ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Исследование операций»

Авторы
Кобак В. Г.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Авторы

Доцент, д.т.н.,
профессор каф.ПОВТиАС
Кобак В.Г.

Оглавление

1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1, 2 СИМПЛЕКС МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

1.1 Примеры использования симплекс-метода

1.1.1 Пример 1

Решить симплекс-методом следующую задачу.

$$
\begin{gathered}
f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max \\
-x_1 + 3x_2 \le 6 \\
2x_1 + x_2 \le 9 \\
x_1 - x_2 \le 3 \\
x_1 \ge 0; x_2 \ge 0
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

Добавим в ограничения слабые переменные u_1, u_2, u_3 и перейдем к канонической форме

$$
\begin{gathered}
f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max \\
-x_1 + 3x_2 + u_1 = 6 \\
2x_1 + x_2 + u_2 = 9 \\
x_1 - x_2 + u_3 = 3 \\
x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; u_1 \ge 0; u_2 \ge 0; u_3 \ge 0;
\end{gathered}
\qquad (2)
$$

В качестве начального опорного плана выберем вектор $x^0 = (0,0,6,9,3)$. Ему отвечает базис $B = \{e^1, e^2, e^3\} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$ и С.Т. 1.

Так как оценки в С.Т. (табл.1) отрицательны , то план x^0 не является оптимальным. Выбрав разрешающим любой столбец с отрицательной оценкой, введем его в базис. Пусть выбран первый столбец, то есть S=1. Выбор разрешающей строки осуществим по правилу(13) $\min\left\{\frac{9}{2},\frac{3}{1}\right\}=\frac{3}{1}$. Откуда получим , что разрешающей строкой должна быть выбрана 3-я строка. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент $z_{3,1}=1$(выделим этот элемент). Сделав шаг жордановых преобразований, получаем таблицу 2.

Таблица 1

	x_1	x_2	
u_1	-1	3	6
u_2	2	1	9
u_3	1	-1	3
f	-2	-1	0

$\Rightarrow$

Таблица 2

	u_3	x_2	
u_1	1	2	9
u_2	-2	3	3
x_1	1	-1	3
f	2	-3	6

Симплексная таблица 2 не является оптимальной. Она отвечает неоптимальному опорному решению $x^1=(3,0,9,3,0)$ с базисом $B=(e^1,e^2,A^1)$. При этом $f(x^1)=6>f(x^0)=0$. На основании утверждения 3 мы можем вновь улучшить значение целевой функции. Теперь главным столбцом может быть выбран только 2-й столбец, а главной строкой - 2-я строка. Проводим жордановы преобразования и получаем таблицу 3.

Таблица 3

	u_3	u_2	
u_1	7/3	-2/3	7
x_2	-2/3	1/3	1
x_1	1/3	1/3	4
f	0	1	9

Из утверждения 1 следует, что таблица 3 дает оптимальный опорный план $x^2=(4,1,7,0,0)$ и максимальное значение целевой функции $f^*_{\max}=9$.

В полученной оптимальной таблице есть нулевая оценка. Это означает, что рассматриваемая задача имеет бесчисленное множество оптимальных решений. Перейдем к другому оптимальному опорному решению, выбрав в качестве разрешающего столбца столбец с нулевой оценкой. В результате получим таблицу 4. Ей отвечает новый оптимальный план $x^3 = (3,3,0,0,3)$. Тогда множество всех оптимальных решений задачи (2) имеет вид $x^* = \alpha x^2 + (1-\alpha)x^3$, $\alpha \in [0,1]$, и, соответственно, оптимальным решением задачи (1) будет

$$x^* = (3+\alpha, 3-2\alpha, 7\alpha), где\ \alpha \in [0,1], \quad (3)$$

а оптимальным значением целевой функции этой задачи будет $f^*_{\max} = 9$.

Таблица 4

	u_1	u_2	
u_3	3/7	-2/7	3
x_2	2/7	1/7	3
x_1	-1/7	3/7	3
f	0	1	9

Проиллюстрируем решение примера 1 графически (рисунок 1).

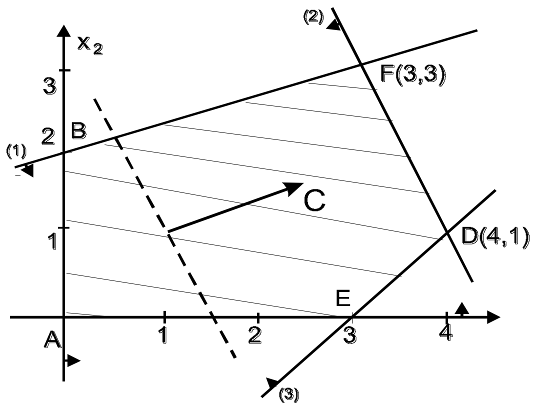

Рисунок 1 – Графическое решение примера 1

Многоугольник ABFDE изображает множество допустимых решений примера 1. Решая задачу симплекс-методом, мы последовательно находим опорные решения x^0, x^1, x^2, x^3, что геометрически соответствует перемещению по вершинам A,E,D,F.

На рисунке видно, что функция $f(x) = 2x_1 + x_2$ достигает максимума на ребре [F,D], то есть на множестве точек .

1.1.2 Пример 2

Решить симплекс-методом следующую задачу.

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_5 = -4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}.$$

Перейдем к системе уравнений с неотрицательными правыми частями. Для этого умножим обе части третьего уравнения на –1. Получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7 \\ -3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}.$$

Решение задачи можно начать с опорного плана $x^0 = (0,10,0,7,4)$, отвечающего базису $B^0 = \{A^2, A^4, A^5\}$. Соответствующая симплексная таблица имеет вид:

Таблица 5

c_B		2	3	
		x_1	x_3	
-1	x_2	2	-3	10
1	x_4	1	1	7
0	x_5	-3	-2	4
	F	-3	1	-3

Оценки в таблице 5 подсчитаны по формулам (1):

$$\Delta_1 = (c_B, A^1) - c_1 = -3; \;\; \Delta_3 = (c_B, A^3) - c_3 = 1; \;\; f = (c_B, b) = -3$$

В качестве разрешающего столбца берем первый ($\Delta 1<0$), в качестве разрешающей строки – первую, так как $\min\left\{\frac{10}{2}, \frac{7}{1}\right\} = \frac{10}{2}$. Проводим жордановы преобразования и переходим к таблице 6, а затем аналогично и к таблице 7.

Таблица 6

	x_2	x_3	
x_1	1/2	-3/2	5
x_4	-1/2	5/2	2
x_5	3/2	-13/2	19
f	3/2	-7/2	12

$\Rightarrow$

Таблица 7

	x_2	x_4	
x_1	1/5	3/5	31/5
x_3	-1/5	2/5	4/5
x_5	1/5	13/5	121/5
f	4/5	7/5	74/5

Таблица 7 дает единственное оптимальное решение задачи $x^* = (31/5, 0, 4/5, 0, 121/5)$, $f^* = 74/5$.

1.1.3 Пример 3

Решить симплекс-методом следующую задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса.

$$f(x)=x_1+x_2+x_3+x_4 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 6, \\ -x_1 + x_3 + x_6 &= 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_7 &= 8, \end{aligned}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,7}$.

В матрице А отсутствует полный набор ортов. Поэтому матрицу А дополняем столбцом $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, добавив в первое ограничение искусственную переменную W1. При этом рассмотрим следующую вспомогательную задачу

$$F(x,w) = -W_1 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 + W_1 &= 6, \\ -x_1 + x_3 + x_6 &= 2 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_7 &= 8, \end{aligned}$$

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,7}$.

Для этой задачи (x^0, w^0)=(0,0,0,0,0,2,8,6) есть опорное решение, отвечающее единичному базису. Начальная С.Т. для задачи 3 имеет вид таблицы 8.

Таблица 8

сB		0	0	0	0	0	
		x1	x2	x3	x4	x5	
-1	w1	1	-1	-2	1	-1	6
0	x6	-1	0	1	0	0	2
0	x7	0	2	3	2	0	8
	F	-1	1	2	-1	1	-6

Выбрав в таблице 8 разрешающий столбец (первый) и разрешающую строку (первую), после выполнения жордановых преобразований получаем таблицу 9, оптимальную для задачи 3. При этом max F(x,w)=0.

