ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

Учебно-методическое пособие

по дисциплинам

«Математическая логика», «Математическая логика и теория алгоритмов»

Автор
Ляхницкая О. В.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения по направлениям 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование, 09.03.04 Программная инженерия.

Авторы

ст. преподаватель
каф. ПОВТиАС,
Ляхницкая О.В.

Оглавление

1. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Задания и упражнения:

1.1. Составить таблицы истинности для формул.

1. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \wedge C) \vee A$
2. $(A \to B \vee C) \wedge \overline{A \wedge C} \to A$
3. $A \to (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee \overline{C})$
4. $(A \wedge \overline{B} \to B) \to (A \to B)$
5. $A \wedge (B \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \to A) \vee B$
6. $A \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$
7. . $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (\overline{B} \vee C))$
8. $(A \vee B \to \overline{C}) \to A$
9. $\neg(A \to \overline{(B \wedge A)}) \to A \vee C$
10. $A \to (B \vee C) \leftrightarrow (A \to B) \vee (A \to C)$
11. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{A \vee B})$
12. $(x \to y) \oplus ((y \to \bar{z}) \to x \cdot y)$;
13. $(x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \to (y \to \bar{z}))$;
14. $(x \vee (y \to z)) \cdot (x \oplus y)$;
15. $\overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \mid (x \oplus y \cdot z)$;
16. $\bar{x} \cdot (y \cdot z) \vee \overline{x \to z}$;

17. $((x \vee y) \cdot \bar{z} \to ((x \sim \bar{z}) \oplus \bar{y})) \cdot ((x \oplus y) \cdot \bar{z})$;

18. $(x \to y \,\&\, z) \,\&\, \overline{x \to y}$;

19. $(\bar{x} \vee y) \to ((y \mid \bar{z}) \to (x \sim x \cdot z))$;

20. $xy \vee (\overline{x \to x\bar{y}} \to z)$;

21. $(x \mid \bar{y}) \to ((y \downarrow \bar{z}) \to (x \oplus z))$;

22. $x \cdot (y \cdot z) \oplus (\bar{x} \to z)$;

23. $(((x \mid y) \downarrow \bar{z}) \mid y) \downarrow (\bar{y} \to z)$;

24. $((x \mid y) \downarrow (y \mid \bar{z})) \cdot (x \to (y \to z))$;

25. $(x \cdot y \to z) \vee ((x \downarrow y) \mid z)$;

26. $((x \to y \cdot z) \oplus (x \sim y)) \vee (y \to x \cdot z)$;

27. $\overline{x \oplus y \cdot z} \cdot \overline{\bar{y} \to x \cdot z} \cdot (\bar{x} \downarrow y)$

1.2. Выяснить, являются ли формулы тождественно истинными, тождественно ложными или выполнимыми:

1. $\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}}$
2. $((x \to y) \wedge x) \to y$
3. $((x \leftrightarrow y) \wedge \bar{x}) \to \bar{y}$
4. $((x \vee y) \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \to x)$

5. $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$

6. $\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))}$

7. $(x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$

8. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$

9. $\overline{(x \to y) \to ((x \wedge z) \to (y \wedge z))}$

10. $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$

11. $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to ((x \vee y) \to z)$

12. $(x \to y) \wedge x \to x \vee y \vee z$

13. $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

14. $xy \vee \bar{x}\bar{y} \leftrightarrow (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

15. $(x \to y) \oplus (x \to z)$

16. $\overline{(x \vee y)} \leftrightarrow (x \downarrow y)$

1.3. Установить эквивалентность формул с помощью таблиц истинности .

1. $A \vee B \wedge C$ и $(A \vee B) \wedge C$
2. $\bar{A} \vee \bar{B}$ и $\overline{A \wedge B}$
3. $A \to B$ и $\bar{A} \vee B$
4. $A \leftrightarrow B$ и $(\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$
5. $\bar{A} \vee \bar{B}$ и $A \to B$
6. $A \wedge B$ и $\bar{A} \vee \bar{B}$

7. $A\wedge(\overline{A}\vee B)$ и B

8. $(A\vee B)\wedge(\overline{A}\vee B)$ и A

9. $\overline{A\leftrightarrow B}$ и $\overline{A}\leftrightarrow\overline{B}$

10. $A\leftrightarrow B$ и $(A\to B)\wedge(A\to\overline{B})$

11. $A\vee B$ и $\overline{A\wedge\overline{B}}$

12. $(A\vee B)\wedge(\overline{A}\vee B)$ и B

13. $(A\vee B)\wedge(\overline{A}\vee\overline{B})$ и $(A\vee B)\wedge(\overline{A\wedge B})$

14. $(\overline{A}\to B)\wedge(A\to\overline{B})$ и $(\overline{B}\to A)\wedge(B\to\overline{A})$

15. $\overline{A}\wedge B\vee\overline{C}\wedge B$ и $B\wedge\overline{A\wedge C}$

1.4. Доказать равносильности: используя основные равносильности алгебры логики :

1. $x\sim y\equiv(x\to y)\&(y\to x)$;
2. $x\downarrow y\equiv((x\mid x)\mid(y\mid y))\mid((x\mid x)\mid(y\mid y))$
3. $x\vee(y\sim z)\equiv(x\vee y)\sim(x\vee z)$;
4. $x\&(y\sim z)\equiv((x\& y)\sim(x\& z))\sim x$;
5. $x\to(y\sim z)\equiv(x\to y)\sim(x\to z)$;
6. $x\vee(y\to z)\equiv(x\vee y)\to(x\vee z)$;
7. $x\&(y\to z)\equiv(x\to y)\to(x\& z)$;
8. $x\to(y\vee z)\equiv(x\to y)\vee(x\to z)$;

9. $x \to (y \,\&\, z) \equiv (x \to y) \,\&\, (x \to z)$;
10. $x \to (y \to z) \equiv (x \to y) \to (x \to z)$
11. $x \to y \equiv xy \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y}$
12. $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$
13. $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$
14. $x \oplus (y \vee z) = (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$
15. $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
16. $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$.

1.5. Упростить формулы.

1. $((p \to q) \to p) \to \overline{p}$
2. $(A_1 \to A_2) \wedge (A_2 \to A_3) \to (A_3 \to A_1)$
3. $\neg((A \to B) \wedge (B \to \overline{A}))$
4. $A \vee \neg(B \wedge \overline{C}) \vee \neg(\overline{A} \vee B \vee \overline{C})$
5. $(A \to B) \to (\overline{B} \leftrightarrow \overline{A})$
6. $(A \to \overline{B} \wedge \overline{A}) \vee B$
7. $A_1 \wedge A_2 \wedge (A_3 \vee \overline{A}_3)$
8. $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \overline{r})$
9. $(r \vee s \vee \overline{t}) \wedge r \wedge (p \vee \overline{s} \vee \overline{t})$
10. $(d \vee \overline{a}\,\overline{d} \vee a) \downarrow \overline{d}$
11. $c \vee \overline{c} \wedge b \vee \overline{c} \vee \overline{a}$

12. $(p \to q) \vee (p \to (q \wedge p))$

13. $\overline{p \to \overline{(q \wedge p)}} \to p \vee r$

14. $p \wedge (q \vee \overline{p}) \wedge ((\overline{q} \to p) \vee q)$

15. $p \wedge q \wedge (s \to (s \vee t))$

1.6. Используя дистрибутивный закон перейти от заданной КНФ формулы А к ДНФ:

1. $A = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3);$
2. $A = x_1 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3);$
3. $A = (x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3);$
4. $A = (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3);$
5. $A = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3);$
6. $A = (x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_4) \cdot (x_3 \vee \overline{x}_4);$
7. $A = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_4).$

1.7. Используя дистрибутивный закон перейти от заданной ДНФ формулы А к ее КНФ:

1. $A = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3;$
2. $A = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3;$
3. $A = \overline{x}_1 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3;$
4. $A = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_1\overline{x}_2 x_3;$
5. $A = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3;$
6. $A = x_1 x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_4 \vee x_3 x_4;$

7. $A = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4;$

8. $A = x_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4.$

1.8. Привести к ДНФ(СДНФ), КНФ(СКНФ) следующие формулы:

1. $(x_1 \vee x_2) \to x_3$;
2. $A \wedge B \to (A \to \bar{B})$
3. $\overline{(A \vee \bar{B})}\,\overline{(A \wedge B)}$
4. $(x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \mid x_2 x_3);$
5. $\overline{(x \mid \bar{y}) \oplus (z \to \bar{x})}$;
6. $((x \oplus y) \mid \bar{z})\ \&\ (\bar{y} \to z)$;
7. $(z \to x) \oplus (x \mid \bar{y})$;
8. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$;
9. $(x \vee \bar{y} \to x \wedge z) \to \overline{(x \to \bar{x})} \vee y \wedge \bar{z};$
10. $x_1 \to (x_2 \to x_3 x_4);$
11. $(\bar{a} \to c) \to \overline{(\bar{b} \to \bar{a})}$;
12. $(\bar{a} \to \bar{b}) \to (b \wedge c \to a \wedge c)$;
13. $(x_1 \to x_2 x_3 x_4) \cdot (x_3 \to x_1 \bar{x}_2)$;
14. $(x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \to \bar{x}_2 x_4);$

15. $(a \wedge b \to b \wedge c) \to ((a \to b) \to (c \to b))$

1.9. . Представив функцию $f(\tilde{x}^n)$ формулой над множеством связок {&, $\bar{\ }$}, преобразуйте её в полином Жегалкина

1. $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to (x_2 \to \bar{x}_1 x_2);$
2. $f(\tilde{x}^2) = x_1 \cdot (x_2 \sim x_1 \bar{x}_2);$
3. $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2) | (x_2 \downarrow x_3);$
4. $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_2 | x_3);$
5. $f(\tilde{x}^3) = x_1 \downarrow ((x_1 \to \bar{x}_2) \vee \bar{x}_3);$
6. $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \cdot ((x_1 \to x_2) \to x_3);$
7. $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \downarrow x_3);$
8. $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to x_2) \to (x_3 \to x_1 x_4);$
9. $f(\tilde{x}^4) = x_1 \vee (x_2 \to ((x_3 \to x_2) \to x_4));$
10. $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) x_4 \vee x_1 x_2 x_3.$

1.10 . Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций:

1. $f(\tilde{x}^2) = x_1 | x_2;$
2. $f(\tilde{x}^2) = (0100);$

3. $f(\widetilde{x}^3) = x_1(x_2 \vee \bar{x}_3);$
4. $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \to x_3);$
5. $f(\widetilde{x}^3) = (01101001);$
6. $f(\widetilde{x}^3) = (10001110);$
7. $f(\widetilde{x}^3) = (00000111);$
8. $f(\widetilde{x}^3) = (01100110);$
9. $f(\widetilde{x}^4) = (1000000000000001);$
10. $f(\widetilde{x}^4) = (0000100010010000).$

1.11. Методом треугольника Паскаля построить полином Жегалкина:

1. $f(\widetilde{x}^2) = (1000);$
2. $f(\widetilde{x}^2) = (0010);$
3. $f(\widetilde{x}^3) = (01101110);$
4. $f(\widetilde{x}^3) = (01110011);$
5. $f(\widetilde{x}^3) = (10101110);$
6. $f(\widetilde{x}^3) = (10000100);$
7. $f(\widetilde{x}^4) = (0000010001100111);$
8. $f(\widetilde{x}^4) = (1010101010110110);$

9. $f(\tilde{x}^4) = (0100000000010001);$

10. $f(\tilde{x}^4) = (0000000100010001).$

1.12. Представив функцию *f* полиномом, выяснить, является ли она линейной:

1. $f = \overline{x \to y} \oplus \bar{x}y;$
2. $f = x\bar{y}(x \sim y);$
3. $f = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee z;$
4. $f = (xy \vee \bar{x} \cdot \bar{y})z \vee \bar{z}(x\bar{y} \vee \bar{x}y);$
5. $f = ((x \to y)(y \to x)) \sim z;$
6. $f = xy\bar{z} \vee x\bar{y};$
7. $f = xyz \oplus xy\bar{z} \oplus \bar{x}y;$
8. $f = m(x, y, z) \oplus \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \oplus xyz;$
9. $f = (x \vee yz) \oplus xyz;$
10. $f = (x \vee yz) \oplus \bar{x}yz;$
11. $f = (xyz \vee x\bar{y}\bar{z}) \oplus x(y \oplus z);$
12. $f = (xyz \oplus x(\bar{y}\bar{z}) \oplus x(y \vee z);$
13. $f = (xyz \oplus \bar{x}\bar{y}z) \vee (x\bar{y}z \oplus \bar{x}yz);$
14. $f = (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \sim xy\bar{z}) \sim (x\bar{y}z \sim \bar{x}yz).$

1.13. Выяснить, является ли линейной функция *f*, заданная векторно:

1) $\tilde{a}_f = (1001);$

2) $\tilde{a}_f = (10010110);$

3) $\tilde{a}_f = (11000011);$

4) $\tilde{a}_f = (10100101);$

5) $\tilde{a}_f = (10100110);$

6) $\tilde{a}_f = (01101001);$

7) $\tilde{a}_f = (1001011001101001);$

8) $\tilde{a}_f = (0110100101101001);$

9) $\tilde{a}_f = (1010010110011100);$

10) $\tilde{a}_f = (1010);$

11) $\tilde{a}_f = (1010011001100101);$

12) $\tilde{a}_f = (0011110011000011);$

13) $\tilde{a}_f = (1001100101100110).$

1.14. Проверить, является ли функция *f* монотонной:

1. $\tilde{a}_f = (00110111);$
2. $\tilde{a}_f = (01010111);$
3. $\tilde{a}_f = (0010001101111111);$

4. $\tilde{a}_f = (00010111);$
5. $\tilde{a}_f = (01010011);$
6. $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$
7. $f = (x_1 \oplus x_2)\,\&\,(x_1 \sim x_2);$
8. $f = x_1 \to (x_2 \to x_1);$
9. $\tilde{a}_f = (01100110);$
10. $f = (x_1 \oplus x_2)x_1x_2;$
11. $f = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_3x_1;$
12. $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_1.$

1.15. Проверить монотонность функций.

1. $x_1 \to (x_2 \to x_3)$
2. (00110111)
3. $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1$
4. $\bar{x} \to yz$
5. (00011100)
6. $(\overline{\bar{x} \vee \bar{y}})z$
7. $(\bar{x} \to y) \vee z$
8. $xy \oplus yz$
9. $\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$
10. $xz(x \oplus z)$

11. (00101111)
12. $(\bar{x} \leftrightarrow y) \wedge xy$

1.16. Выяснить, принадлежит ли функция f множеству $T_1 \setminus T_0$:

1. $f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1);$
2. $f = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to x_1));$
3. $f = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2;$
4. $f = (x_1 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2;$
5. $f = \overline{\bar{x}_1x_2}\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_1x_2x_3;$
6. $\tilde{a}_f = (10010110);$
7. $\tilde{a}_f = (11011001);$
8. $\tilde{a}_f = (10000111);$
9. $\tilde{a}_f = (00011011).$

1.17. Выяснить, полна ли система функций:

1. $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y, xy \oplus yz \oplus zx\};$
2. $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\};$
3. $A = \{1, \bar{x}, x(y \sim z) \oplus \bar{x}(y \oplus z), x \sim y\};$
4. $A = \{0, \bar{x}, x(y \oplus z) \oplus yz\};$
5. $A = \{\bar{x}, x(y \sim z) \sim (y \vee z), x \oplus y \oplus z\};$
6. $A = \{\bar{x}, x(y \sim z) \sim yz, x \oplus y \oplus z\};$
7. $A = \{xy(x \oplus y), xy \oplus x \oplus y, 1, xy \oplus yz \oplus zx\};$

8. $A=\{ xy(x\oplus z),1\};$
9. $A=\{ x\to y,\bar{x}\to \bar{y}x,x\oplus y\oplus z,1\};$
10. $A=\{ x\to y,x\oplus y\}.$

1.18. Выяснить, полна ли система *A* функций, заданных векторами своих значений:

1. $A=\{ f_1=(0110),f_2=(11000011),f_3=(10010110)\};$
2. $A=\{ f_1=(0111),f_2=(01011010),f_3=(01111110)\};$
3. $A=\{ f_1=(0111),f_2=(10010110)\};$
4. $A=\{ f_1=(0110),f_2=(11000011),f_3=(10010110)\};$
5. $A=\{ f_1=(1001),f_2=(11101000)\};$
6. $A=\{ f_1=(11),f_2=(0111),f_3=(00110111)\};$
7. $A=\{ f_1=(10),f_2=(00110111)\};$
8. $A=\{ f_1=(11),f_2=(00),f_3=(00110101)\};$
9. $A=\{ f_1=(10000001),f_2=(0111),f_3=(1011)\};$
10. $A=\{ f_1=(10000001),f_2=(0110),f_3=(1001)\}.$

