) (6; 1; 10; 0; 0); 2) (2; 3; 0; 8; 0);
 5) (0; 9; 0; 42; 10); 8) (12; 0; 27; 0; 4).

Найдем соответствующие им значения целевой функции:

- 1) $C(6; 1) = 30$; 2) $C(2; 3) = 26$;
 5) $C(0; 9) = 54$; 8) $C(12; 0) = 48$.

Наименьшее значение целевой функции получилось при подстановке в нее второго опорного решения: $C_{\min} = C(2; 3) = 26$. Следовательно, оптимальное решение задачи 1: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

1.3. Графический метод решения задач линейного программирования

Этот метод применяется для решения задач линейного программирования: 1) заданных в стандартном виде, т.е. в виде, когда система условий представлена системой неравенств; 2) в которых целевая функция и система условий содержат всего две переменные.

Алгоритм решения задачи графическим методом заключается в следующем:

1. Учитывая, что целевая функция имеет вид $L = \alpha x_1 + \beta x_2$, построим в системе координат $(x_1; x_2)$ так называемый *нормальный целевой вектор* $\bar{n} = (\alpha; \beta)$. Этот вектор указывает направление, в котором целевая функция возрастает наиболее быстро, т.е. $\bar{n} = \text{grad}(L(x_1; x_2))$.
2. Используя систему неравенств, задающих условия, наложенные на переменные x_1 и x_2 , построим в той же системе координат область допустимых значений D этих переменных.

3. Проведем линию уровня – прямую перпендикулярную вектору \bar{n} , которая проходит через начало координат. Перемещаем линию уровня в направлении вектора до тех пор, пока у нее не окажется всего одна общая точка с областью D . (Линия уровня в процессе перемещения должна оставаться перпендикулярной вектору \bar{n} .) Если эта «последняя» общая точка, имеющая координаты $(x_1; x_2)$, существует, то она дает максимальное значение целевой функции.
4. Если в задаче линейного программирования требуется найти минимальное значение целевой функции, то линию уровня перемещаем в направлении, противоположном вектору. В этом случае «последняя» общая точка этой линии с областью D (если она существует) дает минимальное значение целевой функции $L = \alpha x_1 + \beta x_2$.

В качестве примера применения графического метода решим транспортную задачу № 3, сформулированную в п. 1.1.

Задача 3. Найти неотрицательные значения переменных $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{13}, x_{23}$, при которых целевая функция $C = 7x_{11} + 9x_{12} + 8x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23}$ принимает наименьшее значение, при условии выполнения системы ограничений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 500, \\ x_{12} + x_{22} = 200, \\ x_{13} + x_{23} = 100, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 500. \end{cases}$$

Решение.

Данная задача имеет канонический вид. Для ее решения графическим методом необходимо прежде всего преобразовать ее к

стандартному виду. Для этого выберем в качестве основных переменных x_{11} и x_{12} и выразим через x_{11} и x_{12} все остальные переменные:

$$\begin{cases} x_{21} = 500 - x_{11}, \\ x_{22} = 200 - x_{12}, \\ x_{13} = 300 - x_1 - x_{12}, \\ x_{23} = 100 - (300 - x_{11} - x_{12}). \end{cases} \quad (6)$$

Так как по условию переменные x_{21} , x_{22} , x_{13} , x_{23} – неотрицательны, то получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 500 - x_{11} \geq 0, \\ 200 - x_{12} \geq 0, \\ 300 - x_{11} - x_{12} \geq 0, \\ 100 - (300 - x_{11} - x_{12}) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} \leq 500, \\ x_{12} \leq 200, \\ x_{11} + x_{12} \leq 300, \\ x_{11} + x_{12} \geq 200. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя в целевую функцию выражения переменных x_{21} , x_{22} , x_{13} , x_{23} из (6), преобразуем ее к виду, в котором она зависит только от двух переменных x_{11} и x_{12} :

$$C = 7x_{11} + 9x_{12} + 8(300 - x_{11} - x_{12}) + 3(500 - x_{11}) + 4(200 - x_{12}) + 6(100 - (300 - x_{11} - x_{12})) = 2x_{11} + 3x_{12} + 3500.$$

Таким образом: $C = 2x_{11} + 3x_{12} + 3500 \rightarrow \min$.

Задача приведена к стандартному виду, зависит только от двух переменных x_{11} и x_{12} и может быть решена графическим методом. Будем действовать в соответствии с алгоритмом, описанным выше.

1) Построим в системе координат x_{11} и x_{12} нормальный целевой вектор $\vec{n} = (2; 3)$, область допустимых значений D , заданную системой неравенств (7), и нулевую линию уровня (т.е. прямую, проходящую через начало координат перпендикулярно $\vec{n} = (2; 3)$). Заметим, что в данной задаче вектор $\vec{n} = (2; 3)$ имеет по сравнению с областью D слишком маленькие размеры. Поэтому его целесообразно «увеличить», т.е. изобразить вектор $100 \cdot \vec{n} = (200; 300)$, который, очевидно, имеет то же направление, что и $\vec{n} = (2; 3)$.

2) Будем мысленно перемещать линию уровня так, чтобы она, оставаясь перпендикулярной вектору \vec{n} (или $100\vec{n}$), пересекала область D . Нетрудно заметить, что в $(\cdot)K$ (см. рис. 1)

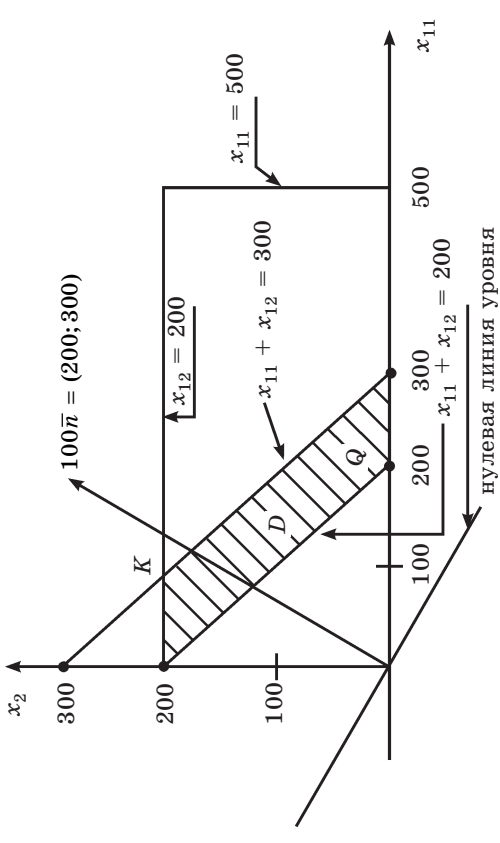


Рис. 1. Графическое решение задачи 3

она будет иметь наиболее «продвинутое» положение в направлении вектора $100\vec{n}$. Следовательно, в этой точке целевая функция примет наибольшее значение из всех возможных. Но в задаче требуется найти точку, в которой целевая функция, напротив, принимает наименьшее значение в данных условиях. Перемещая ее из положения, в котором она проходит через $(\cdot)K$ в сторону, противоположную вектору $100\vec{n}$, заметим, что последней общей точкой линии уровня с областью D будет $(\cdot)Q$. Следовательно, в этой точке целевая функция примет наименьшее допустимое значение. Координаты $(\cdot)Q(200; 0)$. Поэтому искомое решение задачи: $x_{11}^* = 200$ и $x_{12}^* = 0$.

3) Из выражений (6) найдем соответствующие $x_{11} = 200$; $x_{12} = 0$ значения других (не основных) переменных: $x_{21} = 300$; $x_{22} = 200$; $x_{13} = 100$; $x_{23} = 0$. Значение целевой функции в $(\cdot)Q$: $200; 0$ $C = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 0 + 3500 = 3900$.

Ответ: $C_{min} = 3900$; оптимальный план перевозок определяется значениями переменных: $x_{11} = 200$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 100$; $x_{21} = 300$; $x_{22} = 200$; $x_{23} = 0$.

1.4. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Симплекс-метод является одним из наиболее универсальных методов решения задач линейной оптимизации. Идея метода заключается в последовательном движении от одного из допустимых опорных решений к следующему допустимому опорному решению, которое является лучшим, чем предыдущее. В результате этого целенаправленного движения оптимальное решение задачи удается найти за некоторое (конечное) число шагов (итераций). Прежде чем применять симплекс-метод, необходимо задачу линейного программирования привести к каноническому виду (1), т.е. к такому виду, где ограничения заданы системой уравнений. Кроме того, необходимо найти какое-либо допустимое опорное (базисное) решение этой системы. После выполнения этих подготовительных операций задача линейного программирования будет определяться системой ограничений (уравнений), которую можно записать в виде следующей расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \end{pmatrix} \quad (8)$$

Эта расширенная матрица соответствует системе m линейных уравнений с n переменными ($n = k + m$). Первые k переменных являются свободными и в начальном опорном решении полагаются равными нулю. Оставшиеся m переменных являются базисными. **Начальное опорное решение** в этом случае имеет вид $(0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$. Заметим, что значения переменных в задачах линейного программирования, заданных в каноническом виде, должны быть неотрицательны. Поэтому начальное опорное решение будет допустимым только в случае когда b_1, b_2, \dots, b_m – неотрицательны. Если такое решение найти не удается, то можно попытаться перейти к так называемой двойственной задаче (см. п. 1.5).

Предположим, что все требования выполнены и начальное опорное решение является допустимым. Следующий этап заключается в том чтобы заполнить начальную симплекс-таблицу:

C_i	БП	C_1	C_2	\dots	C_k	C_{k+1}	C_{k+2}	\dots	C_{k+m}	$L(\vec{x})$	Сим. отн.
C_{k+1}	x_{k+1}	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1k}	1	0	\dots	0	b_1	S_1
C_{k+2}	x_{k+2}	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2k}	0	1	\dots	0	b_2	S_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
C_{k+m}	x_{k+m}	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mk}	0	0	\dots	1	b_m	S_m
Δ_j		Δ_1	Δ_2	\dots	Δ_k	0	0	\dots	0	L_1	

В верхней строке указываются числовые значения всех коэффициентов при переменных в целевой функции: $L(\vec{x}) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_k x_k + \dots + C_{k+m} x_{k+m} \rightarrow \max$. Во второй строке перечислены переменные x_1, x_2, \dots, x_{k+m} (напомним, что $k + m = n$). Далее следуют строки расширенной матрицы коэффициентов системы ограничений (8).

В первом и втором столбцах указываются коэффициенты целевой функции и базисные переменные.

Последняя строка симплекс-таблицы называется **индексной строкой**. Ее элементы вычисляются по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot C_{k+i} - C_j. \quad (9)$$

Элемент L_1 вычисляется по формуле

$$L_1 = \sum_{i=1}^m b_i \cdot C_{k+i}. \quad (10)$$

Значение L_1 представляет собой значение целевой функции при постановке в нее начального опорного решения.

Если в задаче требуется найти **максимум целевой функции** и в индексной строке **нет отрицательных элементов**, то рассматриваемое начальное опорное решение является искомым оптимальным решением, а значение L_1 представляет собой максимум целевой функции при заданных условиях.

Если отрицательные элементы в индексной строке есть, то это означает, что начальное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить. Выберем один из столбцов, в котором индексное значение Δ_j является отрицательным. Назовем этот столбец **разрешающим**. В представленной выше симплекс-таблице (только в качестве примера!) таким столбцом назначен быть второй столбец. Для каждого из положительных элементов a_{i2} этого столбца найдем отношение $\frac{b_i}{a_{i2}} = S_i$, которое называется симплекс-отношением. Значения S_i запишем в последний столбец. Выберем строку, которой соответствует наименьшее значение S_i . Эту строку назовем **разрешающей**. В нашей начальной симплекс-таблице (также только в качестве примера!) разрешающей строкой выбрана вторая строка. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится элемент, который называется **разрешающим элементом**. Выделим его в таблице квадратным значком (например: $\boxed{a_{22}}$). Разрешающий элемент имеет ключевое значение в дальнейших преобразованиях начальной симплекс-таблицы, которые выполняются в такой последовательности:

- 1) Следующая симплекс-таблица имеет те же размеры, что и начальная.
- 2) Если разрешающий элемент $\boxed{a_{ep}}$, то в строке с номером e значение C_{k+e} изменим на C_p ; базисную переменную x_{k+e} заменим на x_p . (В случае если разрешающим элементом является $\boxed{a_{22}}$, то C_{k+2} изменится на C_2 , переменная x_{k+2} – на переменную x_2).
- 3) Элементы разрешающей строки e разделим на разрешающий элемент, а все элементы разрешающего столбца p (кроме разрешающего элемента) заменим нулями.
- 4) Все остальные элементы следующей таблицы вычисляются по «правилу прямоугольника», которое можно схематически записать в виде:

$$\bigcirc' = \frac{\square \cdot \bigcirc - \Delta \cdot \nabla}{\square}, \quad (11)$$

где: \bigcirc' – новое значение изменяемого элемента; \square – разрешающий элемент; \bigcirc – изменяемый элемент; Δ и ∇ – элементы, стоящие на концах другой диагонали прямо-

угольника, выделяемого первой, которую задают элементы \bigcirc и \square .

Формулу (11) можно также записать в виде:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{ep} - a_{ej} \cdot a_{ip}}{a_{ep}}, \quad (12)$$

где a'_{ij} – новое значение элемента a_{ij} ($i \neq e, j \neq p$).

5. Значения элементов в индексной строке новой симплекс-таблицы показывают, достигнуто ли оптимальное решение.

Если в индексной строке есть отрицательные элементы, то в последней симплекс-системе по тем же правилам выбирается новый разрешающий элемент и строится новая симплекс-таблица. Последовательность операций для ее построения 1) – 5) такая же, как та, что описана выше.

Допустим, что в результате заполнения очередной симплекс-таблицы (очередной итерации) получена индексная строка, не содержащая отрицательных элементов. Это означает, что процесс нахождения оптимального решения завершен. Оптимальные значения базисных переменных, указанные в последней таблице, совпадают с соответствующими значениями в столбце коэффициентов b_i . Максимальное значение целевой функции L_{\max} в этом случае получается на пересечении этого столбца с индексной строкой.

Замечание. Если в задаче линейного программирования требуется **минимизировать** целевую функцию, то все преобразования выполняются аналогично, за исключением следующего. Найденное опорное решение является оптимальным в том случае, если все элементы индексной строки не содержат **положительных элементов**. Поэтому в процессе преобразования симплекс-таблицы разрешающим столбцом выбирают тот, которому в индексной строке соответствует наибольшее положительное значение Δ_j .

В качестве иллюстрации симплекс-метода решим задачу, сформулированную в п. 1.1.

Задача 2 (оптимального распределения ресурсов).

Из представленного анализа задачи (см. п. 1.1) были получены: целевая функция $C = 1000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max$;

система ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \leq 350, \\ 2x_1 + 0,5x_2 \leq 240, \\ x_1 + x_2 \leq 150. \end{cases} \quad (13)$$

Так как задача задана в стандартном виде и имеет только две переменные x_1 и x_2 , то ее можно было бы решить и графическим методом. Для того чтобы решить эту задачу симплекс-методом, необходимо предварительно привести ее к каноническому виду. Введем вспомогательные переменные $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$. Переменную x_3 прибавим к левой части первого неравенства системы ограничений. Будем считать, что ее значение является та-ким, что левая часть оказывается равной правой, т.е. выполня-ется условие $x_1 + 3,5x_2 + x_3 = 350$. Аналогично, переменную x_4 прибавим к левой части второго неравенства системы ограниче-ний (13), а переменную x_5 – к левой части третьего неравен-ства. В результате вместо системы ограничений (13), заданной неравенствами, мы получим систему ограничений, заданную уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 + x_3 = 350, \\ 2x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 240, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 150, \end{cases} \quad (14)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – неотрицательны.

Целевая функция $C = 1000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max$ остается пре-жней. Мы получили задачу линейного программирования в ка-ноническом виде.

Заметим, что в качестве начального опорного (базисного) ре-шения системы (14) можно взять следующие: (0; 0; 350; 240; 150). Очевидно, что это решение является допустимым, так как значения всех переменных неотрицательны. Значение целевой функции в начальном опорном решении равно нулю. Составим начальную симплекс-таблицу.

В качестве разрешающего столбца выберем второй, так как именно в этом столбце индекс Δ_j принимает наименьшее отри-цательное значение равное -2000 . Найдем симплекс-отношения коэффициентов b_i к соответствующим элементам разрешающего второго столбца и запишем их в последний столбец начальной

C_i	Б.П.	C_1 1000	C_2 2000	C_3 0	C_4 0	C_5 0	$C(\vec{x})$	Сим. отнош.
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
0	x_3	1	3,5	1	0	0	350	$100 - \min \leftarrow$
0	x_4	2	0,5	0	1	0	240	480
0	x_5	1	1	0	0	1	150	150
Инд.	Δ_j	-1000	-2000	0	0	0	0	

таблицы. Наименьшее отношение, равное 100, получено в пер-вой строке. Таким образом, разрешающим элементом необходи-мо выбрать элемент $a'_{12} = 3,5$. Далее преобразования таблицы будут следующими:

C_i	Б.П.	C_1 1000	C_2 2000	C_3 0	C_4 0	C_5 0	$C(\vec{x})$	Сим. отнош.
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
2000	x_2	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	0	0	100	350
0	x_4	$\frac{13}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0	190	$\frac{190 \cdot 7}{13}$
0	x_5	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	1	50	$70 \min \leftarrow$
Инд.	Δ_j	$-\frac{3000}{7}$	0	$\frac{4000}{7}$	0	0	200000	

В индексной строке отрицательное значение имеется только в первом столбце. Следовательно, он разрешающий. Симплекс-ные отношения показывают, что разрешающей строкой должна быть третья строка. Таким образом, разрешающим элементом для дальнейших преобразований должен быть элемент $a'_{13} = \frac{5}{7}$. Преобразуем вторую симплекс-таблицу и получаем новую:

Задачу (A_c) и задачу (B_c) можно преобразовать к каноническому виду. Для этого неравенства преобразуются в уравнения с помощью введения в левые части так называемых вспомогательных переменных:

$$(A_k) \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = 1, \dots, n + m),$$

где $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ — вспомогательные переменные.

$$(B_k) \rightarrow \begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = C_1, \\ \text{-----} \\ a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = C_n; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, (i = 1, \dots, m + n),$$

где $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$ — вспомогательные переменные.

Переменные, находящиеся в одном и том же столбце, будем называть соответствующими.

Можно построить следующую таблицу соответствия:

Основные переменные			Вспомогательные переменные		
x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+m}
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+n}	y_1	y_m
Вспомогательные переменные			Основные переменные		

Теорема 3. Если в оптимальном плане одной из взаимно-двойственных задач значение основной переменной больше нуля, то соответствующая ей вспомогательная переменная другой задачи равна нулю. И наоборот, если вспомогательная переменная одной из задач больше нуля, то соответствующая основная переменная другой задачи равна нулю.

Эта теорема дает возможность найти оптимальный план одной симметричной взаимно-двойственной задачи, зная оптимальный план другой.

Задача 4. Решить исходную задачу, а затем сформулировать двойственную и решить ее.
Исходная задача: (A_c)

$$(A_c) \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L(\bar{x}) = 1,5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min.$$

Решение.

Исходная задача (A_c) допускает решение графическим методом (см. рис. 2).

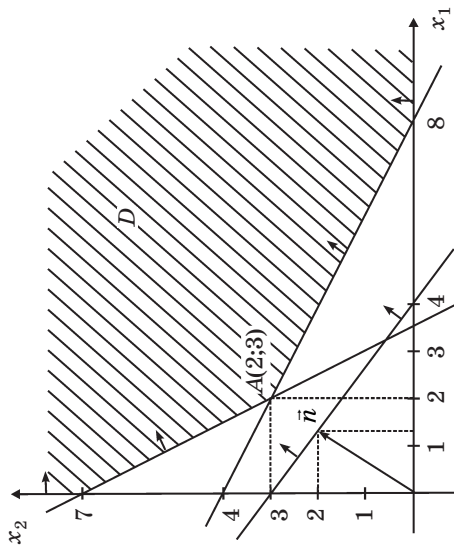


Рис. 2. Графическое решение задачи 4 ($\vec{n} = (1,5; 2)$)

Наименьшее значение целевой функции $L(\vec{x}) = 1,5x_1 + 2x_2$ достигается при $x_1 = 2, x_2 = 3$, т.е. в $(\cdot) A(2; 3)$. $L_{\min} = L(2; 3) = 9$. Составим двойственную задачу:

$$(B_c) \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 1,5, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 2, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$S(\vec{y}) = 7y_1 + 8y_2 + 12y_3 \rightarrow \max.$$

Приведем обе задачи к каноническому виду:

$$(A_k) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_5 = 12, \\ x_i \geq 0, (i = 1, \dots, 5); \end{cases} (B_k) \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 = 1, 5, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_5 = 2, \\ y_i \geq 0; (i = 1, \dots, 5). \end{cases}$$

$$L = L(\vec{x}) = 1,5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min. \quad S(\vec{y}) = 7y_1 + 8y_2 + 12y_3 \rightarrow \max.$$

Так как решение задачи (A_c) уже найдено, то решение задачи (B_c) можно найти, используя теоремы двойственности 1 и 2. Оптимальным решением задачи (A_k) будет:

$$\bar{x}_{opt.} = (2; 3; 0; 0; 6); \quad L(\bar{x}_{opt.}) = 9.$$

Составим таблицу соответствия:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	3	0	0	6
$\uparrow \downarrow$	$\uparrow \downarrow$	$\uparrow \downarrow$	$\uparrow \downarrow$	$\uparrow \downarrow$
0	0	?	?	0
y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

Согласно этой таблице значения переменных y_3, y_4, y_5 равны нулю. Значения оставшихся переменных y_1 и y_2 можно легко найти из системы уравнений задачи (B_k) .

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 1, 5, \\ y_1 + 2y_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}, \\ y_2 = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи (B_k) получается следующее:

$$\vec{y}_{opt.} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; 0; 0; 0 \right); \quad S(\vec{y}_{opt.}) = 9.$$

1.6. Дополнительный анализ задач линейного программирования после нахождения оптимального решения

Если некоторая задача линейного программирования решена симплекс-методом, то после определения значений переменных, дающих оптимальное значение целевой функции, можно попытаться получить дополнительную информацию, которая часто оказывается не менее важной. Эта информация частично представлена в заключительной симплекс-таблице. Ее анализ может привести к следующим важным выводам:

1. Существование альтернативных оптимальных решений.

Допустим, что в результате применения симплекс-метода получено оптимальное базисное (опорное) решение. Если в индексной строке заключительной симплекс-таблицы хотя бы одно значение Δ_j , соответствующее свободной переменной x_j , равно нулю, то рассматриваемая задача имеет **альтернативные оптимальные решения**. Одно из них может быть найдено путем введения этой свободной переменной x_j в число базисных переменных. Для этого достаточно выбрать новым разрешающим столбцом j -й столбец и в нем по обычным правилам выбрать новый разрешающий элемент. Далее формируется дополнительная симплекс-таблица, из которой получается новое базисное (опорное) решение, и оно тоже будет оптимальным.

Заметим, что существование хотя бы двух различных оптимальных решений означает, что на самом деле их бесконечно много. В самом деле, эти решения можно интерпретировать как координаты двух точек в пространстве, размерность которого равна количеству переменных в данной задаче. Можно доказать, что координаты любой точки, принадлежащей отрезку, соединяющему две найденные, также дают оптимальное решение данной задачи. Причем эти решения не будут являться базисными (опорными).

Если задача линейного программирования решалась графическим методом, то обнаружить существование альтернативных решений можно еще проще. Если нормальный (целевой) вектор $\vec{n} = \text{grad}(L(\vec{x}))$ перпендикулярен одной из сторон многоугольника допустимых решений, то все точки, принадлежащие этой стороне, дают одинаковые значения целевой функции $L(\vec{x})$. Если это значение оптимальное, то тем самым получено бесконечное множество альтернативных оптимальных решений.

2. Статус ограничений задачи.

Если полученное оптимальное решение задачи линейного программирования содержит положительные значения вспомогательных переменных, то это означает, что ограничения, соответствующие этим переменным, не оказывают непосредственного влияния на оптимальное значение целевой функции. Например, оптимальное решение задачи 2 (о распределении ресурсов мебельной фабрики) было (см. п. 1.4) следующим: (70; 80; 0; 60; 0). В данном решении вспомогательная переменная $x_4 = 60 > 0$. Она была введена в эту задачу для того, чтобы второе неравенство системы ограничений (13) преобразовать в уравнение. Поскольку второе неравенство системы (13) давало ограничение по одному из ресурсов мебельного производства (запасы фанеры), то мы можем заключить, что этот ресурс в данной задаче является избыточным. То есть если принять оптимальное решение, связанное с производством $x_1 = 70$ шкафов первого типа, $x_2 = 80$ шкафов второго типа, то в распоряжении мебельной фабрики останется $x_4 = 60$ ед. второго ресурса (фанера). Этот ресурс можно назвать недефицитным. Напротив, первый ресурс (дерево) является дефицитным, так как соответствующая ему переменная в оптимальном решении $x_3 = 0$. То есть данный ресурс полностью используется в производстве и его остаток равен нулю.

3. Ценность ограничений (ресурсов).

Классификацию ограничений задачи линейного программирования можно продолжить, если известно оптимальное решение двойственной задачи (см. п. 1.5). Допустим, что найдены оптимальные решения двух взаимно-двойственных задач линейного программирования и заполнена таблица соответствия. В этой таблице каждому значению вспомогательной переменной $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ соответствует определенное значение осевой переменной двойственной задачи y_1, y_2, \dots, y_m . Смысл y_1, y_2, \dots, y_m заключается в том, что их значения характеризуют ценность соответствующего ограничения в первой задаче. Если первая задача формулировалась как задача оптимального распределения ресурсов, то y_1, y_2, \dots, y_m характеризуют ценность каждого из ресурсов в этой задаче. Например, при решении задачи 4 было получено следующее оптимальное решение

двойственной задачи: $\vec{y}_{opt} = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; 0; 0; 0 \right)$. Значения $y_1 = \frac{1}{3}$;

$y_2 = \frac{5}{6}; y_3 = 0$ основных переменных этой задачи характеризуют

ценности первого, второго и третьего ограничений исходной задачи. Если исходную задачу интерпретировать как задачу распределения ресурсов, то получим следующий вывод. Первый и второй ресурсы являются дефицитными, и соотношение их ценностей равно $\frac{1}{3} : \frac{5}{6} = 2 : 5$. Третий ресурс не является дефицитным и его ценность равна нулю.

Заметим, что этот вывод можно было сделать в результате анализа графического решения исходной задачи A_c (см. рис. 2). Первые два ограничения задают прямые, которые пересекаются в точке $A(2; 3)$. Так как эта точка является точкой минимума целевой функции, то и первое и второе ограничения являются существенными для определения оптимального решения. Ресурсы, которые они ограничивают, являются поэтому ценными. Третье ограничение задает прямую, которая не проходит через точку $A(2; 3)$ оптимального решения, и поэтому ресурс, который оно ограничивает, не является ценным.

Замечание 1. Дополнительный анализ задачи линейного программирования существенно зависит от ее конкретного содержания и может включать изучение последствий коррекции ее постановки. Например, найденное оптимальное решение может оказаться неприемлемым по экономическим соображениям. Тогда возникает задача некоторого изменения системы ограничений таким образом, чтобы оптимальное решение оказалось более приемлемым. В первую очередь, изменение системы ограничений должно касаться ценных ограничений, непосредственно влияющих на оптимальное решение. В каких пределах можно изменять указанные ограничения? Это зависит от условий и характера конкретной задачи.

Замечание 2. Встречаются задачи линейного программирования, постановка которых отличается от рассмотренной выше канонической или стандартной. Например, в задаче может быть поставлено дополнительное требование целочисленности одной или нескольких переменных. Или задача может содержать не одну, а несколько линейных целевых функций. Некоторые задачи такого типа рассматриваются далее в § 2.

1.7. Задачи для самостоятельного решения

- 1) Решить графически исходную задачу.
- 2) Сформулировать двойственную ей задачу и решить ее симплекс-методом.
- 3) Построить таблицу соответствия и найти ценности ограничений исходной задачи.

Варианты исходной задачи:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$L = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$L = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$L = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -5, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$L = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

$$L = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

$$9) \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

$$11) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

$$L = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

Решение варианта 11.

1. Графический метод.

Изобразим в системе координат (рис. 3):

1) область D допустимых решений данной задачи;

2) целевой вектор $\vec{n} = (1; 3)$;

3) нулевую линию уровня $l_0 \perp \vec{n}$.

Очевидно, что наибольшее значение целевой функции

$L = x_1 + 3x_2$ получается в (·) В (2; 4). Следовательно, оптималь-

ное решение: $x_1 = 2; x_2 = 4; L_{\max} = 14$.

2. Симплекс-метод.

Сформулируем задачу, двойственную исходной:

Сформулируем задачу, двойственную исходной:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 - y_3 \geq 3. \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0.$$

$$S(y) = 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \rightarrow \min.$$

Для решения этой задачи симплекс-методом преобразуем ее к каноническому виду, введя вспомогательные переменные $y_4 \geq 0$ и $y_5 \geq 0$:

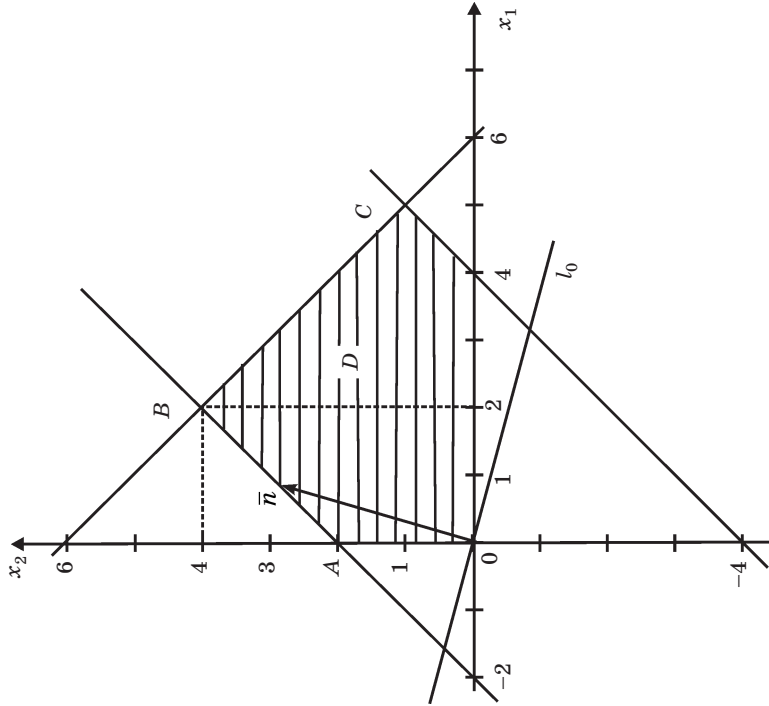


Рис. 3. Графическое решение исходной задачи (вар. 11)

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 1, \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_5 = 3. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0; (i = 1, \dots, 5).$$

$$S(y) = 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \rightarrow \min.$$

Составим расширенную матрицу системы ограничений:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту расширенную матрицу с целью найти допустимое базисное решение этой системы. (Решение $(0; 0; 0; -1; -3)$, которое легко получается из матрицы A , не является допустимым, так как нарушено условие неотрицательности переменных.) Выберем разрешающим элементом $a_{22} \in A$. Преобразуем матрицу A к виду A' :

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Разделим первую строку этой матрицы на (-1) . Получим:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из системы A' получается следующее базисное решение: $(0; 3; 0; 2; 0)$, которое является допустимым. Составим симплекс-таблицу, соответствующую A' :

C_i	Б.П.	$C_1 = 2$	$C_2 = 6$	$C_3 = 4$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$S(\vec{y})$	Сим. отн.
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i	
0	y_4	2	0	-2	1	-1	2	$\frac{2}{2} \min \leftarrow$
6	y_2	1	1	-1	0	-1	3	$\frac{3}{1}$
Δ_j		4	0	-10	0	-6	18	

В индексной строке имеется положительный элемент – первый. В первом столбце наименьшее симплексное отношение получается в первой строке. Элемент a'_{11} – разрешающий. Новая симплекс-таблица будет иметь вид:

C_i	Б.П.	$C_1 = 2$	$C_2 = 6$	$C_3 = 4$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$S(\vec{y})$	Сим. отн.
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i	
2	y_1	1	0	-1	1/2	-1/2	1	-
6	y_2	0	1	0	-1/2	-1/2	2	-
Δ_j		0	0	-6	-2	-4	14	

В индексной строке нет положительных элементов, следовательно (учитывая, что $S = 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \rightarrow \min$), наименьшее допустимое решение получено.