Вычеркнув F-строку относительных оценок и столбец, отвечающий искусственной переменной w1 (он выделен в таблице 9), добавим f-строку относительных оценок: $\Delta_2 = \left(c^B, Z^2\right) - c_2 = -2, \Delta_4 = 0$, $\Delta_3 = -3, \Delta_5 = -1,$ и получим таблицу 10. Таблица 10 является начальной С.Т. для исходной задачи.

В таблице 10 оценка $\Delta 3=-3<0$, а остальные элементы этого столбца $z_{i,3} \le 0$. Тогда на основании утверждения 2 исходная задача неразрешима в силу неограниченности целевой функции сверху в области допустимых решений (Нр2).

Таблица 9

	w1	x2	x3	x4	x5	
x1	1	-1	-2	1	-1	6
x6	1	-1	-1	1	-1	8
x7	0	2	-3	2	0	8
F	1	0	0	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 10

сB		1	1	1	0	
1		x2	x3	x4	x5	
0	x1	-1	-2	1	-1	6
0	x6	-1	-1	1	-1	8
	x7	2	-3	2	0	8
	f	-2	-3	0	-1	6

1.1.4 Пример 4

Решить симплекс-методом задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса.

$$f(x)=3x1+x2+x3 \to \max$$
$$2x1-x2+x3=6 \qquad (23)$$
$$x1-2x2-x3=2$$
$$xj \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Построим вспомогательную задачу:

$$F(x,w)=-w1-w2 \to \max$$
$$2x1-x2+x3+w1=6 \qquad (24)$$
$$x1-2x2-x3+w2=2$$
$$xj \geq 0,\ j=\overline{1,3},\ wi \geq 0,\ i=\overline{1,2}.$$

Решим задачу (4) симплекс-методом (табл.12,13).

Таблица 12

c_B		0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	
-1	w_1	2	-1	1	6
-1	w_2	1	-2	-1	4
	F	-3	3	0	-10

$\Rightarrow$

Таблица 13

	w_1	x_2	x_3	
x_1		-1/2	1/2	3
w_2		-3/2	-3/2	1
F		3/2	3/2	-1

Так как все оценки в таблице 13 неотрицательны, то эта таблица определяет оптимальное опорное решение вспомогательной задачи (4). При этом maxF(x,w)=-1<0. Опираясь на утверждение 1, делаем вывод: у исходной задачи (3) система ограничений противоречива (Нр1).

1.1.5 Пример 5

Решить симплекс-методом задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса.

Исходная задача:

$$f(x)=x_1+x_2+2x_3+x_4 \to \max$$
$$x_1+3x_2+2x_3+x_4=8,$$
$$2x_1+x_3-x_4=1,$$
$$-3x_1+x_2-x_3+2x_4=1,$$
$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Вспомогательная задача:

$F(x,w)= -w1 -w2 - w3 \to max$

$x1+3x2+2x3+ x4+w1 =8$,

$2x1 + x3 - x4 +w2 =1$,

$-3x1+ x2 - x3+2x4 +w3=1$,

$x_j \ge 0$, $j=\overline{1,4}$. $w_i \ge 0$, $i=\overline{1,3}$.

Решение вспомогательной задачи представляют таблицы 14-16.

Таблица 14

	x_1	x_2	x_3	x_4	
w_1	1	3	2	1	8
w_2	2	0	1	-1	1
w_3	-3	1	-1	2	1
F	0	-4	-2	-2	-10

$\Rightarrow$

Таблица 15

	x_1	x_3	x_4	
w_1	10	5	-5	5
w_2	2	1	-1	1
x_2	-3	-1	2	1
F	-12	-6	6	-6

$\Rightarrow$

В таблице 16 все элементы строки с искусственной переменной w_1 равны 0. Это означает, что первое ограничение является линейной комбинацией двух других. В таблице 16 вычеркиваем w_1-строку и F-строку и считаем f-строку. В результате получаем начальную С.Т. для исходной задачи (табл.17).

Таблица 16

	x_3	x_4	
w_1	0	0	0
x_1	1/2	-1/2	1/2
x_2	1/2	1/2	5/2
F	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 17

		2	1	
c_B		x_3	x_4	
1	x_1	1/2	-1/2	1/2
1	x_2	1/2	1/2	5/2
	f	-1	-1	3

$\Rightarrow$

В таблицах 17-19 представлено решение исходной задачи.

Таблица 18

	x_1	x_4	
x_3	2	-1	1
x_2	-1	1	2
f	2	-2	4

⇒

Таблица 19

	x_1	x_2	
x_3	1	1	3
x_4	-1	1	2
f	0	2	8

⇒

Используя оптимальную С.Т. исходной задачи (табл.19), можно выписать оптимальное решение исходной задачи $x^*=(0,0,3,2)$ и оптимальное значение целевой функции этой задачи $f^*max=f(x^*)=8$.

1.1.6 Пример 6

Решить симплекс-методом задачу. Для построения начальной С.Т. использовать метод искусственного базиса. Этот пример иллюстрирует ситуацию вырожденности.

Исходная задача:

$$f(x)=2x_1+3x_2 \to \max$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

$$x_1-x_2+x_3-x_4=1$$

$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Вспомогательная задача:

$$F(x,w)=-w1-w2 \to \max$$

$$x1+x2+x3+x4+w1 \quad =1$$

$$x1-x2+x3-x4 \quad +w2=1$$

$$xj \geq 0,\ j=\overline{1,4},\ wi \geq 0,\ i=\overline{1,2}.$$

Строим таблицы.

Таблица 20

	x_1	x_2	X_3	x_4	
w_1	1	1	1	1	1
w_2	1	-1	1	-1	1
F	-2	0	-2	0	-2

⇒

Таблица 21

	w_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1	1	1	1
w_2	-1	-2	0	-2	0
F	2	2	0	2	0

Таблица 21 является оптимальной С.Т. вспомогательной задачи и F*=0. Однако, в базисе есть искусственная переменная w2. Выведем переменную w2 из базиса, взяв разрешающей строку 2. В качестве разрешающего элемента можно взять любой отличный от нуля элемент из этой строки (этот элемент выделен в таблице 21 и равен -2).

Таблица 22

	w_2	x_3	x_4	
x_1	1/2	1	0	1
x_2	-1/2	0	1	0
F	1	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 23

		0	0	
		x_3	X_4	
2	x_1	1	0	1
3	x_2	0	1	0
	f	2	3	2

$\Rightarrow$

Вычеркну в таблице 22 w2 – столбец, F-строку и вычислив f-строку, получим таблицу 23. Таблица 23 определяет оптимальное решение исходной задачи x*=(1,0,0,0) и оптимальное значение целевой функции f*=2.

1.1.7 Пример 7

Решить симплекс-методом задачу

$$f(x)=x1 +4x2 +x3 +x4 -2x5+x6 \to \max$$

$$\begin{aligned} x1+ x2 \quad +x4 \quad &=0 , \\ x1+ x2 \quad +x3 \quad +x5 \quad &=1 , \\ x2 \quad +x3 \quad +x6 \ &=1 , \end{aligned}$$

$$xj \geq 0,\ j=\overline{1,6}.$$

Таблица 24

			1	4	1	
			x1	X2	x3	
1	x4		1	1	0	0
-2	x5		1	1	1	1
1	x6		0	1	1	1
	f		-2	-4	-2	-1

$\Rightarrow$

Таблица 25

	x1	x2	x5	
x4	1	1	0	0
x3	1	1	1	1
x6	-1	0	-1	0
f	0	-2	2	1

$\Rightarrow$

Таблица 26

	x1	x4	X5	
x2	1	1	0	0
x3	0	-1	1	1
x6	-1	0	-1	0
f	2	2	2	1

Таблицы 25 и 26 описывают одно и то же опорное вырожденное решение (0,0,1,0,0,0), являющееся оптимальным. Но этим таблицам отвечают различные базисы: таблице 25 соответствует базис B= $\{A^3, A^4, A^6\}$, а таблице26 – базис B*= $\{A^2, A^3, A^6\}$. В базисе B оценка $\Delta 2<0$, а в базисе B* все $\Delta j \geq 0$.

