ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Дискретная математика»

Автор
Ляхницкая О.В.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения направлений 09.03.04 «Программная инженерия» и 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Авторы

Старший преподаватель
каф. ПОВТиАС
Ляхницкая О.В.

Оглавление

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1: КОМБИНАТОРИКА

1.1. Теория

Перестановки. Размещения. Сочетания

Пусть есть некоторое конечное множество элементов $U=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Рассмотрим набор элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j}$, где $a_{i_j} \in U$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Этот набор называется выборкой объема m из *n* элементов. Любое подмножество *U* является выборкой, но не всякая выборка является подмножеством *U*, так как в выборку один и тот же элемент может входить несколько раз (в отличие от подмножества).

Комбинаторные задачи связаны с подсчетом числа выборок объема m из n элементов, где выборки подчиняются определенным условиям, т.е. выбор производится по какому-нибудь принципу. Подсчет числа выборок основывается на двух правилах теории множеств.

Принцип суммы: если $|A| = n$, $|B| = m$ и $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = n+m$. На комбинаторном языке это означает: если объект *A* можно выбрать n способами, объект *B* другими m способами и их одновременный выбор невозможен, то выбор "*A* или *B*" может быть осуществлен n+m способами.

Принцип произведения: если $|A|=n$, $|B|=m$, то $|A\times B|=n+m$. На комбинаторном языке это означает: если объект *A* может быть выбран n способами, при любом выборе *A* объект *B* может быть выбран m способами, то выбор "*A* и *B*" может быть осуществлен $n \cdot m$ способами.

Пример **1**. *A* = 15 {различных пирожков}, *B* = 10 { различных пирожных}. Выбор "*A* или *B*" означает, что выбирается что-то одно и способов выбора в этом случае будет 25. Выбор "*A* и *B*" означает, что выбирается 1 пирожок и 1 пирожное и различных вариантов для такого выбора будет 150.

Пример **2.** Бросают 2 игральные кости. Сколькими способами они могут выпасть так, что на каждой кости выпадет четное число очков либо на каждой кости выпадет нечетное число очков?

Пусть *m* – число возможностей для выпадения четного числа на одной кости, *n* – число возможностей для выпадения нечетного числа. Здесь $m = n = 3$. По правилу произведения количество выпадения четных чисел, как и нечетных, равно 9. По правилу суммы количество возможностей для выпадения двух четных и двух нечетных чисел будет 18.

Рассмотрим основные способы формирования выборок.

Определение. Выборка называется упорядоченной, если в ней задан порядок следования элементов. Если порядок следования элементов несущественен, то выборка называется неупорядоченной.

Из определения следует, что две упорядоченные выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, являются различными.

Перестановки.

Определение: Упорядоченные выборки, объемом n из n элементов, где все элементы различны, называются перестановками из n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n.

Теорема1*.* $P = n!$

Пример 3. Сколько существует способов, чтобы расположить на полке 10 различных книг? Ответ: 10!

Можно рассуждать иначе. Выбираем первый элемент, это можно сделать n способами. Затем выбираем второй элемент, это можно сделать $(n - 1)$ способами. По правилу произведения упорядоченный выбор двух элементов можно осуществить $n\times(n - 1)$ способами. Затем выбираем третий элемент, для его выбора останется $n - 2$ возможности, последний элемент можно выбрать единственным способом. Мы вновь приходим к формуле: $n(n - 1)(n - r) \ldots 1$.

Размещения*.*

Определение: Упорядоченные выборки объемом m из n элементов ($m < n$), где все элементы различны, называются размещениями. Число размещений из n элементов по m обозначается

A_n^m.

Теорема2. $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Пример 4. Группа из 15 человек выиграла 3 различных книги. Сколькими способами можно распределить эти книги среди группы?

Имеем $A_{15}^{3} = \frac{15!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730.$

Пример 5: Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, ..., 9, если все цифры в каждом четырехзначном числе различны?

Для формирования каждого четырехзначного числа выбираем четыре цифры из девяти, поэтому существует $A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!}. = \frac{9!}{5!} = 3024$ таких различных чисел.

Пример 6: Сколькими способами можно расположить для фотографирования пять мальчиков и пять девочек, если ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?

В данной ситуации первым в ряду может быть либо мальчик, либо девочка. Если первой стоит девочка, то ряд имеет вид ДМДМДМДМДМ. Имеются 5! способов расставить девочек на позициях Д и 5! способов расставить мальчиков на позициях М. Поэтому, существуют 5! · 5! способов расположить детей в ряд, если первой стоит девочка. Аналогично, существуют 5! ·5! способов расположить детей в ряд, если первым стоит мальчик. Таким образом, имеются 2 · 5! · 5! способов расположить детей в ряд для фотографирования.

Сочетания.

Определение: Неупорядоченные выборки объемом *m* из *n* элементов ($m < n$) называются сочетаниями. Их число обозначается C_n^m.

Теорема3.
$$C_n^m = \frac{m!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 7. Группа из 15 человек выиграла 3 одинаковых книги. Сколькими способами можно распределить эти книги?

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455.$$

Сочетания, размещения и перестановки являлись подмножествами исходного множества. Рассмотрим выборки, которые не являются подмножествами.

Размещения с повторениями.

Определение: Упорядоченные выборки объемом *m* из *n* элементов, где элементы могут повторяться, называются размещениями с повторениями. Их число обозначается $\bar{A}_n^m(n)$.

Теорема4. $\bar{A}_n^m(n) = n^m$.

Пример 8. Кодовый замок состоит из четырех разрядов, в каждом разряде независимо от других могут быть выбраны цифры от 0 до 9. Сколько возможных комбинаций?

Здесь $n = 10$, $m = 4$ и ответом будет 10^4.

Пример 9. Рассмотрим вектор длины m, каждая координата которого может принимать всего 2 значения: 0 или 1. Сколько будет таких векторов?

Это есть выборка, объемом m из двух элементов. Ответ: 2^m

Перестановки с повторениями.

Определение: Пусть имеется n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа и т.д., k_s элементов s-го типа, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. Упорядоченные выборки из таких n элементов по n называются перестановками с повторениями, их число обозначается $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)$. Числа $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ называются полиномиальными коэффициентами.

Теорема5. $C_n(k_1, \ldots, k_s) = \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}$.

Замечание. Числа $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ называются биноминальными коэффициентами. Из этой формулы следует, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Пример 10. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове "математика"?

Решение. Буква "а" входит 3 раза ($k_1 = 3$), буква "м" – 2 раза ($k_2 = 2$), "т" – 2 раза ($k_3 = 2$), буквы "е", "к", "и" входят по одному разу, отсюда $k_3 = k_4 = k_5 = 1$. C_{10} (3, 2, , 2, 1, 1, 1) = $\dfrac{10!}{3!2!2!}$ =151200.

Пример 11. Имеются семь различимых шаров, и требуется положить три шара в первую коробку, два шара — во вторую и два шара — в третью коробку. Сколькими способами можно это сделать?

Существует C_7^3 способов выбрать три шара для первой коробки. После того, как шары выбраны, остается четыре шара, два из них выбираются для второй коробки. Для этого существуют C_4^2 способов. Наконец, остается два шара, которые мы кладем в последнюю коробку. Это может быть сделано C_2^2 или одним способом. Таким образом, количество способов размещений шаров равно $C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$. Но по теореме 5 это равно $C(7,3,2,2) = \frac{7!}{3!2!2!}$.

***Сочетания с повторениями*.**

Определение: Пусть имеется *n* типов элементов, каждый тип содержит не менее *m* одинаковых элементов. Неупорядоченная выборка объемом m из имеющихся элементов (их число ≥ $m \times n$) называется сочетанием с повторением. Число сочетаний с повторениями обозначается C_n^m (*n*).

Теорема6. Количество различных сочетаний из m объектов по n

$$C_n^m(n) = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}.$$

Пример 12. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Покупатель берет 4 пирожных. Сколькими способами он может это сделать ? (Предполагается, что пирожных каждого вида ≥ 4).

Число способов будет

$$C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210.$$

Пример13: Сколько решений имеет уравнение $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 25.$, где каждое n_i — неотрицательное целое число?

Это эквивалентно вопросу о том, сколько существует различных выборок вида $a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 + a_4n_4 + a_5n_5$ где имеется n_{i} объектов типа a_{i} и $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=25.$ Но количество таких выборок — это количество различных сочетаний из 5 элементов по 25 с повторениями. Итак, существуют $\frac{(25+5-1)!}{25!(5-1)!}=\frac{29!}{25!4!}$ различных решений уравнения $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=25.$

1.2. Задачи

1. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1680.

2. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределять между собой обязанности?

Ответ: 42.