1.19 . Выяснить, полна ли система *A*:

1. $A=(S\cap M)\cup(L\setminus M);$
2. $A=(L\cap T_1\cap T_0)\cup S\setminus(T_0\cup T_1);$
3. $A=(L\cap T_1)\cup(S\cap M);$
4. $A=(L\cap T_1)\cup(S\setminus T_0);$

5. $A=(M\setminus T_0)\bigcup(L\setminus S)$;

6. $A=(M\setminus T_0)\bigcup(S\setminus L)$;

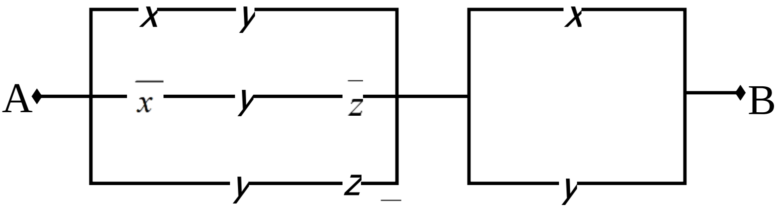
7. $A=(L\bigcap M)\bigcup(S\setminus T_0)$;

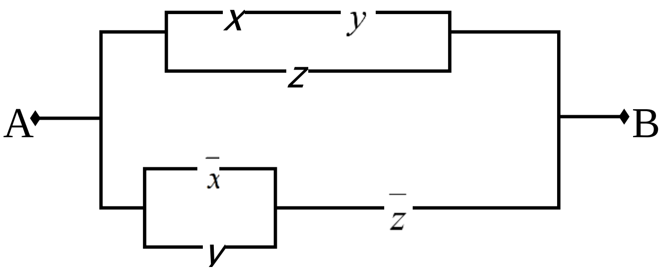
8. $A=((L\bigcap M)\setminus T_0)\bigcup(S\bigcap T_1)$;

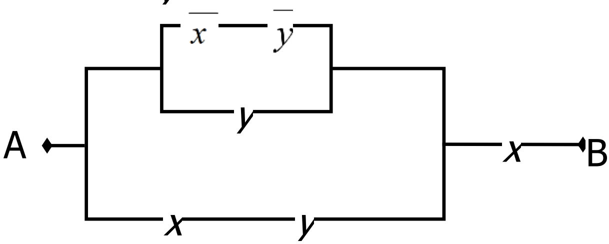
9. $A=(M\setminus S)\bigcup(L\bigcap S)$;

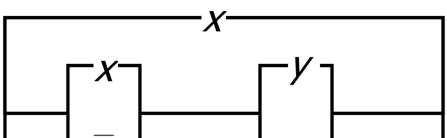
10. $A=(M\bigcap S)\bigcup(T_0\setminus M)\bigcup(T_1\bigcap S)$.

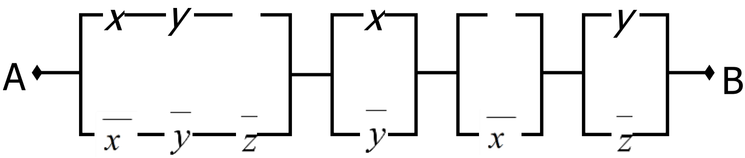
1.20. Найти функции проводимости следующих схем, если возможно упростить схемы.









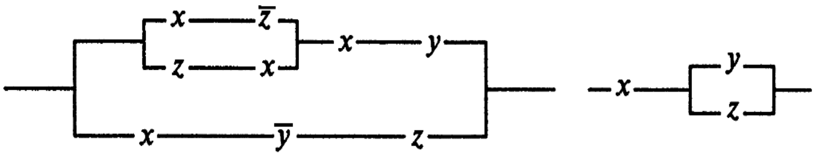


1.21 Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

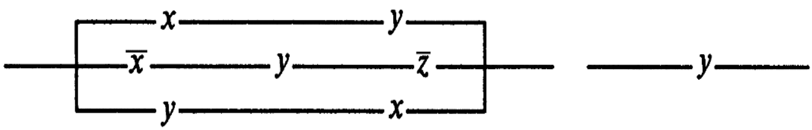
1. $(xy \to \bar{x}y)(x \vee zy)$
2. $(x \to y) \to \bar{x}(y \vee z)$;
3. $(x \to (y \to z)) \to (\bar{x} \to y)$;
4. $x(\bar{y}z \vee x \vee y)$,
5. $xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y$;
6. $x(yz \vee \bar{y}\bar{z}) \vee \bar{x}(\bar{y}z \vee y\bar{z})$,
7. $(\bar{x} \vee y)\&(zy \vee x) \vee u$;
8. $(x|\bar{y}) \to ((x \vee y)|(x \vee z))$;
9. $(z \downarrow xy)((x \vee \bar{z}) \downarrow yz)$;
10. $(x \oplus \bar{y}) \vee (x \oplus z)(\bar{y} \oplus \bar{z})$
11. $(xy \oplus z) \to \bar{x}z$;
12. $(\bar{x} \oplus \bar{y})(x \leftrightarrow y)$;
13. $xy|(\bar{x} \to x(y \vee z))$;
14. $(x \to (y \to \bar{z})) \vee (xy \leftrightarrow z)$.

1.22 Проверьте равносильность следующих релейно- контактных схем:

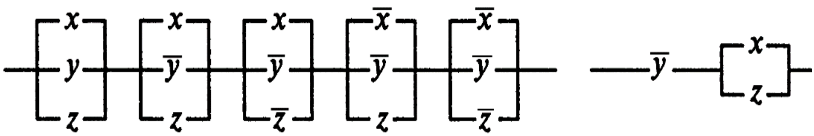
1.



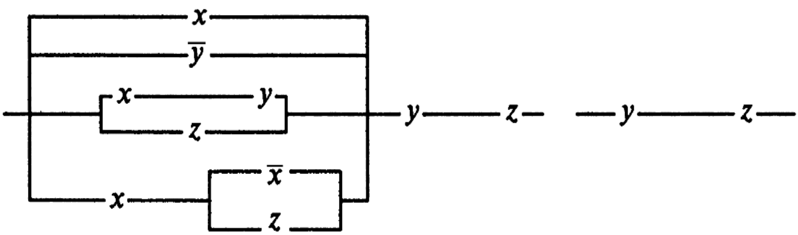
2.



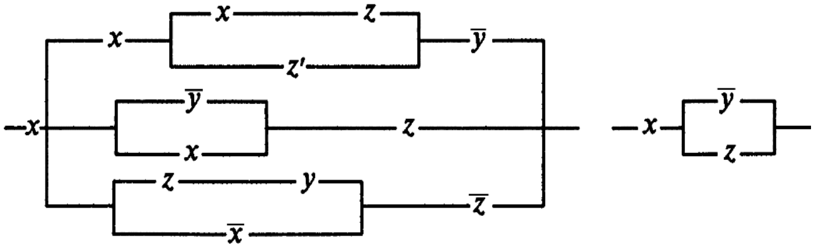
3.



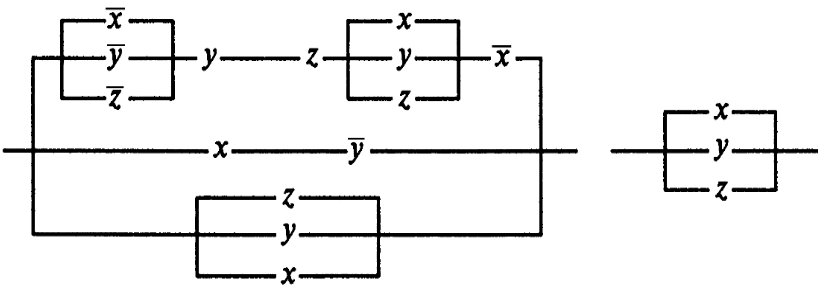
4.



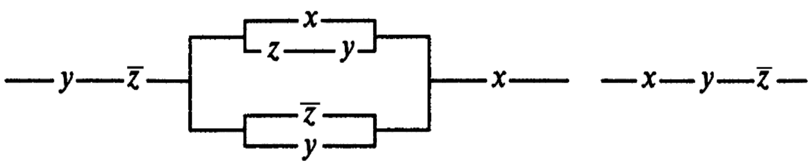
5.



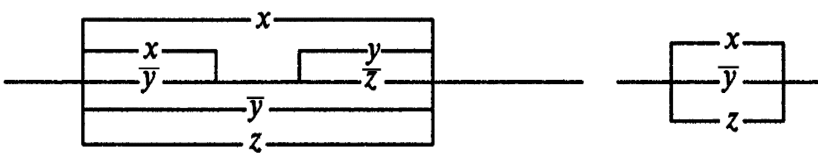
6.