Этот пример подтверждает, что для вырожденного опорного плана неотрицательность оценок является лишь достаточным условием его оптимальности.

2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3,4 ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Пример1. Решить прямую и двойственную задачи

Прямая задача

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \quad = 4,$$

$$-x_1 + 2x_2 \ + x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_2 \quad + x_5 = 2,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Двойственная задача

$$g(\mathbf{y}) = 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \to \min$$

y_1
y_2
y_3

$$y_1 - y_2 + y_3 \ge 2,$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 1,$$

$$y_1 \quad \ge 1,$$

$$y_2 \ge -1,$$

$$y_3 \ge 2.$$

Решаем прямую задачу симплекс-методом:

		2	1		
		x_1	x_2		
1	x_3	1	1	=	4
-1	x_4	-1	$\boxed{1}$	=	3
2	x_5	1	-1	=	2
	f	2	-3	=	5

$\Rightarrow$

$$
\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_1 & x_4 & & \\
x_3 & \boxed{2} & -1 & = & 1 \\
x_2 & -1 & 1 & = & 3 \\
x_5 & 0 & 1 & = & 5 \\
f & -1 & 3 & & 14
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_3 & x_4 & & \\
x_1 & 1/2 & -1/2 & = & 1/2 \\
x_2 & 1/2 & 1/2 & = & 7/2 \\
x_5 & 0 & 1 & = & 5 \\
f & 1/2 & 5/2 & = & 29/2
\end{array}
\Rightarrow
$$

Итак, прямая задача разрешима: $\mathbf{x}^* = (1/2, 7/2, 0, 0, 5)$, $f^*_{\max} = 29/2$, следовательно разрешима и двойственная задача, причем $g^*_{\min} = 29/2$. Находим оптимальное решение двойственной задачи, используя формулы (4). Полагаем $j = \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5}$ (номера единичных столбцов матрицы ограничений). Имеем $\mathbf{y}^* = (\mathbf{3/2},\ \mathbf{3/2},\ \mathbf{2})$ - оптимальное решение двойственной задачи.

Пример 2. Решить прямую и двойственную задачи

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$-4x_1 + x_2 \le 4,$$

$$-x_1 + x_2 \le 6,$$

$$x_1 + x_2 \ge 1,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$g(\mathbf{y}) = 4y_1 + 6y_2 + y_3 \to \min$$

$$\begin{array}{|c|}\hline y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \hline\end{array} \Rightarrow \quad \begin{aligned} -4y_1 - y_2 + y_3 &\geq 1, \\ y_1 + y_2 + y_3 &\geq 1, \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

Приведем к каноническому виду прямую задачу и решим ее симплекс-методом, используя для построения начальной симплекс-таблицы метод искусственного базиса.

Каноническая форма прямой задачи :

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max \\ & -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ & -x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \qquad \Rightarrow$$

Вспомогательная задача

$$\begin{aligned} & F(w) = -w_1 \to \max, \\ & -4x_1 + x_2 + x_3 \quad = 4, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 \quad = 6, \\ & x_1 + x_2 \quad - x_5 + w_1 = 1, \\ & x \geq 0, w \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|c|} & x_1 & x_2 & x_5 & & \\ \hline x_3 & -4 & 1 & 0 & = & 4 \\ x_4 & -1 & 1 & 0 & = & 6 \\ w_1 & \boxed{1} & 1 & -1 & = & 1 \\ \hline F & -1 & -1 & 1 & = & -1 \end{array} \Rightarrow$$

		1	0		
		x_2	x_5		
0	x_3	5	-4	=	8
0	x_4	2	-1	=	7
1	x_1	1	-1	=	1
	F	0	0	=	0
	f	0	-1	=	1

Последняя таблица дает начальный опорный план прямой задачи и начальную симплекс-таблицу, из которой получаем, что прямая задача неразрешима, т.к. целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов. Следовательно неразрешима и двойственная, множество ее допустимых планов пусто.

Пример 3. Решить прямую и двойственную задачи

Прямая задача

$$f(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \quad = 4,$$

$$2x_1 \quad + x_3 - x_4 \quad = 6,$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Двойственная задача

$$g(\mathbf{y}) = 4y_1 + 6y_2 + y_3 \to \min$$

$$\begin{array}{ll} y_1 & y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -1, \\ y_2 & -y_1 \quad -2y_3 \geq 2, \\ y_3 & y_1 + y_2 + y_3 \geq 1, \\ & -y_2 \geq -1, \\ & -y_3 \geq 1. \end{array}$$

Приведем исходную задачу к каноническому виду и решим симплекс-методом, используя для построения начальной симплекс-таблицы метод искусственного базиса. Имеем:

Вспомогательная задача

$$F(w) = -w_1 - w_2 - w_3 \to \max$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 \qquad\quad + w_1 &= 4,\\
2x_1 \qquad + x_3 - x_4 \quad + w_2 &= 6,\\
2x_1 - 2x_2 + x_3 \quad - x_5 + w_3 &= 1,
\end{aligned} \Rightarrow$$

$$x \ge 0,\ w \ge 0,$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
\hline
w_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & = & 4 \\
w_2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & = & 6 \\
w_3 & 2 & -2 & \boxed{1} & 0 & -1 & = & 1 \\
\hline
F & -5 & 3 & -3 & 1 & 1 & & -11 \\
\hline
\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & & \\
\hline
w_1 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & = & 3 \\
w_2 & 0 & 2 & -1 & 1 & = & 5 \\
x_3 & 2 & -2 & 0 & -1 & = & 1 \\
\hline
F & 1 & -3 & 1 & -2 & = & -8 \\
\hline
\end{array} \Rightarrow$$

$$
\begin{array}{c|ccc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & x_4 & & \\
x_5 & -1 & 1 & 0 & = & 3 \\
w_2 & 1 & \boxed{1} & -1 & = & 2 \\
x_3 & 1 & -1 & 0 & = & 4 \\
F & -1 & -1 & 1 & & -2
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\begin{array}{c c|cc|c|c|}
 & & x_1 & x_4 & & \\
1 & x_5 & -2 & \boxed{1} & = & 1 \\
2 & x_2 & 1 & -1 & = & 2 \\
1 & x_3 & 2 & -1 & = & 6 \\
 & F & 0 & 0 & = & 0 \\
 & f & 3 & -1 & = & 11
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_1 & x_5 & & \\
x_4 & -2 & 1 & = & 1 \\
x_2 & -1 & 1 & = & 3 \\
x_3 & 0 & 1 & = & 7 \\
f & 1 & 1 & & 12
\end{array}
\Rightarrow
$$

Оптимальный план прямой задачи $x^*=(0,3,7,1,0), f^*_{\max}=12$. Оптимальное решение двойственной задачи строим, используя соотношения (4). Полагаем $j=2,4,5$, так как столбцы

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},\ \mathbf{A}^4=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{A}^5=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$ линейно независимы.