3. В парламент нового независимого государства нужно представить для рассмотрения варианты флагов (для определенности – три горизонтальных полосы). Сколько вариантов флагов можно представить, если каждый флаг должен содержать три разных цвета, а количество цветов имеющегося материала, из которого делаются флаги, равно 12?

Ответ:(12!/9! = 1320)

4. На дискотеку пришло 12 девушек и 15 юношей. Объявлен “белый” танец. Все девушки выбрали для танцев юношей (и никто из них не отказался). Сколько могло образоваться танцующих пар?

Ответ: (15!/(15 – 12)!)

5. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

Ответ: 253.

6. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

Ответ: 64.

7. В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Ответ: 240

8. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

Ответ: 124.

9. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

Ответ: 32 760.

10. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

Ответ: 25!/20!.

11. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга? (Одна ладья может взять другую, если она находиться с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

Ответ: 8!.

12. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

Ответ: 896.

13. Сколько различных слов (пусть и не имеющих смысла) можно получить путем перестановки букв в слове “ДУБЛЕНКА”?

Ответ: 8!.

14. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

Ответ: $30!/(10!)^3$.

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Ответ: 42.

16. В заезде на ипподроме участвуют 12 рысаков. Играющие в тотализатор заполняют карточки, в которых указывают порядок, в котором, по их мнению, рысаки придут к финишу. Будем считать, что к финишу одновременно не могут придти два и более рысаков. Сколько вариантов заполнения карточек существует?

Ответ: 12!.

17. На книжной полке помещается 25 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

Ответ: $25! - 2 \cdot 24!$.

18. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

Ответ: 2 520.

19. Из группы в 16 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

Ответ: $16!/(2!)^6$.

20. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

Ответ: 204.

21. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?

Ответ: $2 \cdot 9!$.

22. Сколько существует решений уравнения $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 17$. таких, что каждое n_i — неотрицательное целое число?

Ответ : 1820

23. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо один материал?

Ответ: 5^6; $6 \cdot 4^5$.

24. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

Ответ: 2^{10}.

25. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

Ответ: 16^{100}.

26. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Ответ: 40.

27. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 80!(3! ·75!).

28. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляют 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 10!/48.

29. Три автомашины №1,2,3 должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъемность каждой из них позволяет взять товар сразу для всех магазинов и если две машины в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину №1?

Ответ: $3^6 \cdot 6!$.

30. Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секцию хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики – только девушек, а в лыжную и конькобежную секции – и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти шесть человек?

Ответ: 2304.

31. Из лаборатории, в которой работает 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

Ответ: 15 368.

32. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова –15, в вокальном кружке – 12, в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

Ответ: 15!10/7!

33. Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных распределений?

Ответ: $28!/(7!)^4$.

34. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 15 015.

35. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3^5.

36. Лифт останавливается на 10 этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в лифте?

Ответ: 10^8.

37. На книжной полке требуется расположить 15 различных книг по математике, 12 различных книг по физике и 16 различных книг по информатике. Сколькими способами это можно сделать, если

а) не существует никаких ограничений?

б) все книги по одному и тому же предмету должны стоять вместе?

в) все книги по одному и тому же предмету должны стоять рядом, но математические книги и книги по информатике не должны стоять рядом?

Ответ: 43!; $3!\cdot 15!\cdot 12!\cdot 16!$; $2\cdot 15!\cdot 12!\cdot 16!$

38. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 – второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких составов первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

Ответ: 420.

39. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа: не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

Ответ: 1800.

40. Сколькими способами можно вытянуть 5 карт трефовой масти из стандартной колоды, содержащей 52 карты?

Ответ: 1287

41. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

Ответ: 62.

42. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

Ответ: $9\cdot 10^6$.

43. Садовник должен в течение трех дней посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

Ответ: 36.

44. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 60.

45. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

Ответ: $2(6!)^2$.

46. Каждый из десяти радистов пункта А старается установить связь с каждым из двадцати радистов пункта Б. Сколько возможно различных вариантов такой связи?

Ответ: 2^{200}.

47. Шесть ящиков различных материалов доставляют на восемь этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на восьмой этаж будет доставлено не более двух материалов?

Ответ: 8^6; $8^6 - 13 \cdot 7^5$.

48. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

Ответ: $2(11!)^2$.

49. Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры группами выходят по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Ответ: $10!/4$.

Комбинаторные задачи с ограничениями

Рассмотрим несколько типов задач, в которых на комбинации накладываются определенные ограничения.

а) Задача о львах и тиграх. Имеется 5 львов и 4 тигра. Необходимо их расставить в ряд, но при этом известно, что тигр не может идти спокойно за тигром. Тогда расставляем львов с промежутками (их будет 6) и в них вставляем тигров. Таким образом, если тигры и львы обезличенные, то *C*g = 15. В общем случае при *п* львах и *к* тиграх имеем: $C_{и+1}$

б) *Задача о книжной полке.* Из ***т*** книг, стоящих на полке, нужно выбрать *к* таких, которые не стояли рядом на книжной полке. Отберем сразу *к* книг, останется *п-к.* Их расставим с промежутками *(п-к+1* промежуток). На эти места вставим *к* книг. Общее решение: *Сп-к+1* в) *Рыцари короля Артура.* 12 рыцарей сидят за круглым столом. Нужно выбрать 5 из них, но таких, которые не сидели рядом за столом. Множество всех решений разбиваем на два подмножества в зависимости от того, входит ли в команду избранных конкретный рыцарь или нет? Ответ: 15 +21 = 36. Если за круглым столом сидит n рыцарей, а нужно выбрать k, которые не сидели рядом, то задача решается аналогично и имеет смысл при $n > 2k$.

Формула включений и исключений.

Пусть имеем n предметов и m свойств $a_1,\dots,a_m$. Каждый из этих предметов может обладать или не обладать любым из этих свойств. Обозначим через $n(i_1,\dots,i_k)$ число предметов, обладающих свойствами $a_{i_1},\dots,a_{i_k}$ (и, может быть некоторыми другими) Тогда число $N(0)$ предметов, не обладающих ни одним из свойств $a_1,\dots,a_m$ определяется равенством

$$N(0)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k s_k,$$

где $s_0=n$, а

$$s_k=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} n(i_1,\dots,i_k),\quad k=\overline{1,m}.$$

Число $N(r)$ предметов обладающих ровно r свойствами равно

$$N(r)=\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}s_k.$$

Пример 1. Староста класса подал следующие сведения о классе. Всего в классе 45 учеников, из них 25 мальчиков. 30 человек учится без троек, из них – 16 мальчиков; 28 человек занимаются спортом, из них – 18 мальчиков и 17 хорошистов и отличников; 15 мальчиков учатся без троек и одновременно занимаются спортом. Классный руководитель внимательно посмотрел список и сказал, что в сведениях есть ошибка. Как он это узнал?

Решение. Обозначим a_1 – свойство принадлежности к мужскому полу; a_2 – хорошая успеваемость; a_3 – занятие спортом. Тогда N = 45, N(1) = 25, N(2) = 30, N(3) = 28, N(1, 2) = 16, N(1, 3) = 18, N(2, 3) = 17, N(1, 2, 3) = 15. Итого N(0) = 45 – 25 – 28 + 16 + 18 + 17 – 15 = – 2 – ошибка.

Задачи

1. В группе 25 студентов. Среди них 20 сдали сессию успешно, 12 занимаются в спортивных секциях, причем 10 из них сдали сессию успешно. Сколько неуспевающих студентов не посещает спортивных секций? Ответ 3.

2. При обследовании читательских вкусов оказалось, что 60% читает журнал А, 50%– журнал В, 50% – журнал С, 30%– журнал А и В, 20% – журнал В и С, 40% – журнал А и С, 10%– журнал А, В и С. Сколько процентов студентов:

1) не читает ни одного из журналов;
2) читает в точности 2 журнала;
3) читает не менее 2 журналов? Ответ: 20%, 60%, 70%.

3. На одной кафедре университета работает 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 10 знают английский, 7– немецкий, 6– французский, 5– английский и немецкий, 4– английский и французский, 3– французский и немецкий.

1) Сколько человек знает все 3 языка?
2) Сколько человек знает ровно 2 языка?
3) Сколько человек знает только английский язык? Ответ: 2; 6; 3.

4. 1) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

2. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих $n=30m$ и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15.

Ответ: 457; $22m$.

5. Четыре человека сдали свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что в точности k человек получат свои шляпы назад. Рассмотреть все значения k $(0 \le k \le 4)$. Ответ: $p_0=3/8$, $p_1=1/3$, $p_2=1/4$, $p_3=0$, $p_4=1/24$.