Ответ: $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = 0$; $y_4 = 0$; $y_5 = 0$; $S_{\min} = 14$.

3. Построение таблицы соответствия и оценка ценности ограничений исходной задачи.

Таблица соответствия должна содержать значения основных и вспомогательных переменных взаимно-двойственных задач. Найдем значения вспомогательных переменных для исходной задачи. Имеем:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, получим: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6$.

Таблица соответствия имеет вид:

основные					вспомогат.				
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5					
2	4	0	0	6					
0	0	1	2	0					
y_4	y_5	y_1	y_2	y_3					
вспомогат. основные									

Значения основных переменных второй задачи указывают ценности ограничений исходной:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow \text{ценность} = 1 \text{ (дефицитный ресурс)}, \\ x_1 + x_2 \leq 6 \rightarrow y_2 = 2 \rightarrow \text{ценность} = 2 \text{ (дефицитный ресурс)}, \\ x_1 - x_2 \leq 4 \rightarrow y_3 = 0 \rightarrow \text{ценность} = 0 \text{ (недефицитный ресурс)}, \end{cases}$$

Отношение ценностей первых двух ограничений $1 : 2$.

§ 2. Элементы нелинейного и динамического программирования

2.1. Нелинейные оптимизационные задачи, решаемые с помощью методов линейного программирования

Если какая-либо оптимизационная задача не может быть представлена в каноническом виде (или в эквивалентном ему стандартном виде) то такую задачу можно классифицировать как задачу **нелинейного, математического программирования**. Некоторые из таких задач, однако, могут быть решены с помощью методов, рассмотренных выше.

1. Нелинейные задачи, решаемые графическим методом.

В тех случаях, когда система ограничений задачи задана в виде системы нелинейных неравенств, но целевая функция линейна, причем число неизвестных равно двум, можно применить обычный графический метод.

Задача 5. Найти наибольшее значение целевой функции $L = L(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

На рис. 4 изображены: область допустимых решений данной задачи D , нормальный вектор $\bar{n} = \text{grad}(L(x_1, x_2)) = (2; 3)$, две линии уровня l_0 : проходящая через начало координат ($l_0 \perp \bar{n}$) и параллельная ей l_m . Точка касания линии l_m с окружностью $x_1^2 + x_2^2 = 16$ является той точкой области D , в которой целевая функция принимает наибольшее значение. Координаты исковой точки касания M можно найти, решив систему уравнений, в которую входят уравнение окружности и уравнение прямой, на которой лежит вектор \bar{n} :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 16, \\ x_2 = \frac{3}{2} x_1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{\sqrt{13}}, \\ x_2 = -\frac{12}{\sqrt{13}}. \end{cases}$$

Представляя найденное решение в целевую функцию, получим наибольшее значение целевой функции при заданной системе ограничений

$$L_{\max} = 4\sqrt{13}.$$

В некоторых случаях графическим методом удается решать оптимизационные задачи, в которых нелинейными являются не только ограничения, но и целевая функция. Достаточно простое решение получается, если линии уровня целевой функции представляют собой концентрические окружности.

Задача 6. Найти наименьшее значение целевой функции $L = L(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Изобразим область допустимых решений D и семейство окружностей с центром в точке $P(5;5)$ (рис. 5). Очевидно, чем больше радиус такой окружности, тем больше значение целевой функции. Наименьшее значение целевой функции при заданных ограничениях получается в точке касания окружности $x_1^2 + x_2^2 = 16$ с одной из окружностей этого семейства. Учитывая положения центров этих касающихся окружностей $O(0;0)$ и $P(5;5)$, иско-мая точка касания находится на прямой $x_2 = x_1$.

Решим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 16, \\ x_2 = x_1; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{2}, \\ x_2 = 2\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

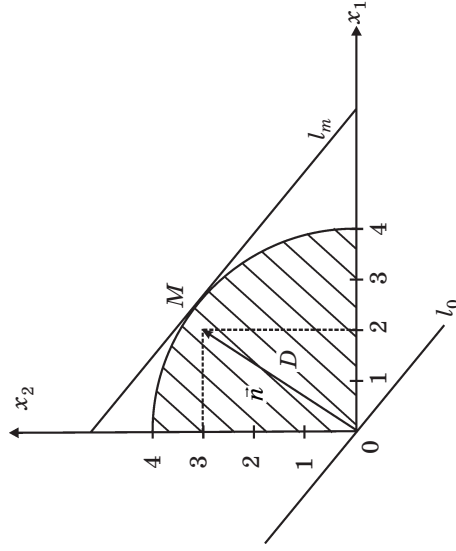


Рис. 4. Графическое решение задачи 5

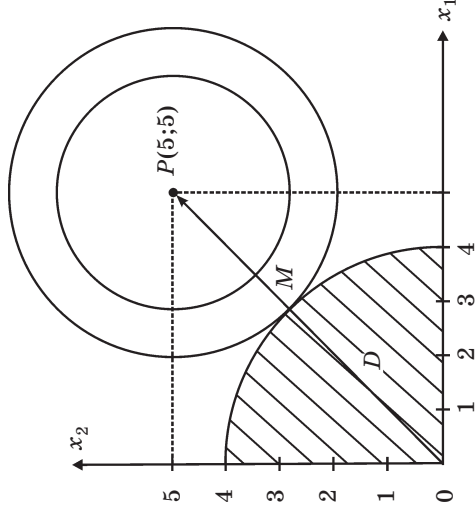


Рис. 5. Графическое решение задачи 6

Полученное решение является искомым оптимальным решением

$$L_{\min} = (2\sqrt{2} - 5)^2 + (2\sqrt{2} - 5)^2 = 66 - 40\sqrt{2}.$$

2. Задачи дробно-линейного программирования.

Общая постановка задачи дробно-линейного программирования заключается в следующем.

Найти наибольшее (наименьшее) значение целевой функции

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n} \quad (15)$$

при ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \quad (16)$$

$$x_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эта задача может быть приведена к эквивалентной ей задаче линейного программирования.

Обозначим $y_0 = \frac{1}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n}$ и введем новые пере-

менные $y_i = y_0 \cdot x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В результате получается задача линейного программирования в каноническом виде относительно новых переменных $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Если эта задача имеет решение, то соответствующие значения прежних переменных можно найти из соотношений $y_i = y_0 \cdot x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Задачи дробно-линейного программирования возникают обычно при решении проблем, связанных с определением оптимальной рентабельности, оптимальной себестоимости и т.д.

Задача 7. Завод выпускает изделия двух видов. Затраты на производство изделия первого вида – 2 тыс. рублей, второго вида – 3 тыс. рублей. Найти оптимальное соотношение между количествами x_1 и x_2 изделий 1-го и 2-го вида, чтобы средняя себестоимость была минимальной, при условии выполнения системы ограничений, связанных с производственно-техническими возможностями завода:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 40. \end{cases} \quad (17)$$

Решение.

Целевая функция в данной задаче имеет вид:

$$L = L(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min.$$

Обозначим:

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2}, y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}, y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}. \quad (18)$$

Тогда целевая функция примет вид: $M = M(y_1, y_2) = 2y_1 + 3y_2$. После умножения каждого из неравенств системы ограничений (17) на $\frac{1}{x_1 + x_2}$ и введения новых переменных y_0, y_1, y_2 , получим новую систему ограничений:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 4y_0, \\ 2y_1 + 6y_2 \leq 24y_0, \\ 10y_1 + 5y_2 \leq 40y_0, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_0 \leq 1, \\ 24y_0 + 4y_1 \geq 6, \\ 40y_0 - 5y_1 \geq 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 \leq 0,25, \\ y_1 \geq 1,5 - 6y_0, \\ y_1 \leq -1 + 8y_0. \end{cases} \quad (19)$$

Целевую функцию, учитывая, что $y_1 + y_2 = 1$, запишем в виде: $M = 3 - y_1 \rightarrow \min$.

Областью допустимых решений в этой задаче будет треугольник ABC в системе координат (y_0, y_1) (рис. 6).

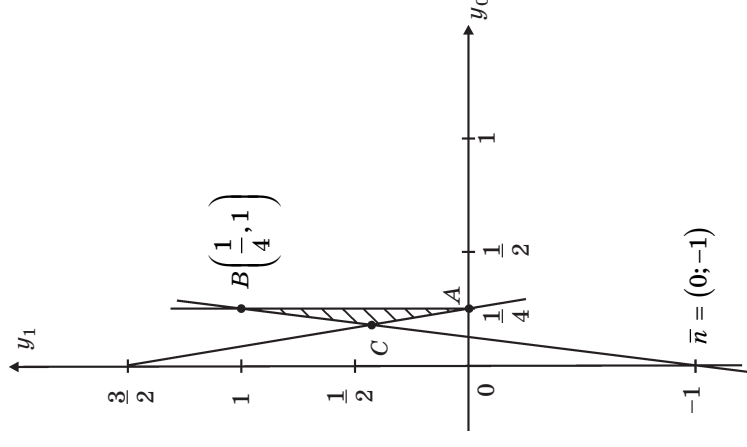


Рис. 6. Графическое решение задачи 7

Из условий (19) нетрудно найти его вершины как точки пересечения соответствующих прямых:

$$A\left(\frac{1}{4}; 0\right); B\left(\frac{1}{4}; 1\right); C\left(\frac{5}{28}; \frac{3}{7}\right).$$

Очевидно, что наименьшее значение функции $M = 3 - y_1$ получается в точке $B\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, в которой значение $y_1 = 1$.

Таким образом, оптимальное решение задачи получено при $y_0 = \frac{1}{4}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Из формул (18) найдем соответствующие значения x_1 и x_2 : $x_1 = 4$; $x_2 = 0$.

$$\text{Найдем } L_{\min} = L(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ответ: завод должен выпускать только изделия первого вида, в количестве $x_1 = 4$.

2.2. Оптимизационные задачи с дополнительными условиями целочисленности переменных.

Метод Гомори

Многие оптимизационные задачи экономического содержания требуют целочисленного решения. К таким задачам относятся те, у которых некоторые или все переменные означают количество неделимых единиц (количество станков, машин, сотрудников и т.п.) Подобные задачи называются задачами целочисленного программирования. Иногда их решение удается найти, рассматривая значения целевой функции в допустимых точках, близких к оптимальному нецелочисленному решению. Оптимальное нецелочисленное решение может быть найдено любым известным методом. Более универсальный метод решения задач целочисленного программирования предложен Гомори [8].

Идея этого метода заключается в следующем:

1. Находим оптимальное решение задачи без учета требований целочисленности. Если оно целочисленное, то задача решена.
2. Если первое оптимальное решение нецелочисленное, то к системе ограничений добавляется одно (или несколько)

дополнительных ограничений по целочисленности и процесс нахождения оптимального решения повторяется.

Существуют задачи, которые не имеют целочисленных решений. Например, если некоторая задача линейного программирования решена симплекс-методом и в столбце свободных членов b_i имеются нецелые значения, но все элементы симплекс-матрицы целые, то это означает, что целочисленного решения данная задача не имеет.

В качестве иллюстрации решим нелинейную задачу, формулировка которой совпадает с задачей 1, с добавлением условия целочисленности переменных.

Задача 8. Найти наибольшее значение целевой функции $L = L(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 \in Z, x_2 \in Z, \text{ где } Z - \text{множество целых чисел.} \end{cases}$$

Решение.

Изобразим область допустимых значений D (без учета ограничений по целочисленности). На рис. 7 она заштрихована. Найдем точки с целыми координатами, принадлежащие области D . Выделим и соединим те из них, которые либо лежат на линиях, ограничивающих область D , либо расположены ближе всех других к этим линиям. Получим многоугольник $OABCE$ (см. рис. 7). Очевидно, задача 8 эквивалентна задаче линейного программирования, в которой многоугольник $OABCE$ является областью допустимых решений.

Дело в том, что оптимальное решение задачи линейного программирования достигается в одной из вершин многоугольника допустимых решений. Так как координаты всех вершин $OABCE$ целые, то целочисленность искомого оптимального решения гарантирована.

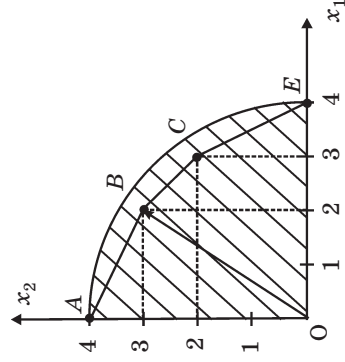


Рис. 7. Графическое решение задачи 8

Решением представленной задачи являются координаты точки $B(2;3)$, через которую проходит наиболее «продвинутой» в направлении вектора $\bar{n} = (2;3)$ линия уровня. Значение целевой функции: $L_{\max} = L(2;3) = 13$.

Замечание 1. Если количество переменных в задачах целочисленного линейного программирования больше двух, то метод Гомори применяется в комбинации с симплекс-методом. Примеры решения таких задач можно найти в [3].

Замечание 2. В некоторых задачах линейного (или нелинейного) программирования требуется найти решение, оптимальное относительно нескольких целевых функций. Такие задачи называются многокритериальными. Методы решения подобных задач разработаны пока недостаточно [3]. Основное различие между ними заключается в подходах к нахождению компромисса между требованиями заданных целевых функций. Одна из таких задач решена в п. 2.5.

2.3. Метод Лагранжа для решения задач нелинейного программирования

Пусть дана целевая функция $Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $\bar{x} \in X \subset R^n$.

Будем считать, что множество допустимых значений X удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) все элементы множества X удовлетворяют системе ограничений данной оптимизационной задачи;
- 2) множество X компактно, т.е. является одновременно замкнутым и ограниченными в R^n ;
- 3) множество X является выпуклым, т.е. если две любые точки \bar{x}_1 и \bar{x}_2 принадлежат X , то и точка $\bar{x}_3 = \alpha\bar{x}_1 + (1-\alpha)\bar{x}_2$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, также принадлежит X ;
- 4) функция $Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является по крайней мере дважды дифференцируемой на X .

В задачах нелинейного программирования требуется найти такую точку $\bar{x}_0 \in X$, в которой нелинейная целевая функция принимает наибольшее (либо наименьшее) значение. В математическом анализе такая задача формулируется как задача на-

хождения глобального условного экстремума функции n переменных $Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Множество допустимых значений X , на котором ищется точка экстремума, может быть задано с помощью одного или нескольких уравнений (или неравенств) связи. Например, системой m уравнений вида $\varphi_1(\bar{x}) = 0; \varphi_2(\bar{x}) = 0; \dots; \varphi_m(\bar{x}) = 0$. Причем искомая точка экстремума \bar{x}_0 должна удовлетворять всем уравнениям связи.

Для решения таких задач существует так называемый обобщенный метод Лагранжа. Однако прежде чем приступить к изложению алгоритма этого метода, заметим, что полезно выделить: существует ли решение задачи и если существует, является ли оно единственным?

Для этого существует две возможности.

Первая связана с известной теоремой Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Для того чтобы функция $Z = f(\bar{x})$ имела точку глобального максимума (минимума) $\bar{x}_0 \in X$, достаточно, чтобы множество X было компактным в R^n , а функция $Z = f(\bar{x})$ – непрерывной на X .

Иногда вместо теоремы Вейерштрасса бывает удобнее провести выполнение следствия из нее.

Следствие. Если функция $Z = f(\bar{x})$ непрерывна на R^n и

$$\lim_{|\bar{x}| \rightarrow +\infty} f(\bar{x}) = +\infty \quad \left(\lim_{|\bar{x}| \rightarrow -\infty} f(\bar{x}) = -\infty \right), \quad (20)$$

то эта функция достигает своего глобального минимума (максимума) в любом замкнутом множестве $X \subset R^n$.

Вторая возможность связана с проверкой функции $Z = f(\bar{x})$ на выпуклость (вогнутость). Для решения этого вопроса необходимо исследовать так называемую матрицу Гессе, составленную из частных производных 2-го порядка от функции $Z = f(\bar{x})$:

$$H = \begin{pmatrix} z''_{x_1 x_1} & z''_{x_1 x_2} & \dots & z''_{x_1 x_n} \\ z''_{x_2 x_1} & z''_{x_2 x_2} & \dots & z''_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z''_{x_n x_1} & z''_{x_n x_2} & \dots & z''_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Для того чтобы функция $Z = f(\bar{x})$ была строго выпуклой на множестве X , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\bar{x} \in X$ матрица Гессе была положительно определенной. Для строгой вогнутости функции $Z = f(\bar{x})$ на X необходимо и достаточно, чтобы матрица Гессе была отрицательно определенной для любого $\bar{x} \in X$.

Если функция $Z = f(\bar{x})$ имеет на множестве X единственную стационарную точку \bar{x}_0 , т.е. точку, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю, то из строгой выпуклости функции $Z = f(\bar{x})$ на X следует существование единственной точки глобального минимума $\bar{x} \in X$.

Из строгой вогнутости в этом случае следует существование единственной точки глобального максимума $\bar{x} \in X$.

Замечание 1. Для проверки квадратной матрицы на положительную или отрицательную определенность проще всего воспользоваться критерием Сильвестра:

- 1) Если все главные миноры квадратной матрицы положительны (включая определитель данной матрицы), то матрица называется положительно определенной.
- 2) Если главные миноры этой матрицы чередуют знаки, причем $a_{11} < 0$, то матрица называется отрицательно определенной.
- 3) Если требования 1) и 2) выполняются не строго, т.е. некоторые миноры не строго положительны либо не строго отрицательны, то матрица называется положительно либо отрицательно полуопределенной.

Замечание 2. Если матрица Гессе (21) является положительно (или отрицательно) полуопределенной, то функция $Z = f(\bar{x})$ может быть не строгой выпуклой (вогнутой).

Полуопределенность матрицы (21) в стационарной точке $\bar{x}_0 \in X$ не является достаточным условием экстремума в этой точке. Необходимо дополнительное исследование.

Перейдем к описанию алгоритма метода Лагранжа:

- 1) Составляем функцию Лагранжа:

$$L = f(\bar{x}) + \lambda_1 \phi_1(\bar{x}) + \lambda_2 \phi_2(\bar{x}) + \dots + \lambda_m \phi_m(\bar{x}), \quad (22)$$

где $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – функция $n + m$ переменных; $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – заданная в задаче целевая функция; $\phi_1(\bar{x}), \phi_2(\bar{x}), \dots, \phi_m(\bar{x})$, – функции из заданных уравнений связи;

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – множители Лагранжа ($\lambda_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m)$), которые не могут быть равны нулю все одновременно.

- 2) Проверяем для функции Лагранжа выполнение теоремы Вейерштрасса (или следствия из нее) для того, чтобы убедиться в существовании экстремальных точек.

- 3) Находим все частные производные функции (22), а затем все ее стационарные точки.

- 4) Проверяем выполнение достаточных условий экстремума в найденных стационарных точках. Для этого (в случае необходимости) исследуем матрицу Гессе.

Если стационарных точек немного, то точку глобального условного максимума (минимума) находим, сравнивая значения целевой функции в стационарных точках.

Задача 9. Найти наибольшее значение целевой функции $Z = 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$ при условии, что: $x_1 + 2x_2 = 4; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$.

Решение.

Данная задача представляет собой задачу нелинейного программирования с одним уравнением связи, которое запишем в виде $\varphi(x) = 4 - x_1 - 2x_2 = 0$. Применим метод Лагранжа.

- 1) Составим функцию Лагранжа:

$$L = L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(4 - x_1 - 2x_2).$$

- 2) Проверим выполнение следствия из теоремы Вейерштрасса. Пусть $\lambda = 1$. Тогда функцию Лагранжа можно записать в виде:

$$L = 4 - x_2 - (x_1 + x_2 - 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}) = 4 - x_2 - \left(x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Очевидно:

не производить. Из пункта 2) известно, что функция Лагранжа имеет глобальный максимум во множестве, которое определено неравенствами: $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. В пункте 3) найдена единственная стационарная точка, которая удовлетворяет

этим неравенствам: $\left(2; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Следовательно, альтернативы

нет. Найденная точка – есть точка глобального максимума функции Лагранжа. Отсюда следует, что точка $\bar{x}_0 = (2; 1)$ будет точкой глобального условного максимума целевой функции

$$Z = 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}. \text{ Найдем: } Z_{\max} = f(\bar{x}_0) = 2\sqrt{2}\sqrt{1} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $Z_{\max} = 2\sqrt{2}$.

2.4. Задачи динамического программирования

Экономические процессы характеризуются протяженностью во времени. В таких случаях оптимальное решение, принятое в начале процесса, может оказаться на каком-то этапе не самым лучшим. Оптимизационными задачами, связанными с выработкой оптимальных решений, допускающих последующую коррекцию, занимается особый раздел математического программирования – динамическое программирование.

В отличие от линейного программирования, имеющего определенный набор достаточно универсальных методов, динамическое программирование такими методами не располагает. Некоторые задачи решаются графическими методами с применением так называемой теории графов. Разработаны графические методы анализа некоторых оптимизационных задач с помощью сетевых моделей. Существует также метод рекуррентных соотношений, разработанный американским математиком Р. Беллманом [8]. Однако для большинства задач динамического программирования приходится всякий раз изобретать специальный метод решения. Общим подходом является, пожалуй, лишь разбиение экономического процесса на отдельные временные отрезки (шаги) и решение на каждом шаге какой-то оптимизационной задачи.

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \left(4 - x_2 - (x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}})^2 \right) = -\infty.$$

Такой же результат получается и при других значениях

$$\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, согласно следствию (20), функция

$L = L(x_1, x_2, \lambda)$ имеет глобальный максимум, при условии, что

$$\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

3) Найдем частные производные функции $L = L(x_1, x_2, \lambda)$.

$$L'_{x_1} = x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda; L'_{x_2} = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda; L'_{\lambda} = 4 - x_1 - 2x_2.$$

Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda = 0, \\ x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda = 0, \\ 4 - x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \lambda^2, \\ \frac{x_1}{x_2} = 4\lambda^2, \\ x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 4x_2^2, \\ (x_1 - 4)^2 = 4x_2^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \text{стационарная точка.}$$

4) Проверку выполнения достаточных условий экстремума и определение характера экстремума в данной задаче можно

В качестве примера задачи динамического программирования рассмотрим классическую задачу определения оптимального цикла замены устаревающего оборудования.

Известно, что со временем любое промышленное оборудование требует увеличения затрат на его ремонт, техобслуживание и т.д. Кроме того, со временем снижается производительность такого оборудования.

Для любого предприятия крайне важно вовремя заменить устаревшее оборудование на новое. Разумеется, это связано с определенными затратами, которые не сразу окупаются. Оптимальная стратегия замены старого оборудования на новое должна опираться на определенные критерии. Таким критерием чаще всего является максимизация среднегодовой прибыли предприятия.

Задача 10. На предприятии установлено новое оборудование ($t = 0$). Производительность этого оборудования и затраты на обслуживание и ремонт в зависимости от времени использования представлены в таблице:

Время эксплуатации (t) (годы)	0	1	2	3	4	5	6
Годовой выпуск продукции (млн руб.)	80	75	70	65	60	60	55
Ежегодные затраты на содержание (млн руб.)	10	15	20	25	30	35	40

Известно также, что затраты, связанные с приобретением нового идентичного оборудования составляют 60 млн руб.; оставшая стоимость старого оборудования (при любом сроке эксплуатации) практически нулевая. Найти оптимальный временной цикл замены старого оборудования на новое.

Решение.

Обозначим: $f(t)$ – годовой выпуск продукции; $Q(t)$ – ежегодные затраты на содержание и ремонт оборудования; $P = 60$ – цена нового оборудования.

Обозначим возможные стратегии замены имеющегося оборудования на новое:

A_1 – оборудование полностью обновляется после 1 года эксплуатации;

A_2 – полностью обновляется после 2 лет эксплуатации;

A_3 – полностью обновляется после 3 лет эксплуатации и т.д.

Найдем среднегодовой выпуск продукции при этих стратегиях:

$$A_1 \rightarrow S_1 = \frac{80 - 10 - 60}{1} = 10;$$

$$A_2 \rightarrow S_2 = \frac{80 + 75 - 10 - 15 - 60}{2} = 35;$$

$$A_3 \rightarrow S_3 = \frac{80 + 75 + 70 - 10 - 15 - 20 - 60}{3} = 40;$$

$$A_5 \rightarrow S_5 = \frac{80 + 75 + 70 + 65 + 60 - 10 - 15 - 20 - 25 - 30 - 60}{5} = 38;$$

и т.д., далее значение S_k только уменьшается.

$$A_k \rightarrow S_k = \frac{\sum_{t=0}^{k-1} (f(t) - g(t)) - P}{k} . \tag{23}$$

Для вычисления значений S_k можно вывести также следующее рекуррентное соотношение:

$$S_k = \frac{k-1}{k} \cdot S_{k-1} + \frac{f(k-1) - g(k-1)}{k} , \tag{24}$$

где: $k = 1, 2, \dots$; $S_1 = f(0) - g(0) - p$.

Найдем $\max_k (S_k) = \max(10; 35; 40; 40; 38; \dots) = 40$.

Наибольший среднегодовой выпуск продукции достигается при использовании стратегий A_3 и A_4 . Следовательно, оптимальный временной цикл обновления оборудования на данном предприятии должен составлять 3–4 года (если возможно, то 3,5 года).

Замечание. В рамках ограниченного курса математической экономики невозможно охватить все разнообразие задач и методов математического программирования. Для более углубленного изучения методов математического программирования и теории оптимального управления в экономике следует обратиться к специальным курсам, посвященным этим разделам математики [3; 8].

2.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача. Определите тип данной оптимизационной задачи и решите ее одним из возможных методов.

Варианты:

$$1) \begin{cases} x_1 \cdot x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad L = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

$$L = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max.$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max.$$

$$7) \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L = 3\sqrt{x_1 x_2} \rightarrow \max.$$

$$2) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \ x_1, x_2 - \text{целые}. \end{cases} \quad L = 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max.$$

$$4) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \max.$$

$$6) \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ -3x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \ x_1, x_2 - \text{целые}. \end{cases} \quad L = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

$$8) \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ 3x_1 - x_2 \leq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min.$$

$$9) \begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad L = x_1 x_2 + x_2 x_3 \rightarrow \min.$$

$$10) \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad L = 4\sqrt{xy} \rightarrow \max$$

$$11) \begin{cases} x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ L_2 = -x_1 + x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Решение варианта 11.

Главная особенность данной задачи заключается в том, что в ней даны две целевые функции, а не одна. Будем полагать, что эти функции одинаково важны, и попытаемся найти компромиссное решение. Изменим формулировку второй целевой функции на эквивалентную, но имеющую противоположный смысл экстремума.

То есть: $L_2 = -x_1 + x_2 \rightarrow \min$ изменим на

$$L'_2 = -L_2 = -(-x_1 + x_2) = x_1 - x_2 \rightarrow \max.$$

Теперь обе целевые функции имеют одинаковый смысл: $\rightarrow \max$.

Найдем градиенты (целевые векторы) функций L_1 и L'_2 .

$$\bar{n}_1 = \text{grad}(L_1) = (1; 2); \quad \bar{n}'_2 = \text{grad}(L'_2) = (1; -1).$$

Компромиссным вектором $\bar{n}_{\text{ком}}$ будем считать сумму векторов: $\bar{n}_1 + \bar{n}'_2 = (1; 2) + (1; -1) = (2; 1) = \bar{n}_{\text{ком}}$.

Компромиссной целевой функцией $L_{\text{ком}}$ выберем сумму целевых функций:

$$L_{\text{ком}} = L_1 + L'_2 = (x_1 + 2x_2) + (x_1 - x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

Решим полученную задачу графическим методом.

Наибольшее значение компромиссной целевой функции получается в $(\cdot) B(3;1)$. $L_{\max(\text{комп})} = 7$. Таким образом, компромиссное решение найдено: $x_1 = 3; x_2 = 1$. Значения начальных целевых функций в точке $B(3;1)$: $L_1 = 5; L_2 = -2$.

Заметим, что максимальное значение функции L_1 получается в точке $A(1;3)$; $L_{1\max} = 7$, минимальное значение функции L_2 получается в точке $C(3;0)$; $L_{2\min} = -3$.

Ответ: $x_1 = 3; x_2 = 1$; $L_{1\max(\text{комп})} = 5$; $L_{2\min(\text{комп})} = -2$.

§ 3. Элементы теории игр

3.1. Введение в теорию игр. Понятие парной игры, заданной платежной матрицей

В предыдущих параграфах рассматривались задачи условной оптимизации, которые формулировались и решались в строго определенных условиях. Однако в процессе принятия решений в экономике часто встречаются ситуации, когда эти условия можно назвать неопределенными. Например, оптимальное решение экономической проблемы может зависеть от погодных условий, которые нельзя предсказать заранее.

Возможны ситуации, когда выработка оптимального решения зависит от действий конкурентов или других экономических субъектов, которые также нельзя предугадать с полной определенностью.

Ситуации, в которых эффективность действий экономического субъекта зависит от действий других, причем интересы их не совпадают, называются конфликтными. Раздел математики, посвященный анализу и решению задач оптимизации в подобных ситуациях, называется теорией игр.

Игра может быть задана следующим образом:

- 1) Определены « n » игроков, т.е. конфликтующих сторон (в простейшем случае $n = 2$).
- 2) Определены возможные варианты действий (стратегии) каждого игрока, причем эти варианты известны всем игрокам.
- 3) Определен набор возможных конечных результатов игры (выигрыш, проигрыш, ничья).
- 4) Всем игрокам известны так называемые платежи игроков в случае наступления любого конечного результата игры.

Рассмотрим игры, которые возникают достаточно часто. Это так называемые парные игры с нулевой суммой, т.е. игры, в которых участвуют два игрока, причем выигрыш одного из них равен (равен) проигрышу другого. Кроме того, набор возможных стратегий каждого игрока будет считаться конечным. Нахождение наилучшей оптимальной стратегии каждым игроком (если такая существует) называется решением игры.

Заметим также, что в теории игр принято считать всех игроков «разумными» субъектами, которые исходят из того, что их противник также действует разумно, стараясь найти наилучшую стратегию для себя.

Задача 11. Два студента играют в игру, правила которой заключаются в том, что студент A пишет тайно от другого одно из трех числовых значений x (1, 2 или 3). Студент B , также тайно, пишет одно из трех значений y (1, 2 или 3). Написанные значения открываются, и если разность $(x - y)$ положительна, то выиграл студент A , если отрицательна, то выиграл студент B . Сумма выигрыша или проигрыша (в рублях) совпадает с разностью $(x - y)$. Найти решение игры, т.е. оптимальные стратегии игроков A и B .

Решение.