Для определения y^* строим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\Delta_4=(y^*,A^4)-c_4,\\ \Delta_5=(y^*,A^5)-c_5,\\ \Delta_2=(y^*,A^2)-c_2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=-y_2^*+1,\\ 1=-y_3^*-1,\\ 0=-y_1^*-2y_3^*-2,\end{cases}\Rightarrow y^*=(2,1,-2),\ g^*=12.$$

Пример 4. Решить прямую и двойственную задачи

Прямая задача

$$f(\mathbf{x})=-2x_1-x_2+x_3+x_4\to\max$$

$$x_1-x_2+2x_3-x_4=2,$$

$$2x_1+x_2-3x_3+x_4=6,$$

$$-x_1+3x_2+2x_3+x_4=2,$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Двойственная задача

$$g(\mathbf{y})=2y_1+6y_2+2y_3\to\min$$

$$\boxed{\begin{matrix}y_1\\y_2\\y_3\end{matrix}}\qquad\begin{aligned}&y_1+2y_2-y_3\geq-2,\\ &-y_1+y_2+3y_3\geq-1,\\ &2y_1-3y_2+2y_3\geq 1,\\ &-y_1+y_2+y_3\geq 1.\end{aligned}$$

Приведем исходную задачу к каноническому виду и решим симплекс-методом, используя для построения начальной симплекс-таблицы метод искусственного базиса. Имеем:

Вспомогательная задача

$$F(w)=-w_1-w_2-w_3\to\max$$

$$x_1-x_2+2x_3-x_4+w_1=2,$$

$$2x_1+x_2-3x_3+x_4+w_2=6,$$

$$-x_1+3x_2+2x_3+x_4+w_3=2,$$

$$x \geq \mathbf{0},\ w \geq \mathbf{0}\ ,$$

$$\begin{array}{c|cccc|c|c|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & & \\
\hline
w_1 & 1 & -1 & 2 & -1 & = & 2 & \\
w_2 & 2 & 1 & -3 & 1 & = & 6 & \Rightarrow \\
w_3 & -1 & 3 & 2 & \boxed{1} & = & 2 & \\
\hline
F & -2 & -3 & -1 & -1 & & -10 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|c|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & & & \\
\hline
w_1 & 0 & 2 & 4 & = & 4 & \\
w_2 & \boxed{3} & -2 & -5 & = & 4 & \Rightarrow \\
x_4 & -1 & 3 & 2 & = & 2 & \\
\hline
F & -3 & 0 & 1 & = & -8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c|c|c}
 & x_2 & x_3 & & & \\
\hline
w_1 & 2 & \boxed{4} & = & 4 & \\
x_1 & -2/3 & -5/3 & = & 4/3 & \Rightarrow \\
x_4 & 7/3 & 1/3 & = & 10/3 & \\
\hline
F & -2 & -4 & & -4 &
\end{array}$$

		-1		
		x_2		
1	x_3	1/2	=	1
-2	x_1	1/6	=	3
1	x_4	13/6	=	3
	F	0	=	0
	f	10/3		-2

Оптимальный план прямой задачи $x^*=(3,0,1,3),\ f^*_{\max}=-2.$

Оптимальное решение двойственной задачи строим при $j=3,1,4$, так как столбцы $\mathbf{A}^3,\mathbf{A}^1,\mathbf{A}^4$ линейно независимы.

$$\begin{cases}\Delta_3=(y^*,A^3)-c_3,\\ \Delta_1=(y^*,A^1)-c_1,\\ \Delta_4=(y^*,A^4)-c_4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=2y_1^*-3y_2^*+2y_3^*-1,\\ 0=y_1^*+2y_2^*-y_3^*+2,\\ 0=-y_1^*+y_2^*+y_3^*-1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^*=(-2/3,-1/3,2/3),\\ g^*_{\min}=-2.\end{cases}$$

Пример 5. Проверить на оптимальность решение $\bar{x}=(0,0,1)$ следующей задачи

Прямая задача:

$$f(\mathbf{x})=3x_1+x_2+4x_3\to\min$$
$$x_1-x_2-x_3\ge-1$$
$$-3x_1+x_2+2x_3\ge2$$
$$x_i\ge0,\ i=\overline{1,3}.$$

$\Rightarrow$

Двойственная задача:

$$g(\mathbf{y})=-y_1+2y_2\to\max$$
$$y_1-3y_2\le3$$
$$-y_1+y_2\le1$$
$$-y_1+2y_2\le4$$
$$y_1\ge0,\ y_2\ge0.$$

Выпишем условия (6), учитывая, что $J_{\bar{x}}=\varnothing, I_{\bar{x}}=\{3\}$:

$$\{-y_1+2y_2=4,\Rightarrow \mathbf{y}_1=-4+2y_2\ .$$

Выясним, есть ли среди полученных решений допустимые решения двойственной задачи. Для этого подставим найденное решение в 1-ое и 2-ое ограничения и в условия $y\ge0$ двойственной задачи:

$$\begin{cases} (-4+2y_2)-3y_2 \le 3, \\ -(-4+2y_2)+y_2 \le 1, \\ -4+2y_2 \ge 0, \\ y_2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y_2 \le 7 \\ -y_2 \le -3 \\ y_2 \ge 2, \\ y_2 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \qquad y_2 \ge 3.$$

Последняя система не противоречива, поэтому решение $\bar{x}=(0,0,1)$ является оптимальным.

Пример 6. Найти значения параметра λ, при котором решение $\bar{x}=(2,1)$ является оптимальным решением прямой задачи:

Прямая задача:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + \lambda x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ -x_1 - x_2 \le 2, \\ x_j \ge 0, j=\overline{1,2}, \end{cases} \Rightarrow$$

Двойственная задача:

$$g(\mathbf{y}) = 3y_1 + y_2 + 2y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \ge \lambda, \\ y_j \ge 0, j=\overline{1,3} \end{cases}$$

Выписываем условия (6) ($J_{\bar{x}}=\{3\}, I_{\bar{x}}=\{1,2\}$) :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = 1, \\ y_1 - y_2 + y_3 = \lambda, \\ y_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}, \\ y_2 = \dfrac{1-\lambda}{2}, \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

Проверим, существуют ли допустимые решения двойственной задачи среди найденных и при каких значениях λ. Подставим полученные решения в те ограничения двойственной задачи, которые не использовались при построении условий (6). Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\lambda}{2} \ge 0, \\ \dfrac{1-\lambda}{2} \ge 0, \end{cases} \Rightarrow -1 \le \lambda \le 1.$$

Итак, для $\lambda \in [-1,1]$ решение $\bar{x} = (2,1)$ является оптимальным решением прямой задачи.

Замечание. Для задач в канонической форме и двойственных к ним

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c},\mathbf{x}) \to \max \qquad g(\mathbf{y}) = (\mathbf{b},\mathbf{y}) \to \min$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

условия оптимальности имеют вид 1), 4) формул (6):

если $x_j > 0$, то $(\mathbf{A}^{\mathbf{j}},\mathbf{y}) = c_j$;

если $(\mathbf{A}^{\mathbf{j}},\mathbf{y}) > c_j$, то $x_i = 0$

Пример 7. Проверить, является ли допустимое решение $\bar{x} = (0,1,0,0,2)$ прямой задачи линейного программирования оптимальным решением:

Прямая задача:

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 \to \max$$

$$R: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$g(\mathbf{y}) = 2y_1 + 6y_2 + 3y_3 \to \min$$

$$Q: \begin{cases} y_1 - 2y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \ge 0, \\ y_1 + y_2 - y_3 \ge -1, \\ y_2 + y_3 \ge 1. \end{cases}$$

Выпишем условия (7):

$$\begin{matrix} \bar{x}_2 > 0 \\ \bar{x}_5 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + y_3 = 3, \\ y_2 - y_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - {}^3\!/_2\, y_2, \\ y_3 = 1 - y_2. \end{cases}$$

Подставляем найденное решение в 1-ое, 3-е и 4-ое ограничения двойственной задачи:

$$\begin{cases} (1-\frac{3}{2}y_2)-2y_2+3(1-y_2)\geq 2, \\ (1-\frac{3}{2}y_2)+y_2\geq 0, \\ (1-\frac{3}{2}y_2)+y_2-(1-y_2)\geq 1, \end{cases} \Rightarrow -2\leq y_2\leq \frac{4}{13}.$$

Итак $\bar{x}=(0,1,0,0,2)$ - оптимальное решение прямой задачи, а $\bar{y}=(1-\frac{3}{2}\lambda,\lambda,1-\lambda)$ $(\lambda\in[-2,\frac{4}{13}])$ - оптимальные решения двойственной задачи.

