ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Исследование операций»

Авторы
Ляхницкая О. В.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления 09.03.04 «Программная инженерия».

Авторы

Старший преподаватель
кафедры ПОВТиАС
Ляхницкая О.В.

Оглавление

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Примеры использования симплекс-метода

Пример 1. Решить симплекс-методом следующую задачу.

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 9 \\ x_1 - x_2 &\le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Добавим в ограничения слабые переменные u_1, u_2, u_3 и перейдем к канонической форме

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + u_1 \qquad\qquad &= 6 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + u_2 \qquad &= 9 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad + u_3 &= 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; u_1 \ge 0; u_2 \ge 0; u_3 &\ge 0; \end{aligned} \qquad (2)$$

В качестве начального опорного плана выберем вектор X^0 =(0,0,6,9,3). Ему отвечает базис $B = \{e^1, e^2, e^3\} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$ и С.Т.

1.

Таблица 1

	x_1	x_2	
u_1	-1	3	6
u_2	2	1	9
u_3	1	-1	3
f	-2	-1	0

$\Rightarrow$

Таблица 2

	u_3	x_2	
u_1	1	2	9
u_2	-2	3	3
x_1	1	-1	3
f	2	-3	6

Так как оценки в С.Т. (табл.1) отрицательны , то план X^0 не является оптимальным. Выбрав разрешающим любой столбец с отрицательной оценкой, введем его в базис. Пусть выбран первый столбец, то есть S=1. Выбор разрешающей строки осуществим по правилу(13) $\min\left\{\frac{9}{2},\frac{3}{1}\right\}=\frac{3}{1}$. Откуда получим , что разрешающей строкой должна быть выбрана 3-я строка. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент $z_{3,1}=1$(выделим этот элемент). Сделав шаг жордановых преобразований, получаем таблицу 2.

Симплексная таблица 2 не является оптимальной. Она отвечает неоптимальному опорному решению X^1=(3,0,9,3,0) с базисом B=(e^1,e^2,A^1). При этом f(X^1)=6>f(X^0)=0. На основании утверждения 3 мы можем вновь улучшить значение целевой функции. Теперь главным столбцом может быть выбран только 2-й столбец, а главной строкой - 2-я строка. Проводим жордановы преобразования и получаем таблицу 3.

Таблица 3

	u_3	u_2	
u_1	7/3	-2/3	7
x_2	-2/3	1/3	1
x_1	1/3	1/3	4
f	0	1	9

Из утверждения 1 следует, что таблица 3 дает оптимальный опорный план X^2=(4,1,7,0,0) и максимальное значение целевой функции $f^*_{\max}$=9.

В полученной оптимальной таблице есть нулевая оценка. Это означает, что рассматриваемая задача имеет бесчисленное множество оптимальных решений. Перейдем к другому оптимальному опорному решению, выбрав в качестве разрешающего столбца столбец с нулевой оценкой.

В результате получим таблицу 4. Ей отвечает новый оптимальный план $X^3=(3,3,0,0,3)$. Тогда множество всех оптимальных решений задачи (2) имеет вид $x^*=\alpha x^2+(1-\alpha)x^3,\ \ \alpha\in[0,1].$, и, соответственно, оптимальным решением задачи (1) будет

$x^*=(3+\alpha,3-2\alpha,7\alpha)$, где $\alpha\in[0,1]$, (3)

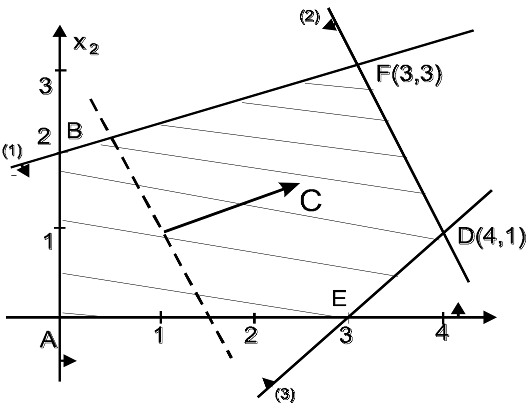
а оптимальным значением целевой функции этой задачи будет $f^*_{\max}=9$.

Таблица 4

	u_1	u_2	
u_3	3/7	-2/7	3
x_2	2/7	1/7	3
x_1	-1/7	3/7	3
f	0	1	9

Проиллюстрируем решение примера 1 графически (рис.1).

Рис.1. Графическое решение примера 1



Многоугольник ABFDE Изображает множество допустимых решений примера 1. Решая задачу симплекс-методом, мы последовательно находим опорные решения x^0,x^1,x^2,x^3, что геометрически соответствует перемещению по вершинам A,E,D,F.

На рисунке видно, что функция $f(x)=2x_1+x_2$ достигает максимума на ребре [F,D], то есть на множестве точек .

Пример 2. Решить симплекс-методом следующую задачу.

$$f(x)=2x_1-x_2+3x_3+x_4\to\max$$

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3 &= 10 \\ x_1+x_3+x_4 &= 7 \\ 3x_1+2x_3-x_5 &= -4 \end{aligned}$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,5}.$$

Перейдем к системе уравнений с неотрицательными правыми частями. Для этого умножим обе части третьего уравнения на –1. Получим:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3 &= 10, \\ x_1+x_3+x_4 &= 7, \end{aligned}$$

$-3x_1 \quad -2x_3 \quad +x_5 = 4.$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

Решение задачи можно начать с опорного плана

$x^0 = (0,10,0,7,4)$, отвечающего базису $B^0 = \{A^2, A^4, A^5\}$. Соответствующая симплексная таблица имеет вид:

Таблица 5

c_B		2 x_1	3 x_3	
-1	x_2	2	-3	10
1	x_4	1	1	7
0	x_5	-3	-2	4
	F	-3	1	-3

Оценки в таблице 5 подсчитаны по формулам(1):

$$\Delta_1 = (c_B, A^1) - c_1 = -3;\quad \Delta_3 = (c_B, A^3) - c_3 = 1;\quad f = (c_B, b) = -3.$$

В качестве разрешающего столбца берем первый ($\Delta_1 < 0$), в качестве разрешающей строки – первую, так как $\min\left\{\frac{10}{2}, \frac{7}{1}\right\} = \frac{10}{2}$. Проводим жордановы преобразования и переходим к таблице 6, а затем аналогично и к таблице 7.

Таблица 6

	x_2	x_3	
x_1	1/2	-3/2	5
x_4	-1/2	5/2	2
x_5	3/2	-13/2	19
f	3/2	-7/2	12

$\Rightarrow$

Таблица 7

	x_2	x_4	
x_1	1/5	3/5	31/5
x_3	-1/5	2/5	4/5
x_5	1/5	13/5	121/5
f	4/5	7/5	74/5

Таблица 7 дает единственное оптимальное решение задачи

$x^* = (31/5, 0, 4/5, 0, 121/5),\ f^* = 74/5.$

Пример3. Решить симплекс-методом следующую задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса.

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 6,$$

$$-x_1 + x_3 + x_6 = 2,$$

$$2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 8,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

В матрице А отсутствует полный набор ортов. Поэтому матрицу А дополняем столбцом $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, добавив в первое ограничение искусственную переменную W_1. При этом рассмотрим следующую вспомогательную задачу

$$F(x,w) = -W_1 \to \max$$

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 + W_1 = 6, \\ -x_1 + x_3 + x_6 = 2 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 8, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Для этой задачи (x^0, w^0)=(0,0,0,0,0,2,8,6) есть опорное решение, отвечающее единичному базису. Начальная С.Т. для задачи 3 имеет вид таблицы 8.

Таблица 8

		0	0	0	0	0	
Св		x1	x2	x3	x4	x5	
-1	w1	1	-1	-2	1	-1	6
0	x6	-1	0	1	0	0	2
0	x7	0	2	3	2	0	8
	F	-1	1	2	-1	1	-6

Выбрав в таблице 8 разрешающий столбец (первый) и разрешающую строку (первую), после выполнения жордановых преобразований получаем таблицу 9, оптимальную для задачи 3. При этом *max F(x,w)=0*.

Вычеркнув *F*-строку относительных оценок и столбец, отвечающий искусственной переменной w_1 (он выделен в таблице 9), добавим f-строку относительных оценок: $\Delta_2 = \left(c^B, Z^2\right) - c_2 = -2, \Delta_4 = 0, \Delta_3 = -3, \Delta_5 = -1,$ и получим таблицу 10. Таблица 10 является начальной С.Т. для исходной задачи.

В таблице 10 оценка $\Delta_3=-3<0$, а остальные элементы этого столбца $z_{i,3}\leq 0$. Тогда на основании утверждения 2 исходная задача неразрешима в силу неограниченности целевой функции сверху в области допустимых решений (Нр2).

Таблица 9

	w_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-1	-2	1	-1	6
x_6	1	-1	-1	1	-1	8
x_7	0	2	-3	2	0	8
F	1	0	0	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 10

		1	1	1	0	
c_B		x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	-1	-2	1	-1	6
0	x_6	-1	-1	1	-1	8
0	x_7	2	-3	2	0	8
	f	-2	-3	0	-1	6

Пример 4. Решить симплекс-методом задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса.

$$f(x)=3x_1+x_2+x_3\to\max$$

$$\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3&=6\\ x_1-2x_2-x_3&=2\end{aligned}\qquad(23)$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Построим вспомогательную задачу:

$$F(x,w)=-w_1-w_2\to\max$$

$$\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3+w_1\quad&=6\\ x_1-2x_2-x_3\quad+w_2&=2\end{aligned}\qquad(24)$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3},\ w_i\ge 0,\ i=\overline{1,2}.$$

Решим задачу (4) симплекс-методом (табл.12,13).

Таблица 12

		0	0	0	
c_B		x_1	x_2	x_3	
-1	w_1	2	-1	1	6
-1	w_2	1	-2	-1	4
	F	-3	3	0	-10

$\Rightarrow$

Таблица 13

	w_1	x_2	x_3	
x_1		-1/2	1/2	3
w_2		-3/2	-3/2	1
F		3/2	3/2	-1

Так как все оценки в таблице 13 неотрицательны, то эта таблица определяет оптимальное опорное решение вспомогательной задачи (4). При этом *maxF(x,w)*=-1<0. Опираясь на утверждение 1, делаем вывод: у исходной задачи (3) система ограничений противоречива (Нр1).

Пример 5. Решить симплекс-методом линейную задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса.

Исходная задача:

$f(x)=x_1+x_2+2x_3+x_4 \to \max$

$x_1+3x_2+2x_3+x_4=8$,

$2x_1+x_3-x_4=1$,

$-3x_1+x_2-x_3+2x_4=1$,

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}$.

Вспомогательная задача:

$F(x,w)=-w_1-w_2-w_3 \to \max$

$x_1+3x_2+2x_3+x_4+w_1=8$,

$2x_1+x_3-x_4+w_2=1$,

$-3x_1+x_2-x_3+2x_4+w_3=1$,

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}$. $w_i \ge 0,\ i=\overline{1,3}$.

Решение вспомогательной задачи представляют таблицы 14-16.

Таблица 14

	x_1	x_2	x_3	x_4	
w_1	1	3	2	1	8
w_2	2	0	1	-1	1
w_3	-3	1	-1	2	1
F	0	-4	-2	-2	-10

⇒

Таблица 15

	x_1	x_3	x_4	
w_1	10	5	-5	5
w_2	2	1	-1	1
x_2	-3	-1	2	1
F	-12	-6	6	-6

⇒

В таблице 16 все элементы строки с искусственной переменной w_1 равны 0. Это означает, что первое ограничение является линейной комбинацией двух других. В таблице 16 вычеркиваем w_1-строку и *F*-строку и считаем *f*-строку. В результате получаем начальную С.Т. для исходной задачи (табл.17).