6. Найти число перестановок элементов m-множества, оставляющего на месте ровно r $(0 \le r \le m)$ элементов. Ответ: $n(r)=$

$$\frac{m!}{r!}\sum_{s=0}^{m-r}\frac{(-1)^s}{s!}.$$

7. Найти число способов разложения n шаров по m ящикам так, чтобы r $(0 \le r \le m)$ ящиков оставались пустыми. Ответ: $n(r)=$

$$\binom{m}{r}\sum_{s=0}(-1)^s\binom{m}{s}(m-r-s)^n.$$

8. Вычислить $s = \sum_k \frac{1}{2^k}$, где суммирование проводится по всем натуральным k, не кратным 2, 3 и 5.

9. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Ответ:6.

10. Ученики 7 класса решали две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка: I – решивших первую задачу, II – решивших только одну задачу, III – решивших по крайней мере одну задачу, IV – решивших обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2:ПОТОКИ В СЕТЯХ

2.1. Задачи

В сетевом графике определить ранние и поздние сроки начала и окончания работы (**a,b**). Для неё определить свободный и полный резервы времени

Вариант 1.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
a		3		3				
b						5	7	
c						5	6	
d		4						
e			3	8		7		
f							9	
g								
h	4			8	9			

Вариант 2.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
a		3			3			
b			5				7	
c							9	
d			7			3		
e		4		7				
f			5				6	
g								
h	4			9	8			

Вариант 3.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
a		3		3				
b						5	7	
c						5	6	
d		4			6			
e			3			7		
f							9	
g								
h	4			8	9			

Вариант 4.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
a		3					3	
b					5			7
c					5			6
d								8
e				3	7			
f		4				7		
g								
h	4					9	8	

Вариант 5.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3		3				
b						5	7	
c						5	6	
d		4			7			
e			3			7		
f							9	
g								
h	4			8	9			

Вариант 6

	a	b	c	d	e	f	g	h
a					4			
b							8	
c	2				3	5		
d		6	5			7		
e							5	
f		3			2		6	
g								
h	5		7	4				

Вариант 7

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		5				6		
b							1	
c					8	5		
d	4		2			9		

e						*2*	*6*	
f		*2*					*2*	
g								
h	*6*		*7*	*4*				

Определить величину максимального потока, который можно пропустить через заданную сеть.

Вариант 1.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3		3				
b						5	7	
c						5	6	
d		4			8			
e			3			7		
f							9	
g								
h	4			8	9			

Вариант 2.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3			3			
b			5				7	
c							9	
d			7			3		
e		4		7				
f			5				6	
g								
h	4			9	8			

Вариант 3.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3		3				
b						5	7	

c						5	6	
d		4			6			
e			3			7		
f							9	
g								
h	4			8	9			

Вариант 4.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3				3		
b				5			7	
c				5			6	
d							8	
e			3	7				
f		4			7			
g								
h	4				9	8		

Вариант 5.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3		3				
b						5	7	
c						5	6	
d		4			7			
e			3			7		
f							9	
g								
h	4			8	9			

Вариант 6.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a					4			
b							8	
c	2				3	5		

d		6	5			7		
e							5	
f		3			2		6	
g								
h	5		7	4				

Вариант 7.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		5				6		
b							1	
c					8	5		
d	4		2			9		
e						2	6	
f		2					2	
g								
h	6		7	4				

Вариант 8.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a							5	
b							8	
c	3			2		5		
d	4							
e		6	5			7		
f	2	3					6	
g								
h			7	5	4			

2.2. Список вопросов для самоконтроля

1. Как определяется стационарный поток f в сети G?
2. В какой орсети для любой вершины i выполняется условие : $\Gamma^{+} i = \Gamma^{-} i$?
3. Как записать условие со- хранения потока для произ-

вольной вершины?

4. Какую величину называют чистым потоком?
5. Как определяется разрез, отделяющий источник от стока?
6. Какой разрез, отделяющий источник от стока, называют минимальным?
7. Как формулируется теорема Форда-Фалкерсона?

Какие этапы содержит алгоритм Форда-Фалкерсона построения максимального потока и минимального разреза?

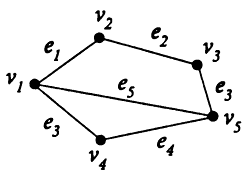
3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3: ТЕОРИЯ ГРАФОВ

3.1. Задачи

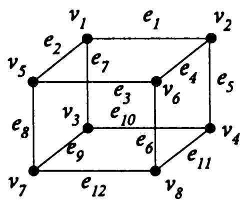
Тема: Понятие графа. Задание графа. Алгоритмы обходов графа в ширину и глубину.

1. Найдите матицы инцидентности графов:

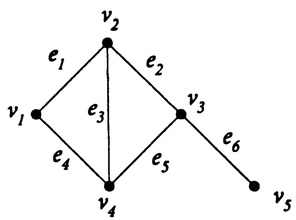
а)



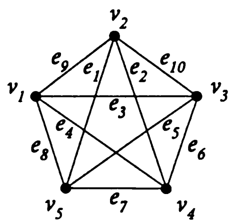
б)



в)



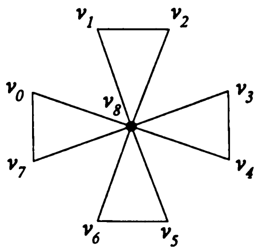
г)

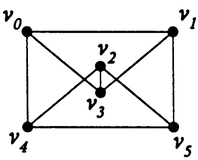


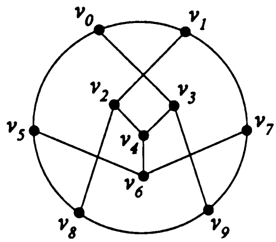
2. Задан графы , вершины которых упорядочены так, как помечены.

а) Найдите остовное дерево поиском в ширину.

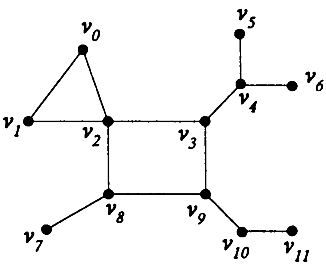
б) Найдите остовное дерево поиском в глубину.



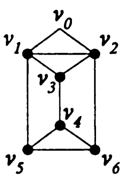




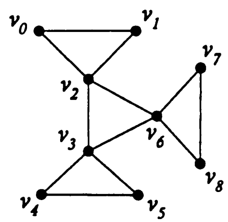
3. Найти остовное дерево алгоритмом ПВГ



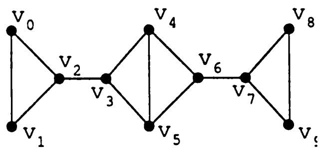
4. Найти остовное дерево алгоритмом ПВШ



5. Найти остовное дерево алгоритмом ПВШ



6. Найти остовное дерево алгоритмом ПВГ



3.2. Список вопросов для самоконтроля

1. Дайте определение графа, оргафа, ребра, дуги.
2. Что такое степени вершин графа?
3. Дайте определение части графа, суграфа и подграфа.
4. Дайте определение маршрута, цепи и цикла.
5. Сформулировать алгоритм поиска в ширину.
6. Как оценивается сложность алгоритма поиска в ширину?
7. Какой подграф выделяется в процессе поиска в ширину?
8. Какие пути находит поиск в ширину?
9. Сформулировать алгоритм поиска в глубину.
10. Как оценивается сложность алгоритма поиска в глубину?
11. В чем смысл стратегии поиска в глубину?
12. Какие дуги в поиске в глубину называют древесными, обратными, прямыми и перекрестными?
13. Сколько компонент связности имеет дерево ПВШ неориентированного графа?
14. Как алгоритмически проверить, является ли граф ациклическим?
15. Как найти кратчайшую цепь между двумя вершинами графа?

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4: ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

4.1. Теория

Множество – неупорядоченная именованная совокупность элементов, удовлетворяющая следующим условиям:

- каждый элемент совокупности уникален, т. е. отличим от других;
- для любого объекта существует возможность установить, принадлежит ли он множеству или нет.

Принадлежность элемента a множеству A обозначается $a \in A$, если элемент не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$.

Элементы множества в математике принято заключать в фигурные скобки. Таким образом, совокупность {1, 2, 3, 4, 5, 6} является множеством и оно неотличимо от множества {1, 3, 5, 2, 4, 6}, поскольку порядок элементов не играет роли.

Элементами множества могут быть объекты разной природы и структуры. В частности, множества могут сами быть элементами множеств. Примеры: множество студентов одной группы; множество команд языка программирования; множество групп студентов 2-го курса и т.д. В последнем случае элементы (группы студентов) сами являются множествами.