Условия игры можно кратко записать в виде так называемой платежной таблицы (матрицы), где возможные стратегии игроков обозначены A_1, A_2, A_3 , и B_1, B_2, B_3 , а также указаны суммы

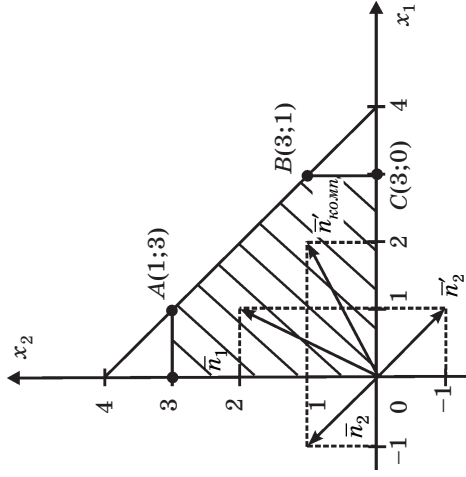


Рис. 8. Графическое решение задачи варианта 11

выигрышей первого игрока. Отрицательные значения в платежной матрице означают, что первый игрок проигрывает при данных стратегиях второму игроку указанную сумму.

	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$
$A_1 = 1$	0	-1	-2
$A_2 = 2$	1	0	-1
$A_3 = 3$	2	1	0

Рассмотрим игру с точки зрения игрока A . Для него оптимальной является стратегия A_3 , так как при выборе этой стратегии его выигрыши оказываются большими, чем при выборе стратегий A_1 и A_2 . Игрок B , очевидно, предпочтет стратегию B_3 , так как в этом случае проигрыши игрока A (а следовательно, его выигрыши) оказываются большими, чем в случае B_1 и B_2 . Таким образом, решением игры является выбор стратегий: A_3 – первым игроком и B_3 – вторым игроком. Ожидаемый результат – ничья.

Решение задачи оказалось столь простым потому, что платежная матрица содержала наиболее предпочтительные стратегии. Такие стратегии в теории игр называются доминирующими. Если платежная матрица в какой-то игре содержит стратегии, доминирующие над остальными (доминируемыми), то доминируемые стратегии можно исключить из платежной матрицы. В результате игра упрощается.

3.2. Матричные игры, допускающие решение в «чистых стратегиях»

Рассмотрим парную игру с нулевой суммой в общей постановке. Зададим ее платежной матрицей $Q_{m \times n}$.

$$Q_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Допустим, что матрица $Q_{m \times n}$ не содержит доминируемых стратегий (строк и столбцов). В противном случае мы могли бы их вычеркнуть, упростив тем самым матрицу $Q_{m \times n}$.

Для решения игры составим расчетную таблицу, в которой матрица $Q_{m \times n}$ дополнена дополнительными строками и столбцами.

	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\alpha_1 = \min_j a_{1j}$
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\alpha_2 = \min_j a_{2j}$
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\alpha_m = \min_j a_{mj}$
β_j	$\beta_1 = \max_i a_{i1}$	$\beta_2 = \max_i a_{i2}$...	$\beta_n = \max_i a_{in}$	

В верхней дополнительной строке указаны возможные стратегии 2-го игрока (B_1, \dots, B_n). в левом дополнительном столбце – возможные стратегии 1-го игрока (A_1, \dots, A_m). Далее следуют элементы a_{ij} платежной матрицы $Q_{m \times n}$. В дополнительной последней строке таблицы записаны наибольшие значения a_{ij} в каждом из столбцов. В последнем дополнительном столбце записаны наименьшие значения a_{ij} по строкам.

Нижней ценой игры (максимином) называется число

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right).$$

Верхней ценой игры (минимаксом) называется число

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right).$$

Смысл чисел α и β заключается в следующем: α – это гарантированный выигрыш первого игрока при любых действиях второго; β – гарантированный проигрыш второго игрока при любых действиях первого. Заметим, что для любой платежной матрицы $Q_{m \times n}$ выполняется неравенство $\beta \geq \alpha$.

Если $\beta = \alpha$, т.е. верхняя цена равна нижней цене, говорят, что игра имеет седловую точку.

Платежная матрица в этом случае содержит единственный элемент a_{ij}^* , который одновременно является максимумом и минимумом. В задаче 11 таким элементом был элемент $a_{33}^* = 0$.

Если седловая точка a_{ij}^* существует, то оптимальное решение игры найдено. Для первого игрока оптимальной является стратегия с номером i , для второго – стратегия с номером j . Если же кто-то из игроков вместо оптимальной выберет другую стратегию, то его противник может в этом случае ответить выбором такой своей стратегии, которая даст худший результат для «отклонившегося» игрока. Поэтому отклоняться от оптимальной стратегии нет смысла обоим игрокам. Такая ситуация в теории игр называется *равновесием по Нэшу*.

Наличие седловой точки означает, что данная игра имеет общую цену: $C = \alpha = \beta = a_{ij}^*$, которую по условию должен уплатить второй игрок первому, если $C > 0$. Если $C < 0$, то цену, равную $(-C)$, платит первый игрок второму. Таким образом, если все элементы платежной матрицы положительны, то в любом случае выиграывает первый игрок и вопрос заключается лишь в том, сколько.

Если же все элементы платежной матрицы отрицательны, то первый игрок в любом случае проигрывает и опять вопрос заключается в том, сколько. Наличие в платежной матрице и положительных, и отрицательных элементов, и нулей говорит о том, что возможны и выигрыши первого игрока, и выигрыши второго, и возможен также ничейный результат. В первом случае седловая точка $a_{ij}^* > 0$, во втором $a_{ij}^* < 0$, в третьем $a_{ij}^* = 0$. (Заметим, что $a_{ij}^* = C$ – цене игры).

Если верхняя и нижняя цены игры не одинаковы, т.е. $\beta > \alpha$, то говорят, что данная игра не решается в чистых стратегиях. Седловой точки (элемента) в этом случае в платежной матрице Q нет, и однозначно указать оптимальные стратегии игроков невозможно. Однако в теории игр разработаны методы нахождения так называемых смешанных оптимальных стратегий, в том числе с помощью методов линейного программирования.

Задача 12. Игра задана платежной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти решение игры, т.е. оптимальные стратегии игроков.

Решение.

Упростим матрицу Q . Вычеркнем доминируемую первую строку (все ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки). Вычеркнем доминируемый четвертый столбец (все его элементы больше соответствующих элементов третьего столбца). В полученной упрощенной матрице Q' найдем минимальные элементы в строках и максимальные элементы в столбцах:

$$Q' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю цену игры $\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \max(4; 1; 1) = 4$.

Найдем верхнюю цену игры $\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \min(4; 8; 5) = 4$.

Так как $\alpha = \beta = 4$, то данная игра имеет седловую точку. Это элемент $a_{11} = 4$ матрицы Q' . Решение игры найдено. Оптимальные стратегии игроков A_2 и B_1 (см. исходную матрицу Q). Цена игры $C = 4$.

3.3. Матричные игры, решаемые с помощью смешанных стратегий

Пусть парная игра с нулевой суммой, которая задана платежной матрицей $Q_{m \times n}$, на имеет седловой точки. В этих случаях цель каждого игрока заключается в выработке оптимальной смешанной стратегии. Смешанной стратегией игрока A , имеющего в своем распоряжении m возможных стратегий, на-

зывается вектор $\bar{p} = (p_1; p_2, \dots, p_m)$, где p_i – вероятность выбора i -й стратегии.

Предполагается, что вероятности p_i удовлетворяют услови-

$$\text{ям: } \sum_{i=1}^m p_i = 1; \quad p_i \geq 0.$$

Если игрок В имеет в своем распоряжении n возможных стратегий, то его задача заключается в нахождении оптимального вектора $\bar{q} = (q_1; q_2, \dots, q_n)$, где q_j – вероятность выбора j -й стратегии, причем $\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad q_j \geq 0$.

Допустим, что оптимальная смешанная стратегия игрока А найдена. Например, для случая $m = 4$ она будет представлять собой четырехмерный вектор вероятностей выбора одной из возможных стратегий: A_1, A_2, A_3 или A_4 . Пусть этот вектор $\bar{p} = (0; 0,25; 0; 0,75)$. Какими должны быть в этом случае оптимальные конкретные действия игрока А? Очевидно, стратегии A_1 и A_3 он применять не должен, так как соответствующие вероятности равны нулю. Стратегии A_2 и A_4 должны применяться случайным образом с относительными частотами 0,25 и 0,75 соответственно. Игрок В при этом должен действовать в соответствии со своим оптимальным вектором вероятностей.

Расчетная таблица для решения игры в смешанных стратегиях может быть записана в виде:

A \ B	$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_n$			
	p_1	p_2	p_3	p_m
p_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1n}
p_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2n}
p_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
p_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mn}

Обозначим:

$$M = \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} p_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} p_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} p_i \right). \quad (26)$$

Задача игрока А заключается в том, чтобы найти такие компоненты вектора $\bar{p} = (p_1; p_2, \dots, p_m)$, которые дадут максимальное значение M .

Из (26) следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a_{i1} p_i \geq M, \\ \sum_{i=1}^m a_{i2} p_i \geq M, \\ \dots \dots \dots \text{или} \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^m a_{in} p_i \geq M; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \dots + p_m a_{m1} \geq M, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \dots + p_m a_{m2} \geq M, \\ \dots \dots \dots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \dots + p_m a_{mn} \geq M. \end{array} \right. \quad (27)$$

Обозначим:

$$x_1 = \frac{p_1}{M}; x_2 = \frac{p_2}{M}; \dots; x_m = \frac{p_m}{M}. \quad (28)$$

Если разделить каждое неравенство системы (27) на M , то получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \frac{p_1}{M} + a_{21} \frac{p_2}{M} + \dots + a_{m1} \frac{p_m}{M} \geq 1, \\ a_{12} \frac{p_1}{M} + a_{22} \frac{p_2}{M} + \dots + a_{m2} \frac{p_m}{M} \geq 1, \\ \dots \dots \dots \\ a_{1n} \frac{p_1}{M} + a_{2n} \frac{p_2}{M} + \dots + a_{mn} \frac{p_m}{M} \geq 1; \end{array} \right. \dots \dots \dots$$

или, в новых обозначениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m \geq 1, \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{m2} x_m \geq 1, \\ \dots \dots \dots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \dots + a_{mn} x_m \geq 1; \end{array} \right. \quad (29)$$

где $x_i = \frac{p_i}{M} \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$.

а) один из игроков не осознает, что принимает участие в игре, и выбирает одну из своих возможных стратегий случайным образом, не заботясь о последствиях.

б) одним из игроков могут оказаться те или иные объективные обстоятельства, например состояние рынка, погодные условия и т.д.

Игры, в которых имеется неопределенность, связанная с непредсказуемостью действий одной из сторон, называются «играми с природой». Заметим, что ситуации, описанные выше, вряд ли могут быть названы чисто игровыми, так как в игре участвует только один игрок, который пытается выработать наилучший способ действий в неопределенной ситуации. Тем не менее ее можно задать обычной платежной матрицей, которая характеризует «успехи» единственного игрока А, имеющего m возможных стратегий, в его игре с «неразумной» природой, имеющей n возможных состояний. При этом игрок А может действовать в соответствии с некоторыми определенными правилами – критериями. Перечислим основные критерии, которые может применить игрок А, чтобы выбрать оптимальную для себя стратегию.

1. Критерий Вальде. Согласно этому критерию игрок А должен избрать стратегию A_i , при которой достигается нижняя цена игры, т.е. $\max_i \min_j a_{ij} = \alpha$.

Этот критерий считается пессимистическим и очень осторожным, так как в этом случае предполагается, что природа будет действовать наихудшим для игрока образом.

2. Критерий Гурвица. Этот критерий рекомендует применить стратегию A_i , при которой достигается

$$\max_i \left[l \min_j a_{ij} + (1-l) \max_j a_{ij} \right],$$

где l – степень пессимизма ($0 \leq l \leq 1$).

Очевидно, при $l = 1$ критерий Гурвица превращается в наиболее пессимистический критерий Вальде. При $l = 0$ (пессимизм равен нулю) критерий Гурвица становится критерием «розового оптимизма», предполагающим, что природа будет находиться в наиболее благоприятном для игрока А состоянии. Выбор степени пессимизма должен осуществляться сам игрок А исходя из ценности платежей в данной игре и своей готовности рисковать.

Зная $Z_{\min} = \frac{3}{5}$, найдем $M_{\max} = \frac{1}{Z_{\min}} = \frac{5}{3}$ – цена игры.

Значения компонент вектора $\bar{p} = (p_1; p_2)$ связаны с найден-

ными значениями $x_1 = \frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$ соотношениями (28):

$$p_1 = x_1 M = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{3}; \quad p_2 = x_2 M = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, оптимальный вектор $\bar{p} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$.

Решая симметричную двойственную задачу, получим аналогично оптимальный вектор $\bar{q} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

Таким образом, решение данной игры следующее. В ней выигрывает первый игрок; наилучшей является смешанная стратегия, согласно которой стратегия A_2 применяется в два раза чаще, чем A_1 . Цена игры $M_{\max} = \frac{5}{3}$, если второй игрок применяет свою наилучшую смешанную стратегию, согласно которой B_1 применяется в два раза чаще, чем B_2 .

Замечание. Цена игры в случае применения смешанных стратегий представляет собой по сути среднее значение (математическое ожидание) выигрыша по результатам многократного повторения игры.

3.4. Матричные игры с «природой»

В рассмотренных выше матричных парных играх участвовали два игрока, которые стремились в условиях заданной игры либо увеличить свой выигрыш, либо уменьшить свой проигрыш, если выигрыш невозможен.

При этом каждый из них действовал «разумно», т.е. выбирал оптимальную для себя стратегию, и в этом смысле действия игроков были в какой-то мере предсказуемы. Теперь мы будем рассматривать ситуации, в которых действия одного из игроков абсолютно непредсказуемы. Такие ситуации могут возникнуть в следующих случаях:

3. Критерий Лапласа. В случае применения этого критерия предполагается, что все n состояний природы равновероятны, т.е. встречаются с вероятностью $p_i = \frac{1}{n}$. Игроку А предлагается выбрать стратегию A_i , которая обеспечивает максимальное значение математического ожидания выигрыша:

$$\max_i \sum_{j=1}^n p_j a_{ij} = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Этот критерий применяется обычно в тех случаях, когда данная игра повторяется многократно и нет оснований считать, что какое-либо возможное состояние природы встречается чаще других.

4. Критерий Сэвиджа. Для применения этого критерия желательно предвзительно найти так называемую матрицу рисков $R_{m \times n}$. Элементы матрицы рисков находят по формуле $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$, где a_{ij} – элементы матрицы выигрышей (платежей природы – игроку).

Далее находят оптимальную стратегию A_i , которая обеспечивает $\min_j \max_i r_{ij}$. Заметим, что критерий Сэвиджа относится к числу наиболее осторожных, пессимистических критериев и применяется в тех случаях, когда риск практически недопустим.

Замечание. Если платежная матрица составлена не из величин выигрыша игрока А, а, напротив, из его потерь, то формулировка критериев меняется. Критерий Вальде превращается в минимаксный критерий и рекомендует игроку А избирать стратегию A_i , приводящую к $\min_i \max_j a_{ij}$, где a_{ij} – элементы матрицы потерь. Критерий Гурвица рекомендует стратегию A_i , приводящую к $\min_i \left[l \min_j a_{ij} + (1-l) \max_j a_{ij} \right]$. Критерий Лапласа рекомендует избирать стратегию, приводящую к наименьшему математическому ожиданию потерь. Критерий Сэвиджа формулируется так же, но матрица рисков находится по формуле: $r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij}$, где a_{ij} – элементы матрицы потерь. Впрочем, формулировку критериев можно не менять, если заданную матрицу потерь (проигрышей) игрока А превратить в матрицу его выигрышей. Для этого достаточно изменить знаки всех элементов заданной матрицы потерь на противоположные.

Задача 14. Найти оптимальную стратегию игрока А в условиях, когда его выигрыш зависит от одного из состояний природы и задан платежной матрицей:

	S_1	S_2	S_3	S_4	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$
A_1	5	11	19	23	5	23
A_2	8	6	8	27	6	27
A_3	22	17	15	18	15	22
A_4	26	23	20	14	14	26
$\beta_j = \min_i a_{ij}$	26	23	20	27		

Решение.

1) Применим критерий Вальде. Найдем $\max_i (\min_j a_{ij}) = \max_i (5; 6; 15; 14) = 15$. Так как наибольшее значение получено при $i = 3$, то оптимальная стратегия игрока А – стратегия A_3 .

2) Применим критерий Гурвица, задав степень пессимизма $l = \frac{1}{2}$.

Найдем:

$$\begin{aligned} & \max_i \left[0,5 (\min_j a_{ij}) + 0,5 (\max_j a_{ij}) \right] = \\ & = \max_i [0,5 (5; 6; 15; 14) + 0,5 (23; 27; 22; 26)] = \\ & = \max_i [0,5 (28; 33; 37; 40)] = \max_i (14; 16,5; 18,5; 20) = 20. \end{aligned}$$

Учитывая, что наибольшее значение получено при $i = 4$, игроку А рекомендуется избрать стратегию A_4 .

3) Применим критерий Лапласа. Так как возможных состояний природы всего четыре, то вероятность каждого $p_j = 0,25$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Найдем математические ожидания выигрыша игрока А для каждой из его стратегий:

$$A_1 \rightarrow 0,25(5 + 11 + 19 + 23) = 0,25 \cdot 58 = 14,5,$$

$$A_2 \rightarrow 0,25(8 + 6 + 8 + 27) = 0,25 \cdot 49 = 12,25,$$

$$A_3 \rightarrow 0,25(22 + 17 + 15 + 18) = 0,25 \cdot 72 = 18,0,$$

$$A_4 \rightarrow 0,25(26 + 23 + 20 + 14) = 0,25 \cdot 83 = 20,75.$$

Максимальное значение 20,75 получается при выборе стратегии A_4 .

4) Применим критерий Сэвиджа. Для этого найдем матрицу рисков R , элементы которой вычислим по формуле: $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где a_{ij} – элементы заданной платежной матрицы, $\beta_j = \max_i a_{ij}$ – максимумы этих элементов по столбцам.

$$R = \begin{pmatrix} 21 & 12 & 1 & 4 \\ 18 & 17 & 12 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}; \quad \max_i r_{ij} = \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Найдем } \min_i \left(\max_j r_{ij} \right) = \min(21; 18; 9; 13) = 9.$$

Минимальное значение риска получается при выборе третьей стратегии. Следовательно, следуя критерию Сэвиджа, игрок A должен избрать стратегию A_3 .

Таким образом, осторожные, пессимистические критерии Вальде и Сэвиджа рекомендуют игроку A избрать стратегию A_3 , а более оптимистичные критерии Гурвица и Лапласа рекомендуют стратегию A_4 . Выбор между этими двумя стратегиями должен сделать сам игрок A исходя из его возможностей и готовности рисковать. Стратегии A_1 и A_2 исключаются как невыгодные.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

Двусторонняя игра задана платежной матрицей Q .

а) Упростите матрицу Q , исключив доминируемые стратегии игрока A (строки) и доминируемые стратегии игрока B (столбцы), приведя ее к виду Q' .

б) Найдите нижнюю и верхнюю цены игры. Решается ли данная игра в «чистых» стратегиях? Если не решается, то найдите оптимальные смешанные стратегии игроков.

в) Считая, что игроком B является природа, составьте по упрощенной матрице Q' матрицу рисков R' игрока A и найдите его оптимальную стратегию по правилу Сэвиджа (минимального риска) и по критерию Лапласа (равновозможных состояний).

Варианты:

$$1) Q = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 & 4 & 5 & -1 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & 0 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3) Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 9 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad 4) Q = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & -3 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5) Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & -4 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad 6) Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7) Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 8) Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9) Q = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad 10) Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$11) Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение варианта 11.

а) Элементы второй и четвертой строки равны. Поэтому одну из них (четвертую) вычеркнем.

Элементы первого столбца доминируют над элементами третьего и шестого столбца, так как дают меньше суммы проигрыша игрока В. Поэтому вычеркнем третий и шестой столбец (игроку В невыгодно применять эти стратегии).

В результате получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Продолжим упрощение. Элементы второго столбца доминируют над элементами третьего столбца, так как они дают меньшие суммы проигрыша игрока В. Поэтому третий столбец вычеркнем. Элементы третьей строки доминируют над элементами второй, так как дают больший выигрыш игроку А. Вычеркнем вторую строку. Окончательно получим матрицу Q' , которую упростить уже невозможно:

$$Q' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

б) Обозначим возможные стратегии игрока А: A_1, A_2, A_3 ; игрока В: B_1, B_2, B_3 . В каждой строке матрицы Q' , найдем наименьшее число a_i в каждом столбце найдем наибольшее число β_j .

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	4	-2	2	-2
A_2	3	5	1	1
A_3	2	1	5	1
β_j	4	5	5	

Нижняя цена игры: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i (-2; 1; 1) = 1$.

Верхняя цена игры: $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j (4; 5; 5) = 4$;

$\alpha \neq \beta$, следовательно, седловой точки данная игра не имеет.

Вывод: данную игру нельзя решить в «чистых» стратегиях. Решим игру в смешанных стратегиях. Для этого воспользуемся методом линейного программирования. Обозначим цену игры M . Тогда получаем две взаимно симметричные двойственные задачи:

1) Найти x_1, x_2, x_3 , такие, что $Z = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{M} \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \geq 1, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \geq 1. \end{cases}$$

при условии

2) Найти y_1, y_2, y_3 , такие что $Z = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{M} \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \leq 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \leq 1, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \leq 1. \end{cases}$$

при условии

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \leq 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \leq 1, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \leq 1. \end{cases}$$

C_i	Б.П.	1	1	1	1	0	0	0	$Z(\bar{y})$	Симпл. отн.
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	θ_i		
0	y_4	4	-2	2	1	0	0	1	1	1/2
0	y_5	3	5	1	0	1	0	1	1	1
0	y_6	2	1	5	0	0	1	1	1	1/5 ←
Инд.	Δi	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	
0	y_4	$\frac{16}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	–	–
0	y_5	$\frac{13}{5}$	$\frac{24}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1/6 ←	
1	y_6	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1
Инд.	Δi	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$		
0	y_4	$\frac{9}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	2/9 ←	
1	y_5	$\frac{13}{24}$	1	0	0	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{13}$	
1	y_3	$\frac{7}{24}$	0	1	0	$-\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{7}$	
Инд.	Δi	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		
1	y_1	1	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	–	–
1	y_2	0	1	0	$-\frac{13}{108}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{108}$	–	–
1	y_3	0	0	1	$-\frac{7}{108}$	$-\frac{2}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{11}{108}$	–	–
Инд.	Δi	0	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{49}{108}$	$\frac{10}{27}$		

Решим вначале вторую задачу. Подставляя значения a_{ij} матрицы Q' и вводя дополнительные переменные y_4, y_5, y_6 , будем преобразовывать ее по известным правилам (см. § 1, п. 4), применяя симплекс-метод.

Последняя индексная строка не содержит отрицательных значений, следовательно, решение найдено: $y_1 = \frac{2}{9}$; $y_2 = \frac{5}{108}$;

$$y_3 = \frac{11}{108}; Z_{\max}(\bar{y}) = \frac{10}{27}.$$

$$\text{Цена игры: } M = \frac{1}{Z_{\max}(\bar{y})} = \frac{27}{10} = 2,7.$$

Найдем вероятности стратегий игрока В:

$$q_1 = y_1 \cdot M = \frac{2}{9} \cdot \frac{27}{10} = \frac{6}{10}.$$

$$q_2 = y_2 \cdot M = \frac{5}{108} \cdot \frac{27}{10} = \frac{1}{8}.$$

$$q_3 = y_3 \cdot M = \frac{11}{108} \cdot \frac{27}{10} = \frac{11}{40}.$$

Таким образом, вектор оптимальных вероятностей применения стратегий игрока В имеет вид: $\bar{q} = \left(\frac{6}{10}; \frac{1}{8}; \frac{11}{40} \right)$. В этом случае его средний проигрыш будет не более цены игры, равной 2,7.

Вектор оптимальных вероятностей применения стратегий игрока А можно найти, опираясь на теорему двойственности (проделайте это самостоятельно).

Во-первых найдите оптимальные значения x_1, x_2, x_3 , а затем искомым вектор вероятностей. В результате получится:

$$\bar{p} = \left(\frac{1}{10}; \frac{1}{2}; \frac{4}{10} \right).$$

В случае применения стратегий A_1, A_2, A_3 с найденными вероятностями игрок А получит средний выигрыш не менее цены игры, равной 2,7. Координаты вектора \bar{p} показывают, что наиболее «обещающей» для игрока А является стратегия A_2 , которую следует применять с вероятностью $\frac{1}{2}$, т.е. в 50% случаев. Наибольшее рискованной является страте-

гия A_1 . Ее следует применять с вероятностью $\frac{1}{10}$, т.е. лишь в 10% случаев.

в) Пусть игроком В является природа. Рассмотрим снова матрицу Q' . Составим для нее матрицу рисков R' . Элементы r_{ij} матрицы R' получаются из элементов матрицы Q' по формуле:

$$r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij}.$$

$$R' = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

По правилу Сэвиджа игрок А должен принять стратегию A_1 , при которой получается $\min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$.

Наибольшее число в первой строке 7; во второй строке – 4; в третьей – 4. Находим $\min_j (7; 4; 4) = 4$.

Отсюда следует, что оптимальными по Сэвиджу являются две стратегии: либо A_2 , либо A_3 .

Применим теперь к матрице R' критерий Лапласа. Согласно этому критерию игрок В (в данных условиях это «неразумная» природа) выбирает свои стратегии B_1, B_2, B_3 с одинаковой вероятностью. Так как этих стратегий три, то $p_j = \frac{1}{3}$. Игрок А в этой ситуации должен выбрать стратегию A_1 , при которой получается

$$\min_i \left(\sum_j r_{ij} \cdot p_j \right).$$

Вычислим:

$$\text{при } A_1 \text{ имеем: } 0 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \approx 3,33;$$

$$\text{при } A_2 \text{ имеем: } 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} \approx 1,66;$$

$$\text{при } A_3 \text{ имеем: } 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Вывод: оптимальной по Лапласу является стратегия A_2 , при которой средневзвешенный риск минимален.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МИКРОЭКОНОМИКА

Задача микроэкономики – одного из важнейших разделов экономической теории – анализ взаимодействия субъектов хозяйственной деятельности – отдельных потребителей (домашних хозяйств) и производителей (предприятий). Микроэкономике иногда называют «теорией цен», поскольку главными индикаторами механизма распределения товаров (благ, услуг, ресурсов) в рыночной экономике выступают цены. Известно, что цена на какой-либо конкретный товар зависит от соотношения спроса и предложения. Спрос на товар и предложение товаров определяются объемами их потребления и производства.

Потребители преследуют цель добиться максимального эффекта потребления. Производители стремятся добиться максимальной прибыли.

Задача математической микроэкономики заключается в построении системы математических моделей, адекватно отражающей взаимозависимости между указанными выше факторами. Только в этом случае можно достаточно обоснованно, опираясь на расчеты, рекомендовать конкретные оптимальные решения субъектам хозяйственной деятельности. Таким образом, математическая экономика придает экономическим решениям точность, которая, как известно, никогда не бывает лишней.

§ 1. Теория потребления

1.1. Функции полезности

Рассмотрим некоторое множество индивидуальных потребителей (домашних хозяйств), которые для удовлетворения своих потребностей используют два вида благ (товаров): № 1 и № 2. Допустим, что для обеспечения потребностей одного из этих потребителей в течение некоторого периода времени (например, 1 месяц) требуется x_1 единиц блага № 1 и x_2 единиц блага № 2.

Двумерный вектор $(x_1; x_2)$ назовем вектором потребления данного потребителя.

Предположим, что этому потребителю предложили на выбор два различных вектора потребления: $A = (x_{1A}; x_{2A})$ и $B = (x_{1B}; x_{2B})$. Тогда потребитель может вынести одно из следующих трех суждений: 1) вектор A предпочтительнее, чем B ; 2) вектор B предпочтительнее, чем A ; 3) оба вектора – A и B – равнопредпочтительны.

Будем полагать, что при вынесении одного из этих трех суждений потребитель руководствуется своей индивидуальной функцией полезности: $U = U(x_1; x_2)$. Если значения этой функции одинаковы для разных векторов потребления, то выносится суждение 3), т.е. рассматриваемые векторы потребления одинаково полезны.

В микроэкономике рассматриваются в основном следующие три типа функций полезности:

1. Функция с полным взаимозамещением благ:

$$U = b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (b_1 > 0; b_2 > 0). \quad (1)$$

2. Функция с полным взаимодополнением благ:

$$U = \min \left(\frac{x_1}{b_1}; \frac{x_2}{b_2} \right) \quad (b_1 > 0; b_2 > 0). \quad (2)$$

3. Неоклассическая функция полезности (функция смешанного замещающе-дополняющего типа):

$$U = a x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \quad (b_1 > 0; b_2 > 0; a > 0; b_1 + b_2 \leq 1). \quad (3)$$

Функции полезности первого и второго типа встречаются не так часто. Первая характеризует полезность потребления двух сходных по назначению благ, когда снижение количества одного потребления блага полностью компенсируется увеличением потребления другого. Например: животное и растительное масло; алкогольные напитки двух разных наименований; хлебобулочные изделия двух разных видов образуют пары взаимозаменяемых благ (товаров).

Функция полезности второго типа описывает ситуацию, когда никакое увеличение потребления одного блага (товара) не может компенсировать нехватку другого. Например: одежда и обувь, «хлеб» и «зрелища» – пары взаимодополняющих благ.

Функции полезности третьего типа описывают оба эффекта – и эффект замещения, и эффект дополнения одного блага другим, поэтому они рассматриваются чаще других.

Кроме перечисленных трех основных типов функций полезности, для моделирования выбора потребителя применяются и другие виды функций, например:

4. Логарифмическая функция полезности:

$$U = a_1 \ln(x_1 - b_1) + a_2 \ln(x_2 - b_2), \quad (4)$$

где $a_1 > 0; a_2 > 0; b_1 \geq 0; b_2 \geq 0$.

5. Экспоненциальная функция полезности:

$$U = k \cdot e^{-(a_1 x_1 + a_2 x_2)}, \quad (5)$$

где $k > 0; a_1 > 0; a_2 > 0$.

Замечание 1.

Выбор вида функции полезности, адекватно отражающей предпочтения конкретного потребителя, представляет собой довольно сложную задачу. В общей постановке это задача спецификации математической модели потребления. Методы решения подобных задач рассматриваются в специальной науке эконометрике, возникшей сравнительно недавно на стыке экономического и регрессионного анализа.

Замечание 2.

Все перечисленные выше виды функций полезности можно записать в более общем виде, когда вектор потребления является не двумерным, а n -мерным ($n > 2$). Вектор потребления $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ рассматривается в случае, когда потребитель использует n различных видов благ (товаров). Например: неоклассическая функция полезности (3) в этом случае будет иметь вид:

$$U = a x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n} = a \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{b_i}, \quad (6)$$

где $a > 0; b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq 1; b_1 > 0, \dots, b_n > 0$.

Функция с полным взаимозамещением для случая $n > 2$ имеет вид:

$$U = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = \sum_{i=1}^n b_i x_i, \quad (7)$$

где $b_1 > 0, \dots, b_n > 0$.

Задача 1. Дана функция полезности $U = \min(2x_1; 3x_2)$. Найдите наиболее предпочтительный вектор потребления из заданных: $A_1 = (1; 2); A_2 = (3; 1); A_3 = (8; 1); A_4 = (2; 2)$.

Решение.

Вычислим $U = \min(2x_1; 3x_2)$ для каждого из векторов:

$$U_1(1; 2) = \min(2; 6) = 2; \quad U_2(3; 1) = \min(6; 3) = 3.$$

$$U_3(8; 1) = \min(16; 3) = 3; \quad U_4(2; 2) = \min(4; 6) = 4.$$

Наибольшее значение полезности $U_4 = 4$ получено для вектора $A_4 = (2; 2)$.

Ответ: $A_4 = (2; 2)$.

Задача 2. Функция полезности имеет вид: $U = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2^2}$. Расположите следующие векторы потребления в порядке их предпочтительности: $B_1 = (8; 1); B_2 = (1; 8); B_3 = (2; 4); B_4 = (4; 2)$.