Таблица 16

	x_3	x_4	
w_1	0	0	0
x_1	1/2	-1/2	1/2
x_2	1/2	1/2	5/2
F	0	0	0

⇒

Таблица 17

		2	1	
c_B		x_3	x_4	
1	x_1	1/2	-1/2	1/2
1	x_2	1/2	1/2	5/2
	f	-1	-1	3

⇒

В таблицах 17-19 представлено решение исходной задачи.

Таблица 18

	x_1	x_4	
x_3	2	-1	1
x_2	-1	1	2
f	2	-2	4

⇒

Таблица 19

	x_1	x_2	
x_3	1	1	3
x_4	-1	1	2
f	0	2	8

⇒

Используя оптимальную С.Т. исходной задачи (табл.19), можно выписать оптимальное решение исходной задачи $x^*=(0,0,3,2)$ и оптимальное значение целевой функции этой задачи $f^*_{max}=f(x^*)=8$.

Пример 6. Решить симплекс-методом задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса. Этот пример иллюстрирует ситуацию вырожденности.

Исходная задача:

$$f(x)=2x_1+3x_2 \to \max$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$
$$x_1-x_2+x_3-x_4=1$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Вспомогательная задача:

$$F(x,w)=-w_1-w_2 \to \max$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+w_1=1$$
$$x_1-x_2+x_3-x_4+w_2=1$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4},\ w_i\geq 0,\ i=\overline{1,2}.$$

Строим таблицы:

Таблица 20

	x_1	x_2	x_3	x_4	
w_1	1	1	1	1	1
w_2	1	-1	1	-1	1
F	-2	0	-2	0	-2

$\Rightarrow$

Таблица 21

	w_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1	1	1	1
w_2	-1	-2	0	-2	0
F	2	2	0	2	0

Таблица 21 является оптимальной С.Т. вспомогательной задачи и $F^*=0$. Однако, в базисе есть искусственная переменная w_2. Выведем переменную w_2 из базиса, взяв разрешающей строку 2. В качестве разрешающего элемента можно взять любой отличный от нуля элемент из этой строки (этот элемент выделен в таблице 21 и равен -2).

Таблица 22

	w_2	x_3	x_4	
x_1	1/2	1	0	1
x_2	-1/2	0	1	0
F	1	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 23

		0	0	
		x_3	x_4	
2	x_1	1	0	1
3	x_2	0	1	0
	f	2	3	2

$\Rightarrow$

Вычеркнув в таблице 22 w_2 – столбец, F-строку и вычислив f-строку, получим таблицу 23. Таблица 23 определяет оптимальное решение исходной задачи $x^*=(1,0,0,0)$ и оптимальное значение целевой функции $f^*=2$.

Пример 7. Решить симплекс-методом задачу

$$f(x)=x_1+4x_2+x_3+x_4-2x_5+x_6 \to \max$$
$$x_1+x_2+x_4=0,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_5=1,$$
$$x_2+x_3+x_6=1,$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,6}.$$

Таблица 24

		1	4	1	
		x_1	x_2	x_3	
1	x_4	1	1	0	0
-2	x_5	1	1	1	1
1	x_6	0	1	1	1
	f	-2	-4	-2	-1

$\Rightarrow$

Таблица 25

	x_1	x_2	x_5	
x_4	1	1	0	0
x_3	1	1	1	1
x_6	-1	0	-1	0
f	0	-2	2	1

$\Rightarrow$

Таблица 26

	x_1	x_4	x_5	
x_2	1	1	0	0
x_3	0	-1	1	1
x_6	-1	0	-1	0
f	2	2	2	1

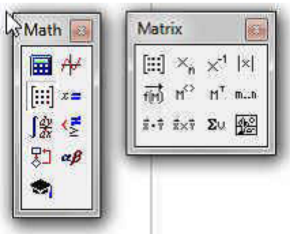
Таблицы 25 и 26 описывают одно и то же опорное вырожденное решение (0,0,1,0,0,0),являющееся оптимальным. Но этим таблицам отвечают различные базисы: таблице 25 соответствует базис В= $\left\{A^3, A^4, A^6\right\}$, а таблице26 – базис В*= $\left\{A^2, A^3, A^6\right\}$. В базисе В оценка $\Delta_2<0$, а в базисе В* все $\Delta_j\geq 0$.

Этот пример подтверждает, что *для вырожденного опорного плана* неотрицательность оценок является лишь достаточным условием его оптимальности.

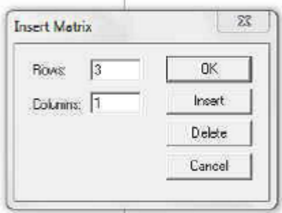
Решение задач линейного программирования с помощью MathCad

1. Задать начальные значения.

В MathCad с помощью панели Математика (MATH) добавляем панель Матрица (Matrix).



2. Выбираем кнопку Матрица или вектор (Matrix or Vector) указываем количество строк и столбцов.



3. Заполняем матрицы соответствующими коэффициентами.

Пример.

$$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1 \div 4 \end{cases}$$

Заполняем матрицу a – матрица системы ограничений размерностью 3*4 (3 строки и 4 столбца) коэффициентами, стоящими при x1, x2, x3, x4; b-свободные коэффициенты; c- коэффициенты целевой функции.

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 16 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}$$

4. Блок ORIGIN…MAXIMIZE позволяет найти решение поставленной задачи.

ORIGIN = 1

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}, \; b := \begin{pmatrix} 16 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}, \; x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c := \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}$$

F(x):=c*x

GIVEN

$$a * x \le b$$

$$x \ge 0$$

$$x := Maximize(F, x)$$

$$x := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a * x = \begin{pmatrix} 16 \\ 84 \\ 100 \end{pmatrix}$$

F(x)=1320

Для нахождения минимума целевой функции используем Minimize.

Работа выполняется:

1. расчетами, выполненными вручную (с помощью построения симплекс-таблиц).
2. с использованием Mathcad

Варианты заданий.
Примечание:
Для нечетных вариантов выполняется задача 1, для четных вариантов выполняется задача 2.

Задача 1.
Для производства двух видов изделий А и В используется три типа технологического оборудования. На производство единицы изделия А оборудование первого типа используется a1 ч, оборудование второго типа - a2 ч, третьего - a3 ч. На производство единицы изделия В оборудование первого типа используется b1 ч, оборудование второго типа - b2 ч, третьего - b3 ч.
На изготовление всех изделий администрация предприятия может предоставить оборудование первого типа не более, чем на t1 часов, оборудование второго типа не более, чем на t2 часов, оборудование третьего типа не более, чем на t3 часов.
Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет r1 денежных единиц, изделия В - r2 денежных единиц.
Составить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.
Задача 2.
Для производства двух видов изделий А и В используется три вида сырья.
На производство единицы изделия А требуется затратить сырья первого вида a1 кг, сырья второго вида - a2 кг, третьего - a3 кг. На производство единицы изделия В требуется затратить сырья первого вида b1 кг, сырья второго вида - b2 кг, третьего - b3 кг.
Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве t1 кг, второго вида в количестве t2 кг, третьего вида t3 кг.
Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет r1 денежных единиц, изделия В - r2 денежных единиц.
Составить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вариант 1
a1=5, b1=3, t1=750;
a2=4, b2=3, t2=630;
a3=3, b3=4, t3=700;
r1=5, r2=6.
	Вариант 2
	a1=6, b1=2, t1=600;
	a2=4, b2=3, t2=520;
	a3=3, b3=4, t3=600;
	r1=6, r2=3.
		Вариант 3
		a1=4, b1=3, t1=440;
		a2=3, b2=4, t2=393;
		a3=3, b3=5, t3=450;
		r1=6, r2=5.

Вариант 4
a1=3, b1=2, t1=273;
a2=3, b2=3, t2=300;
a3=2, b3=5, t3=380;
r1=4, r2=5.
	Вариант 5
	a1=2, b1=1, t1=438;
	a2=3, b2=6, t2=747;
	a3=3, b3=7, t3=812;
	r1=7, r2=5.
		Вариант 6
		a1=4, b1=3, t1=480;
		a2=3, b2=4, t2=444;
		a3=2, b3=6, t3=546;
		r1=2 , r2=4.

Вариант 7
a1=8, b1=2, t1=840;
a2=6, b2=3, t2=870;
a3=3, b3=2, t3=560;
r1=6, r2=2.
	Вариант 8
	a1=5, b1=2, t1=505;
	a2=3, b2=3, t2=393;
	a3=2, b3=3, t3=348;
	r1=7, r2=4.
		Вариант 9
		a1=6, b1=2, t1=600;
		a2=4, b2=3, t2=520;
		a3=3, b3=4, t3=600;
		r1=6. r2=3.

Вариант 10
a1=2, b1=3, t1=428;
a2=3, b2=6, t2=672;
a3=2, b3=8, t3=672;
r1=3, r2=8.
	Вариант 11
	a1=3, b1=2, t1=273;
	a2=3, b2=3, t2=300;
	a3=2, b3=5, t3=380;
	r1=4, r2=5.
		Вариант 12
		a1=7, b1=3, t1=1365;
		a2=6, b2=3, t2=1245;
		a3=1, b3=2, t3=650;
		r1=6, r2=5.

Вариант 13
a1=4, b1=3, t1=480;
a2=3, b2=4, t2=444;
a3=2, b3=6, t3=546;
r1=2, r2=4.
	Вариант 14
	a1=5, b1=3, t1=750;
	a2=4, b2=3, t2=630;
	a3=3, b3=4, t3=700;
	r1=5, r2=6.
		Вариант 15
		a1=5, b1=2, t1=505 ;
		a2=3, b2=3, t2=393;
		a3=2, b3=3, t3=348;
		r1=7, r2=4.

Вариант 16
a1=4, b1=3, t1=440;
a2=3, b2=4, t2=393;
a3=3, b3=5, t3=450;
r1=6, r2=5.
	Вариант 17
	a1=2, b1=3, t1=428;
	a2=3, b2=6, t2=672;
	a3=2, b3=8, t3=672;
	r1=3, r2=8.
		Вариант 18
		a1=2, b1=1, t1=438;
		a2=3, b2=6, t2=747;
		a3=3, b3=7, t3=812;
		r1=7, r2=5.

Вариант 19
a1=7, b1=3, t1=1365;
a2=6, b2=3, t2=1245;
a3=1, b3=2, t3=650;
r1=6, r2=5.
	Вариант 20
	a1=8, b1=2, t1=840;
	a2=6, b2=3, t2=870;
	a3=3, b3=2, t3=560;
	r1=6, r2=2.
		Вариант 21
		a1=5, b1=3, t1=750;
		a2=4, b2=3, t2=630;
		a3=3, b3=4, t3=700;
		r1=5, r2=6.

Вариант 22
a1=6, b1=2, t1=600;
a2=4, b2=3, t2=520;
a3=3, b3=4, t3=600;
r1=6, r2=3.
	Вариант 23
	a1=4, b1=3, t1=440;
	a2=3, b2=4, t2=393;
	a3=3, b3=5, t3=450;
	r1=6, r2=5.
		Вариант 24
		a1=3, b1=2, t1=273;
		a2=3, b2=3, t2=300;
		a3=2, b3=5, t3=380;
		r1=4, r2=5.

Вариант 25
a1=2, b1=1, t1=438;
a2=3, b2=6, t2=747;
a3=3, b3=7, t3=812;
r1=7, r2=5.
	Вариант 26
	a1=4, b1=3, t1=480;
	a2=3, b2=4, t2=444;
	a3=2, b3=6, t3=546;
	r1=2, r2=4.
		Вариант 27
		a1=8, b1=2, t1=840;
		a2=3, b2=3, t2=393;
		a3=2, b3=3, t3=348;
		r1=6, r2=4.

Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30

a1=5, b1=2, t1=505;
a2=6, b2=3, t2=870;
a3=3, b3=2, t3=560;
r1=7, r2=2.
	a1=2, b1=3, t1=428;
	a2=3, b2=6, t2=672;
	a3=2, b3=8, t3=672;
	r1=3, r2=8.
		a1=7, b1=3, t1=1365;
		a2=6, b2=3, t2=1245;
		a3=1, b3=2, t3=650;
		r1=6, r2=5.

Отчет о выполненной работе должен содержать:

1. Тему и цель работы
2. Индивидуальное задание согласно варианту
3. Формализацию прямой и двойственной задач
4. Решение прямой и двойственной ЗЛП симплекс-методом с использованием Mathcad (минимальний уровень) и расчетами, выполненными вручную (с помощью построения симплекс-таблиц).
5. Выводы по результатам выполнения лабораторной работы

Вопросы к защите лабораторной работы

1. В какой форме должна быть записана ЗЛП для решения ее симплекс-методом?
2. Какие переменные являются зависимыми (базисными), а какие – независимыми (свободными)?
3. Какие переменные приравниваются к 0 для нахождения первого опорного плана?
4. Что является первым опорным решением ЗЛП?
5. Что выступает критерием оптимальности при минимизации (максимизации) целевой функции?
6. Каков алгоритм симплекс-метода?
7. Как выбирается направляющий столбец?
8. Как выбирается направляющая строка?
9. Какой элемент называется разрешающим?
10. Когда ЗЛП не имеет решения?
11. Что представляет из себя жорданова перестановка (транспозиция)?
12. Как определяются элементы новой симплекс-таблицы (разрешающий элемент, элементы направляющего столбца и строки, остальные элементы)?
13. Сформулируйте экономическое содержание двойственной задачи производственного планирования.
14. Сформулируйте общие правила построения двойственной задачи.
15. Чему равняется количество переменных двойственной задачи?
16. Чему равняется количество ограничений двойственной задачи?
17. Что ограничению-неравенству прямой задачи соответствует в двойственной задаче? Что ограничению-равенству прямой задачи соответствует в двойственной задачи?

18. Какая взаимосвязь между матрицами систем ограничений прямой и двойственной задачи?
19. Что характеризует дефицитность ресурсов?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 ПОИСКИ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ, ПОСТРОЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

Целью работы является изучение оптимизирующих алгоритмов на графах:
поиск кратчайшего пути, построение минимальных остовных деревьев.

Краткие теоретические сведения

На практике с понятием графа встречаются очень часто. Если изобразить сеть дорог, связывающую некоторые города линиями, а города кружками, то получается схема. Такая же по форме схема возникает, если изобразить сетку телеграфных узлов, систему электрических связей или схему информационных связей между алгоритмами некоторой сложной задачи. Таким образом, во многих случаях, отвлекаясь от физического смысла, можно изобразить в виде схемы системы различной физической природы. Такие схемы в математике принято называть графами.

Для описания систем часто используются модели, представленные в виде графов. Граф – это совокупность точек, называемых вершинами, и линий, соединяющих некоторые из вершин. Эти линии указывают на выявленные связи между элементами системы, которые изображены вершинами. Обычно каждой линии поставлены в соответствие числовые величины (веса). Такой граф называется взвешенным (рис. 4.1).

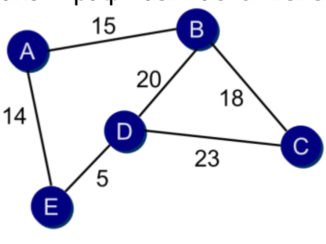
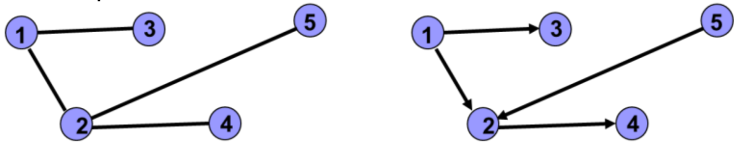


Рис. 1. Пример взвешенного графа

Рассмотрим структуру графа. Направленная линия (со стрелкой) называется дугой. Линия ненаправленная (без стрелки) называется ребром. Линия, выходящая из некоторой вершины и входящая в неё же, называется петлей. Граф, содержащий только дуги, называется ориентированным (орграф).

Одним из способов описания любого графа является матрица смежности, представляющая собой квадратную таблицу, у которой n строк и n столбцов, где n - число вершин графа. Если две вершины графа являются смежными (соединяются ребром или дугой), то на пересечении соответствующего столбца и строки устанавливается значение, равное «1», во всех остальных случаях – устанавливается значение «0». Примеры сформированных матриц смежности для различных графов представлены на рис. 4.2.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Неориентированный граф **Ориентированный граф**

Рис. 4.2. Примеры формирования матриц смежности

Одной из важнейших задач комбинаторной оптимизации является поиск кратчайшего расстояния между двумя произвольными вершинами. Такой поиск для небольших графов может быть осуществлен вручную, путем перебора и построения дерева всех возможных маршрутов. При компьютерной оптимизации возможно сведение задачи поиска кратчайшего расстояния к задаче целочисленного программирования.

Транспортной сетью называется ориентированный граф, в котором:

– каждому ребру приписана неотрицательная пропускная способность;

– выделены две вершины: источник (source) и сток (sink), такие, что любая другая вершина сети лежит на пути из источника в сток.

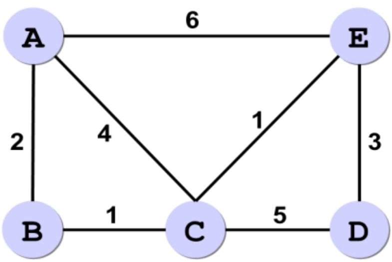
Потоком в транспортной сети называется неотрицательная вещественная функция, определенная на множестве дуг, удовлетворяющая условиям:

– ограниченности: поток по любой дуге сети не превосходит пропускной способности этой дуги;

– сохранения: суммарный поток, заходящий в любую вершину сети (кроме истока и стока) равен суммарному потоку, выходящему из этой вершины.

Величиной потока называется сумма значений этой функции по всем выходным дугам сети (выходные дуги сети - это дуги, инцидентные стоку). В общем случае потоки в сети ограничены пропускной способностью ее ребер (пропускная способность участка дороги, пропускная способность телекоммуникационных каналов и т.д.).
Главная задача в транспортной сети — транспортировать так много единиц продукта, как возможно, одновременно из истока в сток. Решение этой задачи называют максимальным потоком. Поиск максимального потока предполагает использование специализированного алгоритма Форда-Фалкерсона. При компьютерной оптимизации в среде Excel задачу можно свести к задаче линейного программирования.

ЗАДАЧА ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ



Дана схема железнодорожной сети в виде графа. Протяженность каждой дороги представлена весовыми коэффициентами.
Определить кратчайший путь между точками A и D

Порядок выполнения работы

Построим весовую матрицу смежности для заданного графа:

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

Для решения задачи в процедуре Excel «Поиск решения», представим ее как дискретную транспортную задачу с промежуточными пунктами. Будем считать, что транспортные расходы при перевозке одной единицы груза равны (в условных единицах) расстояниям между вершинами. Одна единица груза отправляется из вершины A (исходный пункт) и должна прибыть в вершину D (пункт назначения). Все промежуточные вершины рассматриваются как промежуточные пункты, которые явля-

ются одновременно и исходными пунктами и пунктами назначения. Требуется определить такую последовательность вершин, по которым должна перемещаться единица груза, отправленная из вершины A, при которой стоимость транспортных расходов будет минимальна и груз попадет в вершину D. Так как транспортные расходы при перемещении груза из одной вершины в другую равны расстоянию между вершинами, то последовательность вершин, при которой транспортные расходы будут минимальными, определяет наикратчайший путь из вершины A в вершину D.
Транспортная матрица задачи в этом случае будет иметь следующий вид:

Исходные пункты	Пункты назначения					Кол-во отправленного груза
	A	B	C	D	E	
A	X	2	4	X	6	1
B	2	X	1	X	X	1
C	4	1	X	5	1	1
D	X	X	5	X	3	0
E	6	X	1	3	X	1
Кол-во прибывшего груза	0	1	1	1	1	

Здесь X – означает запрет перевозки в данном направлении.
1. Построим математическую модель данной задачи.
Для этого введем целочисленные переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad (i, j = 1..5).$$

Здесь x_{ij} =1 в случае, если кратчайший путь содержит переход из вершины i в вершину j и x_{ij} =0 в противном случае.
Построим целевую функцию в виде:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Сформируем ограничения задачи:
– Первая пара ограничений задаёт условия для начальной

вершины пути (A). В искомом пути в эту вершину не должно быть входа, но должен быть один выход: $\sum_{i=1}^{5} x_{iA} = 0, \sum_{j=1}^{5} x_{Aj} = 1$

– Вторая пара ограничений задаёт условия для конечной вершины пути (D). В неё должен быть один вход, но не должно быть выхода: $\sum_{i=1}^{5} x_{iD} = 1, \sum_{j=1}^{5} x_{Dj} = 0$

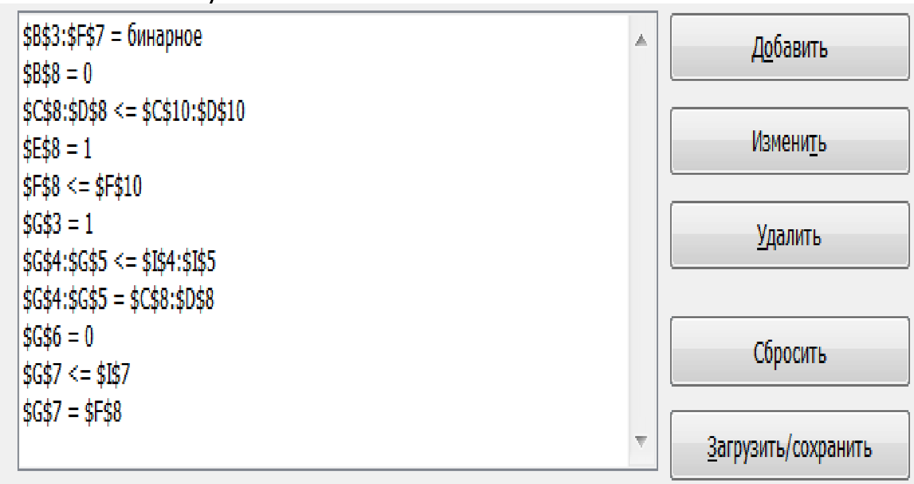
– Для всех остальных вершин (кроме A и D) устанавливаются ограничения, задающие равенство количества входов и выходов в каждую из них в искомом кратчайшем пути: $\sum_{j=1}^{5} x_{kj} = \sum_{i=1}^{5} x_{ik}, k \neq A, k \neq D$

– Для каждой вершины количество входов и выходов не должно быть более одного: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1.$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ПЕРЕМЕННЫЕ						ОГРАНИЧЕНИЯ		
2		A	B	C	D	E	Лев. часть	Знак	Прав.
3	A						=СУММ(B3:F3)	=	1
4	B						=СУММ(B4:F4)	<=	1
5	C						=СУММ(B5:F5)	<=	1
6	D						=СУММ(B6:F6)	=	0
7	E						=СУММ(B7:F7)	<=	1
8	Лев. часть	=СУММ(B3:B7)	=СУММ(C3:C7)	=СУММ(D3:D7)	=СУММ(E3:E7)	=СУММ(F3:F7)			
9	Знак	=	<=	<=	=	<=			=СУМ
10	Прав. часть	0	1	1	1	1		=СУММ(B1	БАЛА
11									
12	ТАРИФЫ	A	B	C	D	E			
13	A	100	2	4	100	6			
14	B	2	100	1	100	100	ЦФ		
15	C	4	1	100	5	1			
16	D	100	100	5	100	3	Значение	Направлен	
17	E	6	100	1	3	100	=СУММПРОИЗВ(B3:F7;B13:F17)		

2. В процедуре Excel «Поиск решения» зададим все ограничения в

соответствии с пунктом 4.



