

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ “ Информатика и вычислительная техника”
Кафедра “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизиро-
ванных систем”

Коледов Л.В.

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО для выполнения лабораторных работ по
курсу "Исследование операций"

часть 2.

«Решение ЛП методом перебора опорных решений.

Геометрический метод решения ЛП»

Пособие предназначено для студентов специальностей 010503, 230105

РОСТОВ - НА - ДОНУ

2014

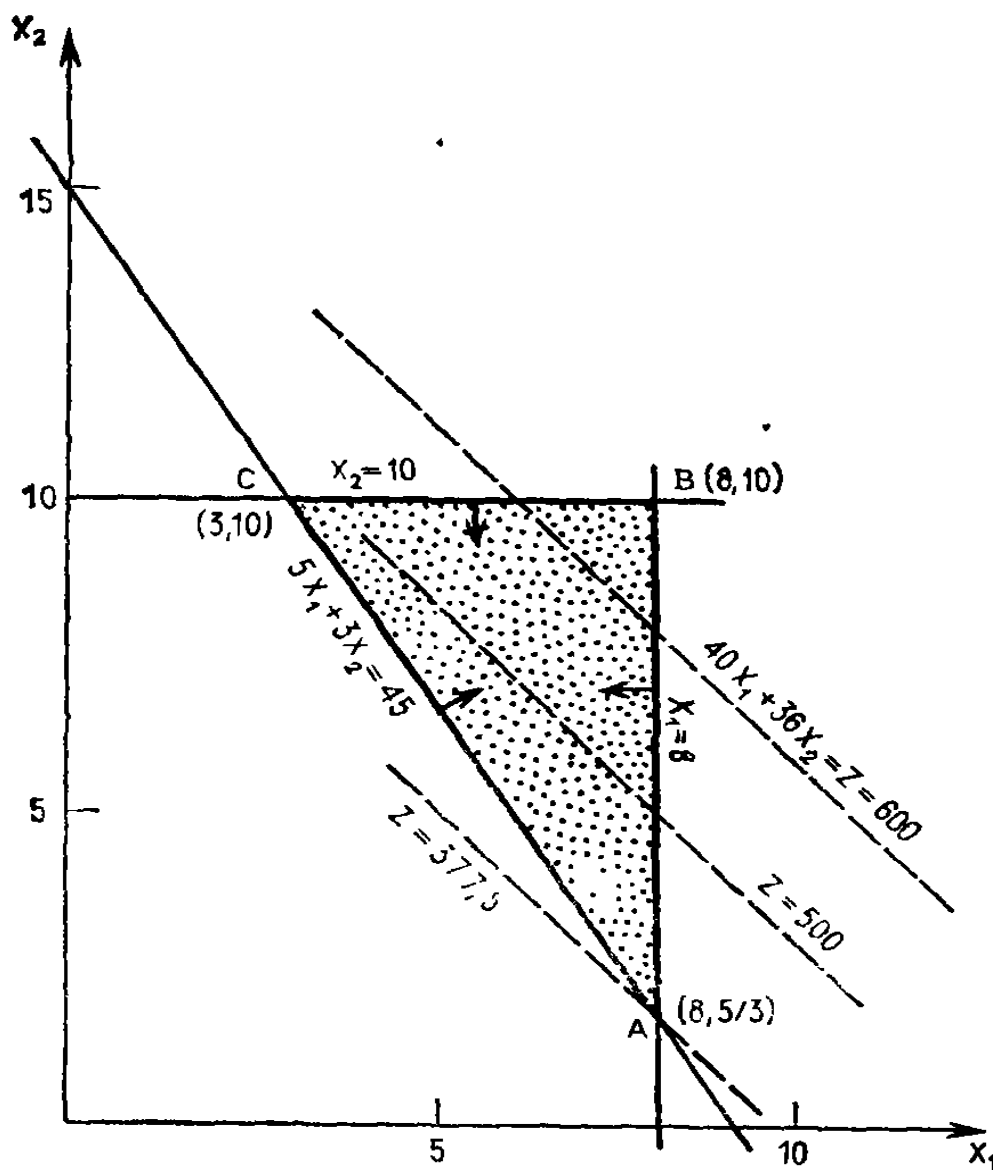
Графическое решение ЛП для двух переменных