Упражнения:

1. Доказать, что следующие задачи образуют взаимно двойственную пару:

$(c,x)\to\max,$ $Ax=b,$	<=>	$(b,y)\to\min,$ $A^T y=c.$

2. Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования:

$$f(\mathbf{x})=2x_1+3x_2\to\max$$
$$2x_1+x_2\geq 1,$$
$$x_1-x_2=2,$$
$$-x_1+2x_2\leq 1,$$
$$x_1\geq 0.$$

3. Дана задача ЛП и ее оптимальная симплексная таблица. Найти оптимальные решения прямой и двойственной задач (двумя способами):

а) $$f(x)=x_1+x_2+2x_3+x_4\to\max$$
$$x_1+3x_2+2x_3+x_4=8,$$
$$2x_1+x_3-x_4=1, \qquad \Rightarrow$$
$$-3x_1+x_2-x_3+2x_4=1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

$$\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & & \\
x_3 & 1 & 1 & = & 3 \\
x_4 & -1 & 1 & = & 2 \\
f & 0 & 2 & & 8
\end{array}$$

б) $$f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\
-x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\
x_1 - x_2 + x_5 &= 2,
\end{aligned} \qquad \Rightarrow$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

$$\begin{array}{c|cc|c|c|}
 & x_3 & x_4 & & \\
x_1 & 1/2 & -1/2 & = & 1 \\
x_2 & 1/2 & 1/2 & = & 3 \\
x_5 & 0 & 1 & & 4 \\
f & 1/2 & 1/2 & & 11
\end{array}$$

4. Решить одновременно прямую и двойственную задачи, если прямая задача имеет вид:

а) $f(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

б) $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. Проверить на оптимальность планы задач:

а) $\mathbf{x}^1 = (0,3), \mathbf{x}^2 = (1,0)$

$$f(\mathbf{x}) = -x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$-x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

б) $\mathbf{x}^1 = (0,1,5,2,0)$,

$\mathbf{x}^2 = (0,1,1,0,1), \mathbf{x}^3 = (0,2,1,0,3)$

$$f(x) = -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

6. При каких значениях λ план $\overline{x}$ будет оптимальным решением следующей задачи:

а) $\overline{x} = (10/3, 1/3)$

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + \lambda x_2 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

б) $\bar{x} = (3,0,1,3)$

$$f(x) = \lambda x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2,$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6,$$
$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2,$$
$$x \ge 0.$$

7. Решить двойственным симплекс-методом следующие задачи:

а) $$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \min;$$
$$3x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 5,$$
$$x \ge 0 .$$

б) $$f(x) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 \to \max;$$
$$3x_2 + x_3 \ge 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$x \ge 0 .$$

в) $$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \min;$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$3x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$x \ge 0 .$$

г) $$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 3,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 4,$$
$$x \geq 0.$$

д) $$f(x) = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \to \max;$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5,$$
$$3x_3 - x_4 + x_5 \geq 4,$$
$$x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 1,$$
$$x \geq 0.$$

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Информационная система Microsoft Excel имеет встроенную программу Solver (Поиск решения), которая представляет собой мощный вспомогательный инструмент для выполнения сложных вычислений, в том числе и решения большинства задач математического программирования. Рассмотрим использование программы Solve на примере решения транспортной задачи (1.17) – (1.25).

Исходные данные для программы Solve должны быть представлены в виде электронной таблицы, которая содержит четыре типа областей:

- область переменных задачи, будем выделять ее желтым цветом;
- область заданных параметров задачи, будем выделять светлым зеленым фоном;
- область промежуточных результатов, будем выделять ее голубым фоном;
- область целевой функции, будем выделять ее красным фоном.

Область переменных задачи – это обязательная область, которая по своей конфигурации соответствует форме матрицы переменных X. Каждая ячейка области соответствует одном элементу x_y матрицы X. Переменные могут иметь начальные значения, но не обязательно. В случае их отсутствия программа сама их введет. Ячейка переменных не должны содержать формул.

Область исходных данных задачи – обязательная область, которая содержит константы, заданные условием задачи. Для транспортной задачи эта область имеет три составляющие:

- подобласть для матрицы расстояний (тарифов) $C=[c_{ij}]$;
- подобласть для вектора запасов груза в пунктах отправления $a=[a_i]$;
- подобласть для вектора потребностей в грузе у пунктах назначения $b=[b_j]$.

Ячейки всех подобластей не должны содержать формул. Все исходные данные должны быть введены в эти подобласти до начала решения задачи.

Область промежуточных результатов содержат формулы, отражающие зависимости между данными таблицы. Для транспортной задачи область распадается на три подобласти:

- подобласть $C \times X$ для произведений элементов матрицы X на соответствующие элементы матрицы C. Необязательная область. При ее наличии каждая ячейка содержат формулу, определяющую произведение $x_{ij}c_{ij}$;
- подобласть функций ограничений типа (1.10), определяющих запасы в пунктах отправления. Это обязательная область, каждая ячейка которой содержит формулу для определения запаса груза в соответствующем пункте отправления $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$;
- подобласть функций ограничений типа (1.11), определяющих потребность в грузе в пунктах назначения. Это обязательная область, каждая ячейка которой содержит формулу для определения потребности соответствующего пункта назначения $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$.

Область целевой функции состоит из одной (и только одной) ячейки, в которой записана формула для определения критерия (1.9), т.е. формула двойной суммы $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$ (при наличии области $C \times X$) или специальная функция СУММПРОИЗВ (при отсутствии области $C \times X$).

Вопрос использовать или не использовать область $C \times X$ для решения транспортной задачи решает сам пользователь. В случае ее наличия при малой размерности транспортной задачи усиливается наглядность ее решения, при большой – ухудшается.

Следует отметить, что если транспортная задача имеет открытую модель, то при решении нет необходимости приводить ее к закрытой модели, как это имеет место при ручном счете. Кроме того, нет также необходимости в процедуре поиска начального опорного плана.

3.1 Пример решения транспортной задачи с помощью информационной системы Microsoft Excel

На рисунке 1.3 показано распределение областей электронной таблицы и их заполнение исходными данными в условиях примечание 1.1. Как видно из таблицы, область переменных задачи заполняется нулями, а подобласти исходных данных заполняются данными, взятыми из условия задачи.

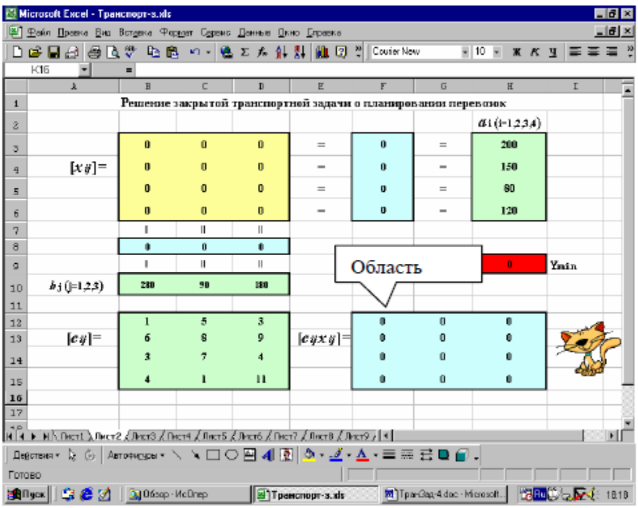

Рис.1.3

Область промежуточных результатов заполняется следующим образом:

- в ячейке $F$3 записывается формула =СУММ(B3:D3) и копируется в ячейки $F$4:$F$6;
- в ячейке $B$8 записывается формула =СУММ(B3:B6) и копируется в ячейки $C$8:$B$8;
- в ячейке $F$12 записывается формула =B3*B12 и копируется в ячейки $G$12:$H$12, а затем ячейки $F$12:$H$12 копируются в ячейки $F$13:$H$15;

Наконец, в ячейку целевой функции $H$9 при наличии области $C \times X$ записывается формула =СУММ(F12:H15), а при отсутствии – формула =СУММПРОИЗВ(B12:D15;B3:D6).

Вся остальная текстовая информация, которая представлена в электронной таблице (рисунок 1.3), не является обязательной. Ее наличие или отсутствие никак не влияет на решение задачи.

Дальнейшая подготовка к запуску процесса решения задачи связано непосредственно с программой Solve, которая инициализируется командой Сервис/Поиск решения. При этом на экране появляется диалоговое окно программы Solve, требующее установить параметры решения задачи. На рисунке 1.4 показано диалоговое окно программы с необходимыми установками.