Число элементов множества A обозначается как $|A|$ и называется мощностью множества A. Множество, не содержащее элементов, обозначаемое символом $\varnothing$ и называемое пустым множеством.

Множество может быть задано в виде:

- перечисления его элементов, например $A = \{a, b, c, d, e, f\}$;
- свойства, общего для всех его элементов, например $B=\{b_i \mid b_i$ – студенты старше 25 лет$\}$;
- процедуры формирования элементов, например $C=\{c_i \mid c_i = n \cdot 2,\ n \in N\}$.

Множества A и B равны (обозначается A=B) , если $(\forall a \in A\ \exists b \in B,\ a=b)\ \&\ (\forall b \in B\ \exists a \in A,\ a=b)$ или $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Если заведомо выполняется только условие, записанное в первой скобке определения равенства, то множество A является частью множества B или его подмножеством, обозначается $A \subseteq B$. Если при этом второе условие не выполняется, то говорят о точном (или строгом) вхождении множества A в множество B (обозначается $A \subset B$).

Если A – конечное n-элементное множество, тогда имеется ровно 2^n различных подмножеств, составленное из элементов множества A, включая несобственные подмножества $\varnothing$ и A.

Множество всех подмножеств данного множества A называется степенью множества A или *булеаном* $\beta(A)$.

Если при некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фикси- рованного множества U, то это самое большое множество называется универсальным (полным) множеством и графически обозначается в виде точек прямоугольника, отдельные области которого обозначают различные подмножества U. Такое изображение множеств называется диаграммой Эйлера – Венна.

Основные операции над множествами:

- **Объединением** двух множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов, являющихся элементами хотя бы одного из множеств *А* или *В*.: A∪B={x|x∈A или x∈B}. Для графического изображения операции объединения множеств используются диаграммы Эйлера-Венна, где множества представлены как замкнутые области, а результат операции показан заштрихованной частью (рис.1.)

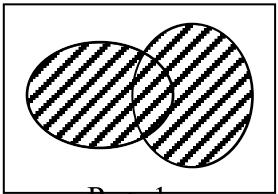


Рис. 1

- **Пересечением** двух множеств *А* и *В* (или теоретико-множественным произведением) называется множество элементов, принадлежащих одновременно и *А*, и *В*. Таким образом, $A \bigcap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$. Диаграмма Эйлера-Венна для пересечения двух множеств показана на рис.2.

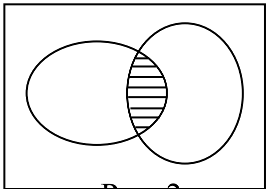


Рис. 2

- **Разностью** множеств А и В называется множество тех элементов *А*, которые не являются элементами *В*, таким образом, A\B={x|x∈A и x∉B}. Диаграмма Эйлера-Венна для пересечения двух множеств показана на рис.3.

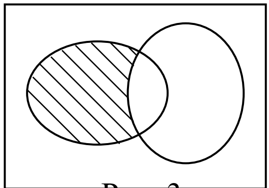


Рис. 3

- **Симметрической разностью** двух множеств *А* и *В* называется объединение двух разностей *А* \ *В* и *В* \ *А*, *т.е.* AΔB=(A\B)∪(B\A). Диаграмма имеет вид(рис.4.):

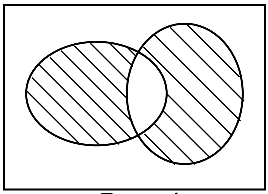


Рис. 4

- **Дополнением** множества *А* называется множество всех элементов, не принадлежащих *А*, таким образом,: $\overline{A}$ =U\A={x|x∈I и x∉A}. Диаграмма Эйлера- Венна имеет

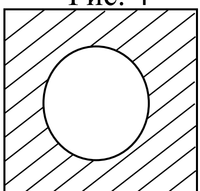


Рис. 5

вид(рис.5):

Свойства операций:

1. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap I = A$;
2. $A \cup \overline{A} = I$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
3. $A \cup I = I$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;
4. $\overline{\varnothing} = I$, $\overline{I} = \varnothing$;
5. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
6. $\overline{\overline{A}} = A$.
7. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
8. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
9. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
10. $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
11. $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \overline{A}_n$ $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots$

Пример 1. Задать различными способами множество А всех четных чисел 2, 4, 6, …., не превышающих 100.

Решение. 1. Перечислением: А={2, 4, 6, 8, 10, …, 99, 100};

1. Описанием: А={x|x∈N и x/2∈N, N≤100}; (N – множество натуральных чисел 1, 2, 3, .)
2. Порождающей процедурой:
   а) 2∈A; б) если x∈A, то (x+2)∈A;
   в) x≤100.

Пример 2. Доказать, используя тождества алгебры множеств, что $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Решение. Используя тождества алгебры множеств, получаем

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap U = A \cup B.$$

Докажем данный пример, используя диаграммы Эйлера-Венна.

Пример 3. Упростить выражение $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

Решение. Используя законы и тождества алгебры множеств, получаем:

$$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = [(A \cup \overline{A}) \cap B \cap C] \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$$
$$U \cap B \cap C \cup \overline{B} \cup \overline{C} = (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) = U$$

Пример 4. Опрос 100 студентов, изучающих иностранные языки, показал: английский язык изучают 29 студентов, немецкий –30, французский –9, только французский - 1, английский и немецкий – 10, немецкий и французский – 4, все три языка – 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только немецкий язык? При решении использовать диаграммы Венна.

Решение. Введем обозначения: I – множество всех опрошенных студентов; А – множество студентов, изучающих английский язык; Н – множество студентов, изучающих немецкий язык; Ф – множество студентов, изучающих французский язык (См. диаграмму Эйлера-Венна на рис. 1)

По условию задачи очевидно, что $\text{А} \cap \Phi \cap \text{Н}$=3, тогда $(\text{Н} \cap \Phi) \setminus (\text{А} \cap \Phi \cap \text{Н})$=4-3=1; $(\text{А} \cap \text{Н}) = (\text{А} \cap \Phi \cap \text{Н}) =$10-3=7. В таком случае только немецкий язык изучают 30-7-3-1=19 студентов.

Из условия задачи также следует, что $(\text{А} \cap \Phi) \setminus (\text{А} \cap \Phi \cap \text{Н}) =$9-1-1-3=4, а поэтому только английский язык изучают 29-4-3-7=15 студентов. Тогда число студентов, не изучающих ни одного языка, будет равно $U \setminus (A \cup \Phi \cup H) =$100-(1+1+3+4+7+15+19)=50 студентов.

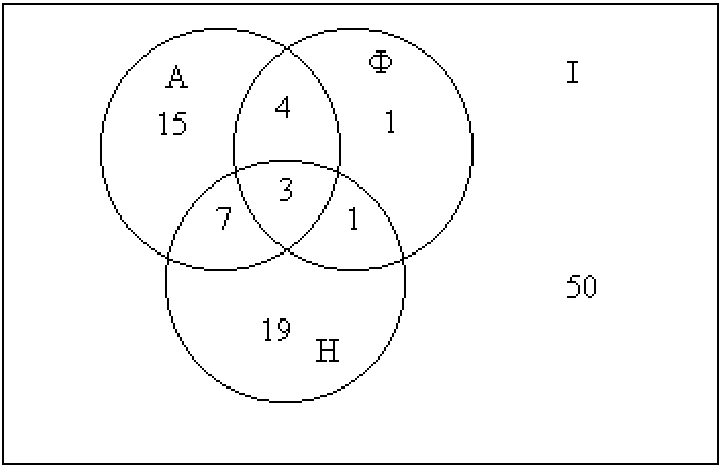


Рис. 1

Пример 5. Доказать аналитически: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Решение. Введем обозначения: $D = (A \cap B) \cup C$; $E = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

а). Пусть $x \ni D$, тогда имеет место либо $x \in A \cap B$, либо $x \in C$. Если $x \in A \cap B$, тогда $x \in A$ и $x \in B$ и в таком случае $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$ или, что тоже самое, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, т.е. $x \in E$. Если $x \in C$, тогда можно записать $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$ одновременно. Откуда, очевидно, и в этом случае $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, т.е. $x \in E$.

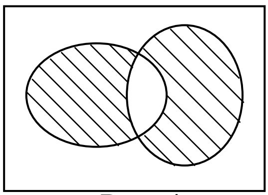


Рис. 4

Итак, если $x \ni D$, то $x \in E$. Следовательно, $D \subseteq E$.

б). Пусть $x \in E$. Тогда $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Если $x \in A \cup C$, то либо $x \in A$, либо $x \in C$. Но если $x \in C$, то (см. п.а) $x \in D$. Если же $x \notin C$, тогда $x \in B$. Из последнего следует, что $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$, или, что тоже самое, $x \in (A \cap B) \cup C$, т.е. $x \ni D$.