7.



8.



1.23. Проверить совместность утверждений:

1. Либо свидетель не был запуган, либо, если Генри покончил жизнь самоубийством, то записка была найдена. Если свидетель был запуган, то Генри не покончил жизнь самоубийством. Если записка была найдена, то Генри покончил жизнь самоубийством.

***Решение*.** Введем булевы переменные: x – «свидетель не запуган», y – «Генри покончил самоубийством», z – «записка найдена». Составим конъюнкцию посылок и посмотрим, не является ли она противоречием.

Здесь употреблено выражение «либо..., либо...», поэтому первое составное высказывание следует записать в виде

$x \oplus (y \to z)$, что эквивалентно $x(\overline{y \to z}) \vee \bar{x}(y \to z)$.

Конъюнкция посылок имеет вид:

$$(x(\overline{y \to z}) \vee \bar{x}(y \to z))\&(\bar{x} \to \bar{y})\&(z \to y) =$$
$$= (x(\overline{\bar{y} \vee z}) \vee \bar{x}(\bar{y} \vee z))\&(x \vee \bar{y})\&(\bar{z} \vee y) =$$
$$= (xy\bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{x}z)\&(x\bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z} \vee xy) =$$
$$= xy\bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{z}(xy \vee \bar{x} \cdot \bar{y}) = \bar{z}(x \sim y),$$

это не равно тождественному 0, следовательно, высказывания не являются противоречивыми.

2. Четыре ученицы: Маша (М), Нина (Н), Ольга (О) и Поля (П) участвовали в соревнованиях и заняли первые 4 места. На вопрос, кто какое место занял, было дано 3 ответа:

О – второе, П – третье;

О – первое, Н – второе;

М – второе, П – четвертое.

В каждом из этих ответов одна часть верна, а другая нет. Какое место заняла каждая девушка?

Решение. Введем булевы переменные: x – «О – второе», y – «П – третье», z – «О – первое», t – «Н – второе», u – «М – второе», v – «П – четвертое». Получим систему уравнений: $x\bar{y} \vee \bar{x}y = 1,$ так как если x истинно, тогда y ложно, а $\bar{y}$ – истинно и $x\bar{y} = 1,$ либо $\bar{x}y = 1.$ Аналогично, $z\bar{t} \vee \bar{z}t = 1, u\bar{v} \vee \bar{u}v = 1.$ Удобнее записать эту систему следующим образом:

$x \oplus y = 1, z \oplus t = 1, u \oplus v = 1.$

Отсюда $(x \oplus y)(z \oplus t)(u \oplus v) = 1$ или

$(xy \oplus yz \oplus xt \oplus yt)(u \oplus v) = 1,$ окончательно,

$xzu \oplus yzu \oplus xtu \oplus ytu \oplus xzv \oplus yzv \oplus xtv \oplus ytv = 1.$

Кроме того, $xz = 0, yv = 0, xu = 0, xt = 0, ut = 0,$ так как одна ученица не может занять 2 места и одно место не может быть занято двумя ученицами. В результате в последнем уравнении останется единственный ненулевой член $yzu = 1.$ Отсюда $y = 1, z = 1, u = 1$ или О – первая, М – вторая, П – третья, Н – четвертая.

3. Во время перемены в классе были Аня, Борис, Ваня и Майя. Один из них разбил окно. На вопрос: ″Кто разбил окно?″, были даны ответы:

Аня: 1) Я не разбивала. 2) Я сидела и читала. 3) Майя знает, кто разбил.

Борис: 1) Я этого не делал. 2) С Майей я давно не разговариваю. 3) Это сделал Ваня.

Ваня: 1) Я не виновен. 2) Разбила Майя. 3) Борис лжёт, говоря, что разбил я.

Майя: 1) Я не разбивала. 2) Это вина Ани. 3) Борис знает, что я не виновна, т.е. мы с ним беседовали во время перемены.

Затем каждый признался, что из трёх ответов каждого, два – истинны, а один ложный. Кто разбил окно?

Решение. Введем булевы переменные. Высказывания, принадлежащие Ане, обозначим буквами x с индексами x_1, x_2, x_3; высказывания, принадлежащие Борису – y_1, y_2, y_3 соответственно, принадлежащие Ване – z_1, z_2, z_3 и принадлежащие Майе – t_1, t_2, t_3.

Запишем все формулы, которые являются тавтологиями, получим уравнения:

$$x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 = 1;$$

$$y_1y_2 \oplus y_2y_3 \oplus y_1y_3 = 1;$$

$$z_1z_2 \oplus z_2z_3 \oplus z_1z_3 = 1;$$

$$t_1t_2 \oplus t_2t_3 \oplus t_1t_3 = 1.$$

Выпишем все противоречия:

$$x_1x_2x_3 = 0,\ y_1y_2y_3 = 0,\ z_1z_2z_3 = 0,\ t_1t_2t_3 = 0,$$

$$x_1y_1z_1t_1 = 0,\ z_2y_3 = 0,$$

$$z_3y_3=0,\ z_1y_3=0,\ z_2t_1=0,\ z_2t_2=0,\ x_1t_2=0,$$

$y_2t_3=0.$

Чтобы иметь возможность воспользоваться этими противоречиями, возьмём конъюнкцию двух тавтологий:

$y_1y_2\oplus y_2y_3\oplus y_1y_3$ и $z_1z_2\oplus z_2z_3\oplus z_1z_3$,

что тоже будет тавтологией. Получим

$$y_1y_2z_1z_2\oplus y_2y_3z_1z_2\oplus y_1y_3z_1z_2\oplus$$

$$\oplus y_1y_2z_2z_3\oplus y_2y_3z_2z_3\oplus y_1y_3z_2z_3\oplus y_1y_2z_1z_3\oplus y_2y_3z_1z_3\oplus y_1y_3z_1z_3=1.$$

В этой формуле слева останется всего три ненулевых члена:

$y_1y_2z_1z_2\oplus y_1y_2z_1z_3\oplus y_1y_2z_2z_3=1$ или

$y_1y_2(z_1z_2\oplus z_2z_3\oplus z_1z_3)=1.$ Последнее уравнение даёт $y_1=1,\ y_2=1.$ Так как $y_2t_3=0$ и $y_2=1,$ то $t_3=0$ и следовательно, $t_2t_3\oplus t_1t_3=0,$ а $t_1t_2=1.$ Следовательно, окно разбила Аня.

Рассмотрим еще одну задачу, для решения которой не требуется аппарат логики высказываний, но тем не менее эта задача относится к логическим задачам.

4. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные, а один рыжие волосы, но ни у кого цвет волос не совпадает с фамилией», – заметил черноволосый. «Ты прав», – сказал Белов. Какой цвет волос у художника?

5. На склад, имеющий два помещения для хранения больших количеств двух видов топлива – угля и кокса, каждого отдельно, поступают грузовики, каждый всякий раз с одним из этих видов топлива. К механизму, открывающему шахты, предъявляется требование, чтобы он открыл шахту в помещении для угля, если прибывает грузовик с этим топливом, и шахту в помещении для кокса, если прибывает грузовик с коксом. Для обеспечения хорошей сортировки топлива было предъявлено дополнительное требование: всякий раз в помещение склада впускается только один грузовик и открывается лишь одна шахта.

Спрашивается, имеет ли этот механизм также следующее свойство: если не въехал в помещение склада грузовик с углем, то шахта для угля не откроется, а если не въехал грузовик с коксом, то не откроется шахта для кокса.

6. На предприятии есть три цеха: *A*, *B*, *C*, договорившиеся о порядке утверждения проектов, а именно:

1. Если цех *B* не участвует в утверждении проекта, то в этом утверждении не участвует и цех *A*.

2. Если цех *B* принимает участие в утверждении проекта, то в нем принимают участие цеха *A* и *C*.

Спрашивается, обязан ли при этих условиях цех *C* принимать участие в утверждении проекта, когда в нем принимает участие цех *A*?

7. Перед судом стоят три человека, из которых каждый может быть либо туземцем, либо колониалистом. Судья знает, что туземцы всегда отвечают на вопросы правдиво, между тем как колониалисты всегда лгут. Однако судья не знает, кто из них туземец, а кто колониалист. Он спрашивает первого, но не понимает его ответа. Поэтому он спрашивает сначала второго, а потом третьего о том, что ответил первый. Второй говорит, что первый назвал себя туземцем. Третий говорит, что первый назвал себя колониалистом. Кем были второй и третий подсудимые?

8. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев - 7-ой».

Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев - 8-ой».

Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин - 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

9. Семья, состоящая из отца *A,* матери *B* и трех дочерей С, *D, E* купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

Когда отец *A* смотрит передачу, то мать *B* делает то же.

Дочери *D* и *E,* обе или одна из них, смотрят передачу.

Из двух членов семьи - мать *B* и дочь *C* - смотрят передачу одна и только одна.

Дочери *C* и D или обе смотрят, или обе не смотрят.

Если дочь *E* смотрит передачу, то отец *A* и дочь *D* делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

10 . Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

Если первый сдал, то и второй сдал.

Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.

Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.

Если четвертый сдал, то и первый сдал.

11. Четыре друга - Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С), Деев *(Д)* решили провести каникулы в четырех различных городах - Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения: Если *А* не едет в Москву, то *С* не едет в Одессу.

Если *В* не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то *А* едет в Москву.

Если С не едет в Ташкент, то *В* едет в Киев.

Если *Д* не едет в Москву, то *В* не едет в Москву.

Если *Д* не едет в Одессу, то *В* не едет в Москву.

2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Задания и упражнения:

1. Для формул $L_1 = (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$, $L_2 = A \to B, L_3 = A \to B \vee C$ записать результаты каждой из следующих подстановок:

1) $\int_{A,B}^{B,C}(L_1)$

2) $\int_{A}^{B\to C}(L_2)$

3) $\int_{A,C}^{B\to A\&B,B}(L_3)$

4) $\int_{A,B}^{A\&B,A\vee B}(L_1)$

5) $\int_{A,B}^{B,A}(L_2)$

6) $\int_{A,B,C}^{A\&\bar{A},C,\bar{A}}(L_3)$

2. Применяя правило подстановки, показать, что доказуема формула:

1) $(A \to B)\&\bar{B} \to \bar{B}$

2) $A\&B \to A\&B \vee C$

3) $(\bar{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\bar{A} \vee C \to B))$

4) $\overline{\overline{C \vee D}} \to C \vee D$

5) $\left(\mathrm{A\&B} \to (\mathrm{C} \to \mathrm{B\&C})\right) \to ((A\&B \to C) \to (A\&B \to B\&C))$

3. Применяя правило подстановки и правило заключения, показать, что доказуема формула:

1) $\bar{A} \vee \bar{A} \to \bar{A}$

2) $A\&B \to B\&A$

3) $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$

4) $A \to A\&A$

5) $A \vee B \to B \vee A$

4. Применяя производные правила вывода показать, что доказуемы формулы:

1) $\vdash (A \to B) \to (A \to A \vee B)$

2) $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$

3) $(A \to B) \& \bar{B} \to \bar{A}$

4) $\bar{A} \vee \bar{B} \to \overline{A \& B}$

5) $\bar{A} \& \bar{B} \to \overline{A \vee B}$

5. Используя правило перестановки посылок, соединения посылок и разъединения посылок, доказать что:

1) $\vdash x \to (y \to x \& y)$

2) $(A \to B) \& \bar{B} \to \bar{A}$;

3) $\vdash B \longrightarrow (A \longrightarrow A)$.

6. Доказать производные правила вывода:

1) $\frac{\vdash \bar{A}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$; $\frac{\vdash \bar{A}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$

2) $\frac{\vdash A}{\vdash A \vee B}$;

3) $\frac{\vdash \bar{A}}{\vdash A \to B}$;

4) $\frac{\vdash B}{\vdash A \to B}$;

5) $\dfrac{\vdash A\&B}{\vdash A}$;

6) $\dfrac{\vdash A\to B, \vdash \bar{B}}{\vdash \bar{A}}$;

7) $\dfrac{\vdash \bar{B}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$;

8) $\dfrac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A \wedge B}$;

9) $\dfrac{\vdash \bar{A}, \vdash \bar{B}}{\vdash \overline{A \vee B}}$;

10) $\dfrac{\vdash A, \vdash \bar{B}}{\vdash \overline{A \to B}}$;

11) $\dfrac{\vdash A \to \bar{A}}{\vdash \bar{A}}$;

12) $\dfrac{\vdash \bar{A} \to A}{\vdash A}$;

13) $\dfrac{\vdash A \to B, \quad \vdash \bar{A} \to B}{\vdash B}$;

14) $\dfrac{\vdash A \to B, \quad \vdash A \to \bar{B}}{\vdash \bar{A}}$.

7. Докажите выводимость заключения

1) Методом дедукции.

2) Методом резолюций.

1) $\dfrac{(A \vee B);\ (A \to C);\ (B \to D)}{C \vee D}$;

2) $\dfrac{(\bar{A} \vee B);\ (C \to \bar{B})}{A \to \bar{C}}$;

3) $\dfrac{(A \vee B) \to (C \& D);\ (D \vee E) \to F}{A \to F}$;

4) $\dfrac{A \vee B) \to C;\ C \to D \vee M\ ;\ M \to N;\ \overline{D} \& \overline{N}}{\overline{A}}$;

5) $\dfrac{(A \to B) \& (C \to D);\ D \& B \to E\ ;\ \overline{E}}{\overline{C} \vee \overline{A}}$;

6) $\dfrac{A;B;A\&C \to \overline{B}}{\overline{C}}$;

7) $\dfrac{(\ A \vee B);\ (A \to B);\ (B \to A)}{A \& B}$

8. Запишите символически следующие суждения и докажите дедуктивным методом и методом резолюций:

1) Если Иванов говорит неправду , то он заблуждается или сознательно вводит в заблуждение других . Иванов говорит неправду и не заблуждается. Следовательно, он сознательно вводит в заблуждение других"

2) Если Сидоров не трус , то он поступит в соответствие с собственными убеждениями . Если Сидоров честен , то он не трус . Если Сидоров не честен , то он не признает своей ошибки . Но Сидоров признает свои ошибки . Следовательно, он поступит согласно собственным убеждениям

3. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Задания и упражнения:

Задание 1. Докажите выводимость заключения методом резолюций:

1. $$\dfrac{\forall x(P_1(x) \to \rceil P_2(x));\ \forall x(P_3(x) \to P_1(x))}{\forall x(P_3(x) \to \rceil P_2(x));}$$

2. $$\frac{\forall x(\exists y(P_1^2(x;\ y)\&P_2(y)\to \exists y(P_3(y)\&P_4^2(x;\ y)))}{\neg\exists x(P_3(x)\to\forall x\forall y(P_1^2(x;\ y)\to\neg P_2(y)));}$$

3. $$\frac{\forall x(P_1(x)\to P_2(x)\&\ P_3(x));\ \exists x(P_1(x)\&\ P_4(x))}{\exists x(P_4(x)\&P_3(x)).}$$

4. $$\frac{\exists x(P_1(x)\&\forall y(P_2(y)\to P_3^2(x;\ y)));\quad \forall x(P_1(x)\to\forall y(P_4(y)\to\neg P_3^2(x;\ y)))}{\forall y(P_2(y)\to P_4(y)).}$$

5. $$\frac{\forall y(P_1(y)\to P_2(y))}{\forall x(\exists y(P_1(y)\&\ P_3^2(x;\ y))\to \exists y(P_2(y)\&\ P_3^2(x;\ y))).}$$

6. $$\frac{\exists x((P_1(x)\&\neg P_2(x))\to\exists y(P_3(y)\&P_4^2(x;y)));\quad \exists x(P_5(y)\&\ P_1(x)\&\ \forall y(P_4^2(x;y)\to P_5(y)));}{\exists x(P_3(x)\&\ P_5(x)).}$$

Задание 2. Проверить рассуждения методом резолюций:

1. Все львы свирепы. Некоторые львы не пьют кофе. Следовательно, некоторые из тех, кто пьет кофе, не свирепы.

2. Некоторые птицы, гордящиеся своим хвостом, не могут петь. Ни одна птица, кроме павлина, не может гордиться своим хвостом. Значит, некоторые павлины не могут петь.

3. Некоторые лампочки плохо светят. Лампочки предназначены для того, чтобы светить. Следовательно, некоторые вещи, предназначенные для того, чтобы светить, светят плохо.

4. Все козлята прыгают. Ни одно молодое животное не прыгает, если оно не здорово. Следовательно, все молодые козлята здоровы.

5. Все рыбаки любители приврать. Все священники соблюдают заповеди. Никто не может и соблюдать заповеди, и вместе с тем врать. Значит, ни один рыбак не священник.

6. Студенты — любители покушать. Некоторые студенты худые. Не все те, кто любит покушать, студенты. Значит, некоторые любители покушать не являются худыми студентами.