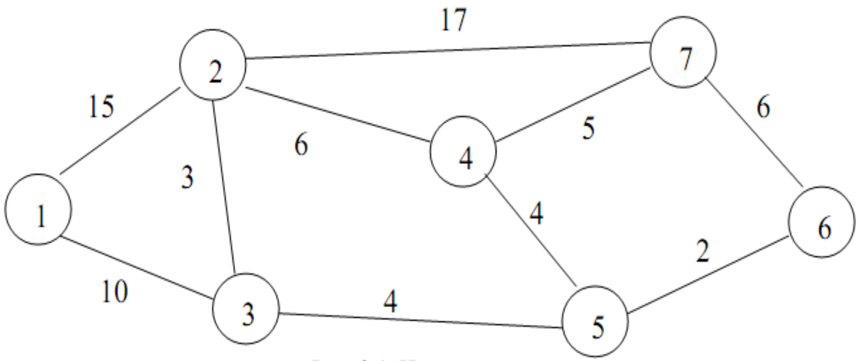
3. Осуществим поиск решения и получим результатную экранную форму:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ПЕРЕМЕННЫЕ						ОГРАНИЧЕНИЯ		
2		A	B	C	D	E	Лев. часть	Знак	Прав. Часть
3	A	0	1	0	0	0	1	=	1
4	B	0	0	1	0	0	1	<=	1
5	C	0	0	0	0	1	1	<=	1
6	D	0	0	0	0	0	0	=	0
7	E	0	0	0	1	0	1	<=	1
8	Лев. часть	0	1	1	1	1			
9	Знак	=	<=	<=	=	<=			4
10	Прав. часть	0	1	1	1	1		4	БАЛАНС
11									
12	ТАРИФЫ	A	B	C	D	E			
13	A	100	2	4	100	6			
14	B	2	100	1	100	100	ЦФ		
15	C	4	1	100	5	1			
16	D	100	100	5	100	3	Значение	Направление	
17	E	6	100	1	3	100	7	min	

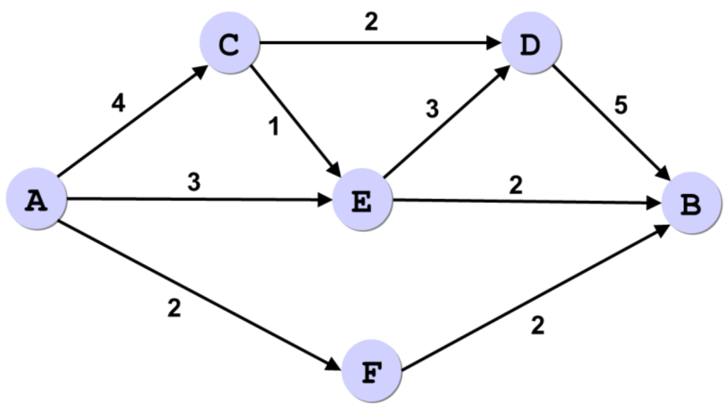
4. Согласно полученным расчетам кратчайший путь (A-B-C-E-D) будет равен 7 ед.

Задания для самостоятельного разбора:

Определить наикратчайший путь между вершиной 1 и вершиной 7 на графе, представленном ниже:



ЗАДАЧА ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА



Дана схема автомобильной сети дорог в виде графа. Определить максимальный поток автомашин (машин/час)

Порядок выполнения работы

1. Представить задачу о максимальном потоке как задачу линейного программирования. Переменными являются потоки по рёбрам, а ограничениями — сохранение потока и ограничение пропускной способности. Тогда математическая модель задачи будет иметь следу-

ющий вид:

1) Построим целевую функцию в виде:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n} f_{iB} \to \max$$

2) Сформируем ограничения задачи:

ограничения по закону сохранения потока в транзитивных узлах:

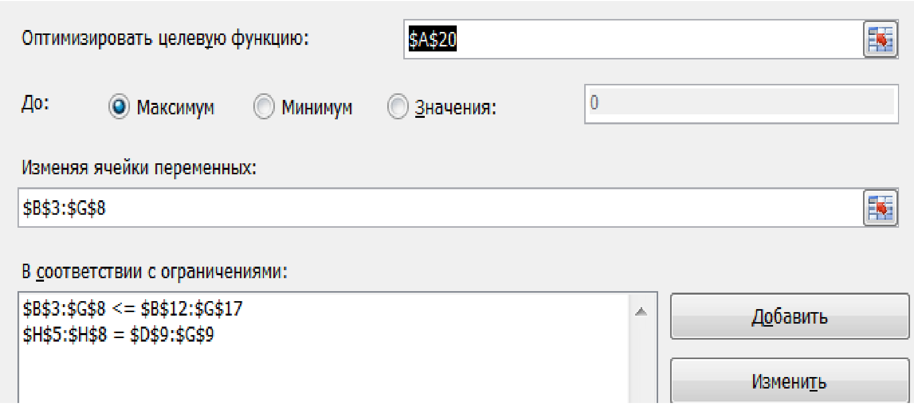
$$\sum_{i} f_{ij} - \sum_{j} f_{ij} = 0,\ \ i \neq 1,\ \ i \neq n,$$

ограничение по пропускной способности ребер: $0 \le f_{ij} \le c_{ij}$, $(i,j) \in A$

2. Построим экранную форму задачи:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ПЕРЕМЕННЫЕ							
2		A	B	C	D	E	F	Сумма
3	A							=СУММ(B3:G3)
4	B							=СУММ(B4:G4)
5	C							=СУММ(B5:G5)
6	D							=СУММ(B6:G6)
7	E							=СУММ(B7:G7)
8	F							=СУММ(B8:G8)
9	Сумма	=СУММ(B3:B8)	=СУММ(C3:C8)	=СУММ(D3:D8)	=СУММ(E3:E8)	=СУММ(F3:F8)	=СУММ(G3:G8)	
10								
11	ТАРИФЫ	A	B	C	D	E	F	
12	A	0	0	3	0	3	2	
13	B	0	0	0	0	0	0	
14	C	0	0	0	2	1	0	
15	D	0	4	0	0	0	0	
16	E	0	2	0	2	0	0	
17	F	0	2	0	0	0	0	
18								
19	ЦФ:ЗНАЧЕНИЕ							
20	=C9							

3. В процедуре Excel «Поиск решения» зададим все ограничения:



4. Осуществим поиск решения и получим результатную экранную форму:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**ПЕРЕМЕННЫЕ**							
2		**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**Сумма**
3	**A**	**0**	**0**	**3**	**0**	**3**	**2**	**8**
4	**B**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
5	**C**	**0**	**0**	**0**	**2**	**1**	**0**	**3**
6	**D**	**0**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**4**
7	**E**	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**	**0**	**4**
8	**F**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**
9	**Сумма**	**0**	**8**	**3**	**4**	**4**	**2**	
10								
11	**ТАРИФЫ**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	
12	**A**	0	0	3	0	3	2	
13	**B**	0	0	0	0	0	0	
14	**C**	0	0	0	2	1	0	
15	**D**	0	4	0	0	0	0	
16	**E**	0	2	0	2	0	0	
17	**F**	0	2	0	0	0	0	
18								
19	**ЦФ:ЗНАЧЕНИЕ**							
20	**8**							

5. Согласно полученным расчетам максимальный поток будет равен 8 машин/час.

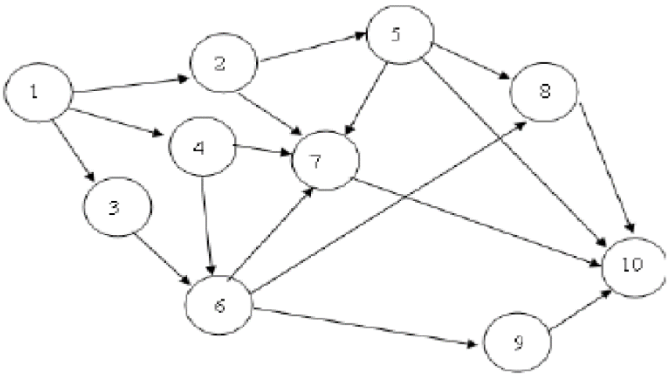
Приложения метода определения кратчайшего пути многочисленны. Он используется при решении:
1) задачи о назначениях;
2) задачи определения кратчайшего маршрута между двумя городами по карте дорог;
3) транспортной задачи, в которой требуется найти кратчайший по длине, времени или наиболее дешевый путь между двумя пунктами и др.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф, не содержащий циклов, называется ациклическим.
Задача нахождения остова минимального веса во взвешенном связном графе, возникает при проектировании линий электропередачи, трубопроводов, дорог и т.п., когда требуется заданные центры соединить некоторой системой каналов, связных либо непосредственно соединяющим их каналом, либо через другие центры и каналы, так, чтобы общая длина (или, например, стоимость) каналов связи была минимальной.
Для решения этой имеются эффективные алгоритмы – алгоритмы Краскала и Прима, применяемые к произвольному связному графу (G, w) порядка n.

Задания для самостоятельного разбора:

Варианты заданий

Сеть содержит 10 вершин. Пропускная способность дуг заданы таблицей. Найти максимальный поток между вершинами 1 и 10.



начало	конец	Варианты									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина	длина
1	2	4	9	12	10	9	12	9	13	13	9
1	3	13	12	9	13	11	12	8	10	1	10
1	4	14	4	9	11	3	12	7	5	4	7
2	5	7	10	7	11	2	3	7	12	9	5
2	7	7	3	3	4	1	4	14	6	4	11
3	6	13	4	14	9	13	5	1	1	1	11
4	6	6	15	5	7	15	5	13	8	8	12
4	7	9	13	12	9	3	2	12	10	4	13
5	7	6	8	11	5	14	15	5	3	9	8
5	8	2	4	9	13	1	11	4	5	10	15
5	10	2	10	2	2	10	8	8	14	8	12
6	7	4	15	11	3	6	4	9	6	10	1
6	8	9	14	11	15	3	3	3	11	13	9
6	9	14	7	5	7	7	5	11	8	10	11
7	10	10	9	15	10	6	11	2	8	6	3
8	10	15	10	9	8	15	8	15	13	4	2
9	10	10	5	7	1	12	11	8	11	13	13

1. Поиск в глубину. Представление графа – список смежности.
2. Поиск ширину. Представление графа – список смежности.
3. Поиск в глубину. Представление графа – матрица смежности.
4. Поиск ширину. Представление графа – матрица смежности.
5. Алгоритм Прима. Представление графа – матрица смежности.
6. Алгоритм Краскала. Представление графа – матрица смежности.
7. Алгоритм Прима. Представление графа – список смежности.
8. Алгоритм Краскала. Представление графа – список смежности
9. Алгоритм Дейкстры. Представление графа – матрица смежности.
10. Алгоритм Дейкстры. Представление графа – список смежности.
11. Алгоритм Флойда. Представление графа – матрица смежности.
12. Алгоритм Флойда. Представление графа – список смежности.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Под задачей целочисленного программирования (ЦП) понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения. В том случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют целочисленной задачей линейного программирования. В противном случае, когда хотя бы одна зависимость будет нелинейной, это будет целочисленной задачей нелинейного программирования.