Итак, если $x \in E$ то $x \ni D$. Следовательно, $E \subseteq D$.

Из пп. а и б следует, что $D \subseteq E$ и $E \subseteq D$. Следовательно, D=E, т.е. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Тождество доказано.

4.2. Задачи

№ 1. Множество А состоит из натуральных чисел, делящихся на 4, множество В – из натуральных чисел, делящихся на 10, множество С – из натуральных чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество $A \cap B \cap C$?

№ 2. Задано, что S={a_1, a_2, a_3}, причем известно, что $A \subset S$, A={a_1, a_2}; $B \subset S$, B={a_2, a_3}; $C \subset S$; C={a_2}. Найти элементы следующих множеств: $A \cap A;\ A \cap B;\ B \cap A;\ (A \cap B) \cup (B \cap C).$

№ 3. Пусть I={1,2,3,4,5}, X={1,5}, Y={1,2,4}, Z={2,5}.

1) $X \cap \overline{Y}$;
2) $(X \cap Z) \cup \overline{Y};$
3) $X \cup (Y \cap Z)$;
4) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z);$
5) $\overline{X \cup Y};$
6) $\overline{X} \cap \overline{Y};$
7) $\overline{X \cap Y};$
8) $(X \cup Y) \cup Z;$
9) $X \cup (Y \cup Z);$
10) $X \setminus Z;$
11) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z).$

№ 4. Пусть I={a,b,c,d,e,f}, A={a,b,c}, B={f,e,c,a}, C={d,e,f}.

Найти множества:

1) $A \setminus C$;
2) $B \setminus C$;
3) $C \setminus B$;
4) $A \setminus B$;
5) $\overline{A} \cup B$;
6) $B \cap \overline{A}$;
7) $A \cap C$;
8) $C \cap A$;
9) $C \Delta A$.

№ 5. Упростить выражения:

1) $\overline{A \cap \overline{\overline{B}}} \cup B$;
2) $\overline{\overline{\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})} \cup (A \cup B)}$;
3) $\overline{\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup B)} \cap (A \cup B)}$;
4) $\overline{[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap D)] \cap \overline{(A \cap B \cap C \cap D \cup U)}}$;
5) $(A \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B) \cup \overline{B} \cup (A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D})$;
6) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D})$;
7) $(\overline{A \setminus B} \setminus B \cap C) \setminus \overline{\overline{C} \cup D}$;
8) $(A \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap C) \cap \overline{A} \cap B \setminus C$;
9) $\overline{\overline{A} \setminus \overline{B \cup C}} \setminus \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$;
10) $\overline{A} \cup A \cup B \cup \overline{\overline{B} \cup \overline{C}} \setminus A$;

11) $\overline{A}\setminus\overline{B\cap C}\setminus A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cup B\cap C;$

12) $\overline{A}\cup(A\setminus\overline{B})\cup(\overline{A}\setminus B);$

13) $A\cup B\cap\overline{\overline{B}\cup\overline{C}}\setminus\overline{B};$

14) $(A\cup\overline{A}\cap B\cup\overline{A}\cap C)\cap\overline{A}\cap B\cap\overline{C};$

15) $(A\cup B\cap C)\setminus(\overline{B}\cup\overline{C}\cup\grave{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup\overline{(A\cup B\cup C)};$

$(A\cup(B\setminus A)\cup\overline{A}\cap C)\cap\overline{A}\cap C\setminus C$

№ 6. Доказать тождества, используя законы алгебры множеств:

1) $\overline{\overline{(\overline{A}\cup B)}\cup(A\cup\overline{B})}=B\setminus A;$

2) $A\setminus[(A\cap B)\cup(A\setminus B)]=\varnothing;$

3) $(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)=C;$

4) $(A\cap B\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap D\cap E)\cup(A\cap D\cap\overline{A})=A\cap B\cap D;$

$[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap D\cap E)]\cap\overline{[(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{D}\cap\overline{E})\cup(\overline{A}\cap B\cap E)]}=$
$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{D}\cap E).$

№ 7. Для произвольных множеств A, B, C, D $\subset$ U построить диаграммы Эйлера-Венна при условии:

1) $A, B, C\subset D;\quad A\cap B\cap C\neq\varnothing;$

2) $C\subset A\cap B;\quad D\subset B;\quad C\cap D\neq\varnothing;$

3) $A\subset B;\quad C\subset D;\quad A\cap D=\varnothing;\quad B\cap C=\varnothing;$

4) $C\subset A\cup B;\quad (A\setminus B)\cap C\neq\varnothing;\quad (B\setminus A)\cap C\neq\varnothing$.

5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5: АЛГЕБРА ЛОГИКИ

5.1. Задания и упражнения

1.1.Составить таблицы истинности для формул.

1. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \wedge C) \vee A$
2. $(A \to B \vee C) \wedge \overline{A \wedge C} \to A$
3. $A \to (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee \overline{C})$
4. $(A \wedge \overline{B} \to B) \to (A \to B)$
5. $A \wedge (B \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \to A) \vee B$
6. $A \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$
7. . $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (\overline{B} \vee C))$
8. $(A \vee B \to \overline{C}) \to A$
9. $\neg(A \to \overline{(B \wedge A)}) \to A \vee C$
10. $A \to (B \vee C) \leftrightarrow (A \to B) \vee (A \to C)$
11. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{A \vee B})$
12. $(x \to y) \oplus ((y \to \bar{z}) \to x \cdot y)$;
13. $(x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \to (y \to \bar{z}))$;
14. $(x \vee (y \to z)) \cdot (x \oplus y)$;
15. $\overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \mid (x \oplus y \cdot z)$;
16. $\bar{x} \cdot (y \cdot z) \vee \overline{x \to z}$;
17. $((x \vee y) \cdot \bar{z} \to ((x \sim \bar{z}) \oplus \bar{y})) \cdot ((x \oplus y) \cdot \bar{z})$;
18. $(x \to y \,\&\, z) \,\&\, \overline{x \to y}$;
19. $(\bar{x} \vee y) \to ((y \mid \bar{z}) \to (x \sim x \cdot z))$;
20. $xy \vee (\overline{x \to x\bar{y}} \to z)$;
21. $(x \mid \bar{y}) \to ((y \downarrow \bar{z}) \to (x \oplus z))$;
22. $x \cdot (y \cdot z) \oplus (\bar{x} \to z)$;
23. $(((x \mid y) \downarrow \bar{z}) \mid y) \downarrow (\bar{y} \to z)$;
24. $((x \mid y) \downarrow (y \mid \bar{z})) \cdot (x \to (y \to z))$;
25. $(x \cdot y \to z) \vee ((x \downarrow y) \mid z)$;
26. $((x \to y \cdot z) \oplus (x \sim y)) \vee (y \to x \cdot z)$;

27. $\overline{x \oplus y \cdot z} \cdot \overline{\bar{y} \to x \cdot z} \cdot \left(\bar{x} \downarrow y\right)$

1.2. Выяснить, являются ли формулы тождественно истинными, тождественно ложными или выполнимыми:

1. $\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}}$
2. $\left(\left(x \to y\right) \wedge x\right) \to y$
3. $\left(\left(x \leftrightarrow y\right) \wedge \bar{x}\right) \to \bar{y}$
4. $\left(\left(x \vee y\right) \leftrightarrow z\right) \leftrightarrow \left(y \to x\right)$
5. $\left(\left(x \to y\right) \wedge \left(y \to z\right)\right) \to \left(x \to z\right)$
6. $\overline{\left(x \to z\right) \to \left(\left(y \to z\right) \to \left(x \vee y \to z\right)\right)}$
7. $\left(x \to y\right) \to \left(\left(x \vee z\right) \to \left(y \vee z\right)\right)$
8. $\left(x \to \left(y \to z\right)\right) \to \left(\left(x \to y\right) \to \left(x \to z\right)\right)$
9. $\overline{\left(x \to y\right) \to \left(\left(x \wedge z\right) \to \left(y \wedge z\right)\right)}$
10. $\left(\left(x \to y\right) \wedge \left(y \to z\right)\right) \to \left(x \to z\right)$
11. $\left(\left(x \to y\right) \wedge \left(y \to z\right)\right) \to \left(\left(x \vee y\right) \to z\right)$
12. $\left(x \to y\right) \wedge x \to x \vee y \vee z$
13. $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
14. $xy \vee \bar{x}\bar{y} \leftrightarrow \left(x \vee y\right)\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right)$
15. $\left(x \to y\right) \oplus \left(x \to z\right)$
16. $\overline{\left(x \vee y\right)} \leftrightarrow \left(x \downarrow y\right)$

1.3. Установить эквивалентность формул с помощью таблиц истинности .