Рассмотрим задачу:

$$\begin{array}{ll}\text{минимизировать} & Z = 40x_1 + 36x_2 \\ \text{при ограничениях} & x_1 \leq 8, \quad x_2 \leq 10, \\ & 5x_1 + 3x_2 \geq 45, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.\end{array}$$

В этой задаче требуется найти значения переменных x_1 и x_2 , удовлетворяющие всем ограничениям и обеспечивающие минимальное значение целевой функции. В качестве первого шага решения следует определить все возможные неотрицательные значения переменных x_1 и x_2 , которые удовлетворяют ограничениям. Например, координаты точки $x_1=8$, $x_2=10$ положительны и для этой точки выполняются все ограничения. Такая точка называется *допустимым решением*. Множество всех допустимых решений называется *допустимой областью*. Решение задачи ЛП состоит в отыскании наилучшего решения в допустимой области. Лучшее допустимое решение задачи ЛП называется *оптимальным*. В рассматриваемом примере оптимальное решение представляет собой допустимое решение, минимизирующее целевую функцию $40x_1 + 36x_2$. Значение целевой функции, соответствующее оптимальному решению, называется *оптимальным значением* задачи ЛП.

Для изображения допустимой области следует начертить графики всех ограничений. Все допустимые решения лежат в первом квадранте, поскольку значения переменных неотрицательны. В силу ограничения $5x_1 + 3x_2 \geq 45$ все допустимые решения (x_1, x_2) задачи располагаются по одну сторону от прямой, описываемой уравнением $5x_1 + 3x_2 = 45$. Нужную полуплоскость можно найти, проверив, удовлетворяет ли начало координат рассматриваемому ограничению. Прямую $5x_1 + 3x_2 = 45$ удобно провести, соединяя пару подходящих точек (например, $x_1=0$, $x_2=15$ и $x_1=9$, $x_2=0$).



На рисунке допустимая область заштрихована.

Если заранее зафиксировать значение целевой функции $Z = 40x_1 + 36x_2$, то соответствующие ему точки будут лежать на некоторой прямой. При изменении величины Z эта прямая подвергается параллельному переносу. Рассмотрим прямые, соответ-

вующие различным значениям Z , имеющие с допустимой областью хотя бы одну общую точку. Начальное значение Z положим равным 600. При приближении прямой к началу координат значение Z уменьшается. Если прямая имеет хотя бы одну общую точку с допустимой областью ABC , ее можно сместить в направлении начала координат. Ясно, что для прямой, проходящей через угловую точку A с координатами $x_1=8$, $x_2=1,6$, дальнейшее движение невозможно. Точка A представляет собой наилучшую допустимую точку, соответствующую наименьшему значению Z , равному 377,6. Следовательно, $x_1=8$, $x_2=1,6$ — *оптимальное решение* и $Z=377,6$ — *оптимальное значение* рассматриваемой задачи ЛП.

Общая постановка задачи линейного программирования

Сформулируем задачу линейного программирования в *каноническом виде*. Найти значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые:

1) удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (1)$$

2) являются неотрицательными:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; \quad (2)$$

3) дают наименьшее (наибольшее) значение целевой функции:

$$L = L(\bar{x}) = L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (3)$$

Пусть система (1) совместна и среди ее уравнений нет линейно зависимых, т.е. ни одно уравнение не является следствием остальных. Для того чтобы эта система имела бесконечное множество решений, нужно, чтобы число уравнений m было меньше числа неизвестных n . Предположим, что $k = n - m > 0$. Выделим m базисных неизвестных, которые можно выразить через остальные k свободных неизвестных. Деление неизвестных (переменных) на базисные и свободные является условным и зависит только от нашего выбора.

Допустим, что в системе уравнений (1) проведено одно из возможных разбиений переменных на базисные и свободные. Положим все свободные переменные равными нулю и определим из системы (1) соответствующие значения базисных переменных. Если эти значения неотрицательны, т.е. выполняется условие (2), то получено одно из допустимых решений, которое называется базисным (опорным).

Можно доказать следующую теорему, которая имеет важное значение в теории линейного программирования.