Особый интерес к задачам ЦП вызван тем, что во многих практических задачах необходимо находить целочисленное решение ввиду дискретности ряда значений искомых переменных. Зачастую, задачу ЦП решают без учета условий целочисленности переменных, а затем округляют полученное решение с избытком или недостатком. Это не гарантирует получение оптимального целочисленного решения задачи. Поэтому для нахождения оптимального решения целочисленных задач применяют специальные методы, в которых учитывается, что число возможных решений любой целочисленной задачи является конечным. Следовательно, можно рассмотреть все возможные сочетания целочисленных переменных и проверить, удовлетворяют ли они ограничениям, и из числа удовлетворяющих ограничениям, выбрать наилучшее с точки зрения целевой функции. Такой метод называют методом полного перебора. Его трудоемкость с ростом числа переменных и расширением области граничных условий значительно возрастает. Поэтому для реальных задач он неприменим.

Метод ветвей и границ решения целочисленных задач линейного программирования.

Метод ветвей и границ относится к комбинаторным методам решения целочисленных задач и применим как к полностью, так и к частично целочисленным задачам.

Суть метода ветвей и границ – в направленном частичном переборе допустимых решений. Будем рассматривать задачу линейного программирования. Вначале она решается без ограничений на целочисленность. При этом находится верхняя граница F(x), так как целочисленное решение не может улучшить значение функции цели.

Далее в методе ветвей и границ область допустимых значений переменных (ОДЗП) разбивается на ряд непересекающихся областей (ветвление), в каждой из которых оценивается экстремальное значение функции. Если целое решение не найдено, ветвление продолжается.

Ветвление производится последовательным введением дополнительных ограничений. Пусть x_k – целочисленная переменная, значение которой в оптимальном решении получилось дробным. Интервал $[\beta_k] \le x_k \le [\beta_k]+1$ не содержит целочисленных компонентов решения. Поэтому допустимое целое значение x_kдолжно удовлетворять одному из неравенств $x_k \ge [\beta_k]+1$ или $x_k \le [\beta_k]$. Это и есть дополнительные ограничения. Введение их в методе ветвей и границ на каждом шаге порождает две не связанные между собой подзадачи. Каждая подзадача решается как задача линейного программирования с исходной целевой функцией. После конечного числа шагов будет найдено целочисленное оптимальное решение.

Применение метода ветвей и границ рассмотрим на конкретном примере.

Пример*.* Методом ветвей и границ найти максимальное значение функции $F(x) = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$3x_1+4x_2 \le 24$$

$$2x_1+5x_2 \le 22$$

$$x_{1,2} \ge 0 \text{ - целые}$$

1-й шаг метода ветвей и границ. Решается задача линейного программирования с отброшенными условиями целочисленности с помощью симплекс-метода (табл. 1 – 3).

По данным табл. 3 запишем оптимальное нецелое решение

$$x^*_1=2\frac{}{};\quad x^*_2=2\frac{}{};\quad F_{max}=16\frac{}{}$$

Таблица 1 - симплекс-таблица для задачи ЛП

базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	x_2
x_3	24	3	4
x_4	22	2	5
F	0	-2	-3

Таблица 2 - симплекс-таблица для задачи ЛП

базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	x_4
x_3	32/5	7/5	-4/5
x_2	22/5	2/5	1/5
F	66/5	-4/5	3/5

Таблица 3 - симплекс-таблица для задачи ЛП

базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_3	x_4
x_1	32/7	5/7	-4/7
x_2	18/7	-2/5	3/7
F	118/7	4/7	1/7

Графическая интерпретация задачи приведена на рис. 1. Здесь ОДЗП представлена четырехугольником ABCD, а координаты вершины C совпадают с x^*_1 и x^*_2 . Обе переменные в оптимальном решении являются нецелыми, поэтому любая из них может быть выбрана в качестве переменной, инициирующей процесс ветвления.

Пусть это будет x_2 . Выбор x_2 порождает две подзадачи (2 и 3), одна из них получается путем добавления ограничения $x_2 \geq 3$ к исходной задаче, а другая – путем добавления ограничения $x_2 \leq 2$. При этом ОДЗП разбивается на две заштрихованные области (рис. 1), а полоса значений $2 < x_2 < 3$ исключается из рассмотрения. Однако множество допустимых целочисленных решений сохраняется, порожденные подзадачи содержат все целочисленные решения исходной задачи.

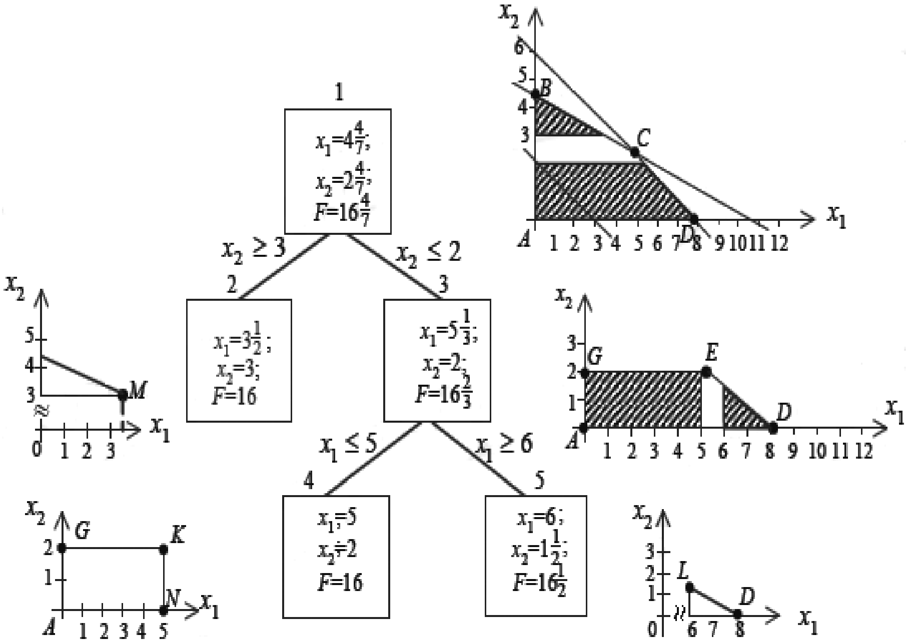


Рисунок 1 - графическая интерпритация решения примера методом ветвей и границ

2-й шаг метода ветвей и границ. Осуществляется выбор одной из обозначенных ранее подзадач. Не существует точных методов определения, какой из подзадач отдать предпочтение. Случайный выбор приводит к разным последовательностям подзадач и, следовательно, к различным количествам итераций, обеспечивающих получение оптимального решения.

Пусть вначале решается подзадача 3 с дополнительным ограничением $x_2 \le 2$ или $x_2 + x_5 = 2$. Из табл. 3 для переменной x_2 справедливо следующее выражение $-2/7x_3+3/7x_4+x_2=18/7$ или $x_2=18/7+2/7x_3-3/7x_4$, тогда $2/7x_3-3/7x_4+x_5=-4/7$. Включаем ограничение в табл. 3, при этом получим новую таблицу (табл. 4).

Осуществляя оптимизацию решения, переходим к табл. 5, которой соответствует решение

$$x^*_1=5;\quad x^*_2=2;\quad F_{max}=16$$

Переменная x_1 нецелая, поэтому ветвление необходимо продолжить; при этом возникают подзадачи 4 и 5 с ограничениями $x_1 \le 5$ и $x_1 \ge 6$ соответственно. Полоса значений $5 < x_1 < 6$ исключается из рассмотрения.

Таблица 4 - симплекс-таблица для задачи ЛП

базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_3	x_4
x_1	32/7	5/7	-4/7
x_2	18/7	-2/5	3/7
x_5	-4/7	2/7	-3/7
F	118/7	4/7	1/7

Таблица 5 - симплекс-таблица для задачи ЛП

базисные перемен-ные	Свободные члены	Небазисные перемен-ные	
		x_3	x_5
x_1	16/3	1/3	-4/3
x_2	2	0	1
x_4	4/3	-2/3	-7/3
F	50/3	2/3	1/3

3-й шаг метода ветвей и границ. Решаются подзадачи 4 и 5. Из рис. 1 видно, что оптимальное целочисленное решение подзадачи 4 достигается в вершине K с координатами $x^*_1=5$, $x^*_2=2$, однако это не означает, что найден оптимум исходной задачи. Причиной такого вывода являются еще не решенные подзадачи 3 и 5, которые также могут дать целочисленные решения. Найденное целочисленное решение F = 16 определяет нижнюю границу значений целевой функции, т.е. меньше этого значения оно быть не должно.

Подзадача 5 предполагает введение дополнительного ограничения $x_1 \geq 6$ в подзадачу 3 . Графическое решение на рис. 1 определяет вершину L с координатами $x^*_1=6$, $x^*_2=3/2$, в которой достигается оптимальное решение подзадачи 5: $F_{max} = 16.5$. Дальнейшее ветвление в этом направлении осуществлять нецелесообразно, так как большего, чем 16, целого значения функции цели получить невозможно. Ветвление подзадачи 5 в лучшем случае приведёт к другому целочисленному решению, в котором F = 16.

4-й шаг метода ветвей и границ. Исследуется подзадача 2 с ограничением $x_2 \geq 3$, находится её оптимальное решение, которое соответствует вершине M (рис. 1) с координатами $x^*_1=3.5$, $x^*_2=3$. Значение функции цели при этом $F_{max} =16$, которое не превышает найденного ранее решения. Таким образом, поиск вдоль ветви $x_2 \geq 3$ следует прекратить.

Отметим, что алгоритм метода ветвей и границ является наиболее надёжным средством решения целочисленных задач, он положен в основу большинства прикладных программ для ПЭВМ, используемых для этих целей.

Варианты заданий

Вариант 1

Фирма выпускает три продукта: А, В, С. На производство единицы продукта А требуется затратить 1,1 ч. труда ИТР, 12,3 ч. физического труда и 3,1 кг сырья. Для единицы продукта В соответствующие показатели равны 2,3 ч., 4,2 ч и 2,4 кг, для продукта С - 1,3 ч, 5,1 ч. и 1,2 кг. Ресурсы составляют 120 ч. труда ИТР, 640 ч. физического труда и 450 кг сырья. При оптовых закупках покупателю предоставляются скидки, так что прибыли от продажи продукции изменяются как показано в табл. 2.12. Например, если продается 120 ед. продукта А, то первые 40 ед. приносят по 63,2 руб. прибыли; следующие 60 - по 54,4 руб., а остальные 20 - по 48,3 руб.

Продукт А		Продукт В		Продукт С	
Продажа, ед.	Удельная прибыль, руб.	Продажа, ед.	Удельная прибыль, руб.	Продажа, ед.	Удельная прибыль, руб.
0-40	63,2	0-50	36,5	0-100	30,5
40-100	54,4	50-100	24,3	Более 100	24,8
100-150	48,3	Более 100	18,7	-	-
Более 150	42,1	-	-	-	-

Вариант 2

Мебельное предприятие выпускает три вида наборов мебели, книжные полки и тумбу под телевизоры. Характеристики каждого вида продукции приведены в табл. 2.13. При условии получения максимальной прибыли объем товарной пилопродукции должен составить не менее 459,31 тыс. руб. Ситуация со сбытом продукции сложилась следующая. Книжными полками рынок насыщен поэтому торговые организации уменьшили объем договоров до 10 тыс. шт. Тумбы для телевизоров могут быть реализованы в объемах от 4 до 7 тыс. шт., наборы мебели 2 - от 7 до 10 тыс. шт. Спрос на наборы мебели 1 и 3 неограничен и требуется не менее 10 тыс. шт. Предприятие имеет технологическое оборудование, число единиц которого и нормы затрат времени оборудования каждой группы на изготовление единицы каждого вида продукции приведены в табл. 2.13. Предприятие работает в две смены с эффективным временем работы каждой машины в 3945 ч. (коэффициент сменности 1,9). Оптимизировать производственную программу предприятия.

Таблица1.