4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Задания и упражнения:

Пример 2.1. Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если M = R для одноместных предикатов и $M = R \times R$ для двухместных предикатов:

x + 5 = 1. Предложение является одноместным предикатом P(x), $Ip = \{-4\}$

при $x = 2$ выполняется равенство $x^2 -1 = 0$. Предложение не является предикатом. Это ложное высказывание;

$x^2 - 2x + 1 = 0$. Предложение является одноместным предикатом P(x), $Ip = \{1\}$

(x + 2)-(3x-4). Предложение не является предикатом; оно не является и высказыванием.

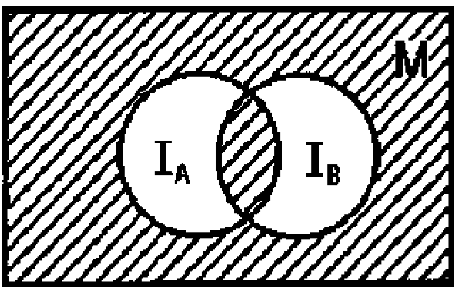
$x^2+y^2>0$. Предложение является двухместным предикатом *Q(x,y),* $I_Q = R \times R \setminus \{(0,0)\}$.

Пример 2.2. Пусть даны предикаты *A(x ,y)* и *B{x ,y),* определенные на множестве $M = M_1 \times M_2 \subset R \times R$. Найти множество истинности предиката $A(x, y) \leftrightarrow B\{x,y)$ **и** изобразить ее с помощью кругов Эйлера-Венна.

Решение. Так как $A(x,y) \leftrightarrow B(x,y) = (A(x,y) \to B(x,y)) \wedge (B(x,y) \to A(x,y))$,то

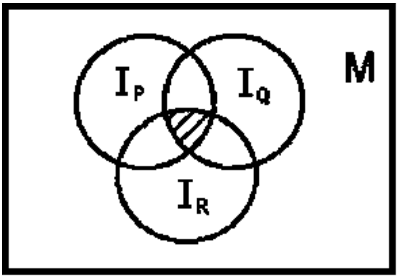
$$I_{A \leftrightarrow B} = (I_{A \to B}) \cap (I_{B \to A}) = ((CI_A \cup I_B) \cap (CI_B \cup I_A)) = ((I_A \cap I_B) \cup (CI_A \cap CI_A))$$

$I_A \leftrightarrow I_B$ изображена заштрихованной частью рисунка.



Можно рассматривать и обратную задачу: Зная область истинности предиката, полученного в результате применения логических операций к некоторым предикатам, записать этот предикат.

Пример 2.3. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами *P(x)*, *Q(x)* и *R(x)* , область истинности которого I заштрихована на рисунке.



Решение. Так как здесь $I = I_P \cap I_Q \cap I_R$ то искомый предикат имеет вид *P(x)&Q(x)&R(x).*

Пусть имеется предикат *P(x)*, определенный на множестве *M*. Если $a \in M$, то подстановка *a* вместо *x* в предикат *P(x)* превращает этот предикат в высказывание *P(a)*. Такое высказывание называется *единичным.* Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний в логике предикатов рассматривается еще две операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание.

Пример 2.4. Даны предикаты *P(x)*: x:^{2} + x +1 >0 и *Q{x)*: $x^2 - 4x + 3 = 0$, определенные на множестве R. Требуется установить, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

1) $\forall x P(x)$;

2) $\exists x P(x)$;

3) $\forall x Q(x)$;

4) $\exists x Q(x)$.

Решение. Так как $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ при всех x, то будут истинны высказывания $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$. Так как уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет только два действительных корня $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$, то предикат $Q(x)$ принимает значение 1 только при $x=3$ и $x=1$ и 0 в остальных случаях. Но тогда высказывание $\forall x\, Q(x)$ ложно, а высказывание $\exists x\, Q(x)$ истино.

Задание 2.1: На множестве $M = \{1,2,3,\ldots,20\}$ заданы предикаты:

A(x): «*x* не делится на 5»;

B(x): «x- четное число»;

C(x): «*x* - число простое»;

D(x): «*x* кратно 3».

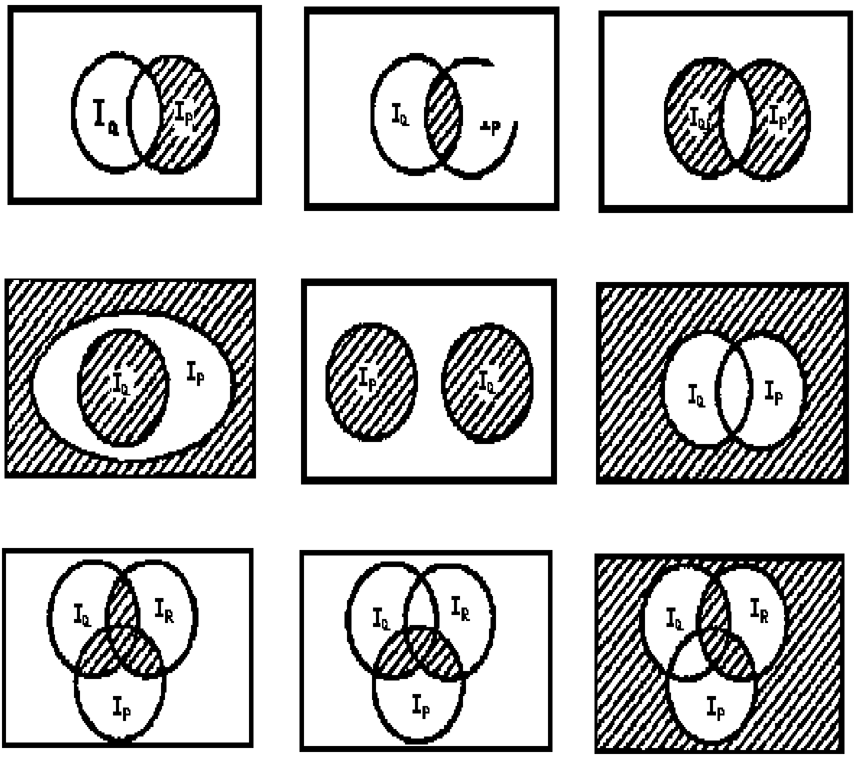
Найдите множества истинности следующих предикатов:

1. $A(x)\ \&\ B(x)$;
2. $\overline{B}(x)\ \&\ \overline{D}(x)$;
3. $A(x)\ \&\ B(x)\ \&\ D(x)$;
4. $A(x) \vee B(x)$
5. $B(x) \vee C(x)$
6. $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$
7. $C(x) \rightarrow A(x)$
8. $D(x) \rightarrow \overline{C}(x)$

9. $\left(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge C(\mathrm{x})\right) \rightarrow \overline{\mathrm{D}}(\mathrm{x})$

10. $\left(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge D(\mathrm{x})\right) \rightarrow \overline{\mathrm{C}}(\mathrm{x})$

Задание 2.2.: Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами P(x), Q(x) и R(x) , области истинности которых заштрихованы на следующих рисунках:



Задание 2.3.: Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна области истинности следующих предикатов:

1. $\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)$

2. $\overline{P}(x)\vee\overline{Q}(x)$
3. $\overline{P}(x)\leftrightarrow\overline{Q}(x)$
4. $\overline{P}(x)\rightarrow\overline{Q}(x)$
5. $(P(x)\rightarrow Q(x))\vee R(x)\wedge\overline{Q}(x)$
6. $(P(x)\leftrightarrow Q(x))\wedge R(x)\vee\overline{Q}(x)$
7. $P(x)\wedge Q(x)\rightarrow\overline{R}(x)$
8. $P(x)\vee Q(x)\rightarrow\overline{R}(x)$
9. $P(x)\vee Q(x)\leftrightarrow\overline{R}(x)$
10. $(P(x)\rightarrow Q(x))\vee\left(R(x)\rightarrow\overline{Q}(x)\right)$

Задание 2.4.: Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов M совпадает с R:

1. $\exists x(x+5=x+3)$
2. $\exists x(x^2+x+\frac{1}{2}=0)$,
3. $\forall x\,(x^2+x+1>0)$;
4. $\forall x\,(x^2-5x+6\geq 0)$;
5. $\exists x\left((x^2-5x+6\geq 0)\wedge\left(x^2-2x+1>0\right)\right)$;
6. $\exists x\left((x^2-5x+6\geq 0)\wedge\left(x^2-6x+8\leq 0\right)\right)$;