Решение.

Вычислим значения полезности:

$$U_1 = \sqrt[3]{8 \cdot 1^2} = 2; \quad U_2 = \sqrt[3]{1 \cdot 8^2} = 4;$$

$$U_3 = \sqrt[3]{2 \cdot 4^2} = 2\sqrt[3]{4}; \quad U_4 = \sqrt[3]{4 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Запишем значения полезности в порядке их возрастания:

$$U_1 = 2; \quad U_4 = 2\sqrt[3]{2}; \quad U_3 = 2\sqrt[3]{4}; \quad U_2 = 4.$$

Ответ: $B_1; B_4; B_3; B_2$.

Задача 3. Любительница пирожных Глафира покупает обычно к утреннему чаю 2 «слоечки» и 3 «трубочки». Однажды в магазин не завезли «слоечки». Какой новый вектор потребления с той же полезностью избрала Глафира, если ее функция полезности имеет вид: $U = 3x_1 + 2x_2$, где x_1 – количество «слоечек», x_2 – количество «трубочек»?

Решение.

Функция полезности Глафиры относится к функциям с полным взаимозамещением. Поэтому возможно полное замещение одного товара другим. Найдём значение полезности при обычном векторе потребления: $U(2; 3) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$. Так как это

значение должно сохраниться и при новом векторе потребления, у которого первая координата $x_1 = 0$, то $U(0; x_2) = 12$. Или $3 \cdot 0 + 2 \cdot x_2 = 12$, откуда $x_2 = 6$. Следовательно, новый вектор потребления: $(0; 6)$.

Ответ: $(0; 6)$.

1.2. Предельная полезность и предельная норма замещения. Свойства функций полезности

Определение 1. Предельной полезностью товара называется соответствующая частная производная первого порядка от функции полезности: U'_1 – предельная полезность первого товара; U'_2 – предельная полезность второго.

Понятие предельной полезности позволяет сформулировать некоторые общие свойства функций полезности.

Если зафиксировать потребление одного из товаров на постоянном уровне и увеличивать потребление другого, то полезность будет возрастать. Так как возрастающие функции имеют положительные производные, то отсюда следует:

Свойство 1. $U'_1 > 0$; $U'_2 > 0$ – предельные полезности положительных (кроме случая функции второго типа с полным взаимодополнением благ).

Однако ясно, что с увеличением потребления любого товара его полезность должна уменьшаться. Если вы голодны, то первый пирожок вы съедаете с большим аппетитом, второй – уже с меньшим и т.д.

Таким образом, предельные полезности должны быть убывающими функциями от величины потребления. В этом суть 1-го закона К. Госсена, основоположника «маржинализма» – одного из течений в экономической теории. На дифференциальном языке этот закон формулируется следующим образом:

Свойство 2. $U''_{x_1 x_1} < 0$; $U''_{x_2 x_2} < 0$ – частные производные второго порядка от функции полезности – отрицательны, т.е. с ростом потребления скорость роста полезности замедляется. Этим свойством обладают неоклассические функции полезности (3).

Рассмотрим теперь случай замещения одного блага (товара) – другим. Пусть при сокращении потребления первого блага на величину $(-dx_1)$, для того чтобы сохранить прежнюю величину

полезности U_0 , необходимо увеличить потребление второго блага на величину dx_2 .

Определение 2. Отношение: $-\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{U=U_0} = MRS \Big|_{x_1 \rightarrow x_2}$ — называется предельной нормой замещения (marginal rate of substitution) первого блага вторым.

Так как в результате этого замещения значение функции полезности остается неизменным, то полный дифференциал функции полезности равен нулю:

$$dU = U'_{x_1} \cdot dx_1 + U'_{x_2} \cdot dx_2 = 0 \Rightarrow U'_{x_2} \cdot dx_2 = -U'_{x_1} \cdot dx_1 \Rightarrow$$

$$-\frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = MRS \Big|_{x_1 \rightarrow x_2} \quad (8)$$

Свойство 3. Предельная норма замещения есть отношение соответствующих предельных полезностей.

Задача 4. Дана функция полезности $U = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} \cdot x_3^{\frac{1}{6}}$. Найдите предельные нормы замещения x_2 на x_1 и x_1 на x_3 в точке (1; 8; 1).

Решение. Найдем предельные полезности:

$$U'_{x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} \cdot x_3^{\frac{1}{6}}, \quad U'_{x_1} (1; 8; 1) = \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 1^{\frac{1}{6}} = 1.$$

$$U'_{x_2} = \frac{1}{3} x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{2}{3}} \cdot x_3^{\frac{1}{6}}, \quad U'_{x_2} (1; 8; 1) = \frac{1}{3} \cdot 1^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 1^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{12}.$$

$$U'_{x_3} = \frac{1}{6} x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} \cdot x_3^{-\frac{5}{6}}, \quad U'_{x_3} (1; 8; 1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}.$$

Найдем предельные нормы замещения:

$$MRS \Big|_{x_2 \rightarrow x_1} = U'_{x_2} : U'_{x_1} = \frac{1}{12} : 1 = \frac{1}{12};$$

$$MRS \Big|_{x_1 \rightarrow x_3} = U'_{x_1} : U'_{x_3} = 1 : \frac{1}{3} = 3.$$

Ответ: $\frac{1}{12}; 3$.

1.3. Кривые безразличия и бюджетная прямая

Если функция полезности $U = U(x_1, x_2)$ известна, то при каком заданном уровне полезности U_1 можно в системе координат $(x_1; x_2)$ построить линию, уравнение которой $U_1 = U(x_1; x_2)$. Линия, соответствующие разным фиксированным значениям полезности U_1, U_2, \dots , в микроэкономике называют кривыми безразличия.

Это название оправдывается тем, что все векторы потребления, координаты которых задают точки, принадлежащие одной и той же кривой безразличия, характеризуются одинаковой полезностью (т.е. равнопредпочтительны), и потребителю безразлично, какой из них избрать.

Обозначим цену первого блага (товара) p_1 , цену второго p_2 , а бюджет потребителя R .

Определение 3. Уравнение $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$ называется бюджетным уравнением, а соответствующая ему в координатах $(x_1; x_2)$ прямая называется бюджетной прямой. Неравенство $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$ называется бюджетным ограничением.

При заданном бюджетном ограничении все доступные потребителю векторы потребления задаются точками, находящимися внутри или на границах треугольника, образованного бюджетной прямой и осями координат.

Если в системе координат $(x_1; x_2)$ построить бюджетную прямую и несколько кривых безразличия, соответствующих различным значениям полезности, то можно заметить, что некоторые из кривых безразличия пересекают бюджетную прямую, а некоторые находятся за пределами указанного выше треугольника (рис. 1). Кривые безразличия, которые не имеют ни одной общей точки с бюджетной прямой потребителя, называют «недоступными».

Рассмотрим вначале функцию полезности неоклассического типа (3). Кривые безразличия для функций этого типа представляют собой гиперболы. Очевидно, чем выше фиксируемый уровень полезности U_1, U_2, \dots , тем дальше должна располагаться гипербола от начала и осей координат. Множество кривых безразличия (в данном случае — гипербол), построенных на одном чертеже, называется картой кривых безразличия. На рис. 1 изображена типичная карта кривых безразличия функций типа (3) и типичная бюджетная кривая.

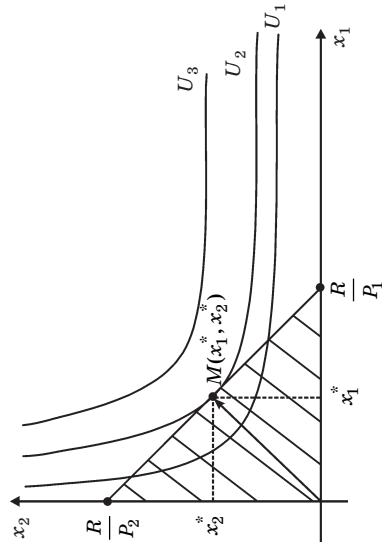


Рис. 1. Карта кривых безразличия для функций полезности неоклассического типа и бюджетная прямая

Замечание 1. На рис. 1 отмечена точка $M(x_1^*; x_2^*)$, которая является точкой касания бюджетной прямой и одной из кривых безразличия. Далее будет доказано, что эта точка определяет оптимальный для данного потребителя вектор потребления $\overrightarrow{OM} = (x_1^*; x_2^*)$.

Задача 5. Поставьте на одном чертеже: а) бюджетную прямую потребителя, который интересуется двумя видами товаров, если его бюджет $R = 60$ руб., цена одной единицы первого товара $P_1 = 10$ руб., второго $P_2 = 15$ руб.; б) карту кривых безразличия этого потребителя при фиксированных значениях полезности $U_1 = 4$; $U_2 = 6$; $U_3 = 8$, если его функция полезности имеет вид: $U = \min(4x_1; 2x_2)$. Укажите оптимальный вектор потребления этого потребителя.

Решение.

Построим систему координат x_1Ox_2 . Вычислим $\frac{R}{P_1} = \frac{60}{10} = 6$ и отметим эту точку на оси Ox_1 . Вычислим $\frac{R}{P_2} = \frac{60}{15} = 4$ и отметим эту точку на оси Ox_2 . Через эти две точки проведем прямую. Это – искомая бюджетная прямая $10x_1 + 15x_2 = 60$ данного потребителя (рис. 2).

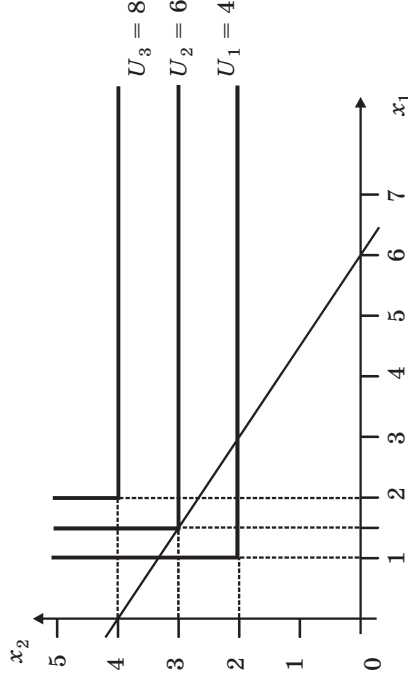


Рис. 2. Бюджетная прямая и карта кривых безразличия

Для построения карты кривых безразличия рассмотрим указанные фиксированные значения полезности:

1. $U_1 = 4$. Это значение для функции полезности $U = \min(4x_1; 2x_2)$ возможно в двух случаях:

$$1) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 \geq 2; \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x_1 \geq 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Первая система задает полупрямую от точки с координатами (1;2) вверх; вторая – от той же точки вправо. Построив эти полупрямые, получаем прямой угол, вершина которого находится в точке (1;2). Этот угол представляет собой искомую кривую безразличия для данной функции полезности при $U = U_1 = 4$.

2. $U_2 = 6$. Это значение возможно, если:

$$1) \begin{cases} x_1 = 1, 5, \\ x_2 \geq 3; \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x_1 \geq 1, 5, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Получаем прямой угол с вершиной в точке (1,5; 3). Это вторая кривая безразличия, соответствующая уровню полезности $U = U_2 = 6$.

3. $U_3 = 8$. Это значение полезности достигается, если:

$$1) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 \geq 4; \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x_1 \geq 2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Получаем третью кривую безразличия, соответствующую $U = U_3 = 8$ – прямой угол с вершиной в (2;4) (см. рис. 2).

Анализируя рис. 2, можно заметить, что наибольший из уровней полезности, доступных нашему потребителю с бюджетом $R = 60$ руб., – это $U_2 = 6$. Этого уровня можно достичь только в том случае, если потребитель изберет вектор потребления (1,5; 3). Тогда $1,5 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 = 1,5 \cdot 10 + 3 \cdot 15 = 15 + 45 = 60$, и потребитель «укладывается» в свой бюджет $R = 60$. Все другие векторы либо недоступны потребителю из-за ограниченности его бюджета, либо приводят к меньшему значению полезности, следовательно – невыгодны. Например, вектор потребления (2;4) – недоступен, хотя и приводит к уровню полезности $U_3 = 80$, так как $2 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 15 = 80$ (руб.). Но у нашего потребителя только 60 руб.

Вектор (3;2), например, – невыгоден, так как потребитель, затратив $3 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 15 = 60$ (руб.), получает полезность, равную $U = \min(4 \cdot 3; 2 \cdot 2) = \min(12; 4) = 4$, что меньше, чем $U_2 = 6$ при выборе вектора потребления (1,5; 3).

Ответ: (1,5; 3).

Замечание 2. Если потребителя интересуют не два, а три различных вида товара, и векторы потребления трехмерные, то в принципе можно для функции полезности $U = U(x_1, x_2, x_3)$ при различных значениях U_1, U_2, \dots построить в системе координат (x_1, x_2, x_3) так как называемые поверхности безразличия. Однако если размерность пространства товаров $n > 3$, то никакие графические иллюстрации уже невозможны.

1.4. Общая постановка «задачи потребителя» – нахождение оптимального вектора потребления. Функции спроса

Пусть $U = U(x_1, x_2)$ – функция полезности, $R = p_1 x_1 + p_2 x_2$ – бюджетная прямая. Задача потребителя заключается в нахождении в этих условиях оптимального вектора потребления (x_1^*, x_2^*) , который называется также точкой спроса. В общей постановке эту задачу можно сформулировать как задачу нахождения глобального условного максимума функции $U = U(x_1, x_2)$ при условии $R = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Для ее решения в общем случае применяется метод Лагранжа (см. гл. 1, п. 2.3). Алгоритм этого метода заключается в последовательном выполнении следующих трех пунктов (шагов).

1) Составим функцию Лагранжа:

$$L = L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2). \quad (9)$$

2) Находим частные производные L'_1, L'_2, L'_λ , составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_1 = 0, & \begin{cases} U'_1 - \lambda p_1 = 0, \\ L'_2 = 0, \text{ или } \begin{cases} U'_2 - \lambda p_2 = 0, \\ L'_\lambda = 0; \end{cases} \\ R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

Решения этой системы (если их несколько) представляют собой точки, в которых выполняются необходимые условия локального экстремума, т.е. в одной из них (или нескольких) может быть искомое наибольшее значение функции $U(x_1, x_2)$.

3) Сравним значения функции $U(x_1, x_2)$ во всех найденных выше точках, находим точку (или точки) глобального максимума функции $U(x_1, x_2)$ при условии $R = p_1 x_1 + p_2 x_2$, т.е. точку спроса (x_1^*, x_2^*) . Заметим, что согласно известной теореме Вейерштрасса всякая функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве, достигает на этом множестве своего наибольшего значения. Очевидно, что функция полезности $U = U(x_1, x_2)$, которая предполагается по меньшей мере дважды дифференцируемой, удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса.

Можно доказать, что для функций полезности второго и третьего (неоклассического) типа, приведенных в п. 1.1, задача потребителя имеет единственное решение.

Это позволяет поставить задачу потребителя в другой форме. Пусть существует единственная точка спроса (x_1^*, x_2^*) , которая, очевидно, зависит от значений R, p_1, p_2 .

Определение 4. Функции $x_1^* = f_1(R, p_1, p_2)$ и $x_2^* = f_2(R, p_1, p_2)$ называются функциями спроса на соответствующие товары.

Если в какой-либо из функций спроса зафиксировать доход потребителя $R = R_0$, то можно изучать зависимость потреби-

тельного спроса на данный товар от цены p_1 и p_2 , т.е. зависимость типа «цены – потребление». Если зафиксировать цены, то из функций спроса получаются зависимости типа «доход – потребление».

Анализ функций спроса будет дан в пункте 1.5.

Задача 6. Решить задачу потребителя (т.е. найти точку спроса) для функции неоклассического типа $U = ax_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$ ($a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0, b_1 + b_2 = 1$) при известном бюджете R и ценах p_1 и p_2 на соответствующие товары.

Решение.

Составим функцию Лагранжа и найдем ее частные производные:

$$L = L(x_1, x_2, \lambda) = ax_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2);$$

$$L'_{x_1} = ab_1 \cdot x_1^{b_1-1} \cdot x_2^{b_2} - \lambda p_1;$$

$$L'_{x_2} = ab_2 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2-1} - \lambda p_2;$$

$$L'_\lambda = R - p_1x_1 - p_2x_2.$$

Решим систему уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, λ :

$$\begin{cases} ab_1x_1^{b_1-1} \cdot x_2^{b_2} - \lambda p_1 = 0, \\ ab_2x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2-1} - \lambda p_2 = 0, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ab_1 \cdot x_1^{b_1-1} \cdot x_2^{b_2}}{p_1} = \frac{ab_2 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2-1}}{p_2}, \\ x_2 = \frac{R - p_1x_1}{p_2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{ab_1}{p_1x_1} = \frac{ab_2}{p_2x_2}, \\ x_2 = \frac{R - p_1x_1}{p_2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{b_2p_1x_1}{b_1p_2}, \\ x_2 = \frac{R - p_1x_1}{p_2}. \end{cases}$$

Исключая x_2 из последней системы, будем иметь:

$$\frac{b_2p_1x_1}{b_1} = R - p_1x_1, \quad \text{или} \quad b_2p_1x_1 + b_1p_1x_1 = b_1R, \quad x_1 = \frac{b_1R}{p_1(b_1 + b_2)}.$$

Учитывая, что $b_1 + b_2 = 1$, получаем:

$$x_1 = \frac{b_1R}{p_1}.$$

Подставляя найденное значение в одно из уравнений последней системы, найдем:

$$x_2 = \frac{b_2R}{p_2}.$$

Таким образом, мы получили единственную стационарную точку

$$(x_1^*; x_2^*) = \left(\frac{b_1R}{p_1}; \frac{b_2R}{p_2} \right),$$

которая является искомой точкой глобального максимума функции $U = ax_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$ на отрезке $R = p_1x_1 + p_2x_2$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Дело в том, что на концах этого отрезка, т.е. в точках $\left(0; \frac{R}{p_2}\right)$ и $\left(\frac{R}{p_1}; 0\right)$, функция полезности равна нулю. Следова-

тельно, точка $\left(\frac{b_1R}{p_1}; \frac{b_2R}{p_2}\right)$, в которой функция полезности при-

нимает положительное значение, не может быть точкой глобального минимума. В этом случае верно противоположное утверждение, т.е. она является точкой глобального максимума на заданном отрезке.

Итак, точка спроса $(x_1^*; x_2^*)$ найдена: $\left(\frac{b_1R}{p_1}; \frac{b_2R}{p_2}\right)$.

Заметим, что одновременно получены аналитические выражения для функций спроса:

$$x_1^* = b_1 \cdot \frac{R}{p_1}; \quad x_2^* = b_2 \cdot \frac{R}{p_2}, \quad (11)$$

из которых следует, что для функций полезности неоклассического типа спрос на соответствующий товар прямо пропорционален бюджету потребителя и обратно пропорционален его цене.

Замечание. Для нахождения точки спроса можно воспользоваться также формулой (8), полученной в п. 1.2:

$$\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = -\frac{dx_2}{dx_1} = MRS \Big|_{x_1 \rightarrow x_2}.$$

Вместе с бюджетным уравнением $R = p_1x_1 + p_2x_2$ это отношение позволяет найти искомую точку спроса (разумеется, в тех случаях, когда точно известно, что она существует и единственная).

Заметим, что для неоклассических функций полезности эта точка спроса является точкой касания бюджетной прямой и проходящей через эту точку кривой безразличия. Поэтому угловые коэффициенты указанных линий в точке спроса должны быть равны.

Выразим из бюджетного уравнения $x_2 = \frac{(R - p_1x_1)}{p_2}$ и найдем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2} \quad \text{или} \quad -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}. \quad \text{Но} \quad \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = -\frac{dx_2}{dx_1}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2} = MRS \Big|_{x_1 \rightarrow x_2}. \quad (12)$$

Вывод: для неоклассических функций полезности в точке спроса предельная норма замещения равна отношению соответствующих предельных полезностей и равна отношению их цен.

Задача 7. Даны функция полезности $U = \sqrt{x_1x_2}$ и бюджетная прямая $5x_1 + 10x_2 = 50$. Найти точку спроса.

Решение. Найдем $U'_{x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_1^{\frac{1}{2}}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}; \quad U'_{x_2} = \frac{1}{2} \cdot x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}}.$

Решим систему:

$$\begin{cases} U'_{x_1} : U'_{x_2} = p_1 : p_2, \\ R = p_1x_1 + p_2x_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}, \\ 5x_1 + 10x_2 = 50; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ 10x_2 + 10x_2 = 50; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 2,5. \end{cases}$$

Ответ: $(x_1^*; x_2^*) = (5; 2,5)$.

Задача 8. Даны функция полезности $U = 2x_1 + 3x_2$ и бюджетная прямая $2x_1 + 5x_2 = 10$. Найти точку спроса.

Решение.

Функция полезности $U = 2x_1 + 3x_2$ не относится к функциям неоклассического типа. Поэтому воспользоваться методом, который применялся в предыдущей задаче, нельзя.

С другой стороны, применить метод Лагранжа было бы неоправданно сложно. Проще всего эта задача решается методом подстановки. Выразим из бюджетного уравнения $2x_1 = 10 - 5x_2$ и подставим это выражение в функцию полезности: $U = (10 - 5x_2) + 3x_2 = 10 - 2x_2$.

Очевидно, что наибольшее значение этой функции получается при $x_2 = 0$. Подставляя $x_2 = 0$ в бюджетное уравнение, находим $x_1 = 5$. Следовательно, точка спроса: $(5; 0)$.

Ответ: $(5; 0)$.

1.5. Эффекты замещения и дополнения при изменении цены

Для неоклассических функций полезности было установлено, что оптимальным вектором потребления $(x_1^*; x_2^*)$, при заданном бюджетном ограничении $R = p_1x_1 + p_2x_2$, будет вектор:

$$(x_1^*; x_2^*) = \left(\frac{Rb_1}{p_1}; \frac{Rb_2}{p_2} \right). \quad (13)$$

При выборе этого вектора потребитель достигает уровня полезности

$$U^* = a \cdot (x_1^*)^{b_1} \cdot (x_2^*)^{b_2} = a \cdot \left(\frac{Rb_1}{p_1} \right)^{b_1} \cdot \left(\frac{Rb_2}{p_2} \right)^{b_2}. \quad (14)$$

Если цена на один из товаров увеличивается, то уровень U^* , очевидно, снижается. Допустим, что потребитель при любом изменении цен на товары стремится сохранить неизменным достигнутый уровень полезности U^* , даже за счет увеличения бюджетных расходов R . То есть будем считать строго фиксированным значение U^* , а не R , как ранее.

Рассмотрим кривую безразличия, заданную уравнением $U = U^*$. Учитывая (14), это уравнение можно записать в виде:

$$ax_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} = a \cdot \left(\frac{Rb_1}{p_1} \right)^{b_1} \cdot \left(\frac{Rb_2}{p_2} \right)^{b_2}. \quad (15)$$

Сократим на множитель a и примем во внимание, что $b_1 + b_2 = 1$, так как функция полезности – неоклассическая. Поэтому в правой части уравнения (15) можно сделать упрощения: $R^{b_1} \cdot R^{b_2} = R^{b_1+b_2} = R$. Тогда уравнение (15) можно записать в виде:

$$x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} = R \cdot \left(\frac{b_1}{p_1} \right)^{b_1} \cdot \left(\frac{b_2}{p_2} \right)^{b_2}. \quad (16)$$

В случае изменения цены p_1 на величину Δp_1 задачу нахождения оптимального вектора потребления, сохраняющего неизменной полезность U^* , можно сформулировать следующим образом.

Задача. На кривой безразличия, заданной уравнением (16), найти точку ее касания с бюджетной прямой

$$R + \Delta R = x_1(p_1 + \Delta p_1) + x_2 p_2. \quad (17)$$

Решение.

Из (16) найдем

$$x_2 = x_1^{-\frac{b_1}{b_2}} \cdot R^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \left(\frac{b_1}{p_1} \right)^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \frac{b_2}{p_2}, \quad (18)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{b_1}{b_2} \cdot x_1^{-1-\frac{b_1}{b_2}} \cdot R^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \left(\frac{b_1}{p_1} \right)^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \frac{b_2}{p_2} = -x_1^{-1-\frac{b_1}{b_2}} \cdot R^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \frac{b_1}{p_2} \cdot \left(\frac{b_1}{p_1} \right)^{\frac{b_1}{b_2}}. \quad (19)$$

Из уравнения бюджетной прямой:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1 + \Delta p_1}{p_2}. \quad (20)$$

Приравнявая полученные производные (20) и (19), получим:

$$x_1^{-\frac{1}{b_2}} \cdot R^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \frac{b_1}{p_2} \cdot \left(\frac{b_1}{p_1} \right)^{\frac{b_1}{b_2}} = \frac{p_1 + \Delta p_1}{p_2}.$$

После возведения обеих частей в степень b_2 и упрощений:

$$\frac{x_1^{-1} \cdot R \cdot b_1^{b_1+b_2}}{p_1^{b_1}} = (p_1 + \Delta p_1)^{b_2}, \quad (20)$$

$$x_1 = x_1^0 = \frac{Rb_1}{p_1^{b_1} \cdot (p_1 + \Delta p_1)^{b_2}}.$$

Подставляя найденное значение $x_1 = x_1^0$ в (18), найдем $x_2 = x_2^0$:

$$\begin{aligned} x_2 = x_2^0 &= \left(\frac{Rb_1}{p_1^{b_1} \cdot (p_1 + \Delta p_1)^{b_2}} \right)^{-\frac{b_1}{b_2}} \cdot R^{\frac{1}{b_2}} \cdot \left(\frac{b_1}{p_1} \right)^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \frac{b_2}{p_2} = \\ &= R^{\frac{1-b_1}{b_2}} \cdot b_1^{-\frac{b_2+b_1}{b_2}} \cdot \frac{b_1^{b_2}}{b_2} \cdot p_1^{-\frac{b_1}{b_2}} \cdot (p_1 + \Delta p_1)^{\frac{b_1}{b_2}} \cdot \frac{b_2}{p_2} = \\ &= R \cdot p_1^{-b_1} \cdot (p_1 + \Delta p_1)^{b_1} \cdot \frac{b_2}{p_2} = \frac{Rb_2}{p_2} \cdot \left(\frac{p_1 + \Delta p_1}{p_1} \right)^{b_1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что найденные функции спроса, полученные при условии $U = U^*$, в случае $\Delta p_1 = 0$ дают вектор $(x_1^*; x_2^*)$, рассмотренный выше (13). Если $\Delta p_1 > 0$, то

$$\begin{cases} x_1^0 = \frac{Rb_1}{p_1^{b_1} (p_1 + \Delta p_1)^{b_2}} < x_1^*, \\ x_2^0 = \frac{Rb_2}{p_2} \cdot \left(\frac{p_1 + \Delta p_1}{p_1} \right)^{b_1} > x_2^*. \end{cases} \quad (22)$$

При $\Delta p_1 < 0$ неравенства (22) оказываются противоположными по знаку.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию изменения вектора оптимального потребления при изменении цены на один из товаров. Пусть $(x_1^*; x_2^*)$ – оптимальный вектор потребления при бюджетном ограничении $R = p_1 x_1 + p_2 x_2$ ($(\cdot) M$) (рис. 3). Если цена первого товара увеличивается на Δp_1 , то при условии неизменности бюджетных расходов R потребитель вынужден будет перейти к новому вектору потребления $((\cdot) N)$ (см. рис. 3):

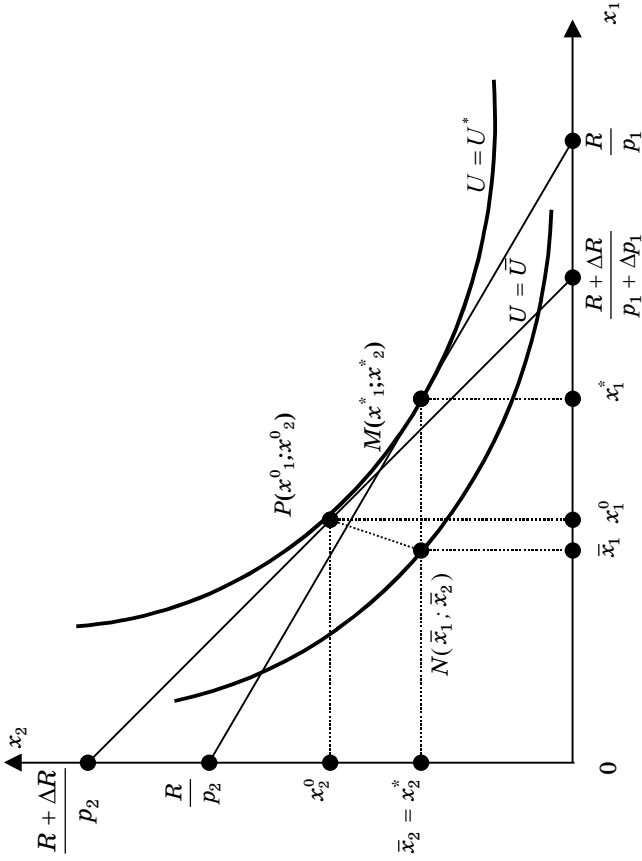


Рис. 3. Точки спроса при изменении цены на один из товаров и бюджетных расходов

$$(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = \left(\frac{Rb_1}{p_1 + \Delta p_1}; \frac{Rb_2}{p_2} \right). \quad (23)$$

Этот новый вектор является оптимальным при указанных условиях ($R - \text{const}$), однако он приводит к снижению уровня полезности от значения $U = U^*$ до значения $U = \bar{U}$.

Если потребитель не устраивает вектор $(\bar{x}_1; \bar{x}_2)$ и он хочет, чтобы полезность потребления была прежней, т.е. $U = U^*$, и готов для этого увеличить соответственно бюджетные расходы, то в этом случае оптимальным будет вектор потребления $(x_1^0; x_2^0)$ – точка P (см. рис. 3).

Определение 5. Разность $x_1^* - x_1^0$ – называется эффектом замещения при изменении цены p_1 и обозначается $S_{\Delta p_1}$ (*Effet de substitution*).

Разность $x_1^0 - \bar{x}_1$ – называется эффектом дополнения (или эффектом «дохода») при изменении цены p_1 и обозначается $Re_{\Delta p_1}$ (*Effet Revenu*).

Знание эффектов замещения и дополнения позволяет дать более точную характеристику товаров и позволяет более точно прогнозировать изменения в структуре потребительского спроса при изменении цен на них. Заметим, что все «разумные» решения потребителя находятся в пределах треугольника MNP (см. рис. 3). Вектор $O\vec{M} = (x_1^*; x_2^*)$ – характеризует выбор потребителя, для которого главным является сохранение привычной структуры спроса. Вектор $O\vec{N} = (\bar{x}_1; \bar{x}_2)$ – выбирает потребитель, для которого любое увеличение бюджетных расходов R – неприемлемо. Вектор $O\vec{P} = (x_1^0; x_2^0)$ – выбирает потребитель, который стремится сохранить привычный уровень полезности U^* , не затрачивая при этом дополнительные средства ради сохранения прежней структуры спроса.

Задача 9. Дана функция полезности $U = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$ и бюджетная прямая $25x_1 + 30x_2 = 6000$. Если цена на первый товар изменится с $p_1 = 25$ до $p_1' = 40$, то как изменится оптимальный выбор потребителя? Найдите соотношение эффектов замещения и дополнения.

Решение.