Показатель	Виды продукции				
	Набор мебели 1	Набор мебели 2	Набор мебели 3	Книжные полки	Тумба под теле-визор
Оптовая цена единицы изделия, тыс. руб	7,2	14,3	32,5	0,182	1,5
Прибыль от реализации, тыс. руб	2,4	4,5	60,3	0,06	0,45

Таблица 2

Наименование оборудования	Число, шт.	Виды продукции				
		Набор мебели 1	Набор мебели 2	Набор мебели 3	Книжные полки	Тумба под телевизор
Линия рас-кроя древес-но-стружечных плит	2	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042
Гильотинные ножницы	1	0,045	0,080	0,158	0,011	0,035
Линия обли-цо-вывания	2	0,132	0,184	0,428	0,020	0,060
Линия обре-зания кромок	2	0,057	0,082	0,230	0,010	0,028
Лаконаливная машина	2	0,063	0,090	0,217	0,010	0,032
Полироваль-ные станки	4	0,170	0,280	0,620	0,020	0,096

Вариант 3

В леспромхозе производится раскряжевка хлыстов на сортименты. Требуется получить сортименты трех видов - длиной 6, 2,2 и 1,5 м. Длина среднего хлыста 31 м, средний диаметр 0,3 м. План поставки сортиментов, соответственно, 32,4 тыс. м^3, 86,3 тыс м^3 и 40,3 тыс. м^3. Используя карту раскроя хлыстов без учета толщины пропила определить оптимальный план раскроя.

Сортимент, м	Варианты раскроя хлыстов										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6 2,2 1,5	5 0 0	4 2 1	4 1 3	3 5 1	3 0 8	2 4 6	2 1 11	1 9 3	1 2 13	0 10 6	0 1 19
Отходы	1	1,1	0,3	0,5	1,0	1,2	0,3	0,7	1,1	0	0,3

Вариант 4

Лесхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц вещества А и 12 единиц В. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были.

Питательные вещества	Количество питательных веществ в 1 кг корма вида:	
	1	2
А В	2 2	1 4
Цена 1 кг корма, руб	2	3

Вариант 5

Леспромхоз имеет древесину трех видов в количествах: 1 - 1,12 тыс. м^3, 2 - 0,52 тыс. м^3, 3 - 0,73 тыс. м^3, для изготовления изделий А, В, С и D. Нормы расхода древесины в м^3 на изготовление единицы каждого изделия и прибыль от реализации единицы изделия даны в таблице. Определить, сколько изделий каждого вида должно произвести предприятие, чтобы общая прибыль от реализации всех изделий была максимальной?

Сырье	Нормы расхода сырья на единицу изделия			
	A	B	C	D
1 2 3	0,1 0,2 0,4	0,15 0,4 0,5	0,2 0,3 0,1	0,25 0,1 0,2
Прибыль, руб	13,4	24,2	33,7	11,1

Вариант 6

Производство двух видов лесопродукции должно пройти три операции. Затраты времени на каждой операции на одно изделие, прибыль от реализации одного изделия в таблице. Сколько изделий каждого вида должно произвести предприятие, чтобы получить максимум прибыли, причем число изделий А должно быть не менее 10, а В - не более 70 единиц.

Изделия	Затраты на одно изделие			Прибыль, руб
	1	2	3	
A B	11,3 6,1	7,2 8,3	16,1 9,5	25,5 38,3
Фонд времени на каждую операцию	600	700	1300	

Вариант 7

Предприятие должно выпустить по плану продукции А - 545 единиц, В - 367 единиц, С - 457 единиц на двух машинах. Каждая из двух машин может выполнить операции по производству всех трех видов продукции. Затраты времени на производстве единицы изделия каждой из двух машин приведены в таблице. Как распределить работу машин, при условии выпуска продукции пакетами по 100 шт. каждый, чтобы затраты времени на выполнение плана были минимальны?

Машины	Продукция		
	A	B	C
1 2	4,3 6,2	10,7 8,5	10,4 20,2

Вариант 8

Предприятию задана программа по изготовлению четырех видов изделий в количествах: вида А - 495, В - 265, С - 378, D - 162. На предприятии имеется три группы станков с различной производительностью. Задается суммарное допустимое время работы за этот период для каждой группы станков: первой - 80 ч., второй - 100 ч., третьей - 150 ч. Нормы времени (в часах) на изготовление одного изделия на каждом станке и данные об издержках (в рублях) на изготовление каждого изделия на станках различных групп приводятся в таблице. Требуется так распределить изготовление изделий по группам станков, чтобы была обеспечена заданная программа по изготовлению изделий и чтобы общие издержки были минимальны?

Группы станков	Нормы времени на станках, час				Издержки на изготовление единицы изделия, руб			
	1	2	3	4	A	B	C	D
1 11 111	0,5 0,4 0,4	0,3 0,2 0,1	0,4 0,2 0,3	0,1 0,5 0,6	0,12 0,15 0,18	0,25 0,15 0,35	0,3 0,4 0,5	0,4 0,2 0,1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Ниже приведены постановки «ВАШИХ» транспортных задач, выпишите спецификации, необходимые для решения средствами LiPS и MATLAB. Решите их в указанных средах. Сохраняя протоколы исполнения, сравните оба полученных результата.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ. Продолжим решение задачи 3 из [2,стр. 6-7] посредством интерфейса, предлагаемого в LiPS'е и MATLAB'е.

ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК (ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА)

Для двух железнодорожных станциях сосредоточено топливо для трех электростанций. На C_1 имеется 300 т, на C_2 – 500 т. На электростанцию $Э_1$ нужно доставить 500 т, на $Э_2$ – 200 т, на $Э_3$ -100 т. Стоимость перевозки 1 т топлива для каждого маршрута задана таблицей:

	$Э_1$	**$Э_2$**	**$Э_3$**	
C_1	X_{11} 7	X_{12} 9	X_{13} 8	300 т
C_2	X_{21} 3	X_{22} 4	X_{23} 6	500 т
	500 т	200 т	100 т	

Необходимо составить план перевозок.

Анализ задачи 3. Обозначим X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23} – количество топлива, перевозимого по маршрутам, указанным в таблице. Требуется найти такие числовые значения этих шести неизвестных, чтобы общая стоимость перевозок, т.е. $C = 7\ X_{11}+9\ X_{12}+8\ X_{13}+3\ X_{21}+4\ X_{22}+6\ X_{23}$ (целевая функция), приняла наименьшее значение, при условии выполнения системы ограничений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 500, \\ x_{12} + x_{22} = 200, \\ x_{13} + x_{23} = 100, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 500. \end{cases}$$

Представление задачи в TR01Polis.lps:

```
min: 7*X1 + 9*X2 + 8*X3 + 3*X4 + 4*X5 + 6*X6;

Row1: X1 + X4 = 500;
Row2: X2 + X5 = 200;
Row3: X3 + X6 = 100;
Row4: X1 + X2 + X3 = 300;
Row5: X4 + X5 + X6 = 500;
```

Экспорт отчета TR01Polis в excel:

Переменная	Значение	Коэфф. ЦФ	Оценочный коэфф.	
X1	200	7	0	
X2	0	9	-1	
X3	100	8	0	
X4	300	3	0	
X5	200	4	0	
X6	0	6	-2	
Ограничение	Значение	ССЧ	Двойств. оценка	
Row1	500	500	3	
Row2	200	200	4	
Row3	100	100	4	
Row4	300	300	4	
Row5	500	500	0	

ПРИМЕР ОТЧЕТА, СГЕНЕРИРОВАННЫЙ ПО ЗАПУСКУ.

*** Фаза I --- Старт ***

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	s7	s8	s9	s10	s11	ССЧ
s7	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	500
s8	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	200
s9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	100
s10	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	300
s11	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	500
ЦФ	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	1600

Переменная, вводимая в базис -> X1
Соотношения: ССЧ/Столбец X1 -> { 500 - - 300 - }
Переменная, исключаемая из базиса -> s10

*** Фаза I --- Итерация 1 ***

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	s7	s8	s9	s10	s11	ССЧ
s7	0	-1	-1	1	0	0	1	0	0	-1		

s8	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	200
s9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	100
X1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	300
s11	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	500
ЦФ	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	2	0	1000

Переменная, вводимая в базис -> X4
Соотношения: ССЧ/Столбец X4 -> { 200 - - - 500 }
Переменная, исключаемая из базиса -> s7

*** Фаза I --- Итерация 2 ***

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	s7	s8	s9	s10	s11	ССЧ
X4	0	-1	-1	1	0	0	1	0	0	-1	0	200
s8	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	200
s9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0		

											0	100
X1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	300
s11	0	1	1	0	1	1	-1	0	0	1	1	300
ЦФ	0	-2	-2	0	-2	-2	2	0	0	0	0	600

Переменная, вводимая в базис -> X2
Соотношения: ССЧ/Столбец X2 -> { - 200 - 300 300 }
Переменная, исключаемая из базиса -> s8

*** Фаза I --- Итерация 3 ***

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	s7	s8	s9	s10	s11	ССЧ
X4	0	0	-1	1	1	0	1	1	0	-1	0	400
X2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	200
s9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	100
X1	1	0	1	0	-1	0	0	-1	0	1	0	100
s11	0	0	1	0	0	1	-1	-1	0	1		

											1	100
ЦФ	0	0	-2	0	0	-2	2	2	0	0	0	200

Переменная, вводимая в базис -> X3
Соотношения: ССЧ/Столбец X3 -> { - - 100 100 100 }
Переменная, исключаемая из базиса -> s9

*** Фаза I --- Итерация 4 ***

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	s7	s8	s9	s10	s11	ССЧ
X4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	-1	0	500
X2	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	200
X3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	100
X1	1	0	0	0	-1	-1	0	-1	-1	1	0	0
s11	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	1	1	0
ЦФ	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0	0

*** Фаза II --- Итерация 4 ***

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	s7	ССЧ
X4	0	0	0	1	1	1	0	500
X2	0	1	0	0	1	0	0	200
X3	0	0	1	0	0	1	0	100
X1	1	0	0	0	-1	-1	0	0
s7	0	0	0	0	0	0	1	0
ЦФ	0	0	0	0	-1	2	0	4100

Переменная, вводимая в базис -> X5
Соотношения: ССЧ/Столбец X5 -> { 500 200 - - - }
Переменная, исключаемая из базиса -> X2

*** Фаза II --- Итерация 5 ***

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	s7	ССЧ
X4	0	-1	0	1	0	1	0	300
X5	0	1	0	0	1	0	0	200
X3	0	0	1	0	0	1	0	100

X1	1	1	0	0	0	-1	0	200
s7	0	0	0	0	0	0	1	0
ЦФ	0	1	0	0	0	2	0	3900

\>> Оптимальное решение НАЙДЕНО
\>> Минимум = 3900

*** РЕЗУЛЬТАТЫ - ПЕРЕМЕННЫЕ ***

Переменная	Значение	Коэфф. ЦФ	Оценочный коэфф.
X1	200	7	0
X2	0	9	-1
X3	100	8	0
X4	300	3	0
X5	200	4	0
X6	0	6	-2

*** РЕЗУЛЬТАТЫ - ОГРАНИЧЕНИЯ ***

Ограничение	Значение	ССЧ	Двойств. оценка
Row1	500	500	3
Row2	200	200	4
Row3	100	100	4
Row4	300	300	4
Row5	500	500	0

Вот как выглядит запись этой задачи в тексте скрипта, вызываемого для решения этой задачи в среде MATLAB'а.

```
% Простая транспортная задача 3 {стр 6-7 Полисмаков}
% Искомый план перевозок [x11 x12 x13 x21 x22 x23]';
clear all
clc
diary tr01polic.txt
echo on
f = [7 9 8 3 4 6];
Beq = [ 1 0 0 1 0 0; 0 1 0 0 1 0; 0 0 1 0 0 1;
       1 1 1 0 0 0; 0 0 0 1 1 1];
lb = zeros(6,1);
beq = [500; 200; 100; 300; 500];
[ x, fval] = linprog(f',[],[],Beq,beq, lb, [])
diary off
```

Вот содержимое файла «tr01polic.txt», созданного в результате исполнения скрипта:

```
echo on
f = [7 9 8 3 4 6];
```

```
Beq = [ 1 0 0 1 0 0; 0 1 0 0 1 0; 0 0 1 0 0 1;
        1 1 1 0 0 0; 0 0 0 1 1 1];
lb = zeros(6,1);

beq = [500; 200; 100; 300; 500];

[ x, fval] = linprog(f',[],[],Beq,beq, lb, [])


x =

  200.0000
    0.0000
  100.0000
  300.0000
  200.0000
    0.0000


fval =

   3.9000e+03

diary off
```

Задания к лабораторной работе:

Ваши Транспортные задачи представлены следующей матрицей:

c_{ij} – транспортные издержки по перемещению единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j.