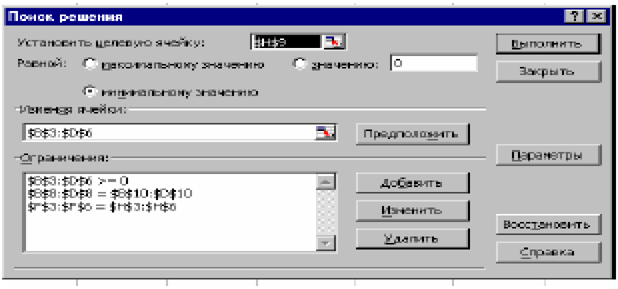

Рис.1.4. Диалоговое окно программы *Solve*

Для транспортной задачи из примечания 1.1 установки диалогового окна должны быть следующими:

- в качестве целевой ячейки указывается ячейка $H$9;
- выбирается селекторная кнопка «минимальное значение»;
- в окне «Изменяя ячейки» указывается диапазон клеток $B$3:$D$6;
- в окне «Ограничения» последовательно указываются ограничения: $B$3:$D$6>=0; $B$8:$D$8=$B$10:$D$10; $F$3:$F$6=$H$3:$H$6.

Далее следует запустить процесс вычисления нажатием кнопки «Выполнить» в диалоговом окне. Отдельные шаги процесса отображаются в строке состояния. После завершения поиска решения новые значения будут вставлены в электронную таблицу, а на экране появится новое диалоговое окно, содержащее информацию о завершении процесса поиска решения. В этом окне следует выбрать опцию «Сохранить найденное решение». В результате выбора новые значения останутся в таблице. В противном случае программа восстановит значения, которые были в таблице до нажатия кнопки «Выполнить».

Для транспортной задачи из примечания 1.1. окончательный вид электронной таблицы представлен на рисунке 1.5. Здесь в целевой ячейке находится оптимальное значение критерия оптимальности – число 1830, а в области переменных (ячейки $B$3:$D$6) – искомые значения x_{ij}^{*}, которые совпадает с опорным планом X_3, полученным при ручном счете методом потенциалов.

Решить следующую транспортную задачу «вручную» и с использованием MS Excel.

Транспортная задача задан следующей транспортной таблицей.

запасы \ заказы		B_1	B_3	B_4
		20	25	30
A_1	24	6	4	2
A_2	28	3	5	4
A_3	23	3	6	3

Задания:

- выяснить, является задачи открытой или закрытой:
- составить первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла;
- составить первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости;
- с помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость;
- найти минимальную стоимость перевозок.

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6,7 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пример 9. Решим методом Гомори следующую задачу ЦЛП:

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$-2x_1 + 3x_2 \le 3$$

$$4x_1 + 5x_2 \ge 10$$

$$x_1 + 2x_2 \le 5$$

$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

Перейдем к задаче с ограничениями-равенствами

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\
-4x_1 - 5x_2 \qquad + x_4 \qquad &= -10 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 5
\end{aligned}$$

$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

Начальная симплекс-таблица 15 не является ни прямо ни двойственно допустимой. Чтобы не добавлять искусственные переменные, воспользуемся способом «вывода на верхнюю границу» переменных, имеющих отрицательные относительные оценки [5]. В таблице 15 отрицательную оценку $\Delta_2 = -3$ имеет небазисная переменная x_2. Находим верхнюю границу этой переменной на множестве допустимых целочисленных решений

$$x_1+2x_2\le 5,\ x\ge 0,\ x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \ 1)\ \Rightarrow\ x_2\le 2$$

Заменяя тривиальное соотношение $x_2-x_2=0$ (третья строка таблицы 15) уравнением $x_2+x_2^{'}=2,\ x_2^{'}\ge 0$, получаем двойственно-допустимую таблицу 16. Решаем соответствующую задачу ЛП двойственным симплекс-методом. Оптимальное непрерывное решение $x^1=(9/7,13/7,0,31/7,0)$ нецелочисленно (таблица 18).

Таблица 15

	x_1	x_2	
f	1	-3	0
x_1	-1	0	0
x_2	0	-1	0
x_3	-2	3	3
x_4	-4	-5	-10
x_5	1	2	5

Таблица 16

	x_1	x'_2	
f	1	3	6
x_1	-1	0	0
x_2	0	1	2
x_3	-2	-3	-3
x_4	-4	5	0
x_5	1	-2	1

Таблица 17

	x_3	x'_2	
f	1/2	3/2	9/2
x_1	-1/2	3/2	3/2
x_2	0	1	2
x_3	-1	0	0
x_4	-2	11	6
x_5	1/2	-7/2	-1/2

$\Rightarrow$

Таблица 18

	x_3	x_5	
f	5/7	3/7	30/7
x_1	-2/7	3/7	9/7
x_2	1/7	2/7	13/7
x_3	-1	0	0
x_4	-3/7	22/7	31/7
x_5	0	-1	0
u_1	-1/7	-2/7	-6/7

Выбираем наибольшую из дробных частей элементов последнего столбца таблицы 18.

$$\max\left(\{30/7\},\{9/7\},\{13/7\},\{0\},\{31/7\},\{0\}\right)=$$
$$\max\left(2/7,2/7,6/7,0,3/7,0\right)=6/7$$

Таблица 19

	x_3	u_1	
f	1/2	3/2	3
x_1	-1/2	3/2	0
x_2	0	1	1
x_3	-1	0	0
x_4	-2	11	-5
x_5	1/2	-7/2	3

$\Rightarrow$

Таблица 20

	x_4	u_1	
f	1/4	17/4	7/4
x_1	-1/4	-5/4	5/4
x_2	0	1	1
x_3	-1/2	-11/2	5/2
x_4	-1	0	0
x_5	1/4	-3/4	7/4
u_2	-1/4	-1/4	-3/4

Третья строка таблицы 18 – производящая, она порождает отсечение

$$u_1-\{1/7\}x_3-\{2/7\}x_5=-\{13/7\},\quad u_1\geq 0\quad\Rightarrow$$
$$u_1-1/7\;x_3-2/7\;x_5=-6/7,\quad u_1\geq 0$$

коэффициенты которого записываем в дополнительную строку таблицы 18. Решаем новую задачу ЛП двойственным симплекс-методом. При переходе от таблицы 18 к таблице 19 слабая переменная Гомори u_1 выводится из базиса, поэтому соответствующая ей дополнительная строка симплекс-таблицы вычеркивается.

Таблица 20 оптимальна, $x^2=\left(5/4,1,5/2,0,7/4\right)$ - оптимальное решение новой линейной задачи, также не удовлетворяющее требованию целочисленности.

Находим производящую строку таблицы 20.

$$\max\left(\{7/4\},\{5/4\},\{1\},\{5/2\},\{0\},\{7/4\}\right)=$$
$$\max\left(3/4,1/4,0,1/2,0,3/4\right)=3/4$$

В данном случае выбор производящей строки неоднозначен. Выберем, например, строку, соответствующую базисной переменной x_5'. Получаем отсечение

$$u_2 - \{1/4\}x_4 - \{3/4\}u_1 = -\{7/4\}, \quad u_2 \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_2 - 1/4\, x_4 - 1/4\, u_1 = -3/4, \quad u_2 \geq 0$$

Таблица 21

	u_2	u_1	
f	1	4	1
x_1	-1	-1	2
x_2	0	1	1
x_3	-2	-5	4
x_4	-4	1	3
x_5	1	-1	1

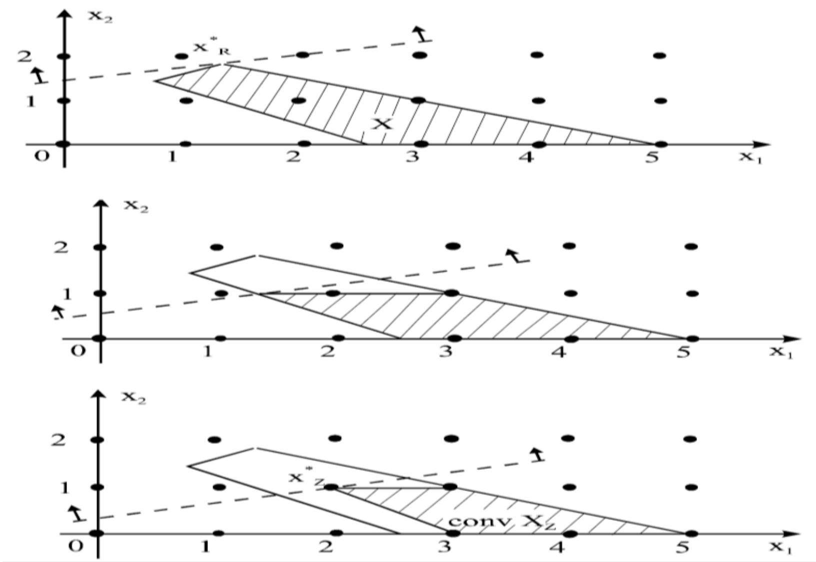

Рисунок 5 – Графическая иллюстрация примера 9

Коэффициенты отсечения записываем в дополнительную строку таблицы 20. Решая новую линейную задачу двойственным симплекс-методом, получаем оптимальное целочисленное решение $x^3 = (2{,}1{,}4{,}3{,}1)$ (таблица 21) преобразованной задачи ЦЛП. Оптимальное решение исходной целочисленной задачи, оптимальное значение целевой функции, $f^*_{\max} = 1$.