Дано: $p_1 = 25, p_2 = 30, R = 6000, b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Функция полезности неоклассического типа, поэтому координаты оптимального вектора потребления можно вычислить по формулам:

$$x_1^* = \frac{Rb_1}{p_1} = \frac{6000 \cdot \frac{1}{2}}{25} = 120; \quad x_2^* = \frac{Rb_2}{p_2} = \frac{6000 \cdot \frac{1}{2}}{30} = 100.$$

Полезность потребления: $U^* = 2\sqrt{x_1^* \cdot x_2^*} = 2\sqrt{120 \cdot 100} = 40\sqrt{30}$. Пусть цена на первый товар увеличилась на $\Delta p_1 = 15$ и стала равной $p_1 + \Delta p_1 = 40$. Координаты нового оптимального вектора потребления вычислим по тем же формулам:

$$\bar{x}_1 = \frac{Rb_1}{p_1 + \Delta p_1} = \frac{6000 \cdot \frac{1}{2}}{40} = 75; \quad \bar{x}_2 = \frac{Rb_1}{p_2} = \frac{6000 \cdot \frac{1}{2}}{30} = 100.$$

Потребление первого товара снизилось, следовательно, снизится и полезность. Если поставить задачу нахождения оптимального вектора, сохраняющего полезность $U^* = 40\sqrt{30}$, то для этого нужно применить формулы (22):

$$x_1^0 = \frac{Rb_1}{p_1^b (p_1 + \Delta p_1)^{b_2}} = \frac{6000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{40}} = 30\sqrt{10} \approx 94,8.$$

$$x_2^0 = \frac{Rb_2}{p_2} \cdot \left(\frac{p_1 + \Delta p_1}{p_1} \right)^{b_1} = \frac{6000 \cdot \frac{1}{2}}{30} \cdot \left(\frac{40}{25} \right)^{\frac{1}{2}} = 40\sqrt{10} \approx 126,4.$$

Найдем эффекты замещения и дополнения:

$$S = x_1^* - x_1^0 = 120 - 94,8 = 25,2;$$

$$Re = x_1^0 - \bar{x}_1 = 94,8 - 75 = 19,8.$$

Общее изменение спроса на первый товар: $\Delta x_1 = x_1^* - \bar{x}_1 = 45$ (или $\Delta x_1 = S + Re = 45$).

Найдем процентное соотношение эффектов:

$$\frac{S \cdot 100\%}{\Delta x_1} = \frac{25,2 \cdot 100\%}{45} \approx 56\%;$$

$$\frac{Re \cdot 100\%}{\Delta x_1} = \frac{19,8 \cdot 100\%}{45} \approx 44\%.$$

Замечание. Если функция полезности не является неокласической (например, не выполняется равенство $b_1 + b_2 = 1$), то эффекты замещения и дополнения можно вычислить приближенно с помощью уравнения Слуцкого, которое рассматривается далее.

1.6. Уравнение Слуцкого

Пусть заданы некоторая функция полезности $U = U(x_1, x_2)$, бюджетная прямая $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$. Допустим, что существует единственная точка максимума функции Лагранжа:

$L = L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2)$, которая зависит от цен p_1 и p_2 и бюджета потребителя R .

$$\begin{cases} x_1^* = f_1(p_1, p_2, R), \\ x_2^* = f_2(p_1, p_2, R). \end{cases} \quad (23)$$

Эта точка может быть найдена в результате решения системы уравнений:

$$\begin{cases} U'_{x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ U'_{x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = R. \end{cases} \quad (24)$$

Пусть цена p_1 изменилась на величину dp_1 . Тогда спрос x_1^* и спрос x_2^* изменятся на dx_1^* и dx_2^* соответственно. Найдем $\frac{dx_1^*}{dp_1}$.

$(\frac{dx_2^*}{dp_1})$ — находится аналогично. Для этого продифференцируем уравнения системы (24) по переменной цене p_1 , по правилам дифференцирования сложной функции от нескольких переменных:

$$\begin{cases} U''_{x_1 x_1} \cdot \frac{dx_1^*}{dp_1} + U''_{x_1 x_2} \cdot \frac{dx_2^*}{dp_1} - p_1 \frac{d\lambda}{dp_1} - \lambda = 0, \\ U''_{x_2 x_1} \cdot \frac{dx_1^*}{dp_1} + U''_{x_2 x_2} \cdot \frac{dx_2^*}{dp_1} - p_2 \frac{d\lambda}{dp_1} = 0, \\ p_1 \frac{dx_1^*}{dp_1} + x_1^* + p_2 \frac{dx_2^*}{dp_1} = 0; \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} U''_{x_1 x_1} \cdot \frac{dx_1^*}{dp_1} + U''_{x_1 x_2} \cdot \frac{dx_2^*}{dp_1} - p_1 \lambda'_{p_1} = \lambda, \\ U''_{x_2 x_1} \cdot \frac{dx_1^*}{dp_1} + U''_{x_2 x_2} \cdot \frac{dx_2^*}{dp_1} - p_2 \lambda'_{p_1} = 0, \\ p_1 \frac{dx_1^*}{dp_1} + p_2 \frac{dx_2^*}{dp_1} = -x_1^*. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера, который применяется для решения систем линейных уравнений, относительно неиз-

вестной $\frac{dx_1^*}{dp_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^*}{dp_1} &= \begin{vmatrix} \lambda & U''_{x_1x_2} & -p_1 & U''_{x_1x_2} & U''_{x_1x_2} & -p_1 \\ 0 & U''_{x_2x_2} & -p_2 & U''_{x_2x_1} & U''_{x_2x_2} & -p_2 \\ -x_1^* & p_2 & 0 & p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & U''_{x_1x_2} & p_1 & U''_{x_1x_2} & U''_{x_1x_2} & p_1 \\ 0 & U''_{x_2x_2} & p_2 & U''_{x_2x_1} & U''_{x_2x_2} & p_2 \\ -x_1^* & p_2 & 0 & p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-\lambda p_2^2 - x_1^* (U''_{x_1x_2} \cdot p_2 - U''_{x_2x_2} \cdot p_1)}{D}. \quad (26)$$

Последнее равенство можно записать в форме дифференциалов:

$$dx_1^* = \frac{-\lambda p_2^2}{D} \cdot dp_1 + \frac{-x_1^* (U''_{x_1x_2} \cdot p_2 - U''_{x_2x_2} \cdot p_1)}{D} \cdot dp_1. \quad (27)$$

Выясним экономический смысл слагаемых в правой части.

Предположим, что потребитель при любом изменении цены p_1 старается сохранить полезность на прежнем уровне. То есть $U = U^*$ – постоянная величина. Тогда производные $U''_{x_1x_2}$ и $U''_{x_2x_2}$ равны нулю, и получается:

$$dx_1^* = \frac{-\lambda p_2^2}{D} \cdot dp_1 = \bar{S}, \quad (28)$$

где \bar{S} – главная часть эффекта замещения.

Второе слагаемое в этом случае представляет собой, очевидно, главную часть эффекта дополнения \bar{Re} .

Рассмотрим теперь изменение спроса на первый товар при увеличении (уменьшении) бюджета потребителя на dR и постоянных ценах p_1 и p_2 .

Продифференцируем уравнения системы (24) по R . После очевидных упрощений получим:

$$\begin{cases} U''_{x_1x_1} \cdot \frac{dx_1^*}{dR} + U''_{x_1x_2} \cdot \frac{dx_2^*}{dR} - p_1 \frac{d\lambda}{dR} = 0, \\ U''_{x_2x_1} \cdot \frac{dx_1^*}{dR} + U''_{x_2x_2} \cdot \frac{dx_2^*}{dR} - p_2 \frac{d\lambda}{dR} = 0, \\ p_1 \frac{dx^*}{dR} + p_2 \frac{dx^*}{dR} = 1; \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^*}{dR} &= \begin{vmatrix} 0 & U''_{x_1x_2} & -p_1 & U''_{x_1x_2} & U''_{x_1x_2} & -p_1 \\ 0 & U''_{x_2x_2} & -p_2 & U''_{x_2x_1} & U''_{x_2x_2} & -p_2 \\ 1 & p_2 & 0 & p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{-(U''_{x_1x_2} \cdot p_2 - U''_{x_2x_2} \cdot p_1)}{-D} = \frac{U''_{x_1x_2} \cdot p_2 - U''_{x_2x_2} \cdot p_1}{D}. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (26), получим:

$$\frac{dx_1^*}{dp_1} = \frac{-\lambda p_2^2}{D} - \frac{dx_1^*}{dR} \cdot x_1^*. \quad (31)$$

Учитывая, что первое слагаемое $\frac{-\lambda p_2^2}{D} \frac{dx_1^*}{dp_1} = \frac{dx_1^*}{dp_1} U = U^*$, последнее равенство запишем в виде:

$$\frac{dx_1^*}{dp_1} = \frac{dx_1^*}{dp_1} U = U^* - x_1^* \cdot \frac{dx_1^*}{dR} \quad p_1, p_2 - const. \quad (32)$$

Уравнение (32) можно записать в форме дифференциалов, которая удобна для расчета соотношения между эффектами замещения и дополнения в случае изменения цены p_1 .

$$dx_1^* = \frac{-\lambda p_2^2}{D} dp_1 + \frac{-x_1^* D_{31}}{D} dp_1 = \bar{S} + \bar{Re}. \quad (33)$$

В случае изменения цены p_2 :

$$dx_2^* = \frac{-\lambda p_1^2}{D} dp_2 + \frac{-x_2^* D_{32}}{D} dp_2 = \bar{S} + \bar{Re}, \quad (34)$$

где D_{31} и D_{32} – соответствующие миноры, выделенные из определителя D .

Уравнение (32) является следствием более общего уравнения Слуцкого [4; 7].

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \right) \bigg|_{U=U^*} - \frac{\partial x_j^*}{\partial R} \cdot x_i^* \bigg|_{p_1, p_2 - \text{const}}, \quad (35)$$

где $i, j = 1, 2, \dots, n$, т.е. пространство товаров – n -мерное.

Уравнение Слуцкого играет важную роль в теории потребления и теории спроса. С помощью этого уравнения в теории спроса разработана классификация товаров.

Классификация товаров по Слуцкому

№	Свойство	Характеристика товара (товаров)	Характеристика функции спроса
1	$\frac{dx_i^*}{dp_i} < 0$	Нормальный	Функция спроса на нормальный товар является убывающей функцией от цены
	$\frac{dx_i^*}{dp_i} > 0$	Товар Гиффина	Функция спроса на товар Гиффина является возрастающей функцией от цены
2	$\frac{dx_i^*}{dR} > 0$	Ценный	Функция спроса на ценный товар является возрастающей функцией от дохода
	$\frac{dx_i^*}{dR} < 0$	Малоценный	Функция спроса на малоценный товар является убывающей функцией от дохода.
3	$\frac{dx_i^*}{dp_i} \big _{i \neq j} \big _{U=U^*} > 0$	Товары i и j взаимозаменяемы	Спрос на товар i возрастает при увеличении цены на товар j
	$\frac{dx_i^*}{dp_j} \big _{i \neq j} \big _{U=U^*} < 0$	Товары i и j взаимодополняемы	Спрос на товар i убывает при увеличении цены на товар j

С помощью уравнения Слуцкого можно доказать общие свойства n -мерных оптимальных векторов потребителя:

1) Для каждого товара j существует товар i , такой, что i и j – взаимозаменяемы.

2) $\sum_{i=1}^n p_i \cdot \frac{dx_i^*}{dR} = 1$, следовательно все товары в векторе

$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ не могут быть одновременно малоценными (условие агрегации Энгеля).

3) $x_j^* = -\sum_{i=1}^n p_i \frac{dx_i^*}{dp_j}$, для любого $j = 1, 2, \dots, n$ (условие агрегации Курно).

Замечание. \bar{S} и \bar{Re} , найденные по формулам (33) или (34), в сумме дают частный дифференциал функции спроса $x_1^* = f_1(p_1, p_2, R)$ по переменной p_1 либо по p_2 , который, как известно из курса математического анализа, является главной частью частного приращения Δx_i^* , поэтому Δx_i^* не совпадает с dx_i^* . Следовательно, значения \bar{S} и \bar{Re} , как правило, отличаются от «точных значений» S и Re , которые были найдены, например, в задаче 9. Однако в случае, когда функция полезности не является неоклассической, отыскание точных значений S и Re представляет собой довольно сложную задачу. В таких случаях разумнее пользоваться уравнением Слуцкого, которое позволяет выяснить соотношение между эффектами замещения и дополнения хотя и приближенно, но вполне достаточно для случая небольших изменений цены p_i .

1.7. Эластичность функций. Свойства функций спроса

Определение 6. Эластичностью (коэффициентом эластичности) функции $Z = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ относительно y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называется величина

$$E_{y_i}(Z) = \frac{\partial Z}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{Z}. \quad (36)$$

Коэффициент эластичности широко применяется в экономическом анализе потому, что эластичность, в отличие от производной, представляет собой безразмерную величину.

Эластичность позволяет вполне однозначно определить «чувствительность» функции Z к изменению одного из факторов y_i , независимо от того, в каких единицах измеряются величины Z и y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Иногда эластичность измеряют как отношение процентных отношений:

$$E_{y_i}(Z) = \left(\frac{\frac{\Delta Z}{Z} \cdot 100\%}{\frac{\Delta y_i}{y_i} \cdot 100\%} \right). \quad (37)$$

Заметим, что если функция Z возрастает по переменной y_i , то эластичность положительна, а если убывает, то отрицательна.

Определение 7. Функция $Z = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется:

эластичной по y_i , если $|E_{y_i}(Z)| > 1$; неэластичной по y_i , если

$|E_{y_i}(Z)| < 1$; имеющей единичную эластичность по y_i , если

$|E_{y_i}(Z)| = 1$.

Коэффициент эластичности является одной из важнейших характеристик функций спроса. Заметим, что так как функция спроса обычно является убывающей функцией от цены и возрастающей функцией от дохода, то эластичности по ценам, как правило, отрицательны, а по доходу – положительные. Пусть $x_1^* = f(p_1; p_2; R)$.

Если спрос эластичный по p_1 , т.е. $|E_{p_1}(x_1^*)| > 1$, то повышение цены p_1 на 1% вызовет понижение спроса x_1^* более чем на 1%, и наоборот, понижение цены на 1% вызовет повышение спроса x_1^* более чем на 1%. Если спрос неэластичный по цене p_1 , т.е. $|E_{p_1}(x_1^*)| < 1$, то изменение цены p_1 на 1% вызовет изменение спроса менее чем на 1%.

Для того чтобы вычислить эластичность функции спроса по ценам на товары или по доходу, достаточно знать ее аналитическое выражение.

Рассмотрим неоклассические функции спроса, введенные для функций полезности неоклассического типа (11).

Найдем эластичность функции спроса $x_1^* = \frac{b_1 R}{p_1}$ по цене p_1 и по доходу R .

$$E_{p_1}(x_1^*) = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{b_1 R / p_1} = -\frac{b_1 R}{p_1^2} \cdot \frac{p_1^2}{b_1 R} = -1.$$

$$E_R(x_1^*) = \frac{\partial x_1^*}{\partial R} \cdot \frac{R}{b_1 R / p_1} = -\frac{b_1}{p_1} \cdot \frac{R p_1}{b_1 R} = 1.$$

Отсюда следует, что неоклассические функции спроса обладают постоянной единичной эластичностью, как по цене, так и по доходу (бюджету) потребителя.

Функции совокупного спроса, которые встречаются на практике при анализе свойств какого-либо конкретного рынка товаров, могут значительно отличаться от неоклассических функций (11), полученных теоретическим путем. Задача определения реальной функции спроса на определенный товар на основании имеющихся статистических данных решается методами так называемого эконометрического анализа [5]. При этом статистические показатели эластичности спроса могут «подсказать» вид математической формы выражения функции спроса. Например, если эластичность постоянна и близка к единице, то скорее всего эта функция близка к неоклассической. В противном случае она имеет другой вид. Чаще всего в этом случае встречаются линейные функции вида: $x_i^* = a + b \cdot p_i$, где $a > 0$ и $b < 0$ – константы; p_i – цена на i -й товар.

В экономических исследованиях, посвященных анализу совокупного спроса, его обозначают обычно буквой D (demand), записывая линейную функцию спроса от цены в виде $D = a + bP$. При этом подразумевается, что из контекста ясно о спросе на какой товар идет речь.

Задача 10. Найдите эластичность линейной функции спроса $D = a + bP$ по цене и вычислите ее эластичность при $a = 4; b = -\frac{1}{2}$ для цен $P_1 = 4$ и $P_2 = 6$.

Решение.

$$E(D) = \frac{\partial D(p)}{\partial p} \cdot \frac{p}{a + bp} = \frac{bp}{a + bp}.$$

$$\text{При } a = 4; b = -\frac{1}{2}; p = p_1 = 4 \text{ имеем } E(D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4}{4 - \frac{1}{2} \cdot 4} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$\text{При } a = 4; b = -\frac{1}{2}; p = p_1 = 6 \text{ имеем } E(D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 6}{4 - \frac{1}{2} \cdot 6} = \frac{-3}{1} = -3.$$

Вывод – эластичность непостоянна.
 Ответ. –1; –3.

1.8. Задачи для самостоятельного решения

Дана функция полезности $U = U(x_1, x_2)$ и бюджетная прямая $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$. Найдите: 1) точку спроса при ценах p_1, p_2 и бюджете R ; 2) новую точку спроса при ценах p'_1, p'_2 и бюджете R ; 3) процентное соотношение между эффектами замещения и дополнения (дохода) (с помощью уравнения Слуцкого).
 Варианты:

$$1) U = 2\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 10; \quad p_2 = 3; \quad R = 10; \quad p'_1 = 5; \quad p'_2 = 3.$$

$$2) U = \frac{1}{2}\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 5; \quad p_2 = 4; \quad R = 20; \quad p'_1 = 5; \quad p'_2 = 8.$$

$$3) U = 3\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 4; \quad p_2 = 1; \quad R = 4; \quad p'_1 = 4; \quad p'_2 = 2.$$

$$4) U = 4\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 25; \quad p_2 = 40; \quad R = 1000; \quad p'_1 = 30;$$

$$p'_2 = 40.$$

$$5) U = 5\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 200; \quad p_2 = 500; \quad R = 10000;$$

$$p'_1 = 200; \quad p'_2 = 800.$$

$$6) U = \frac{1}{4}\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 2; \quad p_2 = 4; \quad R = 80; \quad p'_1 = 4; \quad p'_2 = 4.$$

$$7) U = \frac{1}{5}\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 2; \quad p_2 = 5; \quad R = 15; \quad p'_1 = 3; \quad p'_2 = 5.$$

$$8) U = \frac{5}{2}\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 10; \quad p_2 = 20; \quad R = 1000; \quad p'_1 = 10;$$

$$p'_2 = 10.$$

$$9) U = \frac{2}{3}\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 40; \quad p_2 = 10; \quad R = 400; \quad p'_1 = 40;$$

$$p'_2 = 20.$$

$$10) U = \frac{4}{5}\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 4; \quad p_2 = 8; \quad R = 160; \quad p'_1 = 8; \quad p'_2 = 8.$$

$$11) U = 2\sqrt{x_1 x_2}; \quad p_1 = 25; \quad p_2 = 30; \quad R = 6000; \quad p'_1 = 40;$$

$$p'_2 = 30.$$

Решение варианта № 11.

1) Так как функция полезности $U = 2\sqrt{x_1 x_2}$ – неоклассическая, то точку спроса, при ценах $p_1 = 25, p_2 = 30$ и доходе $R = 6000$, находим по формулам (11):

$$x_1^* = \frac{6000 \cdot 0,5}{25} = 120; \quad x_2^* = \frac{6000 \cdot 0,5}{30} = 100.$$

2) Новую точку спроса при ценах $p'_1 = 40; p'_2 = 30$ и доходе $R = 6000$ находим по тем же формулам:

$$\bar{x}_1 = \frac{6000 \cdot 0,5}{40} = 75; \quad \bar{x}_2 = \frac{6000 \cdot 0,5}{30} = 100.$$

Спрос на первый товар уменьшился на 45 ед.

3) Процентное соотношение между эффектами замещения и дополнения найдем с помощью уравнения Слуцкого в форме:

$$dx_1 = \frac{-\lambda p_2^2}{D} \cdot dp_1 + \frac{-x_1^* \cdot D_{31}}{D} \cdot dp_1 = \bar{S} + Re,$$

$$\text{где: } \lambda = \frac{1}{p_1} \cdot \sqrt{\frac{x_2^*}{x_1^*}} = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{\frac{100}{120}} = \frac{1}{5\sqrt{30}} \approx 0,0365.$$

§ 2. Теория производства

2.1. Производственные функции

Производством, производственной деятельностью в экономике называют процесс, в ходе которого предприятия (фирмы, производители) затрачивают различные ресурсы (факторы производства) и в результате выпускают ориентированную на рынок продукцию (продукты производства).

В качестве используемых ресурсов могут выступать разнообразные виды сырья, технологического оборудования, труд работников, фонды и т.п.

В теории производства предполагается, что производственная деятельность любого производителя (предприятия, отрасли или целой страны), связанная с выпуском какого-либо товара (или группы товаров), может быть математически описана с помощью так называемой производственной функции:

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (38)$$

где y – количество единиц произведенного товара, x_1, x_2, \dots, x_n – количество единиц затраченных для этого ресурсов.

Для упрощения анализа производственной деятельности чаще всего рассматриваются производственные функции от двух-трех видов ресурсов, например, $y = F(K, L)$, где K – накопленный труд в форме производственных и иных фондов (капитал); L – настоящий (живой) труд.

При этом производственные функции подразделяются на следующие три основных типа:

1. Функции с полным взаимозамещением ресурсов:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad (a_1 > 0; a_2 > 0). \quad (39)$$

2. Функции с полным взаимодополнением ресурсов:

$$y = \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2} \right\}, \quad (a_1 > 0; a_2 > 0). \quad (40)$$

3. Функции смешанного замещающе-дополняющего типа (мультипликативные):

$$y = A \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}, \quad (a_1 > 0; a_2 > 0; A > 0). \quad (41)$$

Функции третьего типа, для которых выполняется дополнительное условие $a_1 + a_2 = 1$, называются *неоклассическими*.

$$p_2^2 = 30^2 = 900;$$

$$dp_1 = p_1' - p_1 = 40 - 25 = 15;$$

$$D = \begin{vmatrix} U''_{x_1 x_1} & U''_{x_1 x_2} & p_1 \\ U''_{x_2 x_1} & U''_{x_2 x_2} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{x_2}}{2x_1\sqrt{x_1}} & \frac{1}{2\sqrt{x_1 x_2}} & 25 \\ \frac{1}{2\sqrt{x_1 x_2}} & -\frac{\sqrt{x_1}}{2x_2\sqrt{x_2}} & 30 \\ 25 & 30 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{240}\sqrt{5} & \frac{1}{40\sqrt{30}} & 25 \\ \frac{1}{40\sqrt{30}} & -\frac{1}{200}\sqrt{\frac{6}{5}} & 30 \\ 25 & 30 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{30} + \frac{25}{8}\sqrt{\frac{6}{5}} + \frac{30}{8}\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 13,69;$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} \frac{1}{40\sqrt{30}} & 25 \\ \frac{1}{200}\sqrt{\frac{120}{100}} & 30 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{30}}{40} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{20} \approx 0,274.$$

$$\text{Найдем: } \bar{S} = \frac{-\lambda p_2^2}{D} \cdot dp_1 = -\frac{0,0365 \cdot 900 \cdot 15}{13,69} \approx -36,1$$

$$\bar{Re} = \frac{-x_1^* \cdot D_{31}}{D} \cdot dp_1 = \frac{-120 \cdot 0,274 \cdot 15}{13,69} \approx -36,1$$

Вывод: Процентное соотношение между эффектами $\bar{S} = 50\%$;
 $\bar{Re} = 50\%$.

Наиболее часто для описания производственной деятельности применяется функция Кобба–Дугласа, которая очевидно относится к неоклассическим функциям третьего типа:

$$y = A \cdot K^a \cdot L^{1-a}, \quad (42)$$

где $0 < a < 1$; K – капитал, L – трудовые ресурсы.

Другие виды производственных функций встречаются не так часто. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

2.2. Предельные характеристики производства

Определение 1. Предельной эффективностью ресурса производственной функции $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется соответствующая частная производная y'_{x_i} по этому ресурсу.

Например, если производство описывает функция Кобба–Дугласа, то: предельная эффективность по фондам (предельная фондоотдача) находится по формуле:

$$y'_K = \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^{1-\alpha}. \quad (43)$$

Предельная эффективность по труду (предельная производительность труда):

$$y'_L = (1 - \alpha) \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha. \quad (44)$$

Значение и эффективность различных факторов производства (ресурсов) могут быть неодинаковыми. В случае когда производство описывается производственной функцией 1-го или 3-го типа, возможна замена одного ресурса другим (другими, если ресурсов несколько). Пусть производственная функция имеет вид: $y = F(x_1; x_2)$.

Определение 2. Отношение $-\frac{dx_2}{dx_1}$, при условии $y = y_0$, называется предельной нормой замещения первого ресурса вторым.

Обозначается: MRS (marginal rate of substitution).

Теорема. Предельная норма замещения одного ресурса другим равна отношению предельных эффективностей этих ресурсов.

Доказательство.

Найдем полный дифференциал производственной функции, зависящей от двух ресурсов:

$$dy = y'_{x_1} \cdot dx_1 + y'_{x_2} \cdot dx_2.$$

Если объем производства сохраняется на постоянном уровне $y = y_0$, то $dy = 0$, т.е.:

$$y'_{x_1} \cdot dx_1 + y'_{x_2} \cdot dx_2 = 0,$$

откуда следует:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{y'_{x_1}}{y'_{x_2}} = MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)}. \quad (45)$$

Задача. Дана неоклассическая производственная функция

$$y = Ax_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \quad (a_1 > 0; a_2 > 0; a_1 + a_2 = 1).$$

Найти $MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)}$.

Решение.

Найдем предельные эффективности ресурсов:

$$y'_{x_1} = \left(Ax_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \right)'_{x_1} = Ax_2^{a_2} \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1-1};$$

$$y'_{x_2} = \left(Ax_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \right)'_{x_2} = Ax_1^{a_1} \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2-1}.$$

Найдем $MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)}$.

$$MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)} = y'_{x_1} : y'_{x_2} = \frac{Ax_2^{a_2} \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1-1}}{Ax_1^{a_1} \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2-1}} = \frac{a_1 \cdot x_1^{-1}}{a_2 \cdot x_2^{-1}}.$$

Ответ: $MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)} = \frac{a_1 x_2}{a_2 x_1}$.

Известны экономические законы, которые в курсе экономической теории формулируются как:

1. Закон убывающей предельной эффективности ресурсов.
2. Закон убывающей предельной нормы взаимного замещения ресурсов.

Для того чтобы эти законы выполнялись, необходимо, чтобы математическая модель производства включала в себя производственную функцию, обладающую следующими свойствами:

- 1) $F(0; x_2) = F(x_1; 0) = 0$, т.е. в случае полного отсутствия одного из ресурсов производство невозможно;
- 2) $F'_{x_1} > 0$; $F'_{x_2} > 0$, т.е. увеличение количества любого из ресурсов, используемых в производстве, приводит к увеличению объема производства;

3) $F''_{x_1 x_1} < 0$; $F''_{x_2 x_2} < 0$, т.е. предельные эффективности ресурсов сов убывают;

4) $F(\infty; x_1) = F(x_2; \infty) = \infty$, т.е. при неограниченном увеличении количества, по крайней мере, одного из ресурсов объем производства неограниченно растет.

Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что неоклассическая (мультипликативная) производственная функция (и ее частный случай – функция Кобба–Дугласа) удовлетворяет всем четырем перечисленным свойствам.

Важным свойством производственных функций является однородность:

5) $F(\lambda x_1; \lambda x_2) = \lambda^\alpha \cdot F(x_1; x_2)$, где λ – параметр, характеризующий изменение количества используемых ресурсов; α – коэффициент, характеризующий эффект от изменения количества ресурсов.

Если $\alpha > 0$, то в случае увеличения количества ресурсов в λ раз ($\lambda^\alpha > 1$) объем произведенной продукции увеличивается более чем в λ раз, точнее, в λ^α раз.

Нетрудно убедиться, что все рассмотренные выше производственные функции обладают свойством однородности. Для функций 1-го, 2-го типа и неоклассических функций коэффициент эффективности $\alpha = 1$.

2.3. Эластичность производственной функции.

Функция CES

Известно, что эластичность функции $z = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ по переменной y вычисляется по формуле (см. гл. 2, п. 1.7)

$$\varepsilon_{y_i}(Z) = \frac{\partial z}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{z}.$$

Найдем эластичности производственной функции неоклассического типа $y = A \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$ по ресурсам:

$$\varepsilon_{x_1}(y) = \frac{A \cdot x_2^{a_2} \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1-1} \cdot x_1}{A \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}} = a_1.$$

$$\varepsilon_{x_2}(y) = \frac{A x_1^{a_1} \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2-1} \cdot x_2}{A x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}} = a_2.$$

Таким образом, коэффициенты эластичности неоклассической производственной функции по видам ресурсов совпадают с показателями степени a_1 и a_2 . Такой же результат получается, если неоклассическая функция содержит не две, а n переменных x_1, x_2, \dots, x_n с показателями a_1, a_2, \dots, a_n соответственно. Показатели степени (т.е. эластичности по ресурсам) характеризуют тем самым «чувствительность» производства к изменению количества соответствующего ресурса. Заметим, что сумма показателей у любой неоклассической функции должна быть равна 1. Поэтому эластичность этой функции по совокупности всех ресурсов равна 1.

Эластичность производственной функции по совокупности ресурсов можно найти по формуле:

$$\varepsilon_\lambda(f(\bar{x})) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial f(\lambda \bar{x})}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{f(\lambda \bar{x})},$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор ресурсов; $f(\bar{x})$ – производственная функция; λ – вспомогательная переменная.

Найдем эластичность производства по совокупности ресурсов для функции Кобба–Дугласа:

$$y = f(K, L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda(f(K, L)) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial (A(\lambda K)^\alpha \cdot (\lambda L)^{1-\alpha})}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{A(\lambda K)^\alpha \cdot (\lambda L)^{1-\alpha}} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial (A \lambda^\alpha K^\alpha \cdot L^{1-\alpha})}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{A \lambda^\alpha K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \cdot \lambda}{A \lambda^\alpha K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}} = 1. \end{aligned}$$

Найдем эластичность производства по совокупности ресурсов для производственной функции с полным взаимозаменением ресурсов (функции 1-го типа):

$$\begin{aligned} y = f(x_1, x_2, x_3) &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0). \\ \varepsilon_\lambda(f(x_1, x_2, x_3)) &= \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial (\lambda(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3))}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \cdot \lambda}{\lambda(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)} = 1.$$

Таким образом, обе эти производственные функции обладают единичной эластичностью производства.

Эластичности производственной функции по отдельным ресурсам связаны с предельной нормой замещения одного из ресурсов другим. Рассмотрим двухфакторную производственную функцию: $y = f(x_1, x_2)$.

Известно, что:

$$MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)} = \frac{y'_{x_1}}{y'_{x_2}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \div \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right).$$

С другой стороны:

$$\varepsilon_{x_1}(f(x_1; x_2)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x_1; x_2)}; \quad \varepsilon_{x_2}(f(x_1; x_2)) = \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{f(x_1; x_2)}.$$

Тогда очевидно:

$$MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)} = \frac{\varepsilon_{x_1}(f(x_1; x_2))}{\varepsilon_{x_2}(f(x_1; x_2))} \cdot \frac{x_2}{x_1}. \quad (46)$$

Дробь $\frac{x_2}{x_1}$, где x_1 – замещаемый, а x_2 – замещающий ресурс,

сы, показывает, сколько единиц замещающего ресурса соответствует одной единице замещаемого ресурса. Введем понятие эластичности замещения:

$$\sigma_{(x_1 \rightarrow x_2)} = \varepsilon_{MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)}} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \frac{d \left(\ln \frac{x_2}{x_1} \right)}{d \left(\ln \left(MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)} \right) \right)}. \quad (47)$$

Вычислим эластичность замещения $\sigma_{(x_1 \rightarrow x_2)}$ для функции неоклассического типа. Известно, что $MRS_{(x_1 \rightarrow x_2)} = \frac{a_1 x_2}{a_2 x_1}$. Поэтому:

$$\sigma_{(x_1 \rightarrow x_2)} = d \left(\ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right) \div d \left(\ln \left(\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} \right) \right) = \frac{d \left(\ln \frac{x_2}{x_1} \right)}{d \left(\ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right) + \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right)} =$$

$$\frac{d \left(\ln \frac{x_2}{x_1} \right)}{d \left(\ln \frac{x_2}{x_1} \right)} = 1;$$

$d \left(\ln \frac{a_1}{a_2} \right) = 0$, так как $\ln \frac{a_1}{a_2}$ – постоянная величина.