Задача состоит в отыскании такого плана перевозок, при котором весь продукт из пунктов производства будет вывезен, запросы потребителей полностью удовлетворены и суммарные транспортные издержки минимальны. Условия Т-задачи представим в виде.

$$\begin{array}{cc} & a_i \\ C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{Vmatrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} \\ b_j \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_m. & \end{array}$$

Для составления математической модели задачи введем переменные $x_{ij} \geq 0$, i=1, …, m, j=1, …, n, обозначающие количество груза, перевозимого из i-го пункта производства в j-й пункт потребления.

Требуется найти множество переменных $x_{ij} \geq 0$, минимизирующих функцию

$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ (1.11.1)

И удовлетворяющих условиям

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, m;$ (1.11.2)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b, j = 1, \ldots, n.$ (1.11.3)

ВАРИАНТ 1	**ВАРИАНТ 2**
$\begin{array}{cc} & a_i \\ C = \begin{Vmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 30 \\ 50 \\ 20 \end{matrix} \\ b_i \quad 15 \quad 15 \quad 40 \quad 30 & \end{array}$	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C = \begin{Vmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 40 \\ 30 \\ 35 \end{matrix} \\ b_i \quad 20 \quad 34 \quad 16 \quad 10 \quad 15 & \end{array}$
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
$\begin{array}{cc} & a_i \\ C = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 22 & 5 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 60 \\ 70 \\ 20 \end{matrix} \\ b_i \quad 40 \quad 30 \quad 30 \quad 50 & \end{array}$	$\begin{array}{cc} & a_i \\ C = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 8 & 4 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 30 \\ 50 \\ 20 \end{matrix} \\ b_i \quad 15 \quad 15 \quad 40 \quad 30 & \end{array}$

ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6
$C = \begin{array}{c\|\|cccc\|\|c} & & & & & a_i \\ & 2 & 4 & 5 & 1 & 60 \\ & 2 & 3 & 9 & 4 & 70 \\ & 3 & 4 & 2 & 5 & 20 \\ b_i & 40 & 30 & 30 & 50 & \end{array}$	$C = \begin{array}{c\|\|cccc\|\|c} & & & & & a_i \\ & 1 & 2 & 6 & 4 & 40 \\ & 3 & 1 & 3 & 2 & 30 \\ & 5 & 7 & 5 & 1 & 20 \\ b_i & 30 & 25 & 18 & 20 & \end{array}$
ВАРИАНТ 7	**ВАРИАНТ 8**
$C = \begin{array}{c\|\|cccc\|\|c} & & & & & a_i \\ & 2 & 4 & 3 & 2 & 60 \\ & 3 & 1 & 2 & 3 & 65 \\ & 5 & 4 & 1 & 5 & 70 \\ b_i & 15 & 15 & 40 & 30 & \end{array}$	$C = \begin{array}{c\|\|cccc\|\|c} & & & & & a_i \\ & 10 & 5 & 7 & 4 & 40 \\ & 7 & 4 & 9 & 10 & 25 \\ & 6 & 14 & 8 & 7 & 35 \\ b_i & 15 & 40 & 30 & 15 & \end{array}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Пример 1. Решить прямую и двойственную задачи:

Прямая задача

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + x_3 = 4, & y_1 \\
-x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, & y_2 \\
x_1 - x_2 + x_5 = 2, & y_3
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Двойственная задача

$$g(\mathbf{y}) = 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \to \min$$

$$\begin{array}{l}
y_1 - y_2 + y_3 \geq 2, \\
y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1, \\
y_1 \geq 1, \\
y_2 \geq -1, \\
y_3 \geq 2.
\end{array}$$

Решаем прямую задачу симплекс-методом:

$$\begin{array}{cc|cc|c|c}
 & & 2 & 1 & & \\
 & & x_1 & x_2 & & \\
\hline
1 & x_3 & 1 & 1 & = & 4 \\
-1 & x_4 & -1 & \boxed{1} & = & 3 \\
2 & x_5 & 1 & -1 & = & 2 \\
\hline
 & f & 2 & -3 & = & 5
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cc|c|c}
 & x_1 & x_4 & & \\
\hline
x_3 & \boxed{2} & -1 & = & 1 \\
x_2 & -1 & 1 & = & 3 \\
x_5 & 0 & 1 & = & 5 \\
\hline
f & -1 & 3 & & 14
\end{array}
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc|c|c|} & x_3 & x_4 & & \\ x_1 & 1/2 & -1/2 & = & 1/2 \\ x_2 & 1/2 & 1/2 & = & 7/2 \\ x_5 & 0 & 1 & = & 5 \\ \hline f & 1/2 & 5/2 & = & 29/2 \end{array} \Rightarrow$$

Итак, прямая задача разрешима: $\mathbf{x}^* = (1/2, 7/2, 0, 0, 5)$, $f^*_{\max} = 29/2$, следовательно, разрешима и двойственная задача, причем $g^*_{\min} = 29/2$. Находим оптимальное решение двойственной задачи, используя формулы (4). Полагаем $\mathrm{j} = \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5}$ (номера единичных столбцов матрицы ограничений). Имеем $\mathbf{y}^* = (\mathbf{3/2},\ \mathbf{3/2},\ \mathbf{2})$ -оптимальное решение двойственной задачи.

Пример 2. Решить прямую и двойственную задачи

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max \qquad\qquad g(\mathbf{y}) = 4y_1 + 6y_2 + y_3 \to \min$$

$$\begin{array}{lcc|l} -4x_1 + x_2 \le 4, & & y_1 & -4y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 6, & \Rightarrow & y_2 \ \Rightarrow & y_1 + y_2 + y_3 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1, & & y_3 & \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, & & & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \le 0. \end{array}$$

Приведем к каноническому виду прямую задачу и решим ее симплекс-методом, используя для построения начальной симплекс-таблицы метод искусственного базиса.

Каноническая форма прямой задачи :

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$-4x_1 + x_2 \le 4,$$

$$-x_1 + x_2 \le 6,$$

$$x_1 + x_2 \ge 1,$$

$$x \ge 0,$$

$$\Rightarrow$$

Вспомогательная задача

$$F(w) = -w_1 \to \max,$$

$$-4x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$

$$x_1 + x_2 - x_5 + w_1 = 1,$$

$$x \ge 0, w \ge 0,$$

	x_1	x_2	x_5		
x_3	-4	1	0	=	4
x_4	-1	1	0	=	6
w_1	$\boxed{1}$	1	-1	=	1
F	-1	-1	1	=	-1

$\Rightarrow$

		x_2	x_5		
		1	0		
0	x_3	5	-4	=	8
0	x_4	2	-1	=	7
1	x_1	1	-1	=	1
	F	0	0	=	0
	f	0	-1	=	1

Последняя таблица дает начальный опорный план прямой задачи и начальную симплекс-таблицу, из которой получаем, что прямая задача неразрешима, т.к. целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов. Следовательно неразрешима и двойственная, множество ее допустимых планов пусто.

Пример 3. Решить прямую и двойственную задачи:

Прямая задача		Двойственная задача
$f(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max$		$g(\mathbf{y}) = 4y_1 + 6y_2 + y_3 \to \min$
$x_1 - x_2 + x_3 \quad = 4,$	y_1	$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -1,$
$2x_1 \; + x_3 - x_4 \; = 6,$	y_2	$-y_1 \; -2y_3 \geq 2,$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 1,$	y_3	$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1,$
$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}.$		$-y_2 \geq -1,$
		$-y_3 \geq 1.$

Приведем исходную задачу к каноническому виду и решим симплекс-методом, используя для построения начальной симплекс-таблицы метод искусственного базиса. Имеем:

Вспомогательная задача

$$F(w) = -w_1 - w_2 - w_3 \to \max$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad + w_1 &= 4, \\
2x_1 \qquad + x_3 - x_4 \quad + w_2 &= 6, \\
2x_1 - 2x_2 + x_3 \quad - x_5 + w_3 &= 1,
\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$x \geq 0, \; w \geq 0,$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
w_1	1	-1	1	0	0	=
w_2	2	0	1	-1	0	=
w_3	2	-2	$\boxed{1}$	0	-1	=
F	-5	3	-3	1	1	

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c|cccc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & & \\
\hline
w_1 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & = & 3 \\
w_2 & 0 & 2 & -1 & 1 & = & 5 \\
x_3 & 2 & -2 & 0 & -1 & = & 1 \\
\hline
F & 1 & -3 & 1 & -2 & = & -8 \\
\hline
 & & -1 & -1 & & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|ccc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & x_4 & & \\
\hline
x_5 & -1 & 1 & 0 & = & 3 \\
w_2 & 1 & \boxed{1} & -1 & = & 2 \\
x_3 & 1 & -1 & 0 & = & 4 \\
\hline
F & -1 & -1 & 1 & & -2
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{|c|c|cc|c|c|}
 & & x_1 & x_4 & & \\
\hline
1 & x_5 & -2 & \boxed{1} & = & 1 \\
2 & x_2 & 1 & -1 & = & 2 \\
1 & x_3 & 2 & -1 & = & 6 \\
\hline
 & F & 0 & 0 & = & 0 \\
 & f & 3 & -1 & = & 11
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_1 & x_5 & & \\
\hline
x_4 & -2 & 1 & = & 1 \\
x_2 & -1 & 1 & = & 3 \\
x_3 & 0 & 1 & = & 7 \\
\hline
f & 1 & 1 & & 12
\end{array}
\Rightarrow
$$

Оптимальный план прямой задачи $x^* = (0,3,7,1,0), f^*_{\max} = 12$. Оптимальное решение двойственной задачи строим, используя соотношения (4). Полагаем $j = 2,4,5$, так как столбцы

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ линейно независимы.