Рисунок 5 иллюстрирует процесс сужения области непрерывных решений X. Для построения прямых, соответствующих дополнительным ограничениям (правильным отсечениям), их выражают через исходные небазисные переменные x_1, x_2.

Рассмотрим первое отсечение

$$u_1 - 1/7\,x_3 - 2/7\,x_5 = -6/7 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \left(-6 + x_3 + 2x_5\right)/7$$

Выражаем x_3 и x_5 через $x_1, x_2 : x_3 = 3 + 2x_1 - 3x_2$, $x_5 = 5 - x_1 - 2x_2$, получаем

$$u_1 = \left(-6 + 3 + 2x_1 - 3x_2 + 2\left(5 - x_1 - 2x_2\right)\right)/7 \quad \Rightarrow$$

$$u_1 = 1 - x_2 \ge 0 \quad \Rightarrow$$

$x_2 \le 0$ - первое отсечение.

Рассмотрим второе отсечение

$$u_2 - 1/4\,x_4 - 1/4\,u_1 = -3/4 \quad \Rightarrow$$

$$u_2 = \left(-3 + x_4 + u_1\right)/4 \ge 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_4 + u_1 \ge 3$$

Учитывая, что

$$x_4 = -10 + 4x_1 + 5x_2, \quad u_1 = 1 - x_2$$

Получаем

$$-10 + 4x_1 + 5x_2 + 1 - x_2 \ge 3 \quad \Rightarrow$$

$x_1 + x_2 \ge 3$ - второе отсечение.

Из рисунка 5 видно, что полученные отсечения являются фасетными неравенствами (неравенствами, определяющими грани максимальной размерности) множества $conv\ X_z$. Эти неравенства вместе с исходными линейными ограничениями задают выпуклую оболочку допустимых целочисленных точек исходной задачи.

Упражнение 1. Решить задачу, используя геометрический метод. Построить выпуклую оболочку допустимых целочисленных точек. Записать соответствующую систему ограничений.

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min$$
$$2x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 3$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$2x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min$$
$$2x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 2$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$2x_1 - 2x_2 \le 3$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = x_1 \to \max$$
$$7x_1 + 14x_2 \le 8$$
$$9x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = x_1 - x_2 \to \min$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$-5x_1 + 2x_2 \le 0$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \min$$
$$3x_1 + x_2 \ge 7$$
$$4x_1 - x_2 \ge 5$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$
$$3x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = x_1 - x_2 \to \max$$
$$-3x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 - 3x_2 \le 3$$
$$3x_1 - x_2 \le 9$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = -x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 \qquad \ge 1$$
$$5x_1 + 4x_2 \ge 20$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 3$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 3$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 5$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 \to \min$$
$$3x_3 + x_4 - x_5 = 2$$
$$-x_1 + x_3 + 4x_4 = 5$$
$$-x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 7x_3 + 7x_4 \to \min$$
$$-x_1 - x_2 \ge -2$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$-2x_1 + x_2 - x_4 = -2$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

Упражнение 2. Решить методом Гомори задачу ЦЛП из упражнения 1. Выполнить графическую иллюстрацию линейной задачи, полученной на последней итерации. Какие из отсечений являются фасетными неравенствами множества $conv \quad X_z$?

Упражнение 3. Решить методом Гомори следующие задачи:

4.1

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min$$
$$-2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 1$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 1$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

4.2

$$f(x) = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 1$$
$$2x_2 - x_3 - 2x_4 \ge 1$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

4.3

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le 1$$
$$-4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 \le -2$$
$$-2x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 \le -1$$
$$x \ge 0, \quad x \equiv 0 (\mathrm{mod} \quad 1)$$

5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8 ЗАДАЧА ВЫБОРА КРАТЧАЙШЕГО (ДЛИННЕЙШЕГО) ПУТИ. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ПРЕДПРИЯТИЯМИ.

5.1 Задача оптимального распределения ресурсов

Допустим, что в нашем распоряжении имеется некоторое количество единиц какого-либо однородного ресурса. В качестве ресурса могут выступать деньги, человеческие технические ресурсы (например, материалы, оборудование) и т.д. в количестве W. Имеется T объектов его распределения. Это могут быть объекты строительства, инвестиционные проекты, регионы и т.д. Пусть x_i - количество ресурса, выделяемое на объект t. Известны функции эффективности при выделении ресурса в количестве x_i

на объект $t-\varphi_i(x_i)$. Эффективность конкретного способа распределения имеющегося ресурса оценивается как сумма эффективностей от вложения в каждый объект. В математическом виде задача записывается следующим образом:

$$\max_x \sum_{i=1}^{T} \varphi_i(x_i)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_T = w,$$

$$x \in \{0,1,2,\ldots\}$$

Согласно методу динамического программирования нам необходимо определить функции $f_i(d)$ как максимальную эффективность, которую можно получить распределяя d единиц ресурса по объектам $t, t+1, \ldots, T$. Как мы уже отмечали, $f_T(d)=0$ для всех d, $0 \le d \le w$. Последующие функции ($t<T$) допускают задание через следующие рекуррентные соотношения

$$f_i(d)=\max_{x_i}\{\varphi_i(x_i)+f(d-x_i)\} \tag{7.5}$$

Пусть $x_i^*(d)$ - значение x_i, на котором достигается значение максимума в соотношение (7.5). Сначала с помощью соотношения (7.5) находятся значения функции $f_T(x)$ и $x_T^*(x)$ для всевозможных значений аргумента ($0 \le x \le w$). Далее аналогичным способом из соотношения (7.5) строятся функции $f_{T-1}(x)$ и $x_{T-1}^*(x)$ и так далее, заканчивая функциями $f_i(x)$ и $x_i^*(x)$. Значение $\max\limits_{0 \le x \le w} f_i(x)$ и есть максимальная эффективность, которая достигается при оптимальном способе распределения ресурсов между объектами. Само же оптимальное распределение $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ получается как

$$x_1^* = x_1^*(w),$$
$$b_t - x_t,$$
$$x_3^* = x_3^*\left(w - x_i^* - x_2^*\right),$$
$$\ldots$$
$$x_{t+1}^* = x_{t+1}^*\left(w - \sum_{i=1}^{t} x_i^*\right), \tag{7.6}$$
$$\ldots$$
$$x_T^* = x_T^*\left(w - \sum_{i=1}^{T-1} x_i^*\right),$$

Пример. Банк намерен предоставить 5 млн. руб. в качестве кредита для модернизации трех предприятий. Расчеты показывают, что выделение i-му предприятию (i=1,2,3) x_i млн. руб. принесет $\varphi_i(x_i)$ млн. руб. прибыли (см. таблицу 7.1). Как следует распределить всю сумму кредита по предприятиям, чтобы получить максимальную суммарную прибыль, если средства выделяются в размерах, кратных 1 млн. руб.?

Таблица 7.1

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
0	0	0	0
1	3	1	2
2	4	3	4
3	5	6	5
4	7	7	6
5	8	8	8

Решение.