Функции неоклассического вида (в том числе и функция Кобба–Дугласа) обладают важным свойством постоянной эластичности замещения, которая равна 1. Это свойство имеет большое значение, так как если эластичность замещения сохраняется, то производство обладает высокой степенью устойчивости. Если по какой-то причине возникает временная нестача одного из ресурсов, то производство не будет остановлено. Остановка производства, как правило, приводит к очень нежелательным последствиям для производителя.

Существуют и другие виды производственных функций, которые также обладают свойством постоянной эластичности замещения. К их числу относится так называемая CES-функция (constant elastic substitution):

$$y = f(x_1, x_2) = a \left[\delta x_1^{-p} + (1 - \delta) x_2^{-p} \right]^{\frac{\gamma}{p}}, \quad (48)$$

где $a > 0$; $\delta > 0$; $p > -1$; $0 < \gamma \leq 1$ – коэффициенты.

CES-функция применяется в тех случаях, когда производственную деятельность какого-либо производителя не удается описать с помощью функций неоклассического типа. Подробнее с проблемами выбора подходящей производственной функции можно ознакомиться в курсе «Эконометрика» [5].

Задача 11. Найти эластичности по ресурсам производственной функции $y = 2x_1 + 3x_2 - 4$ в точке $(x_1, x_2) = (4; 2)$.

Решение.

1. $\varepsilon_{x_1}(y) = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = \frac{2x_1}{2x_1 + 3x_2 - 4} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 4} = 0,8.$
2. $\varepsilon_{x_2}(y) = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \frac{3x_2}{2x_1 + 3x_2 - 4} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 4} = 0,6.$
3. Найдем эластичность по совокупности ресурсов:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\lambda(y) &= \varepsilon_\lambda(2x_1 + 3x_2 - 4) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial(\lambda(2x_1 + 3x_2) - 4)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda(2x_1 + 3x_2) - 4} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{(2x_1 + 3x_2)\lambda}{\lambda(2x_1 + 3x_2) - 4} = \frac{2x_1 + 3x_2}{2x_1 + 3x_2 - 4} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 4} = \frac{14}{10} = 1,4.\end{aligned}$$

Ответ: $\varepsilon_{x_1}(y) = 0,8$; $\varepsilon_{x_2}(y) = 0,6$; $\varepsilon_\lambda(y) = 1,4$.

2.4. Общая постановка «задачи фирмы»

Пусть некоторая фирма (производитель) выпускает один вид продукции, используя при этом n видов ресурсов, и ее производственная функция имеет вид:

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Допустим также, что цены на используемые ресурсы p_1, p_2, \dots, p_n и цена на продукцию фирмы p_y — относительно стабильны.

Тогда функция прибыли фирмы (производителя) будет иметь вид:

$$\Pi = p_y \cdot F(x_1, x_2, \dots, x_n) - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n). \quad (49)$$

Задача производителя заключается в определении оптимального объема выпуска, при котором прибыль окажется максимальной. На практике эта задача имеет обычно дополнительные условия (ограничения), одним из которых может быть ограничение по объему издержек производства. Издержками производства называется выражение $C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$. Кроме того, возможны дополнительные ограничения по отдельным ресурсам. В общем случае задача максимизации функции прибыли (см. гл. 1, п. 2.4) представляет собой задачу нелинейного программирования.

В большинстве практических задач для нахождения оптимального объема выпуска достаточно исследовать соответствующую производственную функцию на условный экстремум (максимум). При этом функция издержек производства $C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$ играет роль уравнения связи. Можно доказать также, что оптимальный объем выпуска определяется однозначно, если матрица вторых производных производственной функции (матрица Гессе) — отрицательно определена (см. гл. 1, п. 2.3).

Производственная функция в этом случае является вогнутой. Не вдаваясь в математические подробности, можно заметить, что задача определения оптимального объема выпуска (т.е. выпуска, при котором прибыль производителя максимальна) однозначно решается, если производственная функция имеет неоклассический вид, а функция издержек производства линейна.

Задача 12. Производственная функция однопродуктовой фирмы имеет вид: $y = F(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Стоимость одной единицы ресурсов: $p_{x_1} = p_1 = 4$; $p_{x_2} = p_2 = 6$. Стоимость одной единицы продукции $p_y = 8$. На оплату ресурсов фирма может истратить не более $C = 180$ (ден. ед.). Найти объем (точку) оптимального выпуска при заданных условиях и прибыль фирмы.

Решение.

Данная задача эквивалентна задаче исследования функции $2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$ на условный экстремум, при условии: $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$, которое в нашем случае имеет вид $180 = 4x_1 + 6x_2$. Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \lambda) = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} - \lambda(180 - 4x_1 - 6x_2).$$

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2\sqrt{x_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + 4\lambda = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + 4\lambda;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2\sqrt{x_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + 6\lambda = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + 6\lambda;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 4x_1 + 6x_2 - 180.$$

Приравняем полученные частные производные к нулю и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + 4\lambda = 0, \\ \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + 6\lambda = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 180 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, \\ \lambda = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45 - 1,5x_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{6}x_1, \\ \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{6}(45 - 1,5x_2), \\ \lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45 - 1,5x_2; \\ x_1 = 15; x_1 = 22,5. \end{cases}$$

Учитывая, что производственная функция $y = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$ есть функция Кобба–Дугласа, которая относится к производственным функциям неоклассического вида, обладающим свойством вогнутости вверх, найденная точка $-x_1 = 22,5; x_2 = 15$ – является искомой точкой условного максимума. Подставляя ее координаты (т.е. найденные значения x_1 и x_2) в производственную функцию, получим объем оптимального выпуска фирмы в заданных условиях:

$$y_{\text{опт.}} = 2\sqrt{22,5 \cdot 15} = 15 \cdot \sqrt{6} \approx 36,74 \text{ (ед. прод.)}.$$

Заметим, что поскольку заданная в данной задаче производственная функция является неоклассической, то решение задачи определения оптимального объема выпуска можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{Ca_1}{p_1} = \frac{180 \cdot \frac{1}{2}}{4} = 22,5; x_1 = \frac{Ca_2}{p_2} = \frac{180 \cdot \frac{1}{2}}{4} = 15. \quad (50)$$

Прибыль фирмы найдем по формуле (49):

$$\Pi = y_{\text{опт.}} \cdot p_y - C = 36,74 \cdot 8 - 180 = 113,92 \text{ (ден. ед.)}.$$

2.5. Геометрическая интерпретация решения

«задачи фирмы»

Если производственную деятельность фирмы описывает производственная функция, зависящая от двух факторов, то задача фирмы имеет достаточно ясную геометрическую интерпретацию. При фиксированном объеме выпуска $y = y_1$ уравнение

$$y_1 = F(x_1, x_2) \quad (51)$$

задает в системе координат $x_1 O x_2$ кривую, которая называется изоквантой, соответствующей $y = y_1$. Очевидно, что можно построить множество кривых (изоквант) соответствующих разным значениям y . Это множество иногда называют картой изоквант данной производственной функции. Если уравнение (51) неоклассического типа, то карта изоквант представляет собой множество кривых гиперболического вида, расположенных в первом квадранте (рис. 4). В этой же системе координат при заданном значении затрат на ресурсы C можно построить прямую издержек производства

$$C = x_1 p_1 + x_2 p_2. \quad (52)$$

Эта прямая называется изокостой.

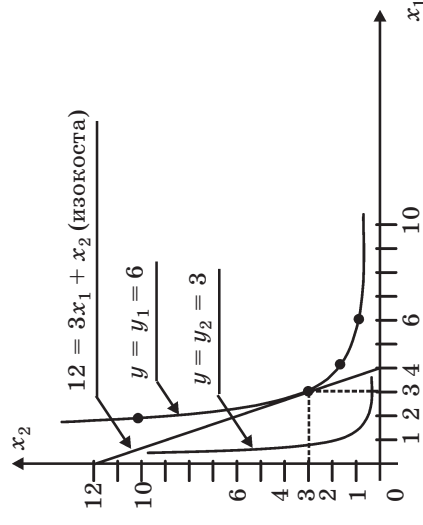


Рис. 4. Карта изоквант и изокоста

Для решения задачи фирмы, т.е. для нахождения точки оптимального выпуска достаточно из множества изоквант выбрать такую, чтобы изокоста (52) являлась для нее касательной. Тогда координаты точки касания изокванты и изокосты укажут необходимые для производства количества ресурсов, а соответствующее значение y_1 , которым помечена эта изокванта, укажет оптимальный объем выпуска продукции.

Задача 13. Дана производственная функция $y = F(x_1, x_2) = \frac{3}{4}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ и функция издержек производства $C = 3x_1 + x_2$. Построить изокосту при $C = C_1 = 12$ и две изокванты при $y = y_1 = 6$ и $y = y_2 = 3$.

Решение.

1) При $C = 12$ из функции издержек получаем уравнение прямой $12 = 3x_1 + x_2$, или $x_2 = 12 - 3x_1$. Прямая, соответствующая этому уравнению в координатах $(x_1; x_2)$, представляет собой искомую изокосту (см. рис. 4).

2) Пусть $y = 6$. Тогда из производственной функции получаем уравнение $6 = 2x_1^4 \cdot x_2^4$, или $x_2 = \frac{81}{x_1^3}$. Это уравнение первой

из искомых изоквант. Пусть $y = 3$. Тогда получаем $3 = 2x_1^4 \cdot x_2^4$, или $x_2 = \frac{81}{16x_1^3}$. Это уравнение второй изокванты.

Построим изокванты и изокосту на одном чертеже. Для этого предварительно составим таблицы значений функций:

$$x_2 = \frac{81}{x_1^3},$$

x_1	2	3	4	6
x_2	≈ 10	3	$\approx 1,25$	$\approx 0,4$

$$x_2 = \frac{81}{16x_1^3},$$

x_1	1	2	3	4
x_2	≈ 5	$\approx 0,6$	$\approx 0,2$	$\approx 0,1$

Изокоста проходит через точки $(0;12)$; $(4;0)$, $(3;3)$. Заметим, что поскольку точка $(3;3)$ является точкой касания изокосты и первой изокванты, то тем самым найдена точка оптимального выпуска. Это точка $(3;3)$.

2.6. Оптимизация издержек производства при заданном объеме выпуска

В рыночной экономике любой производитель (фирма) обычно стремится к достижению максимально возможной прибыли в сложившихся реальных условиях. Однако если фирма работает в кооперации с другими фирмами и в рамках этой кооперации берет на себя обязательство обеспечить некоторый обязательный объем выпуска определенного продукта, то задача фирмы приобретает другую форму. В этом случае целевой функцией становится не *функция прибыли*, а *функция издержек производства*. Нужно определить необходимые для производства количества

ресурсов x_1, x_2 так, чтобы функция издержек $C = x_1 p_1 + x_2 p_2$ приняла наименьшее значение, при условии выполнения определенного плана выпуска продукции $y^* = F(x_1; x_2)$.

Решим эту задачу для случая, когда производственная функция является неоклассической, т.е.

$$y^* = A \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}, \quad a_1 > 0; a_2 > 0; a_1 + a_2 = 1. \quad (53)$$

Из уравнения (53) выразим:

$$x_1 = \left(\frac{y^*}{A x_2^{a_2}} \right)^{\frac{1}{a_1}}. \quad (54)$$

Подставим это выражение в функцию издержек

$$C = p_1 \cdot \left(\frac{y^*}{A} \right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot x_2^{\frac{-a_2}{a_1}} + p_2 x_2. \quad (55)$$

Функция издержек (55) является функцией одной переменной x_2 . Найдем минимум этой функции средствами дифференциального исчисления.

Для этого найдем производную:

$$\frac{dC}{dx_2} = p_1 \cdot \left(\frac{y^*}{A} \right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot x_2^{-1-\frac{a_2}{a_1}} + p_2,$$

или, учитывая, что $-a_1 - a_2 = -1$,

$$\frac{dC}{dx_2} = p_1 \cdot \left(\frac{y^*}{A} \right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot x_2^{\frac{1}{a_1}} + p_2.$$

Найдем значение x_2 , при котором эта производная равна нулю.

$$x_2^{\frac{1}{a_1}} = \left(-\frac{p_2}{p_1} \right) \cdot \left(-\frac{a_1}{a_2} \right) \cdot \left(\frac{A}{y^*} \right)^{\frac{1}{a_1}},$$

$$x_2 = \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{-a_1} \cdot \frac{y^*}{A}. \quad (56)$$

Из характера задачи ясно, что при найденном значении x_2 функция издержек имеет условный минимум. Соответствующее значение x_1 находится аналогично:

$$x_1 = \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{a_2} \cdot \frac{y^*}{A}. \quad (57)$$

Таким образом, оптимальные количества ресурсов найдены. Подставляя выражения (56) и (57) в функцию издержек производства, можно найти минимальные издержки для выполнения плана y^* .

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{a_2} \cdot p_1 \cdot \frac{y^*}{A} + \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{-a_1} \cdot p_2 \cdot \frac{y^*}{A} = \\ &= \frac{y^*}{A} \left(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{a_2} + p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{a_2} \right) = \\ &= \frac{y^* \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2}}{A} \cdot \left(\frac{a_1^{a_1+a_2} + a_2^{a_1+a_2}}{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2}} \right) = \frac{y^*}{A} \left(\frac{p_1}{a_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{p_2}{a_2} \right)^{a_2}. \end{aligned}$$

$$C = \frac{y^*}{A} \left(\frac{p_1}{a_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{p_2}{a_2} \right)^{a_2}. \quad (58)$$

Задача 14. Производственная функция фирмы $y = \sqrt{2x_1x_2}$. Функция издержек производства $C = 3x_1 + 6x_2$. Найдите оптимальные количества ресурсов x_1 и x_2 для выполнения плана производства $y^* = 600$. Найдите минимальные издержки производства.

Решение.

Заданная производственная функция относится к неоклассическому типу: $\sqrt{2} \cdot x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$. Найдём оптимальные количества ресурсов по формулам (56) и (57), учитывая, что $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$;

$$p_1 = 3; p_2 = 6; A = \sqrt{2}.$$

$$x_1 = \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{a_2} \cdot \frac{y^*}{A} = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{600}{\sqrt{2}} = 600.$$

$$x_2 = \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{-a_1} \cdot \frac{y^*}{A} = (2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{600}{\sqrt{2}} = 300.$$

Необходимые минимальные издержки найдем по формуле (58)

$$C = \frac{y^*}{A} \left(\frac{p_1}{a_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{p_2}{a_2} \right)^{a_2} = \frac{600}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} = 3600.$$

Другой способ нахождения минимальных издержек заключается в простой постановке значений $x_1 = 600$ и $x_2 = 300$ в функцию издержек:

$$C = 3x_1 + 6x_2 = 3 \cdot 600 + 6 \cdot 300 = 1800 + 1800 = 3600.$$

Ответ: $x_1 = 600$; $x_2 = 300$; $C_{\min} = 3600$.

Задача 15. Даны производственная функция $y = 3x_1 \cdot x_2^2$ и функция издержек производства $C = x_1 + x_2$. Найдите минимальные издержки для производства $y^* = 162$ ед. продукции.

Решение.

Производственная функция не является неоклассической, поэтому воспользоваться формулой (58) мы не можем. Из уравнения $y^* = 3x_1 \cdot x_2^2$ выразим $x_1 = (y^*) / 3x_2^2$. Или $x_1 = 162 / 3x_2^2$,

$$x_1 = \frac{54}{x_2^2}.$$

Подставляя в функцию издержек, найдем:

$$C = x_2 + \frac{54}{x_2^2}.$$

$$\frac{dC}{dx_2} = 1 - 108x_2^{-3} = 0, \text{ откуда следует: } x_2 = \sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}; \quad x_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$$

Подставляя $x_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ и $x_2 = 3\sqrt[3]{4}$ в функцию издержек, найдем:

$$C_{\min} = x_1 + x_2 = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{4} = 3 \left(\frac{1 + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right) = \frac{9}{\sqrt[3]{2}} \approx 7,14.$$

Ответ: $C_{\min} \approx 7,14$.

2.7. Задачи для самостоятельного решения

Производственная функция однопродуктовой фирмы имеет вид: $Y = F(K, L)$. Стоимости одной единицы ресурсов: P_K (ден. ед); P_L (ден. ед.). На оплату ресурсов фирма может истратить не более C (ден. ед.). Найти:

- а) эластичность выпуска по каждому из ресурсов;
- б) уравнения изоквант и изокост, и построить 2 изокванты при различных значениях C (на одном чертеже);
- в) «точку оптимального выпуска» при заданных условиях;
- г) норму замены ресурса L на ресурс K в точке выпуска.

Варианты:

- 1) $Y = 4\sqrt{KL}$; $P_K = 4$; $P_L = 6$; $C = 100$.
- 2) $Y = 3\sqrt[3]{KL^2}$; $P_K = 12$; $P_L = 6$; $C = 180$.
- 3) $Y = 2\sqrt[4]{KL^3}$; $P_K = 2$; $P_L = 4$; $C = 12$.
- 4) $Y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{K^2L}$; $P_K = 2$; $P_L = 5$; $C = 15$.
- 5) $Y = \frac{1}{2}\sqrt{KL}$; $P_K = 10$; $P_L = 20$; $C = 1000$.
- 6) $Y = 2\sqrt[4]{K^3L}$; $P_K = 5$; $P_L = 4$; $C = 20$.
- 7) $Y = \frac{1}{4}\sqrt[3]{KL^2}$; $P_K = 2$; $P_L = 4$; $C = 80$.
- 8) $Y = 3\sqrt[3]{K^2L}$; $P_K = 4$; $P_L = 1$; $C = 40$.
- 9) $Y = \frac{3}{2}\sqrt{KL}$; $P_K = 10$; $P_L = 4$; $C = 10$.
- 10) $Y = \sqrt[4]{KL^3}$; $P_K = 4$; $P_L = 8$; $C = 16$.
- 11) $Y = 3K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}}$; $P_K = 5$; $P_L = 10$; $C = 150$.

Решение варианта 11.

$$Y = 3K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}}; \quad P_K = 5; \quad P_L = 10; \quad C = 150.$$

- а) Найдем предельные эффективности ресурсов:

$$F'_K = 3L^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot K^{-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$F'_L = 3K^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot L^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Найдем коэффициенты эластичности:

$$e_K = F'_K : \frac{Y}{K} = 2 \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(3K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}} \cdot K^{-1}\right) = \frac{2}{3}.$$

$$e_L = F'_L : \frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(3K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}} \cdot L^{-1}\right) = \frac{1}{3}.$$

- б) Уравнения изоквант получаются из производственной функции при различных значениях выпуска Y_i в виде:

$$Y_i = 3K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}}.$$

Уравнения изокост получаются при различных значениях бюджетного ограничения C_i в виде: $C_i = K \cdot P_K + L \cdot P_L$, или, учитывая условие задачи:

$$C_i = 5K + 10L.$$

При различных значениях C_i , например $C_1 = 100$; $C_2 = 400$, получаются следующие уравнения изокост: $20 = K + 2L$ и $80 = K + 2L$.

Для построения изоквант уравнение $Y_i = 3K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}}$ лучше записать в виде $Y_i^3 = 27K^2L$, или: $L = \left(\frac{Y_i}{3}\right)^3 \cdot K^{-2}$. Выбрав два значения Y_i , например, $Y_1 = 27$ и $Y_2 = 36$, получаем $L = \frac{729}{K^2}$;

$$L = \frac{1728}{K^2} - \text{уравнения изоквант.}$$

Построить на одном чертеже графики изоквант и изокост в координатах (K, L) несложно (сделать самостоятельно).

в) Задача нахождения точки максимального выпуска при данных ограничениях эквивалентна задаче исследования функции $Y = F(K, L)$ на условный экстремум, при условии $150 = 5K + 10L$.

Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi = \Phi(K, L, \lambda) = F(K, L) - \lambda(150 - 5K - 10L).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial K} = 2 \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{1}{3}} + 5\lambda, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial L} = \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{2}{3}} + 10\lambda, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 5K + 10L - 150; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{1}{3}} + 5\lambda = 0, \\ \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{2}{3}} + 10\lambda = 0, \\ 5K + 10L = 150; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{5} \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \lambda = -\frac{1}{10} \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{2}{3}}, \\ 5K + 10L = 150; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4L = K, \\ 20L + 10L = 150; \\ 5K + 10L = 150; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^* = 5, \\ K^* = 20. \end{cases}$$

Учитывая, что производная функции $F(K, L) = 3K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}}$ — является вогнутой, в найденной точке $K^* = 20$, $L^* = 5$ — функция имеет максимум:

$$Y_{\max} = F(K^*; L^*) = 3 \cdot 20^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \approx 37,8.$$

г) Найдем норму замещения ресурса L на ресурс K в «точке выпуска» (20;5)

$$MRS_{(L \rightarrow K)} = \frac{\partial F}{\partial L} : \frac{\partial F}{\partial K} = \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{2}{3}} : 2 \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{5} = 2.$$

Вывод: одна единица ресурса L может быть заменена двумя единицами ресурса K .

§ 3. Модели взаимодействия потребителей и производителей

3.1. Понятие рыночного равновесия. Паутинообразная модель установления равновесной цены

Проблема математического моделирования экономических макросистем, включающих различные типы рынков с большим количеством взаимосвязанных сегментов и огромным количеством участников — крайне сложна (подробнее об этом см. гл. 3).

В этом параграфе рассматриваются математические модели функционирования экономических микросистем, в которых описывается либо взаимодействие потребителей и производителей на рынке одного товара, либо случаи, когда количество участников рынка ограничено. Тем не менее в этих упрощенных ситуациях удается выявить характерные рыночные механизмы, что оказывается полезным и при формировании более содержательных и приближенных к реальности математических моделей.

Одна из важнейших задач, в случае моделирования взаимодействия потребителей и производителей, — это моделирование рыночного равновесия. Понятие рыночного равновесия приводит к понятиям равновесной цены на товар, равновесных цен на ресурсы производства, равенства спроса и предложения. Рыночное равновесие для участников рынка должно характеризоваться определенной степенью устойчивости от возмущающих воздействий. С точки зрения теории игр, подобный тип рыночного равновесия можно классифицировать как равновесие по Нэшу (см. гл. 1, п. 3.2).

Заметим также, что равновесное состояние на рынке не может установиться (или восстановиться, если оно было нарушено) мгновенно. Поэтому математические модели функционирования рынка должны быть динамическими, т.е. включать в качестве одной из независимых переменных время.

Рассмотрим рынок одного товара, на котором цена на товар является функцией времени $p = p(t)$. Функции совокупного спроса $D(p)$ и предложения $S(p)$ в этом случае также являются функциями времени:

$$D = D(t) = a + b \cdot p(t) \quad S = S(t) = c + d \cdot p(t-1). \quad (59)$$

Выражение для функции предложения содержит функцию $p(t-1)$. В этом заключается одно из главных положений паутинообразной модели. «Спрос рождает предложение» – следовательно, первичен спрос, а предложение – это реакция (с некоторым отставанием во времени) на спрос и цены. Перейдем к конкретному описанию модели.

- 1) Коэффициенты в выражениях функций спроса и предложения удовлетворяют следующим условиям: $a > c$; $b < 0$; $d > 0$; $|b| > |d|$.
- 2) Спрос $D(t)$ определяется ценой на момент покупки $p(t)$, а предложение $S(t)$ определяется ценой предшествующего момента времени $p(t-1)$;
- 3) Цены каждого момента $p(t)$ устанавливаются так, чтобы спрос равнялся предложению $D(t) = S(t)$.
- 4) Исходя из требования равенства спроса и предложения 3), $D(t) = S(t)$, получим:

$$a + b \cdot p(t) = c + d \cdot p(t-1),$$

$$p(t) = \frac{c-a}{b} + \frac{d}{b} \cdot p(t-1). \quad (60)$$

Рекуррентная формула (60) позволяет вычислить цену $p(t)$, если известна цена в предшествующий момент времени $p(t-1)$. Заметим, что, согласно условию 1), $|b| > |d|$, т.е. предложение $S = c + d \cdot p(t-1)$ реагирует на изменение цены p «слабее», чем спрос $D = a + b \cdot p(t)$. Запишем формулу (60) в виде:

$$p(t+1) = \frac{c-a}{b} + \frac{d}{b} \cdot p(t). \quad (61)$$

Вычитая из (61) равенство (60), найдем:

$$p(t+1) - p(t) = \frac{d}{b} \cdot (p(t) - p(t-1)),$$

$$\frac{|p(t+1) - p(t)|}{|p(t) - p(t-1)|} = \left| \frac{d}{b} \right| < 1. \quad (62)$$

Неравенство (62) гарантирует, что с увеличением t разность между ценами $p(t+1)$ и $p(t)$ будет уменьшаться и на рынке данного товара будет установлена так называемая «равновесная цена». В случае, когда $|b| < |d|$, т.е. предложение более «актив-

но» реагирует на изменение цены, чем спрос, установить равновесную цену невозможно.

Процесс установления равновесной цены можно проиллюстрировать графически на примере решения конкретной задачи.

Задача 16. Даны функция спроса $D(t) = 8 - p(t)$ и предложения $S(t) = 2 + \frac{1}{2} \cdot p(t-1)$.

а) Найдите рекуррентное соотношение, определяющее цены на товар в моменты времени $t_1 = 1$; $t_2 = 2$; $t_3 = 3$ и т.д., и соответствующие им значения спроса и предложения, если цена в момент времени $t_0 = 0$ была $p_0 = 6$.

б) Найдите равновесную цену p^* и дайте графическое решение задачи.

Решение.

а) Из условия $D(t) = S(t)$ следует:

$$8 - p(t) = 2 + \frac{1}{2} \cdot p(t-1),$$

$$p(t) = 6 - \frac{1}{2} \cdot p(t-1). \quad (63)$$

Из рекуррентной формулы (63) найдем:

$$p(t_1) = p(1) = 6 - \frac{1}{2} \cdot p(0) = 6 - 3 = 3;$$

$$p(t_2) = p(2) = 6 - \frac{1}{2} \cdot p(1) = 6 - \frac{3}{2} = 4,5;$$

$$p(t_3) = p(3) = 6 - \frac{1}{2} \cdot p(2) = 6 - 2,25 = 3,75;$$

.....

$$p(t_n) = p(n) = 4 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}. \quad (64)$$

Из функции спроса:

$$D_0 = D(0) = 8 - P(0) = 8 - 6 = 2;$$

$$D_1 = D(1) = 8 - P(1) = 8 - 3 = 5;$$

$$D_2 = D(2) = 8 - P(2) = 8 - 4,5 = 3,5;$$

$$D_3 = D(3) = 8 - P(3) = 8 - 3,75 = 4,25 \text{ и т.д.}$$

Учитывая, что $D(t) = S(t)$, значения функции предложения: $S_1 = 5$; $S_2 = 3,5$; $S_3 = 4,25$ и т.д.

б) Найдём равновесную цену. Учтывая формулу (64):

$$p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} p(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) = 4.$$

Соответствующие значения равновесного спроса и предложения: $D^* = S^* = 4$.

На рис. 5 изображены линии спроса и предложения $D = D(p) = 8 - p$ и $S = S(p) = 2 + \frac{p}{2}$ и точки $D_0, S_1, D_1, S_2, D_2, S_3, D_3$, координаты которых были вычислены раньше. Соединив их в порядке возрастания номера, получаем паутинообразную линию, которая показывает, как с течением времени цена, спрос и предложение приближаются к своим равновесным значениям: $p^* = 4$ и $D^* = S^* = 4$.

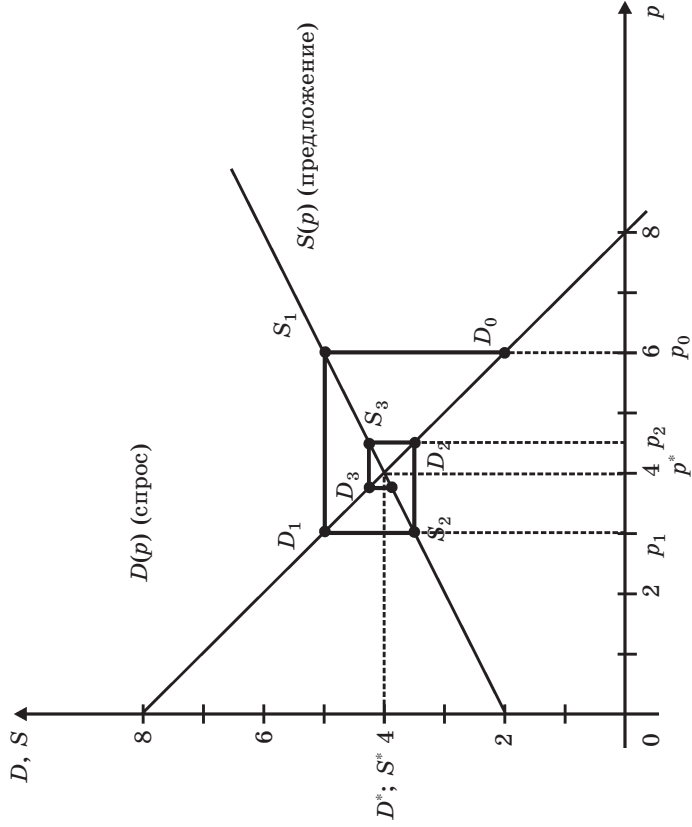


Рис. 5. Графическая иллюстрация процесса установления равновесной цены p^* , спроса D^* и предложения S^*

3.2. Модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара

Рассмотрим ситуацию, аналогичную той, которая рассмотрена в предыдущем пункте. Пусть имеется рынок одного товара, функции спроса и предложения являются функциями от цены p , которая изменяется во времени:

$$D = D(t) = a + b \cdot p(t); \quad S = S(t) = c + d \cdot p(t - 1).$$

Считая время непрерывным, функцию $p = p(t)$ — дифференцируемой, зададимся вопросом: от чего зависит приращение цены за промежуток времени Δt ? Очевидно, от величины превышения спроса над предложением и от длительности этого превышения, т.е.:

$$\Delta p = k \cdot (D - S) \cdot \Delta t,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot ((a - c) + p \cdot (b - d)), \quad \text{или}$$

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot (b - d) \cdot p(t) + k \cdot (a - c). \quad (65)$$

Это уравнение, совместно с условиями: $a > c$; $b < 0$; $d > 0$, — составляет основу так называемой модели Эванса. Если коэффициенты функций спроса и предложения, а также коэффициент пропорциональности известны, то, зная цену в начальный момент времени $p(0) = p_0$, можно найти функцию изменения цены $p = p(t)$.

Для этого достаточно найти частное решение линейного дифференциального уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $p(0) = p_0$. Это можно сделать, например, с помощью метода вариации произвольных постоянных. В результате получится:

$$p = p(t) = p_0 \cdot e^{-k(b-d)t} + \frac{a-c}{b-d} \cdot (1 - e^{-k(b-d)t}). \quad (66)$$

При $t \rightarrow \infty$ цена $p(t)$ стремится к своему равновесному значению $p^* = \frac{a-c}{b-d}$, которое совпадает с абсциссой точки пересечения прямых спроса и предложения.