1. $A \vee B \wedge C$ и $(A \vee B) \wedge C$
2. $\bar{A} \vee \bar{B}$ и $\overline{A \wedge B}$
3. $A \to B$ и $\bar{A} \vee B$
4. $A \leftrightarrow B$ и $(\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$

5. $\overline{A} \vee \overline{B}$ и $A \to B$
6. $A \wedge B$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$
7. $A \wedge (\overline{A} \vee B)$ и B
8. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)$ и A
9. $\overline{A \leftrightarrow B}$ и $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$
10. $A \leftrightarrow B$ и $(A \to B) \wedge (A \to \overline{B})$
11. $A \vee B$ и $\overline{A \wedge \overline{B}}$
12. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)$ и B
13. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$ и $(A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B})$
14. $(\overline{A} \to B) \wedge (A \to \overline{B})$ и $(\overline{B} \to A) \wedge (B \to \overline{A})$
15. $\overline{A} \wedge B \vee \overline{C} \wedge B$ и $B \wedge \overline{A \wedge C}$

1.4. Доказать равносильности: используя основные равносильности алгебры логики

1. $x \sim y \equiv (x \to y) \& (y \to x)$;
2. $x \downarrow y \equiv ((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))$
3. $x \vee (y \sim z) \equiv (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
4. $x \& (y \sim z) \equiv ((x \& y) \sim (x \& z)) \sim x$;
5. $x \to (y \sim z) \equiv (x \to y) \sim (x \to z)$;
6. $x \vee (y \to z) \equiv (x \vee y) \to (x \vee z)$;
7. $x \& (y \to z) \equiv (x \to y) \to (x \& z)$
8. $x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z)$;
9. $x \to (y \& z) \equiv (x \to y) \& (x \to z)$;
10. $x \to (y \to z) \equiv (x \to y) \to (x \to z)$
11. $x \to y \equiv xy \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y}$

12. $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$
13. $x \leftrightarrow y \equiv \bar{x} \leftrightarrow \bar{y}$
14. $x \oplus (y \vee z) = (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$
15. $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
16. $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$

1.5. Используя дистрибутивный закон перейти от заданной КНФ формулы А к ДНФ:

1. $A = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$
2. $A = x_1 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3);$
3. $A = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3);$
4. $A = (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3);$
5. $A = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3);$
6. $A = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_4) \cdot (x_3 \vee \bar{x}_4);$
7. $A = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_4).$

1.6. Используя дистрибутивный закон перейти от заданной ДНФ формулы А к ее КНФ:

1. $A = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3;$
2. $A = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3;$
3. $A = \bar{x}_1 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3;$
4. $A = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_1\bar{x}_2 x_3;$
5. $A = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3;$
6. $A = x_1 x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_3 x_4;$
7. $A = x_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4;$
8. $A = x_1 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3\bar{x}_4.$

1.7. Привести к ДНФ(СДНФ), КНФ(СКНФ) следующие формулы:

1. $(x_1 \vee x_2) \to x_3$;
2. $A \wedge B \to (A \to \overline{B})$
3. $\overline{(A \vee \overline{B})}(\overline{A \wedge B})$
4. $(x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \mid x_2 x_3)$;
5. $\overline{(x \mid \overline{y}) \oplus (z \to \overline{x})}$;
6. $((x \oplus y) \mid \overline{z})\ \&\ (\overline{y} \to z)$;
7. $(z \to x) \oplus (x \mid \overline{y})$;
8. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$;
9. $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \overline{x}}) \vee y \wedge \overline{z}$;
10. $x_1 \to (x_2 \to x_3 x_4)$;
11. $(\overline{a} \to c) \to (\overline{\overline{b} \to \overline{a}})$;
12. $(\overline{a} \to \overline{b}) \to (b \wedge c \to a \wedge c)$;
13. $(x_1 \to x_2 x_3 x_4) \cdot (x_3 \to x_1 \overline{x}_2)$;
14. $(x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \to \overline{x}_2 x_4)$;
15. $(a \wedge b \to b \wedge c) \to ((a \to b) \to (c \to b))$

6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6: ОТНОШЕНИЯ. ОТОБРАЖЕНИЯ. ФУНКЦИИ.

6.1. Теория

Декартово (прямое) произведение множеств

Декартовым произведением двух множеств *A* и *B* называют множество, обозначаемое A×B и состоящее из тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B, т.е. $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Прямое произведение дистрибутивно относительно объединения и пересечения. Элементы (x,y) называются *кортежами* длины 2.

Соответствием между множествами X и Y называется подмножество $G \subset X \times Y$. Если $(x, y) \in G$, то говорят, что y соответствует x при соответствии G. Множество $Пр_1G$ называется областью определения соответствия, множество $Пр_2G$ – областью значений соответствия. Если $Пр_2G=Y$, то соответствие называется сюръективным. Множество всех $y \in Y,$ соответствующих элементу $x \in X,$ называется образом x в Y при соответствии G. Множество всех x, которым соответствует y, называется прообразом y в X при соответствии G.

Соответствие называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента $Пр_1G$ является единственный элемент из $Пр_2G$. Функцией называется функциональное соответствие.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами X и Y, то говорят, что функция f имеет тип $X \rightarrow Y$ и обозначается $f:X \rightarrow Y$.

Полностью определенная функция $f:X \rightarrow Y$ называется отображением X в Y. Образ X при отображении f обозначается f(X). Если соответствие при этом сюръективно, т.е. каждый элемент Y имеет прообраз в X, то говорят, что имеет место отображение X на Y (сюръективное отображение).

Если $f : X \rightarrow Y$ и $A \subset X$, то $f \cap (A \times Y)$ есть функция, определенная на A со значениями в Y. Эту функцию называют сужением f на множество A и обозначают $f|A$ или f_A.

Пример 1. {(1,2), (2,2), (Иванов, Петров)} есть функция с областью определения {1, 2, Иванов} и областью значений {2, Петров}.

Пример 2. {(1,2), (1,3), (2,5)} не является функцией, т.к. различные элементы (1,2) и (1,3) имеют одинаковую первую координату.

Пример 3. Множество {(a,b), (c,b), (e,d), (k,m)} есть функция, а подмножество этого множества {(a,b), (e,d)} является сужением этой функции на множество {a,e}.

Отображение $R : X \rightarrow X$ представляет собой отображение множества X в самого себя и определяется парой (X, R), где $R \subseteq X^2$. В этом случае для обозначения данного отображения используется термин отношение и вводят специальную символику: yRx – y находится в отношении R к x.

Подмножество $R \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ называется n-местным отношением между A_1, A_2, …..A_n. Если n=2, то R называется бинарным отношением.

Отношение R называется ($R \subset A \times A = A^2$):

- *рефлексивным*, если для любого $a \in A$ имеет место aRa;
- *антирефлексивным*, если ни для какого $a \in A$ не выполняется aRa;
- *симметричным*, если для пары $(a,b) \in A^2$ из aRb следует bRa;
- *антисимметричным*, если из a_iRa_j и a_jRa_i следует, что $a_i=a_j$;
- *транзитивным*, если для любых a, b, c из aRb и bRc следует aRc.

Отношение R называется **отношением эквивалентности**, если но рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначается символом ≡.

Отношением предпорядка на множестве A называется отношение $R \subset A \times A$, если оно рефлексивно и транзитивно.

Отношением порядка называется отношение, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношением строгого порядка называется отношение, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Пример 4. Докажите, что отношение равенства «=» на любом множестве является отношением эквивалентности.

Решение. Действительно, для данного отношения выполняются свойства: рефлексивности (a=a); симметричности (a=в $\rightarrow$ в=a); транзитивности [(a=в и в=c) $\rightarrow$ a=c].

Пример 5. Задано бинарное отношение R на множестве M={1, 2, 3, 4}. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Найти область определения δ_R, область значений ρ_R, обратное отношение R^{-1}, пересечение и объединение отношений R и R^{-1}

R={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)}.

Решение.

Отношение R, заданное на множестве M, называется рефлексивным, если для всякого x из этого множества xRx истинно. Заданное отношение не является рефлексивным, так как нет пар (2,2) и (3,3).

Отношение R, заданное на множестве M называется симметричным, если на этом множестве из xRy следует yRx. Заданное отношение не является симметричным, т.к., например, пара $(1,2)\in R$, а $(2,1)\notin R$.

Отношение R, заданное на множестве M называется антисимметричным, если на этом множестве из xRy и yRx следует x=y. Заданное отношение не является антисимметричным, так как ему принадлежат пары (1,4) и (4,1), но $1\neq 4$.