Для определения y^* строим систему линейных уравнений :

$$\begin{cases}\Delta_4=(y^*,A^4)-c_4,\\ \Delta_5=(y^*,A^5)-c_5,\\ \Delta_2=(y^*,A^2)-c_2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=-y_2^*+1,\\ 1=-y_3^*-1,\\ 0=-y_1^*-2y_3^*-2,\end{cases}\Rightarrow y^*=(2,1,-2), g^*=12.$$

Пример 4. Решить прямую и двойственную задачи:

Прямая задача		Двойственная задача
$f(\mathbf{x})=-2x_1-x_2+x_3+x_4\to\max$		$g(\mathbf{y})=2y_1+6y_2+2y_3\to\min$
$x_1-x_2+2x_3-x_4=2,$	y_1	$y_1+2y_2-y_3\geq-2,$
$2x_1+x_2-3x_3+x_4=6,$	y_2	$-y_1+y_2+3y_3\geq-1,$
$-x_1+3x_2+2x_3+x_4=2,$	y_3	$2y_1-3y_2+2y_3\geq1,$
$x_j\geq0,\ j=\overline{1,4}.$		$-y_1+y_2+y_3\geq1.$

Приведем исходную задачу к каноническому виду и решим симплекс-методом, используя для построения начальной симплекс-таблицы метод искусственного базиса. Имеем:

Вспомогательная задача

$$F(w)=-w_1-w_2-w_3\to\max$$

$$x_1-x_2+2x_3-x_4+w_1=2,$$

$$2x_1+x_2-3x_3+x_4+w_2=6,$$

$$-x_1+3x_2+2x_3+x_4+w_3=2,$$

$$\mathrm{x}\geq\mathbf{0},\ \mathrm{w}\geq\mathbf{0},$$

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4		
w_1	1	-1	2	-1	=	2
w_2	2	1	-3	1	=	6
w_3	-1	3	2	$\boxed{1}$	=	2
F	-2	-3	-1	-1		-10

$\Rightarrow$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c|ccc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & & \\
w_1 & 0 & 2 & 4 & = & 4 \\
w_2 & \boxed{3} & -2 & -5 & = & 4 \\
x_4 & -1 & 3 & 2 & = & 2 \\
F & -3 & 0 & 1 & = & -8
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_2 & x_3 & & \\
w_1 & 2 & \boxed{4} & = & 4 \\
x_1 & -2/3 & -5/3 & = & 4/3 \\
x_4 & 7/3 & 1/3 & = & 10/3 \\
F & -2 & -4 & & -4
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & & -1 & & \\
 & & x_2 & & \\
1 & x_3 & 1/2 & = & 1 \\
-2 & x_1 & 1/6 & = & 3 \\
1 & x_4 & 13/6 & = & 3 \\
 & F & 0 & = & 0 \\
 & f & 10/3 & & -2
\end{array}
\Rightarrow
$$

Оптимальный план прямой задачи:

$$x^*=(3,0,1,3),\ f^*_{\max}=-2.$$

Оптимальное решение двойственной задачи строим, при $j=3,1,4$, так как столбцы $\mathbf{A}^3,\mathbf{A}^1,\mathbf{A}^4$ линейно независимы:

$$
\begin{cases}
\Delta_3=(y^*,A^3)-c_3,\\
\Delta_1=(y^*,A^1)-c_1,\\
\Delta_4=(y^*,A^4)-c_4,
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
0=2y_1^*-3y_2^*+2y_3^*-1,\\
0=y_1^*+2y_2^*-y_3^*+2,\\
0=-y_1^*+y_2^*+y_3^*-1,
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
y^*=\left(-\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right),\\
g^*_{\min}=-2.
\end{cases}
$$

Пример 5. Проверить на оптимальность решение $\bar{x} = (0,\ 0,\ 1)$ следующей задачи:

Прямая задача:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{3}x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \ge -1$$
$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 2$$
$$x_i \ge 0, i = \overline{1,3}.$$

$\Rightarrow$

Двойственная задача:

$$g(\mathbf{y}) = -y_1 + 2y_2 \to \max$$
$$y_1 - 3y_2 \le 3$$
$$-y_1 + y_2 \le 1$$
$$-y_1 + 2y_2 \le 4$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.$$

Выпишем условия (6), учитывая, что $J_{\bar{x}} = \varnothing, I_{\bar{x}} = \{3\}$:

$$\{-y_1 + 2y_2 = 4, \Rightarrow \mathbf{y}_1 = -4 + 2y_2 \quad .$$

Выясним, есть ли среди полученных решений допустимые решения двойственной задачи. Для этого подставим найденное решение в 1-ое и 2-ое ограничения и в условия $y \ge 0$ двойственной задачи:

$$\begin{cases} (-4 + 2y_2) - 3y_2 \le 3, \\ -(-4 + 2y_2) + y_2 \le 1, \\ -4 + 2y_2 \ge 0, \\ y_2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y_2 \le 7 \\ -y_2 \le -3 \\ y_2 \ge 2, \\ y_2 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \quad y_2 \ge 3 \ .$$

Последняя система не противоречива, поэтому решение $\bar{x} = (0,0,1)$ является оптимальным.

Пример 6. Найти значения параметра λ, при котором решение $\bar{x} = (2,1)$ является оптимальным решением прямой задачи:

Прямая задача:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + \lambda x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ -x_1 - x_2 \le 2, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}, \end{cases}$$

$\Rightarrow$

Двойственная задача:

$$g(\mathbf{y}) = 3y_1 + y_2 + 2y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \ge \lambda, \\ y_j \ge 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Выписываем условия (6) ($J_{\overline{x}} = \{3\}, I_{\overline{x}} = \{1,2\}$) :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = 1, \\ y_1 - y_2 + y_3 = \lambda, \\ y_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}, \\ y_2 = \dfrac{1-\lambda}{2}, \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

Проверим, существуют ли допустимые решения двойственной задачи среди найденных и при каких значениях λ. Подставим полученные решения в те ограничения двойственной задачи, которые не использовались при построении условий (6). Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\lambda}{2} \ge 0, \\ \dfrac{1-\lambda}{2} \ge 0, \end{cases} \Rightarrow -1 \le \lambda \le 1.$$

Итак, для $\lambda \in [-1,1]$ решение $\overline{x} = (2,\ 1)$ является оптимальным решением прямой задачи.

Замечание. Для задач в канонической форме и двойственных к ним

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c},\mathbf{x}) \to \max \qquad\qquad g(\mathbf{y}) = (\mathbf{b},\mathbf{y}) \to \min$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad\qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

условия оптимальности имеют вид 1), 4) формул (6):

$$\text{если } x_j > 0, \text{ то } (\mathbf{A}^{\mathbf{j}},\mathbf{y}) = c_j \ ;$$
$$\text{если } (\mathbf{A}^{\mathbf{j}},\mathbf{y}) > c_j \ , \text{ то } x_i = 0 \ . \qquad (7)$$

Пример 7. Проверить, является ли допустимое решение $\bar{x} = (0,1,0,0,2)$ прямой задачи линейного программирования оптимальным решением:

Прямая задача:

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 \to \max$$

$$R: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,5}. \end{cases} \Rightarrow$$

Двойственная задача:

$$g(\mathbf{y}) = 2y_1 + 6y_2 + 3y_3 \to \min$$

$$Q: \begin{cases} y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 0, \\ y_1 + y_2 - y_3 \geq -1, \\ y_2 + y_3 \geq 1. \end{cases}$$

Выпишем условия (7):

$$\begin{matrix} \bar{x}_2 > 0 \\ \bar{x}_5 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + y_3 = 3, \\ y_2 - y_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - \frac{3}{2} y_2, \\ y_3 = 1 - y_2. \end{cases}$$

Подставляем найденное решение в 1-ое, 3-е и 4-ое ограничения двойственной задачи:

$$\begin{cases} (1 - \frac{3}{2} y_2) - 2y_2 + 3(1 - y_2) \geq 2, \\ (1 - \frac{3}{2} y_2) + y_2 \geq 0, \\ (1 - \frac{3}{2} y_2) + y_2 - (1 - y_2) \geq 1, \end{cases} \Rightarrow -2 \leq y_2 \leq \frac{4}{13}.$$

Итак $\bar{x} = (0,1,0,0,2)$ - оптимальное решение прямой задачи, а $\bar{y} = (1 - \frac{3}{2}\lambda, \lambda, 1 - \lambda)\ (\lambda \in [-2, \frac{4}{13}])$ - оптимальные решения двойственной задачи.

Упражнения:

1. Доказать, что следующие задачи образуют взаимно двойственную пару:

$(c,x)\to\max,$ $Ax=b,$	<=>	$(b,y)\to\min,$ $A^T y=c.$

2. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(\mathbf{x})=2x_1+3x_2\to\max$$
$$2x_1+x_2\geq 1,$$
$$x_1-x_2=2,$$
$$-x_1+2x_2\leq 1,$$
$$x_1\geq 0.$$

3. Дана задача ЛП и ее оптимальная симплексная таблица. Найти оптимальные решения прямой и двойственной задач (двумя способами):

а) $f(x)=x_1+x_2+2x_3+x_4\to\max$

$$x_1+3x_2+2x_3+x_4=8,$$
$$2x_1+x_3-x_4=1,$$
$$-3x_1+x_2-x_3+2x_4=1,$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

$\Rightarrow$

	x_1	x_2		
x_3	1	1	=	3
x_4	-1	1	=	2
f	0	2		8

б) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 4, \\ -x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 2, \\ x_1 - x_2 \quad + x_5 &= 2, \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

	x_3	x_4		
x_1	1/2	-1/2	=	1
x_2	1/2	1/2	=	3
x_5	0	1		4
f	1/2	1/2		11

4. Решить одновременно прямую и двойственную задачи, если прямая задача имеет вид:

а) $f(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

б) $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5. Проверить на оптимальность планы задач:

а) $\mathbf{x}^1 = (0,3), \mathbf{x}^2 = (1,0)$

$f(\mathbf{x}) = -x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 12, \\ -x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

б) $\mathbf{x}^1 = (0,1,5,2,0)$,

$\mathbf{x}^2 = (0,1,1,0,1), \mathbf{x}^3 = (0,2,1,0,3)$

$f(x) = -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. При каких значениях λ план $\overline{x}$ будет оптимальным решением следующей задачи:

а) $\overline{x} = (10/3, 1/3)$

б) $\overline{x} = (3, 0, 1, 3)$

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + \lambda x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$f(x) = \lambda x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2,$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6,$$
$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2,$$
$$x \ge 0.$$

7. Решить двойственным симплекс-методом следующие задачи:

а) $$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \min;$$
$$3x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 5,$$
$$x \ge 0 .$$

б) $$f(x) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 \to \max;$$
$$3x_2 + x_3 \ge 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$x \ge 0 .$$

в) $$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \min;$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$3x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$x \ge 0 .$$

г) $$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 3,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 4,$$
$$x \ge 0.$$

д) $$f(x) = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \to \max;$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5,$$
$$3x_3 - x_4 + x_5 \ge 4,$$
$$x_3 + 2x_4 - x_5 \le 1,$$
$$x \ge 0.$$

Вопросы:

1. Сформулируйте экономическое содержание двойственной задачи производственного планирования.

2. Сформулируйте общие правила построения двойственной задачи.
3. Чему равняется количество переменных двойственной задачи?
4. Чему равняется количество ограничений двойственной задачи?
5. Что ограничению-неравенству прямой задачи соответствует в двойственной задаче? Что ограничению-равенству прямой задачи соответствует в двойственной задачи?
6. Какая взаимосвязь между матрицами систем ограничений прямой и двойственной задачи?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2003. — 452 с. – С. 65-100;
2. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2005. – 144 с.
3. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. – 260 с. С.45-54,66-90;
4. Математичні методи дослідження операцій. Навч. посібник // В.П.Лавренчук, М.І. Букатар, Т.І. Готинчан, Г.С.Пасічник. – Рута, 2008. – 360с. – С.53-83;
5. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972. —552 с. – С.59-82;
6. Исследование операций : Учебник/ О.А.Косоруков, А.В.Мищенко // Под ред. Н.П.Тихомирова. – М.: Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с. С.50-83;
7. Исследование операций в экономике : Уч.пособие для вузов /Н.Ш.Кремер, Б.А.Прутко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. Н.Ш.Кремера. — М.:ЮНИТИ, 2003. – 407 с. С. 64-98;
8. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Исследование операцій: ученик. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. – 280 с. С. 74-93;
9. Білогурова Г.В., Самойленко М.І. Математичне програмування: Конспект лекцій . – Х.: ХНАМГ, 2009. – 72 с. – С. 24-38;
10. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2005. – 144 с.
11. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad: Учеб. пособие. Спб.: Издательство «Лань», 2008. – 352 с.
12. Лунгу К.Н. Линейное программирование . Руководство к решению задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 128 с.С.45-65;
13. Линейное программирование/ Ашманов С.А. – М.: Наука, 1981. – 340 с. С.158-192.
14. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2003. — 452 с. – С. 65-100;
15. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2005. – 144 с.
16. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. – 260 с. С.45-54,66-90;