3.3. Натуральный двусторонний обмен. Ящик Эджворта

Известно, что в периоды высокой инфляции деньги утрачивают роль надежного платежного средства и перестают интересовать участников рынка. В такие периоды могут возникнуть и существовать какое-то время рынки натурального обмена товаров. В этом случае разница между потребителем и производителем товаров стирается, так как для участия в натуральном обмене нужно обладать определенным количеством как минимум одного товара. Натуральный обмен широко практикуется и в международной торговле. Например, одна страна предоставляет другой трубы для строительства нефтепровода, а другая оплачивает эти поставки нефтью, которая перекачивается по этому нефтепроводу.

Рассмотрим взаимодействие двух участников натурального рынка, каждый из которых обладает определенным количеством товара X и определенным количеством товара Y . Допустим, что у первого (x_1, y_1) , а у второго (x_2, y_2) . Для того чтобы проще было разобратся в механизме взаимодействия участников натурального рынка предположим, что:

- 1) других товаров, кроме X и Y , на рынке нет;
- 2) количество товара X равно $x_1 + x_2$; количество товара Y равно $y_1 + y_2$, т.е. эти два участника являются единственными обладателями данных товаров;
- 3) каждый из участников рынка имеет свою индивидуальную функцию полезности: первый – $U = U(x; y)$, второй – $V = V(x; y)$ (обе – неоклассического типа).

Какие действия должны предпринять эти участники рынка? Для анализа этой ситуации наиболее подходит так называемый «ящик Эджворта».

В системе координат xOy отложим на оси абсцисс и оси ординат точки $A(x_1 + x_2; 0)$ и $B(0; y_1 + y_2)$, а также точку $O_1(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ (рис. 6). Проведем прямые O_1A и O_1B , параллельные осям координат системы xOy , и переведем полученное изображение «вверх ногами». Будем считать точку O_1 началом новой системы координат $x'O_1y'$. Эту систему координат далее будем называть противоположной.

Прямоугольник OAO_1B , образованный осями координат этих систем, называется «ящиком Эджворта». Изобразим в ящике

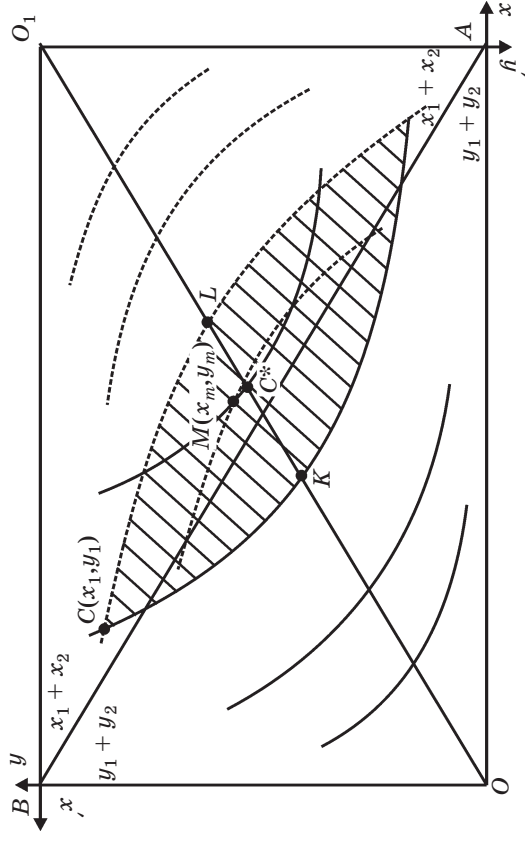


Рис. 6. Линзы компромиссов в ящике Эджворта

Эджворта карты кривых безразличия участников рынка, построив их для первого участника в системе координат xOy (сплошные линии), а для второго в противоположной системе $x'O_1y'$ (пунктирные линии).

Рассмотрим точку $C(x_1, y_1)$. Ее координаты указаны в системе xOy . В противоположной системе – ее координаты $C(x_2, y_2)$. Эта точка характеризует начальное имущественное состояние участников натурального рынка. Кривые безразличия первого и второго участников, проходящие через точку C , образуют так называемую «линзу компромиссов» (на рис. 6 она заштрихована). Любая точка M , расположенная внутри линзы, характеризуется тем, что, судя по картам кривых безразличия, значения функций полезности обоих участников в этой точке превосходят значения полезности в начальной точке C . Это означает, что взаимный обмен товарами между участниками рынка, переводящий их из начального состояния, характеризуемого точкой C , будет выгоден обоим участникам рынка. Значения их функций полезности в результате этого обмена увеличатся. Для перехода из состояния $C(x_1, y_1)$ в состояние $M(x_m, y_m)$ первый участник должен передать второму

$(y_1 - y_m)$ единиц товара Y , получив взамен $(x_1 - x_m)$ единиц товара X .

Новое состояние участников рынка, характеризующее точку M , допускает построение новой «линзы компромиссов», образуемой кривыми безразличия, проходящими через точку M . Эта линза имеет меньшую площадь, однако ее наличие означает, что возможен дальнейший взаимовыгодный обмен между участниками. Последовательность взаимовыгодных обменов может быть довольно длинной и закончится только если после очередной сделки состояние участников будет характеризовать точка, для которой нельзя будет построить линзу компромиссов.

3.4. Оптимальность по Парето и задача определения равновесных цен при двустороннем обмене

Принцип доминирования применяется обычно при решении оптимизационных задач с заданной областью допустимых решений D и несколькими целевыми функциями (критериями) Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

Определение 1. Если X и Y два допустимых решения и: 1) для всех $i = 1, 2, \dots, m$ — $Z_i(X) \geq Z_i(Y)$; 2) существует такая целевая функция Z_k , что $Z_k(X) > Z_k(Y)$, то говорят, что решение X доминирует Y .

Определение 2. Решение X называется недоминируемым, если не существует в области D такого решения, которое доминировало бы X .

Определение 3. Множество всех недоминируемых решений, принадлежащих области D , называется множеством решений, оптимальных по Парето.

Найдем множество решений (точек), оптимальных по Парето, для ситуации двустороннего натурального обмена двумя видами товаров, которая описана выше. Обозначим: $a = x_1 + x_2$ — количество товара X у обоих участников; $b = y_1 + y_2$ — количество товара Y .

Тогда функции полезности участников рынка относительно системы координат yOx можно записать в виде:

$$U = x^{\lambda_1} \cdot y^{\lambda_2}; V = (a - x)^{\lambda_1} \cdot (b - y)^{\lambda_2}. \quad (8)$$

Можно доказать следующую теорему:

Теорема. Точка T является оптимальной по Парето, если кривые безразличия участников рынка имеют в этой точке общую касательную.

Не доказывая строго эту теорему, выясним ее смысл. Если кривые безразличия участников имеют в точке T общую касательную, то эта точка является единственной общей точкой этих кривых. В этом случае «лизна компромисса» в ящике Эджворта отсутствует. Следовательно, нет точек, которые доминировали бы точку T .

Поэтому точка T является оптимальной по Парето.

Для того чтобы кривые безразличия участников, проходящие через точку T , имели в ней общую касательную, необходимо и достаточно, чтобы нормальные векторы (градиенты) к этим кривым были коллинеарны. То есть должно выполняться равенство:

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (67)$$

Последнее равенство означает также, что предельные нормы замещения обоих участников равны и поэтому у них нет стимула произвести какой-либо обмен одного товара на другой.

Равенство (67) запишем в виде:

$$\frac{l_1 x^{\lambda_1-1} \cdot y^{\lambda_2}}{l_2 x^{\lambda_1} \cdot y^{\lambda_2-1}} = \frac{r_1 (a-x)^{\lambda_1-1} \cdot (b-y)^{\lambda_2}}{r_2 (a-x)^{\lambda_1} \cdot (b-y)^{\lambda_2-1}}, \quad (68)$$

$$\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{b-y}{a-x}. \quad (69)$$

Обозначим отношения показателей функций полезности:

$$k_1 = \frac{l_1}{l_2}; k_2 = \frac{r_1}{r_2}.$$

Тогда равенство (69) можно записать в виде:

$$k_1 y(a-x) = k_2 x(b-y), \text{ или:} \\ y = \frac{k_2 x b}{k_1 a + k_2 x - k_1 x}. \quad (70)$$

Если отношения показателей одинаковы, т.е. $k_1 = k_2$, то из (70) следует:

$$y = x \cdot \frac{b}{a}.$$

В ящике Эджворта уравнение $y = x \cdot \frac{b}{a}$, учитывая, что $b = y_2 - y_1$; $a = x_2 - x_1$, задает прямую OO_1 , т.е. диагональ прямоугольника OAO_1B .

Таким образом, множество точек, оптимальных по Парето (в случае $k_1 = k_2$), образует диагональ OO_1 ящика Эджворта. Если начальное состояние участников рынка характеризовалось точкой C и соответствующей ей «линзой компромиссов», то множество конечных состояний будет находиться на пересечении диагонали OO_1 и линзы, т.е. на отрезке KL .

Замечание 1. Если отношения показателей функции полезности $k_1 = \frac{l_1}{l_2}$; $k_2 = \frac{r_1}{r_2}$ не равны, то множество точек, оптимальных по Парето, будет находиться на кривой, заданной уравнением (70).

Пересечение этой кривой с линзой компромиссов, которую определяет начальная точка C , дает множество конечных состояний. В этом случае товары X и Y имеют для участников рынка неодинаковую ценность.

Замечание 2. Если $k_1 = k_2$, то можно определить равновесные цены на единицы товаров X и Y . Так как рынок натуральный, то в данном случае имеется ввиду относительная ценность одной единицы товара X к ценности одной единицы товара Y .

Отношение этих ценностей, т.е. отношение равновесных цен, может быть найдено как отношение предельных полезностей товаров X и Y (см. § 1, п. 1.2)

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{y}{x} = k_1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Отсюда следует, что отношение равновесных цен $\frac{p_1}{p_2}$ обратно пропорционально отношению общих количеств товара на рынке $\frac{a}{b}$ с коэффициентом пропорциональности k_1 .

Замечание 3. Если функции полезности участников натурального рынка одинаковы, причем отношения показателей равны ($k_1 = k_2 = 1$), то из множества равновесных состояний, которое представлено отрезком KL , можно легко выделить единственную

равновесную (справедливую) точку. В случае $k = 1$ отношение равновесных цен обмениваемых товаров обратно пропорционально их общему количеству на рынке. Поэтому если из начальной точки C провести прямую, параллельную диагонали BA , до пересечения с диагональю OO_1 , то полученная точка пересечения C^* будет являться точкой, характеризующей конечное равновесное состояние. Дело в том, что при движении из точки C в точку C^* параллельно диагонали BA между участниками совершаются обмены, которые не нарушают отношения цен товаров $p_1 : p_2 = b : a$.

3.5. Поведение производителей на конкурентных рынках. Точка равновесия Курно и точки Стакельберга

Рассмотрим ситуацию, когда несколько производителей одного и того же товара предлагают этот товар на рынке. Если производителей много, то эту ситуацию можно считать случаем совершенной конкуренции, когда от выбора стратегии предложения товара отдельным производителем мало что зависит. Если же производителей мало или один из производителей производит большую часть предлагаемого на рынке товара, то от его действий могут весьма существенно зависеть цена на данный товар и прибыли производителей.

Рассмотрим случай, когда производителей двое. Производственные функции их известны: $x_1 = F_1(K; L)$; $x_2 = F_2(K; L)$.

Цена на производимый ими товар зависит от суммы выпуска: $p = p(x_1 + x_2)$, причем $p'_{x_1} < 0$, $p'_{x_2} < 0$, т.е. при возрастании выпуска одного из производителей цена снижается. Будем считать также, что конкуренция на рынке используемых производителями ресурсов отсутствует. Положим, что заданы функции издержек производства $C_1 = cx_1 + d$ и $C_2 = cx_2 + d$ и зависимость цены от предложения товара $p = a - b(x_1 + x_2)$.

Заметим, что функции издержек приняты одинаковыми, т.е. ни один из производителей не обладает начальными технологическими преимуществами над другим. Функция издержек, как известно, состоит из двух слагаемых: первое Cx – переменные издержки, которые зависят от x – объема выпуска; второе D – постоянные издержки, например, аренда производственных помещений, земли и т.п.

Найдем выражения для функций прибыли.

Прибыль первого производителя:

$$\Pi = (a - b(x_1 + x_2))x_1 - cx_1 - d; \quad (71)$$

прибыль второго производителя:

$$\Pi = (a - b(x_1 + x_2))x_2 - cx_2 - d. \quad (72)$$

Найдем значения выпуска, при которых прибыль максимальна.

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = a - c - 2bx_1 - bx_2 - bx_1 \cdot \frac{dx_2}{dx_1},$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = a - c - 2bx_2 - bx_1 - bx_2 \cdot \frac{dx_1}{dx_2}.$$

Приравнявая найденные производные к нулю, получим:

$$a - c - 2bx_1 - bx_2 - bx_1 \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = 0,$$

$$a - c - 2bx_2 - bx_1 - bx_2 \cdot \frac{dx_1}{dx_2} = 0,$$

откуда следует

$$a - c - bx_2 = x_1 \left(2b + b \frac{dx_2}{dx_1} \right),$$

$$a - c - bx_1 = x_2 \left(2b + b \frac{dx_1}{dx_2} \right),$$

или

$$x_1 = \frac{a - c - bx_2}{2b + b \cdot \frac{dx_2}{dx_1}}; \quad x_2 = \frac{a - c - bx_1}{2b + b \cdot \frac{dx_1}{dx_2}}. \quad (73)$$

При этих значениях x_1 и x_2 функции прибыли Π_1 и Π_2 , соответственно, принимают максимальные значения. Обозначим:

$x_0 = \frac{a - c}{b}$. Смысл x_0 становится ясен, если в выражение для

прибыли Π_1 или Π_2 вместо $x_1 + x_2$ подставить x_0 . Тогда прибыли первого и второго производителя окажутся равными $-d$, т.е. той части издержек производства, которая не связана с объемом производства. Таким образом, x_0 есть величина суммарного вы-

пуска товара обоими производителями, при которой у обоих производителей выручка от продажи товара совпадает с расходами на их производство. Прибыль в этом случае отрицательна и равна $-d$, т.е. величине постоянных издержек, не связанных с производством товара.

Используя обозначение $x_0 = \frac{a - c}{b}$, выражение (73) можно записать в виде:

$$x_1 = \frac{x_0 - x_2}{2 + \frac{dx_2}{dx_1}}; \quad x_2 = \frac{x_0 - x_1}{2 + \frac{dx_1}{dx_2}}. \quad (74)$$

В случае, когда оба производителя не пытаются изменить соотношение предлагаемых на рынке товаров, $\frac{dx_2}{dx_1} = 0$; $\frac{dx_1}{dx_2} = 0$, получаем:

$$x_{1,K} = \frac{x_0 - x_2}{2}; \quad x_{2,K} = \frac{x_0 - x_2}{2}, \quad (75)$$

$$\text{или: } x_{1,K} = x_{2,K} = \frac{x_0}{x_3}.$$

Полученные значения выпуска товаров производителями называются *точкой равновесного выпуска Курно*. Точка Курно характеризует стратегию поведения производителей на рынке, при которой они оба честно «делят рынок пополам», не пытаясь получить дополнительную выгоду за счет другого.

Допустим, что такая стратегия, приводящая к точке равновесия Курно, не устраивает первого производителя и у него возникло желание воспользоваться «честностью» второго и получить дополнительную прибыль.

Значение выпуска x_1 , при котором прибыль первого производителя максимальна, было найдено выше (74):

$$x_1 = \frac{x_0 - x_2}{2 + \frac{dx_2}{dx_1}}.$$

Значение выпуска x_2 второго производителя, который действует по Курно:

$$x_2 = \frac{x_0 - x_1}{2}.$$

Из (75) найдем $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{2}$ и подставим в (74). Получим:

$$x_1 = \frac{x_0 - x_2}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{x_0 - \frac{1}{2}(x_0 - x_1)}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x_0 - \frac{1}{3}(x_0 - x_1) = \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1.$$

Отсюда следует: $x_1 = \frac{x_0}{2}$.

Значение выпуска второго производителя в этом случае будет:

$$x_2 = \frac{x_0 - x_1}{2} = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{x_0}{2} \right) = \frac{x_0}{4}.$$

Мы получили первую точку Стакельберга:

$$x_{1;S1} = \frac{x_0}{2}; \quad x_{2;S1} = \frac{x_0}{4}. \quad (76)$$

Разумеется, первая точка Стакельберга невыгодна второму производителю, который вынужден выпускать в два раза меньше продукции, чем первый при тех же производственных возможностях.

Если второй производитель станет действовать так же, как первый, т.е. не по Курно, а будет придерживаться стратегии:

$$x_2 = \frac{x_0 - x_1}{2 - \frac{1}{2}}, \quad \text{то, учитывая, что первый поступает так же, получим симметричную ситуацию:}$$

$$x_1 = \frac{x_0 - x_2}{\frac{3}{2}}; \quad x_2 = \frac{x_0 - x_1}{\frac{3}{2}}.$$

Из этих двух уравнений находим вторую точку Стакельберга:

$$x_{1;S2} = \frac{2x_0}{5}; \quad x_{2;S2} = \frac{2x_0}{5}. \quad (77)$$

Выпуск продукции во второй точке Стакельберга у обоих производителей увеличился. Он больше, чем в точке Курно. Другими словами, между производителями началась конкурентная борьба, которая, очевидно, невыгодна обоим. Поэтому вторую точку Стакельберга называют также точкой неравновесия.

Рассмотрим подробнее реакцию рынка и «выгоды» производителей:

1) Период «честного дележа» рынка (точка Курно):
Суммарный выпуск продукции:

$$x_{1,K} + x_{2,K} = \frac{2}{3}x_0.$$

Цена одной единицы продукции: $p = a - \frac{2}{3}bx_0$.

Прибыли производителей: $\Pi_1 = \frac{bx_0^2}{9} - d$; $\Pi_2 = \frac{bx_0^2}{9} - d$.

2) Период «нечестной игры» первого производителя (первая точка Стакельберга):

Суммарный выпуск:

$$x_{1;S1} + x_{2;S2} = \frac{3x_0}{4}.$$

Цена одной единицы: $p = a - \frac{3}{4}bx_0$.

Прибыли производителей: $\Pi_1 = \frac{bx_0^2}{8} - d$; $\Pi_2 = \frac{bx_0^2}{16} - d$.

3) Период обоюдной конкурентной борьбы производителей (вторая точка Стакельберга):
Суммарный выпуск:

$$x_{1;S1} + x_{2;S2} = \frac{4x_0}{5}.$$

Цена одной единицы: $p = a - \frac{4}{5}bx_0$.

Прибыли производителей: $\Pi_1 = \frac{2bx_0^2}{25} - d$; $\Pi_2 = \frac{2bx_0^2}{25} - d$.

Таким образом, в результате перехода из точки равновесия Курно во вторую точку Стакельберга суммарный выпуск продукции вырос, цена упала, прибыли производителей уменьшились.

Замечание 1. Казалось бы, что мы имеем типичный случай равновесия по Нэшу. То есть ситуацию, в которой отклонение от оптимальной стратегии, приводящей к точке равновесия Курно, невыгодно никому из производителей. Поэтому возвра-

шение к точке равновесия неизбежно, и рыночная стимуляция, связанная с этой точкой равновесия, является достаточно устойчивой по отношению к «эгоистичным» действиям отдельных производителей. Но, к сожалению, это не так. У производителей есть более эффективный способ увеличения прибыли, нежели «честное сотрудничество» в духе Курно. Этот способ – образование так называемого картеля, т.е. объединение своих возможностей влияния на рынок.

Рассмотрим подробнее ситуацию, при которой производители решили объединиться. Их общая функция прибыли будет тогда иметь вид:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = (a - bx)x - cx - 2d,$$

где x – величина общего выпуска.

Тогда $\Pi'_x = -2bx + a - c$.

Пусть $-2bx + a - c = 0$, получаем $x = \frac{a - c}{2b}$, или $x = \frac{x_0}{2}$.

В этом случае цена за одну единицу продукции составит

$P = a - \frac{bx_0}{2}$, т.е. окажется самой высокой по сравнению с ценами в точках Курно и Стакельберга. Общая прибыль составит:

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(a - \frac{bx_0}{2} \right) \frac{x_0}{2} - \frac{cx_0}{2} - 2d = \frac{ax_0}{2} - \frac{bx_0^2}{4} - 2d = \\ &= \frac{(a - c)}{2} \cdot \frac{x_0}{2} - \frac{bx_0^2}{4} - 2d = \frac{bx_0^2}{2} - 2d = \frac{bx_0^2}{4} - 2d. \end{aligned}$$

Поделите прибыль пополам, каждый из производителей получит по $\frac{bx_0^2}{8} - d$ (ден. ед.), т.е. больше, чем даже в точке Курно.

Таким образом, вместо конкурентной борьбы производители выгоднее объединиться. Потребителям же образование картеля производителей крайне невыгодно. Для них выгоднее, когда между производителями идет конкурентная борьба, приводящая к точкам Стакельберга.

Замечание. Действия производителей товара, которые объединились в картель и пытаются определять выгодную им цену и объем предложения на рынке, приводят обычно к тому, что

потребители замещают этот товар на другой товар сходного назначения. Если им удается это делать, то спрос на первый товар снижается, а следовательно, снижается его цена и прибыли производителей-монополистов. В результате на рынке восстанавливается равновесие, близкое к точке Курно. Если же производители-монополистам удается контролировать предложение и цены всей группы сходных товаров и замещение их для потребителей невозможно, то на этом сегменте рынка складывается ситуация неравновесия, которое вызвано искусственным завышением цены. Длительное сохранение такой ситуации может привести к неблагоприятным макроэкономическим последствиям.

3.6. Задачи для самостоятельного решения

Даны функция спроса $D(t) = a + b \cdot P(t)$ и предложения $S(t) = c + d \cdot p(t - 1)$.

- Найдите рекуррентное соотношение, определяющее цены на товар в моменты времени $t = 1; t = 2; t = 3; \dots; t = n$ и соответствующие им значения спроса и предложения, если цена в момент времени $t = 0$ была p_0 .
- Найдите равновесную цену \bar{p} и дайте графическое решение задачи.

Варианты:

- $D = 200 - 20p; S = 100 + 10p; p_0 = 5$.
- $D = 800 - 20p; S = 200 + 10p; p_0 = 30$.
- $D = 900 - 30p; S = 100 + 10p; p_0 = 30$.
- $D = 400 - 20p; S = 70 + 10p; p_0 = 20$.
- $D = 600 - 20p; S = 120 + 10p; p_0 = 24$.
- $D = 400 - 20p; S = 100 + 5p; p_0 = 20$.
- $D = 500 - 30p; S = 50 + 15p; p_0 = 15$.
- $D = 250 - 10p; S = 100 + 5p; p_0 = 15$.
- $D = 400 - 40p; S = 200 + 10p; p_0 = 8$.
- $D = 800 - 20p; S = 100 + 10p; p_0 = 30$.
- $D = 8 - p; S = 2 + 0,5p; P = 6$.

Решение варианта 11) см. в п. 3.1, задача 16.

Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ

§ 1. Балансовые модели и модели экономического роста

В отличие от микроэкономики, которая анализирует поведение и взаимосвязи отдельных, индивидуальных субъектов рынка – потребителей и производителей товаров, макроэкономика занимается анализом механизма взаимодействия крупных экономических образований – отраслей, корпораций и т.п. При этом возникают иногда ситуации, когда некоторые понятия микроэкономики могут быть перенесены в макроэкономiku. Например, можно говорить о производственной функции отрасли и даже целой страны, а также о функции спроса населения какой-либо области, функции прибыли ТНК и др. Если анализировать деятельность отраслей, на которые условно разделена экономика страны, то можно заметить, что каждая отрасль, с одной стороны, является производителем какого-либо вида продукции, а с другой – потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает задача расчета связи между отраслями.

1.1. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Пусть производственная сфера некоторой корпорации (или даже страны) разбита на n отраслей, каждая из которых производит свой продукт (например: автостроение – автомобили, станкостроение – станки, оборонная промышленность – военную технику и т.д.).

Для обеспечения производства каждая отрасль использует продукцию других отраслей.

Обозначим: x_i – валовый выпуск i -й отрасли;

x_{ij} – объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью для обеспечения своего валового выпуска;

y_i – объем продукции i -й отрасли, предназначенный для реализации, т.е. конечный продукт.

В.В. Леонтьев предложил *гипотезу линейности*, т.е. простого сложения составляющих объемов:

$$x_i = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n} + y_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Если все слагаемые представлены в стоимостном выражении, то выражения (1) называют соотношениями баланса.

Кроме того, Леонтьев заметил, что на протяжении значительного отрезка времени отношения $a_{ij} = x_{ij} \div x_j$ практически не меняются (*гипотеза технологического консерватизма*).

Сами числа $a_{ij} = x_{ij} \div x_j$ — названы им коэффициентами *прямых затрат*. Соотношения баланса можно теперь записать в виде системы следующих линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n, \end{array} \right. \quad (2)$$

Введем понятия:

Вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор валового выпуска;

Вектор $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ — вектор конечного продукта;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов прямых затрат (технологическая матрица).

Тогда система уравнений (2) может быть записана в краткой матричной форме:

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}. \quad (3)$$

Тем самым модель Леонтьева сформирована.

Ее можно использовать для решения следующих двух задач:

- 1) Пусть вектор \bar{x} — известен. Рассчитать вектор конечного продукта \bar{y} .
- 2) Пусть задан вектор конечного продукта \bar{y} . Требуется рассчитать вектор валового выпуска отраслей \bar{x} .

Определение вектора конечного продукта в многоотраслевой экономике

Из матричного уравнения (3) следует:

$$\bar{y} = \bar{x} - A \cdot \bar{x}, \text{ или } \bar{y} = (E - A) \cdot \bar{x},$$

где E — единичная матрица; A — технологическая матрица; \bar{x} — вектор валового выпуска.

Задача 1. Пусть даны вектор валового выпуска и технологическая матрица:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор конечного продукта \bar{y} .

Решение.

$$\bar{y} = (E - A) \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 & -20 & +0 \\ -60 & +140 & -40 \\ -60 & -40 & +160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Определение вектора валового выпуска

Задача определения вектора валового выпуска, если известна технологическая матрица A и задан вектор конечного продукта \bar{y} , не всегда имеет решение.

Для того чтобы решение существовало, необходимо, чтобы выполнялась теорема:

Теорема: Если сумма элементов матрицы A , стоящих в любом столбце (строке) $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$ (причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма меньше 1), и все элементы матрицы A неотрицательны, то решение матричного уравнения (3) существует (матрица A в этом случае называется продуктивной).

Вектор валового выпуска в этом случае определяется в виде:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y},$$

где $(E - A)^{-1}$ — матрица, обратная матрице $(E - A)$.

Задача 2. Даны технологическая матрица и вектор конечного продукта

$$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}; \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Найдите вектор валового выпуска \bar{x} .

Решение.

- 1) Очевидно, что матрица A удовлетворяет всем условиям теоремы продуктивности.
- 2) Найдем матрицу $E - A$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,4 \\ -0,1 & 0,9 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}; \det(E - A) = 0,514.$$

- 3) Найдем обратную матрицу $(E - A)^{-1}$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,514} \begin{pmatrix} 0,68 & 0,32 & 0,5 \\ 0,16 & 0,68 & 0,42 \\ 0,19 & 0,165 & 0,82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,323 & 0,623 & 0,973 \\ 0,311 & 1,323 & 0,817 \\ 0,370 & 0,321 & 1,595 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем вектор валового выпуска:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1,323 & 0,623 & 0,973 \\ 0,311 & 1,323 & 0,817 \\ 0,370 & 0,321 & 1,595 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

1.2 Модель Неймана

Модель Леонтьева, которая позволяет решать задачи планирования валового выпуска отраслей, все же недостаточно отражает реальные взаимосвязи между отраслями. Главными недостатками этой модели являются:

- 1) отсутствие *динамики*, т.е. возможности проследить взаимодействия отраслей во времени.
- 2) предположение о том, что каждая из отраслей производит *только один продукт*.

Более общая модель была предложена Нейманом. В модели Неймана предполагается, что производится n *продуктов* (товаров) и для этого существует m *способов их производства*. Каждый j -й способ задается вектором затрат \bar{a}_j и вектором выпуска \bar{b}_j

$$\bar{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{mj} \end{pmatrix}.$$

В результате производство определяется следующими матрицами затрат A и выпуска B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ - & - & - & - \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Предполагается также, что для реализации любого производственного процесса необходимы затраты хотя бы одного продукта и для каждого продукта существует хотя бы один способ его производства. Поэтому и в матрице A , и в матрице B в

каждой строке и в каждом столбце должен быть хотя бы один положительный элемент.

Для моделирования динамики процесса производства функционирование экономики рассматривается на некотором конечном промежутке времени, разбитом на единичные отрезки точками: $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, T$. В качестве единицы измерения можно выбрать один год или один месяц. Тогда получаем дискретный спектр времен: $0, 1, 2, \dots, T$.

В модели Неймана вводится понятие интенсивности производственного процесса. Интенсивности задаются вектором \bar{x}_t . Кроме того, вводится вектор цен продуктов (товаров) \bar{p}_t :

$$\bar{x}_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_m(t) \end{pmatrix}; \quad \bar{p}_t = (p_1(t); p_2(t); \dots p_n(t)).$$

Функционирование экономики в модели Неймана определяется следующей системой уравнений и неравенств:

$$A \cdot \bar{x}_t \leq B \bar{x}_{t-1}; \quad (1)$$

$$\bar{p}_t \cdot A \cdot \bar{x}_t = \bar{p}_t \cdot B \bar{x}_{t-1}; \quad (2)$$

$$\bar{p}_{t-1} \cdot A \geq \bar{p}_t \cdot B; \quad (3)$$

$$\bar{p}_t \cdot A \cdot \bar{x}_t = \bar{p}_t \cdot B \cdot \bar{x}_t. \quad (4)$$

Неравенство (1) указывает, что затраты продуктов на производство $A \cdot \bar{x}_t$ в момент времени t не могут превышать выпуска продуктов в предшествующий период $B \cdot \bar{x}_{t-1}$.

Неравенство (3) указывает, что в данной модели вся совокупная «выручка» $\bar{p}_t \cdot B$, полученная в момент t , не превышает «издержек» $\bar{p}_{t-1} \cdot A$, которые были в предшествующий момент $t-1$. Это условие неприбыльности в модели Неймана является условием равновесия. Другие условия равновесия представлены уравнениями (2) и (4). Уравнение (2) показывает, что объем денежной массы в модели Неймана является постоянным, а уравнение (4) говорит о том, что вся эта денежная масса постоянно находится в обращении.

Модель, представленная условиями (1–4), разумеется, является неполной и не отражает многие реальные макроэкономические процессы. В частности, эта модель не отражает производственное потребление, накопление, инфляцию, проблемы занятости и т.д.

Заметим также, что, например, трудовые ресурсы не могут являться продуктом какого-либо производственного процесса и должны иметь особый статус. В какой-то мере некоторые недостатки модели, описанной условиями (1–4), могут быть устранены за счет введения дополнительных параметров. Например, можно ввести дополнительный вектор трудовых затрат $\bar{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$. В некоторых исследованиях экономистов, применяющих модель Неймана, вводятся дополнительно и другие конкретизации и обобщения. Подробнее об этом можно узнать из [2; 4]

Модель Неймана позволяет описать сбалансированный экономический рост. Для этого вводится специальный параметр λ , который называется *показателем роста*.

Предполагается, что вектор интенсивностей

$$\bar{x}_t = \bar{x}_{t-1} (1 + \lambda), \quad \lambda > 0, \quad (4)$$

одновременно возрастает по всему спектру производственных процессов $(1, 2, \dots, n)$.

Кроме того, вводится параметр r , который называют обычно нормой процента. Предполагается, что вектор цен

$$\bar{p}_t = \frac{\bar{p}_{t-1}}{1+r}, \quad r > 0, \quad (5)$$

одновременно снижается по всему спектру производимых продуктов $(1, 2, \dots, n)$.