Отношение R, заданное на множестве M называется антирефлексивным, если для любого $x \in M$ xRx ложно. Заданное отношение антирефлексивно, так как (уже было показано) нет пар (2,2) и (3,3).

Отношение R, заданное на множестве M называется транзитивным, если на этом множестве из xRy и yRz следует xRz. Заданное отношение является транзитивным, так как для любых двух пар (a,b) и (b,c) следует, что $(a,c)\in R$, где a, в, c $\in M$.

Областью определения отношения R называется множество $\delta_R =\{x| \ \exists(y) \ xRy\}$. Следовательно, областью определения R является двухэлементное множество {1, 4}.

Областью значений отношения R называется множество $\rho_R=\{y|\exists(x) \ xRy\}$. Следовательно, областью значений является все множество M={1, 2, 3, 4}.

Обратным отношением для R называется отношение $R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$.

Обратное отношение R^{-1}={(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4)}.

Пересечение R и R^{-1} равно $R\cap R^{-1}$={(1,1), (4,1), (1,4), (4,4)}.

Объединение R и R^{-1} равно $R\cup R^{-1}$={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (2,1), (3,1)}.

6.2. Задачи

1. Является ли множество {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)} бинарным отношением. Почему?
2. Выписать элементы множества $\{0, 1, 2\}\times\{a,b\}$. Найти область определения и область значений этого отношения, построить его график.

3. Показать на примере, что операция образования декартова произведения не является ни коммутативной, ни ассоциативной.
4. Доказать, что декартово произведение дистрибутивно относительно операции объединения, т.е. что для любых множеств A, B и C $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.
5. Задано бинарное отношение на множестве M={1,2,3,4}. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Почему? Найдите область определения δ_R, область значений ρ_R, обратное отношение R^{-1}, пересечение и объединение R и R^{-1}.
   а) R={(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3), (4,1), (4,4)};
   б) R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)};
   в) R={(1,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)};
   г) R={(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4)};
   д) R={(1,1), (1,3), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)};
   е) R={(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)};
   ж) R={(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,4), (4,4)};
   з) R={(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (4,3)};
   и) R={(1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)};
   к) R={(2,1), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1)}.
6. Найти область определения, область значений, построить график каждого из следующих отношений:
   а) $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2=y^2\}$;
   б) $\{(x,y)\in R\times R \mid |x|+2|y|=1\}$;
   в) $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2<1$ и $x>0\}$;
   г) $\{(x,y)\in R\times R \mid y>0,\quad y\le x,\quad x+y<1\}$;
   д) $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+(y-1)^2\le 1\}$;
   е) $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2\le 1\}$.
7. Является ли функция f(x)=2x, имеющая тип N→N, отображением, и если – да, то каким? Имеет ли функция f обратную функцию f^{-1}, и если – да , то является ли f^{-1} отображением?
8. Чему равна композиция функций f(x) и g(x), если:
   a. а) f(x)=2x и g(x)= $\lg x$;

b. б) $f(x)=x^3$ и $g(x)=\sqrt{x}$;
c. в) $f(x)=2^x$ и $g(x)=x+1$?

Каковы области определения функций и их композиций?

9. Пусть множества $\beta(I)$, где $I=\{a, b, c\}$ A_3 определены следующим образом: $\beta(I)$ – множество всех подмножеств (булеан) множества $I=\{a, b, c\}$; A_3 – множество всех двоичных векторов длины 3, т.е. $A_3=B\times B\times B$, где $B=\{0, 1\}$.
10. Показать, что между множествами $\beta(I)$ и A_3 имеет место взаимно однозначное соответствие.
11.

Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, а S, T, U и V — отношения на A, где

$$S = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,a)\};$$
$$T = \{(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(e,e),(d,e),(c,b)\};$$
$$U = \{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a)\};$$
$$V = \{(a,b),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}.$$

1. Какое из отношений является симметричным?
2. Какое из отношений является рефлексивным?

Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, а S, T, U и V — отношения на A, где

$$S = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,a)\};$$
$$T = \{(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(e,e),(d,e),(c,b)\};$$
$$U = \{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a)\};$$
$$V = \{(a,b),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}.$$

Какое из отношений является транзитивным?

Какое из отношений является антисимметричным?

12.

Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, а S, T, U и V — отношения на A, где

$$S = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,a)\};$$
$$T = \{(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(e,e),(d,e),(c,b)\};$$
$$U = \{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a)\};$$
$$V = \{(a,b),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}.$$

13. Опишите $U \cap V$.
14. Опишите $S \cup T$.

Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, а S, T, U и V — отношения на A, где

$$S = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,a)\};$$
$$T = \{(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(e,e),(d,e),(c,b)\};$$
$$U = \{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a)\};$$
$$V = \{(a,b),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}.$$

Опишите $U - T$.
Опишите $U \triangle S$.

Пусть отношения $U, V \subseteq R \times R$ определены указанным ниже способом $U = \{(x, y) : y = x^2 + 5)\}$ и $V = \{(x, y) : y = 3x\}$.
Опишите отношение $U \circ V$.
Опишите отношение U^{-1}.
Пусть отношения $U, V \subseteq R \times R$ определены указанным ниже способом $U = \{(x, y) : y = x^2 + 5)\}$ и $V = \{(x, y) : y = 3x\}$.
Опишите отношение $V \circ U$.
Опишите отношение V^{-1}.

15. Пусть $A = \{(b, a), (c, e), (d, i), (f, o)(g, u)\}$,
$B = \{(v, a), (w, e), (x, i), (y, o)(z, u)\}$.
Опишите отношение A^{-1}.
Опишите отношение $A^{-1} \circ B$.

16. Пусть $A = \{(b, a), (c, e), (d, i), (f, o)(g, u)\}$,
$B = \{(v, a), (w, e), (x, i), (y, o)(z, u)\}$.
Опишите отношение B^{-1}.
Опишите отношение $B^{-1} \circ A$.

Отношение эквивалентности

1. Из определения отношения эквивалентности следует, что из того, что $(a,b)\in R$ следует $(b,a)\in R$, а из (a,b) и $(b,c)\in R$ следует $(a,c)\in R$. Из первого и второго условия, положив $a=c$, получим условие $(a,a)\in R$. Значит, из симметрии и транзитивности следует рефлексивность. Так ли это? Если нет, то в чем ошибка?

2. Заданное бинарное отношение R доопределите минимальным образом до отношения эквивалентности R`и выпишите классы эквивалентности

a) 1: R={ (1,3),(2,2),(2,7),(1,5),(5.5),(7,10),(4,6),(8,8),(2,9)};
b) 2: R={(1,1),(1,6),(2,7),(9,10),(4,5),(6,3),(7,9),(8,8)};
c) 3: R={(1,2),(3,5),(7,4),(2,6),(2,2),(5,9)(4,10),(10,10)};
a) 4: R={(4,1),(3,2),(1,5),(6,8),(9,10),(7,7),(10,6)}
b) 5: R={(7,9),(8,8),(4,5),(6,3),(1,1),(9,10),(2,7),(1,6)}
c) 6: R={(3,1),(2,4),(5,8),(6,2),(10,7),(9,1),(8,11)}
d) 7: R={(7,3),(4,2),(8,9),(9,4),(1,5),(6,11),(10,7),(9,9)}
e) 8: R={(1,1),(8,8),(7,9),(4,5),(6,3),(10,9),(7,2),(1,6)}
f) 9:

$R=\{(1,3),(2,2),(2,7),(1,5),(5,5),(10,7),(4,6),(8,8),(9,2)\}$

g) 10:

$R=\{(2,2),(1,5),(1,3),(7,2),(6,4),(10,7),(5,5),(7,7),(9,2)\}$.

3. На декартовом произведении $R\times R$, где R множество вещественных чисел (кроме 0), задано отношение Q. Является ли это отношение эквивалентностью, если является, то опишите классы эквивалентности.

a) $(a,b)Q(c,d)$, если $ad=cd$;

b) $(a,b)Q(c,d)$, если $(a-c)=(b^2-d^2)$;

c) $(a,b)Q(c,d)$, если $(a^2-c^2)=(d^2-b^2)$;

d) $(a,b)Q(c,d)$, если $(a+d^3)=(b^3+c)$;

e) $(a,b)Q(c,d)$, если $a/d=c/b$;

f) $(a,b)Q(c,d)$, если $a^2/c^2=d/b$;

4. Каждому отношению эквивалентности однозначно сопоставляется разбиение множества на классы и, наоборот, каждому разбиению однозначно сопоставляется отношение эквивалентности. Каково должно быть разбиение конечного множества на два класса, чтобы их декартово произведение имело наибольшее число элементов?