Теорема 1. Если оптимальное решение задачи линейного программирования существует, то оно является опорным.

Эта теорема делает возможным следующий алгоритм опорных решений:

- 1) Рассматриваются все возможные разбиения переменных на базисные и свободные.
- 2) Для каждого разбиения находят соответствующее опорное решение.
- 3) Из всех найденных опорных решений выбирают допустимые решения.
- 4) Подставляя каждое из допустимых решений в целевую функцию, находят искомое оптимальное решение.

В качестве иллюстрации решим следующую задачу этим методом.

Задача 1. Система ограничений задачи 1 имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$C(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min.$$

Решение.

Преобразуем задачу к каноническому виду. Для этого введем неотрицательные вспомогательные переменные x_3, x_4, x_5 , так, чтобы неравенства системы (4) превратились в уравнения:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 6x_2 - x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 8, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5. \end{cases} \quad (5)$$

Количество базисных (опорных) решений системы (5) равно количеству всевозможных выборов трех базисных неизвестных из данных пяти. То есть:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Согласно методу опорных решений, необходимо из всех допустимых опорных решений выбрать то, которому соответствует наименьшее значение целевой функции $C(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2$.

Найдем все опорные решения.

1) Пусть x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные; x_4, x_5 – свободные. Полагая свободные неизвестные равными нулю, получим из системы (5) следующую:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 6x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Решая ее, получим первое опорное решение: (6; 1; 10; 0; 0).

2) Пусть x_1, x_2, x_4 – базисные; x_3, x_5 – свободные. При $x_3 = 0, x_5 = 0$ система (5) принимает вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 6x_2 - x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Решая ее, получаем второе опорное решение: (2; 3; 0; 8; 0).

Следующие опорные решения находим аналогично:

3) x_1, x_2, x_5 – базисные. Опорное решение: $\left(\frac{42}{17}; \frac{27}{17}; 0; 0; -\frac{40}{17}\right)$;

4) x_2, x_3, x_4 – базисные. Опорное решение: (0; 4; -5; 12; 0);

5) x_2, x_4, x_5 – базисные. Опорное решение: (0; 9; 0; 42; 10);

6) x_2, x_3, x_5 – базисные. Опорное решение: (0; 2; -7; 0; -4);

7) x_1, x_3, x_4 – базисные. Опорное решение: (8; 0; 12; -4; 0);

8) x_1, x_3, x_5 – базисные. Опорное решение: (12; 0; 27; 0; 4);

9) x_1, x_4, x_5 – базисные. Опорное решение: (3; 0; 0; -9; -5);

10) x_3, x_4, x_5 – базисные. Опорное решение: (0; 0; -9; -12; -8).

Исключая те опорные решения, которые содержат отрицательные значения неизвестных, получим следующие четыре допустимых решения:

1) (6; 1; 10; 0; 0); 2) (2; 3; 0; 8; 0);

5) (0; 9; 0; 42; 10); 8) (12; 0; 27; 0; 4).

Найдем соответствующие им значения целевой функции:

1) $C(6; 1) = 30$; 2) $C(2; 3) = 26$;

5) $C(0; 9) = 54$; 8) $C(12; 0) = 48$.

Наименьшее значение целевой функции получилось при подстановке в нее второго опорного решения: $C_{\min} = C(2; 3) = 26$.

Следовательно, оптимальное решение задачи 1: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

Задание лабораторной работы 2.

Применяя описанные методы решить Ваши задания из работы 1. Отчет может содержать и программное решение (дай Бог Вашему телу волка поймать). Надеюсь, однако, получить при защите по возможности более убедительные комментарии. Вопросы, которые будем обсуждать, относятся к переходу от стандартной формы ЛП к канонической, графической интерпретации линейного неравенства с

двумя переменными и понятию линии уровня функции двух переменных. А системы можно порешать и используя программу.

Литература.

1. Методы формализованного представления систем управления: Методические указания по курсу «Исследование систем управления»/ Сост.: Росс С.И. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2. Морозов В. В. и др. Исследование операций в задачах. М: Высшая школа, 1986.
3. Полисмаков А.И, Математическая экономика. Изд. РГУ. 2006 г.