С помощью введенных параметров условия, определяющие модель Неймана, можно записать в так называемой стационарной форме:

$$\begin{cases} (1+\lambda)A \cdot \bar{x}_t \leq B \cdot \bar{x}_t; \\ (1+\lambda) \cdot \bar{p}_t \cdot A \cdot \bar{x}_t = \bar{p} \cdot B \cdot \bar{x}_t; \\ (1+r) \cdot \bar{p}_t \cdot A \geq \bar{p} \cdot B; \\ (1+r) \cdot \bar{p}_t \cdot A \cdot \bar{x}_t = \bar{p} \cdot B \cdot \bar{y}_t, \end{cases}$$

где $\lambda > 0, r > 0$.

Экономика, описываемая этой моделью, развивается по траектории равновесного динамического роста. Однако при определенных значениях $\lambda = \lambda^*$ и $r = r^*$ может достигаться максимальный темп такого роста. Определяемый в этих условиях оптимальный вектор интенсивностей производственных процессов называют «лучом Неймана».

Общая теория оптимальных магистральных траекторий развития экономики, которая опирается на обобщенную модель Неймана, достаточно сложна (см. [4]).

Большинство частных задач практического характера, возникающих в рамках этой теории, имеет вид задач линейного программирования.

Задача 3. Даны матрица затрат A и матрица выпуска B . Вектор цен в данный момент времени $t = t_1$ также задан: $\bar{p}_{t_1} = (1; 4)$.

Выпуск продукции в предшествующий период известен:

$$B \cdot \bar{x}_{t_1-1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}. \text{ Найти оптимальный вектор интенсивностей } \bar{x}_{t_1},$$

при котором стоимость выпущенной продукции в данном периоде t_1 будет максимальной, если:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Для решения задачи необходимо найти максимум

$$\bar{p}_{t_1} \cdot B \cdot \bar{x}_{t_1} = (1; 4) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (20; 52) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 20x_1 + 52x_2,$$

при условии выполнения основного неравенства модели Неймана.

$$A \cdot \bar{x}_t \leq B \bar{x}_{t-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + 10x_2 \leq 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Данная задача представляет собой типичную задачу линейного программирования с целевой функцией $20x_1 + 25x_2 \rightarrow \max$.

Изобразим область допустимых значений (рис. 1).

Целевой вектор $0,1\bar{n} = (2; 5, 2)$ указывает, что наибольшее значение целевой функции достигается в точке M .

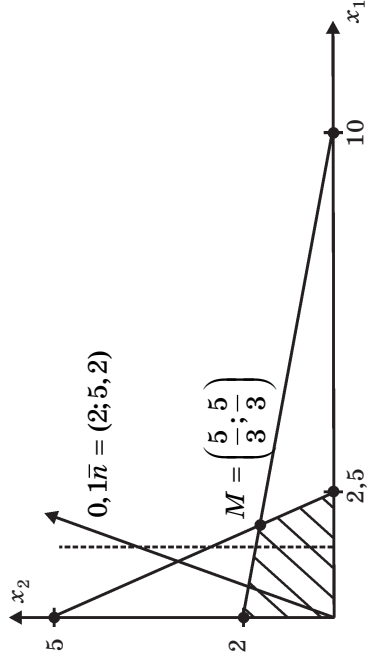


Рис. 1. Графическое решение задачи 3

Координаты точки M найдем, решив систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

Ответ: $\bar{x}_{t_1} = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

1.3 Модель Солоу

Основными предпосылками экономического роста в модели Неймана являлись: 1) постоянное увеличение компонент вектора интенсивностей производственных процессов \bar{x}_t ; 2) постоянное снижение компонента вектора цен \bar{p}_t на производимую продукцию. В условиях дополнительных ограничений (явно не рыночного характера), таких как отсутствие накопления и полное инвестирование всей денежной массы и всех ресурсов в производство, постоянный объем денежной массы – экономический рост по Нейману – должен происходить по линейной траектории. Однако вывод о линейности и постоянстве приращения

объемов производства явно противоречит получаемым на практике данным. Для того чтобы теоретическая траектория экономического роста была нелинейной, приходится оказывать от весьма привлекательной гипотезы линейности и предположить, что производство продукции описывается нелинейной производственной функцией от ресурсов. В этом случае сама модель должна быть существенно иной. Одна из наиболее простых нелинейных моделей экономики была предложена Солоу.

Модель Солоу сводит функционирование экономики к взаимодействию между следующими пятью переменными: $Y(t)$ – конечный универсальный продукт; $L(t)$ – наличные трудовые ресурсы; $K(t)$ – производственные фонды (капитал); $I(t)$ – инвестиции в производство; $C(t)$ – объем производственного потребления.

Модель Солоу задается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} C = (1 - p) \cdot Y = Y - I; \\ Y = F(K; L); \\ L = L_0 \cdot e^{rt}; \\ \frac{dK(t)}{dt} = p \cdot Y - \mu K(t), \quad (K(0) = K_0). \end{cases} \quad (6)$$

Из первого уравнения следует, что конечный продукт Y полностью используется на производственное потребление C и инвестиции в производство I , так как $Y = C + I$. Причем $I = pY$, где p – норма инвестиций ($0 < p < 1$). Второе уравнение – это производственная функция (возможно, функция Кобба–Дугласа). Третье уравнение описывает прирост трудовых ресурсов (оно хорошо известно в демографическом анализе).

Четвертое уравнение показывает, что приращение фондов пропорционально приращению инвестиций в производство $I = pY$, с учетом естественного выбытия фондов $-\mu K_t$, где $\mu > 0$ – коэффициент износа фондов в расчете на единицу времени (например, 1 год).

Заметим, что в модели Солоу экономика рассматривается как единое целое (без отраслей и сегментов).

В этой экономике производится некий универсальный продукт (возможно, деньги?), который потребляется как в производственной сфере, так и в производственной.

Конечно, это упрощение реальной ситуации, однако некоторые макроэкономические аспекты эта модель отражает достаточно точно и помогает выяснить механизм взаимозависимости между перечисленными выше переменными.

Сформулированная в виде условий (6) модель может быть дополнена и конкретизирована в зависимости от той задачи, которая ставится перед нею исследователем.

Мы ограничимся выяснением, при каком условии будет иметь место экономический рост и какую форму будет иметь траектория этого роста.

Для этого введем лишь одну конкретизацию. Допустим, что производственная функция в модели Солоу представляет собой известную функцию Кобба–Дугласа:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1). \quad (7)$$

Учитывая третье уравнение в условиях модели Солоу, т.е. что

$$L = L_0 \cdot e^{rt},$$

получаем:

$$Y = AK^{\alpha} \cdot L_0^{1-\alpha} \cdot e^{rt(1-\alpha)}. \quad (8)$$

Тогда четвертое уравнение в условиях Солоу примет вид:

$$\frac{dK}{dt} + \mu K = pAL_0^{1-\alpha} \cdot e^{rt(1-\alpha)} \cdot K^{\alpha}. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой дифференциальное уравнение 1-го порядка Бернулли. Решая его, получим, что

$$K(t) = K_1 \cdot L_0 \cdot e^{rt}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в уравнение (9) найдем функцию описывающую изменение объема производства в модели Солоу:

$$Y(t) = AK_1^{\alpha} \cdot L_0 \cdot e^{rt}. \quad (11)$$

Постоянная K_1 в уравнениях (10) и (11) экономически интерпретируется как «фондовооруженность» и определяется как отношение $K(t) \div L(t) = K_1$. Если величина K_1 – постоянна, то говорят, что «экономика развивается по стандартной траектории», определяемой уравнениями (10) и (11).

Согласно уравнению (11) объем производства увеличивается по экспоненциальному закону пропорционально росту трудовых

ресурсов. Несложно доказать, что и все остальные макроэкономические переменные в модели Солоу растут также пропорционально трудовым ресурсам. Таким образом, траектория экономического роста в данной модели нелинейна и выражается экспонентой. Заметим также, что экономический рост в модели Солоу может определяться и увеличением коэффициента A , который в функции Кобба–Дугласа характеризует интенсивность производственного процесса.

1.4. Задачи для самостоятельного решения

- 1) По заданной технологической матрице A составить математическую модель Леонтьева баланса доходов отрасли.
 - 2) Проверить технологическую матрицу на продуктивность и рассчитать матрицу полных материальных затрат отрасли $B = (E - A)^{-1}$.
 - 3) Найти вектор валового выпуска \bar{x} , зная вектор конечного продукта \bar{y} .
- Варианты:

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 85 \\ 110 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Модели общего макроэкономического равновесия

2.1. Модели конкурентного равновесия Вальраса и Эрроу–Дебре

Известно, что рыночная экономика обладает механизмами саморегулирования, важнейшим из которых является механизм конкуренции. В результате индивидуальных действий многочисленных участников рынка, конкурирующих друг с другом, могут возникнуть и поддерживаться какое-то время так называемые «равновесные состояния». Подобные ситуации частично описаны в гл. 2, § 3.

Первая попытка формирования общей математической модели конкурентного равновесия принадлежит Вальрасу. В модели Вальраса рассматривается экономика с l потребителями, m производителями, n типами товаров. Товарами в этой модели считаются как потребительские товары, так и ресурсы производства; n -мерному множеству (пространству) товаров R_n соответствует n -мерный вектор их цен $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Компоненты вектора цен могут быть различными (но не отрицательными). Множество всех возможных векторов цен называется пространством цен и обозначается P .

Каждый потребитель характеризуется своим вектором (функцией) спроса $\bar{x}_i = D_i(\bar{p})$, доходом $K_i(\bar{p})$ и начальным запасом товаров $\bar{b}_i \in R_n$, где R_n – пространство товаров.

Каждый производитель характеризуется своим вектором затрат–выпуска $\bar{y}_k = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Положительные компоненты этого вектора представляют собой количество выпускаемого производителем товара данного типа, а отрицательные – количество затрачиваемого ресурса данного типа.

Скалярное произведение векторов $\bar{p} \cdot \bar{y}_k$ в этом случае представляет собой прибыль k -го производителя.

Функцией совокупного спроса (потребителей) называется функция

$$D(\bar{p}) = \sum_{i=1}^l \bar{x}_i.$$

Функцией совокупного предложения (производителей и производителей) называется функция

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

$$9) \quad A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

$$11) \quad A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Решение варианта № 11 дано в п. 1.1.

$$S(\bar{p}) = \sum_{i=1}^l \bar{b}_i + \sum_{k=1}^m \bar{y}_k.$$

Набор допустимых векторов $(\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_l^*, \bar{y}_1^*, \bar{y}_2^*, \dots, \bar{y}_m^*, \bar{p}^*)$ задает конкурентное равновесие в модели Вальраса, если выполняются условия:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \bar{y}_k^* + \sum_{i=1}^l \bar{b}_i \geq \sum_{i=1}^l \bar{x}_i^*; \\ \bar{p}^* \cdot \left(\sum_{k=1}^m \bar{y}_k^* + \sum_{i=1}^l \bar{b}_i \right) = \bar{p}^* \cdot \sum_{i=1}^l \bar{x}_i^*. \end{cases}$$

Вектор \bar{p}^* называется равновесным вектором цен.

Первое условие следует понимать в том смысле, что вектор-функция совокупного спроса покомпонентно не превосходит вектор-функцию совокупного предложения.

Второе условие означает, что стоимость совокупного спроса равна стоимости совокупного предложения.

Можно теоретически доказать существование конкурентного равновесия в модели Вальраса, если потребовать, чтобы дополнительно выполнялось несколько условий, важнейшими из которых являются следующие:

- 1) задача определения оптимального вектора потребления \bar{x}_i^* имеет единственное решение для каждого потребителя;
- 2) каждый потребитель обладает положительной начальной собственностью, т.е. $\bar{b}_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, l$);
- 3) задача определения оптимального вектора затрат-выпуска \bar{y}_k^* имеет единственное решение для каждого производителя.

Модель Вальраса, с включением в нее этих дополнительных условий, называют иногда моделью Эрроу–Дебре, а теорему, в которой доказывается существование конкурентного равновесия, – теоремой Эрроу–Дебре. Доказательство этой довольно сложной теоремы можно найти в [4].

Модели Вальраса и Эрроу–Дебре не могут, однако, претендовать на описание всех особенностей функционирования рыночной экономики. Дело в том, что в современной рыночной эконо-

мике наряду с рынком товаров функционируют также рынок рабочей силы и финансовый (фондовый) рынок, которые тесно взаимодействуют друг с другом. Поэтому проблема общего (глобального) рыночного равновесия оказывается более сложной.

2.2. Классическая модель общего рыночного равновесия

Классическая модель, которая формировалась благодаря работам экономистов конца XIX – начала XX в., представляет собой систему из трех взаимосвязанных моделей: модели рынка товаров, модели рынка рабочей силы и модели рынка денег (фондов). Таким образом, важнейшие ресурсы производства – рабочая сила и фонды (капитал) – получают в этой модели особый статус, в отличие от моделей Вальраса и Эрроу–Дебре, где эти ресурсы, по сути, включались в список товаров. Другое отличие классической модели заключается в том, что эта модель одно-продуктовая, т.е. предполагается, что экономика производит некий обобщенный продукт, который затем распределяется по рыночным законам спроса и предложения.

Детально этот механизм в данной модели не описывается.

Классическая модель оперирует со следующими основными макроэкономическими показателями:

Y – валовый внутренний продукт (объем производства);

p – цена одной единицы обобщенного продукта;

w – ставка заработной платы;

r – ставка (норма) процента за кредиты;

L – объем рабочей силы;

K – объем фондов (капитал).

Перейдем к описанию моделей рынков, составляющих классическую модель.

1. Рынок рабочей силы.

Пусть $Y = F(K; L)$ – макроэкономическая производственная функция, удовлетворяющая обычным условиям, налагаемым на функции подобного рода (см. гл. 2, § 2).

Тогда функцию прибыли можно записать в виде:

$$\Pi = p \cdot F(K, L) - wL.$$

Найдем:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p \cdot \frac{\partial F}{\partial L} - w = 0 \quad \text{или:} \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p}.$$

Отношение $\frac{w}{p}$ интерпретируется как реальная заработная плата. Продифференцируем последнее равенство по $\frac{w}{p}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{w}{p}\right)} = 1.$$

Так как $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ (это следует из общих свойств производственных функций), то $\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{w}{p}\right)} = L_D$ также меньше нуля. То есть

спрос на рабочую силу L_D снижается при росте реальной заработной платы. С другой стороны, очевидно и следующее утверждение: чем больше реальная заработная плата, тем больше предложение рабочей силы L_S .

Пересечение линий спроса и предложения рабочей силы определяет в классической модели равновесные значения реальной заработной платы $\left(\frac{w}{p}\right)_0$ и занятости L_0 на рынке рабочей силы (рис. 2).

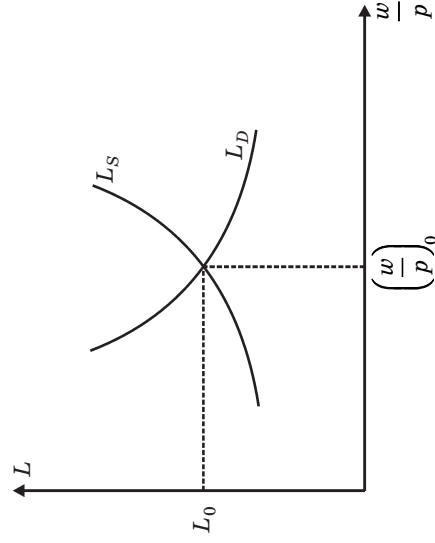


Рис. 2. Определение равновесных значений реальной заработной платы и занятости на рынке рабочей силы

Конкретные уравнения этих линий могут быть найдены в результате эконометрического анализа с использованием конкретных статистических данных.

2. Рынок товаров.

В классической модели предполагается, что реальная занятость (например, L_0) определяет объем производимой продукции $Y = F(K; L_0)$, так как производственные фонды (капитал) в меньшей степени подвержены резким изменениям. Поэтому предложение производимого экономического продукта на рынке товаров определяется величиной $(Y_S)_0 = F(K; L_0)$.

Спрос на продукт определяется как сумма спроса на потребительские товары и инвестиционные товары (акции)

$$Y_D = C(r) + I(r),$$

где r – норма (ставка) процента на рынке денег; $C(r)$ – функция спроса на потребительские товары; $I(r)$ – функция спроса на инвестиционные товары.

Обе эти функции убывают с ростом r , так как при увеличении ставки процента r увеличивается интерес к операциям на рынке денег, а не на рынке товаров.

Если исходить из предположения, что спрос на рынке товаров Y_D равен предложению $(Y_S)_0$, то получаем уравнение, из которого, зная равновесное значение L_0 , можно найти равновесное значение ставки процента r_0 :

$$F(K, L_0) = C(r_0) + Y(r_0).$$

Конкретные аналитические выражения для функций $C(r)$, $Y(r)$ определяются на основе анализа статистических данных.

3. Рынок денег.

В классической модели спрос на деньги M_D зависит от объема произведенного продукта Y в его денежном выражении:

$$M_D = k \cdot Y \cdot p,$$

где p – цена единицы продукта; k – коэффициент пропорциональности.

Предложение денег M_S – предполагается постоянной величиной. Условие равенства спроса и предложения денег выполняется, если $M_S = (M_D) = k \cdot Y_0 \cdot p_0$. Учитывая, что равновесное значение объема выпуска определено на рынке товаров в виде

$Y_0 = F(K, L_0)$, из условия равенства $M_S = k \cdot Y_0 \cdot p_0$ можно найти равновесную цену:

$$p_0 = \frac{M_S}{k \cdot F(K, L_0)}.$$

Таким образом, все три рынка оказываются взаимосвязанными. Каждый из них характеризуется своими функциями спроса и предложения и своими точками равновесия. Если нарушается равновесие на одном из рынков, то все три рынка оказываются в состоянии динамического неравновесия. В результате действия внутренних механизмов саморегулирования или под действием директивных внешних (возможно, государственных) целенаправленных изменений экономических показателей экономика может перейти в новое равновесное состояние. Это состояние будет характеризоваться другими равновесными значениями основных макроэкономических показателей L_0, Y_0, r_0, p_0 .

2.3. Модель Кейнса

Экономический кризис 1929–1933 гг., поразивший большинство развитых стран с рыночной экономикой, показал существенные недостатки классической модели. На основе анализа статистических данных Дж. Кейнс удалось доказать, что полная занятость в рыночной экономике может возникнуть только случайно. Дело в том, что производители не могут продать столько, сколько они хотят, но производят и продают только в объеме спроса. На практике объем фактического производства Y^* меньше потенциально возможного (равновесного) объема Y_0 .

Поэтому реальный спрос на рабочую силу L^* определяется не величиной Y_0 , а величиной Y^* .

Другой особенностью подхода Кейнса является существенно иное определение равновесного совокупного спроса Y_0 . Известно, что функция спроса на обобщенный продукт экономики в самом общем виде имеет вид:

$$Y_D = C + I + G + X_n,$$

где $C = a + bY$ – функция спроса на потребительские товары; I – функция спроса на инвестиционные товары; G – государственные расходы; X_n – экспорт.

Функция совокупного предложения продукта Y_S в модели Кейнса определяется производственной функцией.

Равновесное значение объема выпуска Y_0 можно найти из равенства $Y_S = Y_D$, т.е.:

$$Y_0 = a + bY_0 + I + G + X_n,$$

$$Y_0 = \frac{a + I + G + X_n}{1 - b}.$$

Графическое определение равновесного значения объема выпуска можно изобразить в форме так называемого «креста Кейнса» (рис. 3).

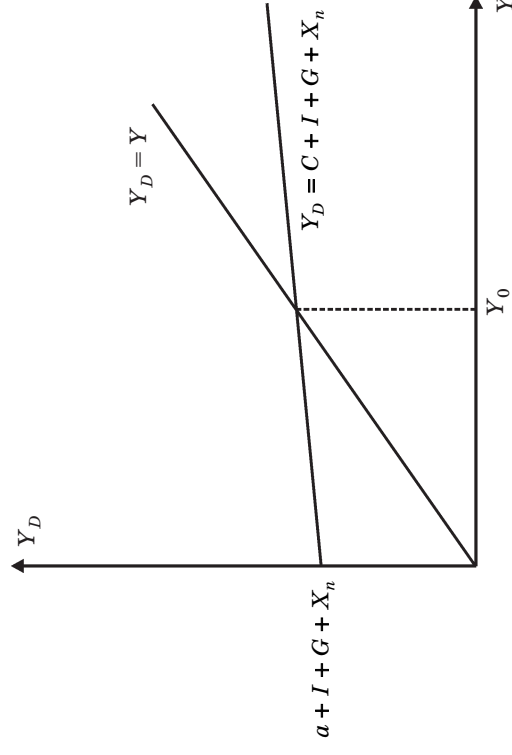


Рис. 3. Определение равновесного объема выпуска (кейнсианский крест)

Спрос на деньги в модели Кейнса описывает функция

$$M_D = k \cdot p \cdot Y_D + L \cdot q(r),$$

где p – цена единицы продукта; $L \cdot q(r)$ – спрос на облигации, зависящий от ставки процента r и количества занятых в производстве L ; k – коэффициент пропорциональности.

Предложение денег M_S , как и в классической модели, считается заданной величиной.

Из условия равенства спроса и предложения $M_S = M_D$, или $M_S = k \cdot p \cdot Y_D + L \cdot q(r)$, можно при заданном значении $\dot{Y}_D = \dot{Y}_0$ определить равновесное значение ставки процента $r = r_0$, и наоборот. Для этого необходимо иметь аналитическое выражение функции $q(r)$.

Приближенный вид этой функции, который обычно используется в модели Кейнса, следующий:

$$q(r) = h \cdot r,$$

где h – коэффициент пропорциональности.

Если равновесие на рынке товаров и на рынке денег достигнуто и найдены равновесные значения \dot{Y}_0 , r_0 , то можно определить соответствующую потребность в рабочей силе L_0 из производственной функции $\dot{Y}_0 = F(K, L_0)$. Как уже отмечалось выше, это значение только случайно может совпасть с равновесным значением L^* , получаемым в результате пересечения кривой предложения рабочей силы и кривой спроса на рабочую силу. Практически всегда в рыночной экономике имеется безработица, определяемая разностью $L^* - L_0$.

Для снижения уровня безработицы требуется изменить кажим-то образом один из равновесных макроэкономических показателей. Кейнс считал, что необходимо принять меры для увеличения спроса на товары путем снижения процентной ставки r . Однако в начале 1970-х гг. М. Фридменом рекомендован Кейнса были подвергнуты серьезной критике. Обоснованный Фридменом «монетаристский» подход заключается в том, что основной способ регулирования экономики состоит в контроле количества денежной массы M_S .

Монетаристы считают, что увеличение предложения денег приводит к росту цен и увеличению инфляции. Объем производства слабо зависит от M_S .

Для современного макроэкономического анализа характерен критический подход к такому рода однозначным рекомендациям. В определенных условиях экономиста функционализирует в соответствии с моделью Кейнса, в других – в соответствии с классической моделью.

В случае высокой инфляции наиболее разумным оказывается монетаристский подход. Если уровень инфляции невысок, то следует придерживаться рекомендаций Кейнса.

§ 3. Проблемы верификации макроэкономических моделей и теорий

3.1. Проблема нефальсифицируемости

При оценке «качества» математических моделей макроэкономики, т.е. соответствия их экономической реальности, объективный исследователь обычно сталкивается с двумя следующими проблемами:

1) проблема принципиальной нефальсифицируемости рассматриваемой модели;

2) проблема учета возможных изменений в экономической политике, которые в данной модели не предусмотрены.

Первая проблема – методологическая. Принцип фальсифицируемости заключается в том, что любая научная теория (модель) должна содержать условия, при которых она сама признает себя ложной. К сожалению, большинство макроэкономических моделей пренебрегает этим принципом. Более того, многие частные экономические теории и модели не дают даже возможности для их верификации, т.е. проверки на практике. Например, известно следующее уравнение (модель), которое предлагается некоторыми экономистами для определения ожидаемого уровня инфляции [1]:

$$\dot{P}_e = 0,4\dot{P}_{-1} + 0,2\dot{P}_{-2} + 0,1\dot{P}_{-3} + \dots + \sigma, \quad (12)$$

где \dot{P}_{-1} – уровень инфляции прошлого года; \dot{P}_{-2} – уровень инфляции двухгодичной давности и т.д.; σ – показатель эффективности внешних регулирующих воздействий на инфляцию.

При этом не указана точная процедура определения показателя σ . Поэтому все недостатки модели (12) можно объяснить несовершенством методики расчета σ . Нет указания, в каких случаях следует отвергнуть саму модель (12) и попытаться подобрать другую, более приемлемую.

Пренебрежение принципом фальсифицируемости обычно приводит к неблагоприятным последствиям. Содержание науки оказывается «перегруженным» нефальсифицируемыми частными теориями и моделями, так как нет оснований отвергнуть ни одну из них, даже в случае, когда они напрямую противоречат друг другу. Известный американский экономист Мак-Клоски дает следующую оценку современному состоянию экономической теории [10]:

«Большую часть того, что мы привыкли называть “теорией”, на самом деле лучше практиковать как риторику, то есть как драматическое средство, призванное убеждать других лиц или производить на них впечатление».

Выход из создавшегося положения заключается в развитии экспериментальных методов в экономике. Свидетельством того, что экспериментальные и эконометрические методы признаны в настоящее время наиболее перспективным направлением, является присуждение Нобелевских премий в 2000–2003 гг. исследователям, работающим именно в этой области: Дж. Хекману, Д. Мак-Фаддену, Р. Энглу и др.

3.2. Проблема учета изменений в экономической политике

Макроэкономические модели обычно содержат так называемые внешние факторы: ставка процента за кредит, объем денежной массы, госрасходы и др. Последствия, вызываемые внешним и производным изменением этих факторов, не в состоянии удовлетворительно прогнозировать ни одна из известных макроэкономических моделей.

В качестве примера рассмотрим статистические данные, описывающие динамику темпов роста ВВП в США во второй половине XX в. В следующей таблице представлены данные, соответствующие тем периодам времени, когда президентами США были представители республиканской партии [1].

Президент	Годы правления и темпы роста ВВП, %			
	1-й	2-й	3-й	4-й
Эйзенхауэр	4,0	-1,3	5,6	2,1
Эйзенхауэр	1,7	-0,8	5,8	2,2
Никсон	2,4	-0,3	2,8	5,0
Никсон/Форд	5,2	-0,5	-1,3	4,9
Рейган	1,9	-2,5	3,6	6,8
Рейган	3,4	2,8	3,4	3,9
Среднее значение	3,1	-0,4	3,3	4,1

Несложно заметить, что на каждый второй год правления президента-республиканца приходится спад производства. Это

объясняется тем, что команда экономистов-республиканцев считает приоритетной задачу **снижения уровня инфляции** и сразу же после прихода к власти принимает антиинфляционные меры. Эти меры отрицательно сказываются на уровне занятости населения и темпах роста ВВП. «Одумавшись», республиканцы пытаются снизить уровень безработицы, так как иначе в год выборов их партия может проиграть демократам. В результате к четвертому году уровень безработицы снижается, ВВП растет и экономические перспективы кажутся вполне сносными для среднего американца. Правда, уровень инфляции снова довольно высок, но все уверены, что если президент-республиканец будет избран на очередной четырехлетний срок, то борьба с инфляцией возобновится с новой силой.

Изменения в экономической политике США, обусловленные тем, сколько лет прошло и сколько лет осталось до очередных президентских выборов, безусловно отражаются на состоянии мировой экономики, поскольку США – крупнейшая мировая держава. Возникает вопрос: каким образом можно учесть эти периодические колебания в макроэкономических моделях динамического равновесия? Казалось бы, для этого можно ввести дополнительную искусственную переменную с четырехлетним периодом, особым образом задать функцию ее изменения. С точки зрения математики – это возможно. Однако рассмотрим теперь таблицу, описывающую темпы роста ВВП в США в годы правления президентов-демократов:

Президент	Годы правления и темпы роста ВВП, %			
	1-й	2-й	3-й	4-й
Трумэн	0,0	8,5	10,3	3,9
Кеннеди/Джонсон	2,6	5,3	4,1	5,3
Джонсон	5,8	5,8	2,9	4,1
Картер	4,7	5,3	2,5	-0,2
Среднее значение	3,3	6,2	5,0	3,3

Из этой таблицы следует, что на каждый второй год правления демократов приходится период роста ВВП и, как следствие, снижение безработицы. Это стимулирует инфляцию, демократы начинают борьбу с инфляцией, и в результате к концу четырех-

летнего цикла приходят в среднем к таким же темпам роста ВВП, что и республиканцы (т.е. 3–4% в год).

Поскольку экономическая политика демократов в течение четырехлетнего цикла отличается от политики республиканцев, то искусственную переменную, которую мы предполагали ввести в гипотетическую макроэкономическую модель мировой экономики, следует снабдить существенно иной функцией ее изменения во времени, но с тем же четырехлетним периодом. Возможно ли это? Возможно. Но как предугадать, какая партия придет к власти в США в очередное четырехлетие? Кто из российских политиков придет к власти на будущих выборах и какую экономическую политику будет проводить? Какие военные конфликты и какие природные катаклизмы, вызывающие увеличение госрасходов, произойдут в ближайшие годы?

Предугадать это невозможно, следовательно, невозможно, например, построить математическую модель развития экономики России в ближайшие 5–7 лет. Тем не менее возможности для моделирования некоторых экономических и политических ситуаций все же имеются. Одна из таких возможностей – **агентное моделирование**, которое заключается в попытке имитации реальной ситуации с участием реальных и искусственных агентов [10]. Для предварительного обучения искусственных агентов применяются методы, разработанные в области искусственного интеллекта. Для обучения реальных агентов (людей) – **метод аналогичных теоретико-игровых ситуаций**. Исследования в этом направлении продолжаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агапова Т.А.* Макроэкономика для преподавателей. М.: Дело и сервис, 2003. 128 с.
2. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1993. 336 с.
3. *Аллен Р.* Математическая экономика. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 350 с.
4. *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2002. 444 с.
5. *Дюгерти К.* Введение в эконометрику. М.: ИНФРА-М, 2001. 402 с.
6. *Замков О.О., Толстомятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. М.: Дело и сервис, 2004. 368 с.
7. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 1998. 240 с.
8. *Красс М.С., Чурьнов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2001. 688 с.
9. *Лагоша Б.А.* Оптимальное управление в экономике. М.: Финансы и статистика, 2003. 192 с.
10. *Луговская Л.В.* Эконометрика в вопросах и ответах. М.: Проспект, 2005. 208 с.
11. *Малыхин В.И.* Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2000. 356 с.
12. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 200 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЛИСМАКОВ Александр Иванович
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Введение	3
Глава 1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ	4
§ 1. Элементы линейного программирования	4
§ 2. Элементы нелинейного и динамического программирования	33
§ 3. Элементы теории игр	50
Глава II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МИКРОЭКОНОМИКА	71
§ 1. Теория потребления	71
§ 2. Теория производства	101
§ 3. Модели взаимодействия потребителей и производителей	119
Глава III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ	136
§ 1. Балансовые модели и модели экономического роста	136
§ 2. Модели общего макроэкономического равновесия	149
§ 3. Проблемы верификации макроэкономических моделей и теорий	157
Литература	161

ИБ №

Лицензия ЛР № 65-41 от 01.09.99

Сдано в набор _____ 2004. Подписано в печать _____ 2004.
Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная.
Печать офсетная. Усл. п.л. _____. Уч.-изд. л. _____.
Тираж 300 экз. Заказ № _____. С ____.

Издательство Ростовского университета.
344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 160.

Оригинал-макет и диапозитивы изготовлены ООО Фирма «Ирбис».

Отпечатано с готовых диапозитивов в РПУ РГПУ.
344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 33.