7. $\forall x\left((x^2 - 6x + 8 \geq 0) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0)\right)$

8. $\exists x\left((x \in \{2, 5\}) \to (x^2 - 6x + 8 = 0)\right)$

9. $\exists x\,(x^2 - 5x + 6 \geq 0)$

10. $\forall x\left((x \in \{3, 5\}) \to (x^2 - 6x + 8 < 0)\right)$

Задание 2.5: Доказать равносильности логики предикатов:

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$$

$$\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$$

$$\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$$

$$\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$$

$$c \,\&\, \forall x A(x) \equiv \forall x(c \,\&\, A(x))$$

$$c \vee \forall x A(x) \equiv \forall x(c \vee A(x))$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x(c \vee A(x)) \equiv c \vee \exists x A(x)$$

$$\exists x(c \,\&\, A(x)) \equiv c \,\&\, \exists x A(x)$$

$$\forall x(A(x) \to c) \equiv \exists x(A(x)) \to c$$

$$\exists x(A(x) \to c) \equiv \forall x(A(x)) \to c$$

$$\exists x(c \to A(x)) \equiv c \to \exists x(A(x))$$

$$\forall x(c \to A(x)) \equiv c \to \forall x(A(x))$$

$$\exists x A(x) \& \exists x B(x) \equiv \exists x \exists y (A(x) \& B(y))$$
$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$$

Задание 2.6: Упростить следующих формул:

1. $\exists x(P_1(x))\&\exists x(P_2(x))\to\exists x(P_1(x)\&P_2(x))$;
2. $\forall y(P_1(x))\&\forall y\ (P_2(x))\to\forall y(P_1(x)\&(P_2(x))$;
3. $(\forall x(A(x))\to\exists x(B(x)))\to\exists y((A(x)\vee C(y))\to(B(x)\vee C(y)))$;
4. $\forall x(A(x)\to B(x))\&\exists y(B(x)\to C(y)\&\exists z(C(y)\to D(z)))$;
5. $\forall x(B(x)\to A(y))\&(B(x)\to\forall y(A(y)\to C(z)))\to\exists z(B(x)\to C(z))$;
6. $\forall x(\rceil A(x)\to\exists y(\rceil B(y)))\to(B(x)\to A(x))$;
7. $\forall x(A(x)\to B(y))\&\forall y(A(x)\to(B(y)\to C(z)))\to\exists z(A(x)\to C(z))$;
8. $\forall x(\rceil A(x)\to\exists x(\rceil C(x)))\to\forall x((C(x)\to A(x))$;
9. $(\exists x(\rceil A(x))\to\forall x(\rceil B(x)))\to(\rceil B(x)\vee A(x))$.
10. $\forall x(A(x)\to B(y))\&\forall y(A(x)\to(B(y)\to C(z)))\to(A(x)\to\exists z(C(z)))$

Задание 2.7.: Привести к ПНФ, ССФ.

1. $(\forall x(A(x))\to\exists x(B(x)))\to\exists y((A(x)\vee C(y))\to(B(x)\vee C(y)))$;
2. $\forall x(A(x)\to B(x))\&\exists y(B(x)\to C(y)\&\exists z(C(y)\to D(z)))$;
3. $\forall x(B(x)\to A(y))\&(B(x)\to\forall y(A(y)\to C(z)))\to\exists z(B(x)\to C(z))$;
4. $\forall x(\rceil A(x)\to\exists y(\rceil B(y)))\to(B(x)\to A(x))$;
5. $\forall x(A(x)\to B(y))\&\forall y(A(x)\to(B(y)\to C(z)))\to\exists z(A(x)\to C(z))$;
6. $\forall x(\rceil A(x)\to\exists x(\rceil C(x)))\to\forall x((C(x)\to A(x))$;
7. $(\exists x(\rceil A(x))\to\forall x(\rceil B(x)))\to(\rceil B(x)\vee A(x))$.
8. $(\forall_x(A(x)\to\forall_y(B(y)\to C(z))))\&(\rceil\forall_y(D(x;\ y)\to F(z)))$
9. $(\forall x(B(x)\to\exists y(A(y))))\&\exists y(A(x)\to C(y))\to\rceil C(y)\&B(x)$

10. $\neg(\exists z \overline{\forall x(A(x,y) \wedge B(x,z)} \to \forall y C(y,z))$;;

Задание 2.8. Запишите на языке логики предикатов определения:

1. Линейно упорядоченного множества (упорядоченное множество называется линейным, если для любых элементов этого множества *x* и y либо $x = y$, либо $x < y$, либо $x>y$);
2. Ограниченной функции (функция f(x) называется ограниченной на множестве M, если существует такое неотрицательное число L, что для всех $x \in$M справедливо неравенство $|f(x)| \leq L$);
3. Четной функции (функция f называется четной, если область ее определения симметрична относительно начала координат и для каждого *x* из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$);
4. Периодической функции (функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом *x* из области определения f элементы $x-T$ и $x+T$ также принадлежат этой области, и при этом выполнено равенство $f(x \pm T) = f(x)$);
5. Возрастающей функции на множестве *M* (функция f называется возрастающей на множестве *M*, если для любых чисел x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$).

Задание 2.9.: Постройте следующие утверждения:

1. Упорядоченное множество не является линейным.

2. Функция не является ограниченной.
3. Функция не является четной.
4. Функция не является периодической.
5. Функция не является возрастающей на множестве М.

Задание 2.10. : Доказать несправедливость утверждений:

1. Если функция непрерывна в точке x_0,то она и дифференцируема в этой точке.
2. Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником.
3. Если функция интегрируема на [a,b], то она непрерывна на нем.
4. Если числовая последовательность имеет предел, то она монотонна.
5. Если числовая последовательность ограничена, то она имеет предел.
6. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 первую производную равную нулю $\left(y'(x_0)=0\right)$, то точка x_0 - точка экстремума функции.

Задание 2.11.: Запишите символически следующие суждения:

1. все судьи - юристы, но не все юристы – судьи;
2. Судья, являющийся родственником потерпевшего, не может участвовать в рассмотрении дела. Судья X - родственник потерпевшего. Следовательно, судья X не может участвовать в рассмотрении дела.
3. К уголовной ответственности привлекаются лица, совершившие тайное похищение личного имущества граждан.

Обвиняемый Х не совершал тайного похищения личного имущества граждан. Следовательно, обвиняемый Х не может быть привлечен к уголовной ответственности.

4. Если иск предъявлен недееспособным лицом, то суд оставляет иск без рассмотрения. Иск предъявлен недееспособным лицом. Следовательно, суд оставляет иск без рассмотрения.

5. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Задания и упражнения:

Задание1. Имеется машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1\}$и функциональной схемой (программой):

A Q	q_f	q_0
a_0		q_f1R
1		q_f1R

В столбце q_f ничего не написано, потому что q_f—заключительное состояние машины, т.е. такое состояние, оказавшись в котором машина останавливается. Определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, если она находится в начальном состоянии q_0 и обозревает указанную ячейку:

а) $1a_011a_0a_011$ (обозревается ячейка 4, считая слева);

б) $11a_0111a_01$(обозревается ячейка 2);

в) $1a_0a_0111$ (обозревается ячейка 3);

г) $1111a_0 11$ (обозревается ячейка 4);

д) $11a_0 1111$ (обозревается ячейка 3);

е) 1111111 (обозревается ячейка 4);

ж) 11111 (обозревается ячейка 5);

з) 111...1 (к единиц, обозревается к-я ячейка).

Изобразите схематически последовательность конфигураций, возникающих на ленте на каждом такте работы машины.

Решение:

а) Изобразим схематически начальную конфигурацию (начальное положение машины):

	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

q_1

Схема означает, что машина находится в состоянии q_1 обозревает ячейку, в которой записана буква 1, в соседней слева ячейке записана та же буква, а в соседней справа ячейке записана буква a_0(т.е. согласно нашему соглашению ничего не записано) и т.д.Ничего не записано и во всех непоказанных ячейках ленты. На первом такте работы машина остается в прежнем состоянии 1, в обозреваемую ячейку вписывает букву 1 (т. е. фактически оставляет уже вписанную в эту ячейку букву 1 неизменной) и переходит к обозрению следующей правой ячейки (т.е. ячейки 5). Изобразим схематически положение, в котором оказалась машина:

	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

q_0

На втором такте работы машина вписывает в обозреваемую ячейку 5 букву 1, продолжает обозревать ту же ячейку и переходит в состояние q_f, т. е. останавливается. Создавшаяся конфигурация имеет вид:

	1	a_0	1	1	1	a_0	1	1	

f q_f

Таким образом, из данного начального положения слово $1a_011a_0a_011$ перерабатывается машиной в слово $1a_0111a_011$.