5. Пусть множество $M=\{1,2,\ldots,r\}$ и на M^n определена величина разности между элементами a и b: $l(a,b)\ l=\Sigma|a_i-b_i|$, где под знаком суммы стоит модуль разности. Пусть a и b находятся в отношении R, если $l(a,b)=1$. Постройте замыкание $\mathfrak{R}$ этого отношения при r = 3. Находятся ли элементы (2,3,1) и (2,1,3) в отношении $\mathfrak{R}$?

Отношение порядка

1. Отношения в задаче 2 раздела доведите минимальным образом (исключив минимальное число пар) до отношения частичного порядка. Определите нижнюю и верхнюю грани.

2. Эти же отношения дополните минимальным образом до отношения нестрогого полного порядка. При этом для обеспечения антисимметрии некоторые пары придется исключить.

3. Покажите, что если отношение R – строгий порядок, то симметричное ему R^{-1} также является строгим порядком.

4. То же самое для нестрогого порядка.

5. То же самое для частичного порядка.

Задачи на отображения

Пояснение. Неподвижной точкой при отображении называют элемент множества, для которого образ элемента равен самому элементу.

1. Сколько существует отображений множества $A=\{a, b, c, d\}$ в себя, имеющих неподвижные точки?

2. Пусть N- множество всех вещественных функций, заданных на всей вещественной оси; γ - отображение N в себя, ставящее в соответствие каждой функции f(x) из N функцию f(x)=(x^2 - 1)f(x).

Будет ли γ взаимно однозначным? Является ли оно отображением N на себя?

3. Каждому треугольнику T, длины сторон которого a ,$в$ и c, сопоставим треугольник со сторонами (a+$в$)/2, (a+c)/2, ($в$+c)/2.

Будет ли это отображение множества всех треугольников в себя взаимнооднозначным? Будет ли оно отображением на себя? Какие треугольники будут неподвижными точками этого отображения?

Транзитивное замыкание отображений

1. Пусть $K=\{(a,b) \mid a=b+1,\ a,b\in N\}$. Как выглядят K^2 ,K^3, K^* ?

2. Пусть α и β являются бинарными отношениями в множестве A. Обозначим как умножение $\alpha\cdot\beta$ транзитивное продолжение отношения α на β.

3. Всегда ли из рефлексивности обоих отношений следует рефлексивность $\alpha\cdot\beta$?

4. Всегда ли из транзитивности обоих отношений следует транзитивность $\alpha\cdot\beta$?

5. Всегда ли из симметричности обоих отношений следует симметричность $\alpha\cdot\beta$?

6. Всегда ли из антисимметричности обоих отношений следует антисимметричность $\alpha\cdot\beta$?

6.3. Вопросы для самоконтроля

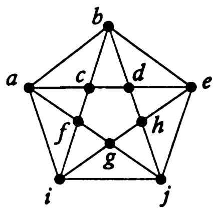
1. Что такое бинарное отношение? Приведите пример.
2. Дайте определение фактормножества.
3. Приведите пример сюръекции, инъекции, биекции.
4. Привести пример отношений строгого порядка.
5. Что такое равномощное множество?
6. Доказать , что $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$
7. Доказать, что если R отношение эквивалентности на конечном множестве A и мощность A и фактормножества A/R равны, то любой класс эквивалентности состоит из одного элемента.
8. Какими свойствами обладает следующее отношение на множестве натуральных чисел R={(m,n) | m–n= 3}?
9. Пусть задано отношение R на множестве X = { 1,2,3,4,5}:

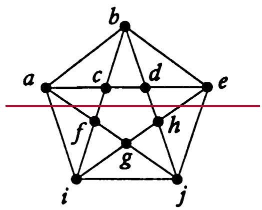
R= {(4,3),(4,4), (2,3),(3,3),(3,5) ,(4,5)}. Построить матрицу и граф для этого отношения.

7. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7: СВЯЗНОСТЬ В ГРАФАХ

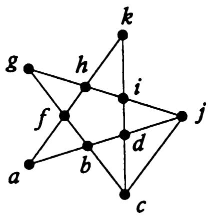
7.1. Упражнения

1. Определить, существует ли в графе эйлеров цикл, если да выделите его.

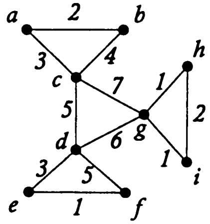




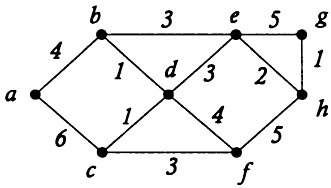
2. Определить, существует ли в графе эйлеров цикл, если да выделите его.



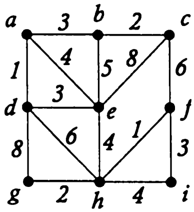
7. Найти минимальное остовное дерево алгоритмом Краскала



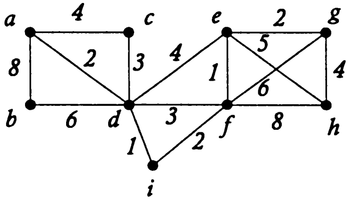
8. Найти минимальное остовное дерево алгоритмом Прима



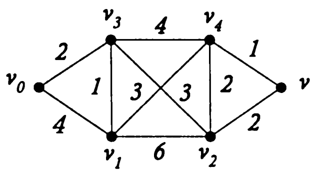
9. Найти минимальное остовное дерево алгоритмом Краскала



10. Найти минимальное остовное дерево алгоритмом Прима

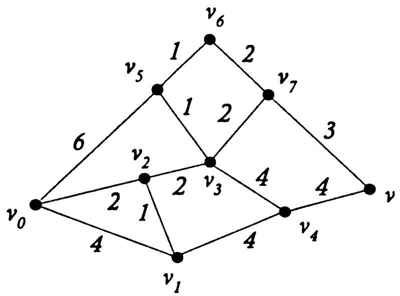


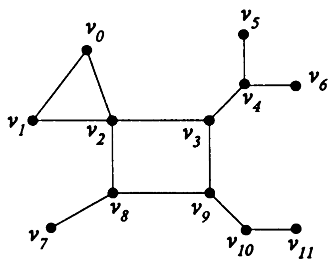
11. Найти кратчайшего расстояния между вершинами v_0 и v

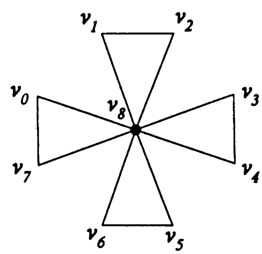


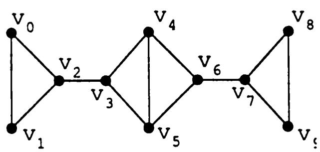
.

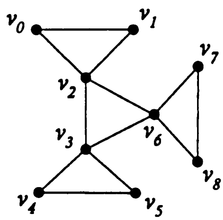
12. Найти кратчайшего расстояния между вершинами v_0 и v











Выделение минимального остова

7.2. Задачи

В заданном графе выделить остов

Вариант 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		4	5	5			3		
2				5	4				
3					3	4		6	
4						3	4		
5							5		7
6									6
7								7	
8									5
9									

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	3	6	5	7				
			5	4				
				3	5			
					6	4		
						8		7
							5	6
							7	
								3

Вариант 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		5	7	5			3		
2				6	4				
3					3	4		6	
4						2	4		
5							8		7

6									6
7								7	
8									5
9									

Вариант 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		3	2	5	7				
2				5	6				
3					3	5			
4						6	4		
5							8		7
6								5	6
7								7	
8									3
9									

Вариант 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		4	7	5			3		
2				5	4				
3					3	4		6	
4						3	4		
5							4		7
6									6
7								7	
8									5
9									

Вариант 6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		4	5	2			7		

2				5	5				
3					5	4		2	
4						3	4		
5							2		7
6									6
7								7	
8									5
9									

7.3. Вопросы для самоконтроля

1. Какими свойствами обладают деревья?
2. Дать определение остова неориентированного графа.
3. Как формулируется теорема Кирхгофа?
4. Как подсчитать числа остовов произвольного графа?
5. В чем смысл задачи о минимальном остове?
6. Для чего нужно упорядочивать ребра графа по возрастанию их весов?
7. Как формулируется алгоритм Краскала?
8. С какой целью в алгоритме Краскала используются структурные деревья?
9. Какова сложность алгоритма Краскала для связного графа?
10. Какие изменения нужно внести в алгоритм 11, чтобы он находил остов максимального веса?
11. Как формулируется алгоритм Прима?
12. Какова стратегия алгоритма Прима для несвязного графа?