Исходя из общего вида задачи (7.2) и учитывая, что w=5, а T=3, данную задачу можно записать в виде:

$$\max_{x} \left(\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\varphi_3(x_3)\right)$$

$$x_1+x_2+x_3=5$$

$$x_i \in \{0,1,2,3,4,5\}, \quad i=1,2,3$$

Вычислим функции $f_3(d)$, $f_2(d)$, $f_1(d)$. Как было отмечено, $f_4(d)=0$ и соответствующие значения $x_3^*(d)$ исходя из соотношения

$$f_3(d)=\max\{(x_3)+f_4(d-x_2)\}$$

$$0\le x_3\le d$$

или так как $f_4(d)=0$, имеем

$$f_3(d)=\max \varphi_3(x_3)$$

$$0\le x_3\le d$$

$$f_3(0)=\varphi_3(0)=0,$$

$$x_3^*(0)=0,$$

$$f_3(1)=\max\ \{\varphi_3(0),\varphi_3(1)\}=\max\ \{0,2\}=2,$$

$$x_3^*(1)=1,$$

$$f_3(2)=\max\ \{\varphi_3(0),\varphi_3(1),\varphi_3(2)\}=\max\ \{0,2,4\}=4,$$

$$x_3^*(2)=2,$$

$$f_3(3)=\max\ \{\varphi_3(0),\varphi_3(1),\varphi_3(2),\varphi_3(3)\}=\max\ \{0,2,4,5\}=5,$$

$$x_3^*(3)=3,$$

$$f_3(4)=\max\ \{\varphi_3(0),\varphi_3(1),\varphi_3(2),\varphi_3(3),\varphi_3(4)\}=$$

$$=\max\ \{0,2,4,5,6\}=6$$

$$x_3^*(4)=4,$$

$$f_3(5)=\max\ \{\varphi_3(0),\varphi_3(1),\varphi_3(2),\varphi_3(3),\varphi_3(4),\varphi_3(5)\}=$$

$$\max\ \{0,2,4,5,6,8\}=8$$

$$x_3^*(5)=5,$$

Далее вычислим значения функции $f_2(d)$ и соответствующие значения $x_2^*(d)$ исходя из соотношения

$$f_2(d) = \max_{0 \le x_2 \le d} \{\varphi_2(x_2) + f_3(d - x_2)\}$$

$$f_2(0) = \varphi_2(0) + f_3(0) = 0 + 0 = 0, \quad x_2^*(0) = 0$$

$$f_2(1) = \max\{\varphi_2(0) + f_3(1), \varphi_2(1) + f_3(0)\} = \max\{2,1\} = 2,$$

$$x_2^*(1) = 0$$

$$f_2(2) = \max\{\varphi_2(0) + f_3(2), \varphi_2(1) + f_3(1), \varphi_2(2) + f_3(0)\} =$$

$$= \max\{4,3,3\} = 4$$

$$x_2^*(2) = 0$$

$$f_2(3) = \max\begin{Bmatrix}\varphi_2(0) + f_3(3), \varphi_2(1) + f_3(2), \\ \varphi_2(2) + f_3(1), \varphi_2(3) + f_3(1)\end{Bmatrix} =$$

$$= \max\{5,5,5,6\} = 6$$

$$x_2^*(3) = 3$$

$$f_2(4) = \max\begin{Bmatrix}\varphi_2(0) + f_3(4), \varphi_2(1) + f_3(3), \varphi_2(2) + \\ + f_3(2), \varphi_2(3) + f_3(1), \varphi_2(4) + f_3(0)\end{Bmatrix} =$$

$$= \max\{6,6,7,8,7\} = 8$$

$$x_2^*(4) = 3$$

$$f_2(5) = \max\begin{Bmatrix}\varphi_2(0) + f_3(5), \varphi_2(1) + f_3(4), \varphi_2(2) + f_3(3), \\ \varphi_2(3) + f_3(2), \varphi_2(4) + f_3(1), \varphi_2(5) + f_3(0)\end{Bmatrix} =$$

$$= \max\{8,7,8,10,9,8\} = 10$$

$$x_2^*(5) = 3$$

Далее вычислим значения функции $f_1(d)$ и соответствующие значения $x_1^*(d)$ исходя из соотношения

$$f_1(d) = \max_{0 \le x_1 \le d} \{\varphi_1(x_1) + f_2(d - x_1)\}$$

$$f_1(0) = \varphi_1(0) = 0,$$

$$x_1^*(0) = 0,$$

$$f_1(1) = \max \{\varphi_1(0) + f_2(1), \varphi_1(1) + f_2(0)\} = \max \{2,3\} = 3,$$

$$x_1^*(1) = 1$$

$$f_1(2) = \max \{\varphi_1(0) + f_2(2), \varphi_1(1) + f_2(1), \varphi_1(2) + f_2(0)\} =$$

$$= \max \{3,5,4\} = 4$$

$$x_1^*(2) = 1$$

$$f_1(3) = \max \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(0) + f_2(3), \varphi_1(1) + f_2(2), \\ \varphi_1(2) + f_2(1), \varphi_1(3) + f_2(0) \end{matrix} \right\} = \max \{6,7,6,5\} = 7$$

$$x_1^*(3) = 1$$

$$f_1(4) = \max \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(0) + f_2(4), \varphi_1(1) + f_2(3), \varphi_1(2) + \\ + f_2(2), \varphi_1(3) + f_2(1), \varphi_1(4) + f_2(0) \end{matrix} \right\} =$$

$$= \max \{8,9,8,7,7\} = 9$$

$$x_1^*(4) = 1$$

$$f_1(5) = \max \left\{ \begin{matrix} \varphi_1(0) + f_2(5), \varphi_1(1) + f_2(4), \varphi_1(2) + f_2(3), \\ \varphi_1(3) + f_2(2), \varphi_1(4) + f_2(1), \varphi_1(5) + f_2(0) \end{matrix} \right\} =$$

$$= \max \{10,11,10,9,9,8\} = 11$$

$$x_1^*(5) = 1$$

Результаты приведенных вычислений собраны в таблице 7.2.

Таблица 7.2

	1			2			3		
X	$\varphi_1(x)$	$f_1(x)$	$x_1^*(x)$	$\varphi_2(x)$	$f_2(x)$	$x_2^*(x)$	$\varphi_3(x)$	$f_3(x)$	$x_3^*(x)$
0	0	0	0	0	0		0	0	0

1	3	3	1	1	2	0	2	2	1
2	4	5	1	3	4	0	4	4	2
3	5	7	1	6	6	3	5	5	3
4	7	9	1	7	8	3	6	6	4
5	8	11	1	8	10	3	8	8	5

Как отмечалось, максимальная эффективность может быть вычислена из соотношения

$$\max_{0 \le x \le 5} f_1(x) = \max \{0,3,5,7,9,11\} = 11$$

Далее воспользуемся общими соотношениями (7.3) для нахождения оптимального распределения

$$x_1^* = x_1^*(5) = 1,$$

$$x_2^* = x_2^*(5 - x_1^*) = x_2^*(4) = 3,$$

$$x_3^* = x_3^*(5 - x_1^* - x_2^*) = x_3^*(5 - 1 - 3) = x_3^*(1) = 1.$$

Ответ. Оптимальным распределением кредитных денег между предприятиями является распределение: 1-е предприятие 1 млн. руб.; 2-е предприятие 3 млн. руб.; 3-е предприятие 1 млн. руб. Ожидаемая при этом прибыль составит 11 млн. руб.

К задачам рассматриваемого типа относится и такая классическая задача линейного программирования, как задача о рюкзаке, которая в переменных 0 и 1 имеет следующий вид:

$$\max \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \le b$$

$$x_i \in \{0;1\}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

В общем виде этот тип задач может быть описан следующим образом. Имеется n позиций, каждую из которых можно либо выбрать ($x_i = 1$), либо нет ($x_i = 0$). Выбор i-ой позиции требует затрат ресурса в количестве a_i. Общее количество имеющегося в распоряжении ресурса равно b. Эффект от выбора i-й позиции есть c_i. Следует осуществить выбор среди позиций, допустимый в смысле затрат ресурсов и имеющий максимальный суммарный эффект.