Задание 2. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
a_0	q_4a_0R	q_6a_0R	q_6a_0R	q_f1E	q_4a_0R	q_fa_0E	q_6a_0R
1	q_21L	q_31L	q_11L	q_5a_0E	q_5a_0E	q_7a_0E	q_7a_0E

Изображая на каждом такте работы машины получающуюся конфигурацию, определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, исходя из начального стандартного положения:

а) 11111;

б) 111111;

в) 1111;

г) 1111111;

д) 111;

е) $a_0111a_0a_01111$;

ж) $11a_0a_0111111$;

з) $11a_0111$.

Задание 3. На ленте машины Тьюринга содержится последовательность символов “+”. Напишите программу для машины Тьюринга, которая каждый второй символ “+” заменит на “–”. Замена начинается с правого конца последовательности. Кроме самой программы-таблицы, описать словами, что выполняется машиной в каждом состоянии.

Задание 4. Дано число *n* в восьмеричной системе счисления. Разработать машину Тьюринга, которая увеличивала бы заданное число *n* на 1. Кроме самой программы-таблицы, описать словами, что выполняется машиной в каждом состоянии.

Задание 5. Дана десятичная запись натурального числа $n > 1$. Разработать машину Тьюринга, которая уменьшала бы заданное число *n* на 1. МТ в состоянии q_1 обозревает правую цифру числа. Кроме самой программы-таблицы, описать словами, что выполняется машиной в каждом состоянии.

Задание 6. Дано натуральное число $n > 1$. Разработать машину Тьюринга, которая уменьшала бы заданное число *n* на 1, при этом в выходном слове старшая цифра не должна быть 0. Например, если входным словом было “100”, то выходным словом должно быть “99”, а не “099”. МТ в состоянии q_1 обозревает правую цифру числа. Кроме самой программы-таблицы, описать словами, что выполняется машиной в каждом состоянии.

Задание 7. Дан массив из открывающих и закрывающих скобок. Построить машину Тьюринга, которая удаляла бы пары взаимных скобок, т.е. расположенных подряд “( )”.

Например, дано “) (( ) (( )”, надо получить “) . . . ((”.

МТ в состоянии q_1 обозревает крайний левый символ строки.

Кроме самой программы-таблицы, описать словами, что выполняется машиной в каждом состоянии.

Задание 8. Дана строка из букв "*a*" и "*b*". Разработать машину Тьюринга, которая переместит все буквы "*a*" в левую, а буквы "*b*" — в правую части строки. МТ в состоянии q1 обозревает крайний левый символ строки. Кроме самой программы-таблицы, описать словами, что выполняется машиной в каждом состоянии.

Задание 9. На ленте машины Тьюринга находится число, записанное в десятичной системе счисления. Умножить это число на 2. МТ в состоянии q_1 обозревает крайнюю левую цифру числа. Кроме самой программы-таблицы, описать словами, что выполняется машиной в каждом состоянии.

Задание 10. Известно, что на ленте записано слово из n единиц 11... 1; n > 1. Постройте машину Тьюринга с внешним алфавитом A = $\{a_0, 1\}$ которая отыскивала бы левую единицу этого слова (т.е.приходила бы в состояние, при котором обозревалась бы ячейка самой левой единицей данного слова, и в этом положении останавливалась), если в начальный момент головка машины обозревает одну из ячеек с буквой данного слова.

Задание 11. Сконструируйте машину Тьюринга с внешним алфавитом A = $\{a_0, 1\}$, которая каждое слово в алфавите $A_1 = \{1\}$ перерабатывает в пустое слово, исходя из стандартного начального положения.

Задание 12. Сконструируйте машину Тьюринга с внешним алфавитом A = $\{a_0, 1\}$, которая каждое слово длиной n в алфавите $A_1 = \{1\}$ перерабатывает в слово длиной n + 1 в том же алфавите A.

Указание. Используйте алфавит внутренних состояний из двух букв.

Задание 13. На ленте машины Тьюринга записаны два набора единиц 1. Они разделены звездочкой *. Составьте функциональную схему машины так, чтобы она, исходя из стандартного начального положения, выбрала больший из этих наборов, а меньший стерла. Звездочка должна быть сохранена, чтобы было видно, какой из массивов выбран. Рассмотрите примеры работы этой машины применительно к словам: а) 1*11; б) 11*1; в) 11*111; г) 111*11; д) 11*1111; е) 1111*11.

Указание. Машина может работать, например, следующим образом. Заменить крайнюю правую единицу на a и из состояния q_1 перейти в состояние q_2, в котором она должна, ничего не меняя, прошагать к крайней левой единице. Здесь, перейдя в состояние q_3, заменить крайнюю левую единицу на букву a. Далее, перейдя в состояние q_4, прошагать к крайней правой единице, ничего не меняя. Здесь снова заменить единицу на букву a и вернуться к крайней левой единице и т.д. Дальше программа имеет разветвление. Если, начиная двигаться с правого конца, машина в состоянии q_1 сделав шаг влево, обозревает ячейку с буквой *, то это означает, что единицы правого массива иссякли. Следовательно, левый массив больше. Тогда машина, перейдя в состояние q_5,проходит ячейку с буквой * и во всех последующих ячейках слева проставляет единицы. Затем в состоянии q_6 она возвращается к ячейке с *, минует ее и следует дальше вправо, стирая содержимое ячеек (там записаны буквы a). Дойдя до первой пустой ячейки, машина останавливается. Если же, начиная сдвигаться левого конца, машина в состоянии q_3, сделав шаг вправо, обозревает ячейку с буквой *, то это означает, что иссякли единицы левого массива. Следовательно, большим оказывается правый массив. Привлекая новые состояния q_7 и q_8, строим программу аналогично предыдущему ответвлению.

Задание 14. Построить в алфавите {0,1} машину Тьюринга, обладающую свойствами:

1) машина имеет одно состояние, одну команду и применима к любому слову в алфавите {0,1};

2) машина имеет одно состояние, две команды, не применима ни к какому слову в алфавите {0,1}, и в процессе работы головка обозревает бесконечное множество ячеек;

3) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите {0,1}, и в процессе работы головка обозревает одну ячейку.

Задание 15. Построить машину Тьюринга Т с внешним алфавитом{е , 1 } , которая вычисляет функцию $f(x) = x + 1$.

Решение. Будем предполагать, что перед началом работы на ленте машины записаны исходные значения аргумента и считывающая головка обозревает первый слева значащий символ. Кроме того, после выполнения вычислений считывающая головка останавливается в заключительной конфигурации.

Прежде чем приступить к написанию программы работы машины Тьюринга, следует определить порядок ее работы для получения результата.

В нашем случае после окончания работы машины на ленте должно быть занято на одну ячейку больше, чем на ней занято ячеек перед началом работы.

Команды этой машины могут быть определены следующим образом:

$q_0\ 1 \rightarrow 1\ R\ q_0$,

$q_1\ e \rightarrow 1\ E\ q_f$.

Задание 16. Построить машину Т , вычисляющую числовую функцию f (x , y) = x + y.

Решение. Пусть внешним алфавитом данной машины является алфавит {e, 1 } . Работа машины состоит из конфигураций:

$q_0\ 1 \rightarrow 1\ R\ q_0$,

$q_0\ e \rightarrow 1\ R\ q_1$,

$q_1\ 1 \rightarrow 1\ R\ q_1$,

$q_1\ e \rightarrow e\ L\ q_2$,

$q_2\ 1 \rightarrow e\ L\ q_3$,

$q_3\ 1 \rightarrow e\ L\ q_f$.

Следует отметить, что для данной машины Т выписаны все команды, осуществляющие вычисление функции f (x, y) = x + y.

Задание 17. Построить машину Тьюринга, которая вычисляет функцию:

1) $f (x, y) = x \times y$;

2) $f (x) = x^2$.

Задание 18. Построить машину Тьюринга, вычисляющую нуль-функцию O(x) = 0 в алфавите {e, 1}.

Указание: Взять множество Q = $\{q_0 , q_1\}$, подставить вместо всех единиц е, а когда встретиться символ е, то подставить символ 1.

Задание 19 Доказать, что следующие функции общерекурсивны:

1) $P(x,y) = x \cdot y$;

2) $G(x,y) = x^y$;

3) $\delta(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$,

4) $x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$.(усеченная разность)

5) $|x-y|$

6) $sgn(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \neq 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$.

7) $\overline{sgn(x)}$;