ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебно-методическое пособие

по решению основных задач функционального анализа

Часть I

«Функциональный анализ»

Авторы

Золотарева Л.И.,
Румянцева Т.Г.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

В работе даны основные определения и понятия по функциональному анализу по темам: метрические пространства, полнота пространств, нормированные пространства., приведены контрольные задания и решения некоторых основных задач Данные методические указания предназначены для подготовки студентов к рубежным контролям.

Авторы

к.н., старший преподаватель кафедры «"Прикладная математика"»
Золотарева Л.И.

к.н., доцент кафедры «"Прикладная математика"»
Румянцева Т.Г.

Оглавление

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x_1, x_2 поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $\rho_X(x_1, x_2)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\rho_X(x_1, x_2)=0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ (аксиома тождества),
2) $\rho_X(x_1, x_2)= \rho_X(x_2, x_1)$ (аксиома симметрии),
3) $\rho_X(x_1, x_2) + \rho_X(x_2, x_3) \geq \rho_X(x_1, x_3)$ (аксиома треугольника).

Это число $\rho_X(x_1, x_2)$ называется метрикой или расстоянием между элементами x_1 и x_2. Перечисленные условия называются аксиомами метрики.

Элемент x метрического пространства X называется пределом последовательности элементов $\{x_n\}$ из X, если $\rho(x_n,x)\to 0$ при $n\to\infty$ ($\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)>0$, что $\forall n>N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x)<\varepsilon$).

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется сходящейся в себе или фундаментальной последовательностью, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ при n, $m \geq N(\varepsilon)$.

Если в метрическом пространстве X каждая сходящаяся в себе последовательность имеет предел, принадлежащий этому пространству, то пространство X называется полным.

Основные задачи функционального анализа по теме метрические пространства, используемые в контрольных работах

1) Доказать, что множество действительных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |y - x|$ образует метрическое пространство.

Решение.

Проверим выполнение аксиом метрики.

Модуль является неотрицательным числом, поэтому $\rho(x, y) \geq 0$. Пусть $x=y$, тогда $\rho(x, x) = |x - x| = 0$, если $x\neq y$, то из свойств модуля следует, что $\rho(x, y) > 0$. Первая аксиома выполняется.

Используя свойство модуля, запишем: $\rho(x,y)=|y-x|=|x-y|=\rho(y,x)$,

то есть вторая аксиома симметрии справедлива. Далее имеем, применяя свойство модуля $|a+b|\le|a|+|b|$,

$$\rho(x,y)=|y-x|=|y-z+z-x|\le|y-z|+|z-x|=$$

$$=\rho(z,y)+\rho(x,z)=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

Аксиома треугольника также выполняется, следовательно, введенная функция $\rho(x,y)$ действительно является метрикой.

2) Доказать, что пространство непрерывных функций $C_{[0,1]}$ с метрикой $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}|y(t)-x(t)|$ является метрическим пространством.

Решение.

Проверим аксиомы метрики.

$\rho(x,y)\ge 0$ как максимум из неотрицательных чисел. Очевидно $\rho(x,x)=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-x(t)|=0$. Если $x\neq y$, то $\exists\ t_0\in[0,1]$, для которого $x(t_0)-y(t_0)\neq 0$ и тогда $\rho(x,y)>0$. Первая аксиома выполняется.

$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}|y-x|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x-y|=\rho(y,x)$. Вторая аксиома выполняется.

$$|y-x|=|y-z+z-x|\le|y-z|+|z-x|\le\max_{t\in[0,1]}|y-z|+$$

$$+\max_{t\in[0,1]}|z-x|=\rho(z,y)+\rho(x,z)=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Итак, получили неравенство

$$|y-x|\le\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Данное неравенство справедливо для любого $t\in[0,1]$, а, следовательно, для t, при котором левая часть неравенства достигает максимального значения, то есть справедливо соотношение

$$\max_{t\in[0,1]}|y-x|\le\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Откуда из определения метрики следует

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Все аксиомы выполняются, следовательно, $\rho(x,y)$ является метрикой.

3) Доказать, что арифметическое n-мерное пространство с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}$ является метрическим.

Решение.

Проверим выполнение аксиом метрики. Функция $\rho(x,y)$ неотрицательна ($\rho(x,y) \ge 0$), как квадратный корень из неотрицательного числа. При этом очевидно $\rho(x,x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k)^2} = 0$.

Если $x \ne y$, то $\exists$ хотя бы одно k, для которого $y_k - x_k \ne 0$, откуда следует $\rho(x,y) > 0$.

Справедливость аксиомы симметрии очевидна: $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} = \rho(y,x)$.

Докажем выполнение аксиомы треугольника.

$$\rho^2(x,y) = \sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left|(y_k - z_k) + (z_k - x_k)\right|^2 \le$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left|y_k - z_k\right| + \left|z_k - x_k\right|\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left|y_k - z_k\right|\left|z_k - x_k\right| + \sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k \cdot b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}b_k^2$ или $\sum_{k=1}^{n}a_k \cdot b_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$.

В нашем случае $a_k = |y_k - z_k|$, $b_k = |z_k - x_k|$.

Имеем $\sum_{k=1}^{n}|y_k - z_k||z_k - x_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k - z_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k - x_k|^2}$.
Тогда

$$\rho^2(x,y) \le \sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k - z_k|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k - x_k|^2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2 = \rho^2(y,z) + 2\rho(y,z)\rho(x,z) + \rho^2(x,z) =$$

$$= \left(\rho(x,z) + \rho(y,z)\right)^2$$

Или $\rho^2(x,y) \le \left(\rho(x,z) + \rho(y,z)\right)^2$.

Можно извлечь корень из обеих частей неравенства с неотрицательными членами, получим неравенство треугольника $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

Все аксиомы выполняются, поэтому арифметическое n-мерное пространство с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}$ является метрическим.

4) Доказать, что пространство ограниченных числовых последовательностей с метрикой $\rho(\xi,\eta) = \sup_i|\eta_i - \xi_i|$ образует метрическое пространство.

Доказательство аналогично доказательству в задаче 2.

5) Доказать, что для метрического пространства X справедливо неравенство $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y)$

Доказательство.

Запишем третью аксиому в виде $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$. Выразим из последнего неравенства $\rho(x,y)$

$$\rho(x,y) \ge \rho(x,z) - \rho(y,z).$$

Меняя переменные *x*, *y* местами, получим

$$\rho(y,x) \ge \rho(y,z) - \rho(x,z)$$

Пользуясь свойством сим- метрии $\rho(y,x) = \rho(x,y)$, имеем

$\rho(x,y) \geq -(\rho(x,z)-\rho(y,z))$. Известно, что если $\begin{cases} a \geq b \\ a \geq -b \end{cases}$, то

$a \geq |b|$. Следовательно,

$\rho(x,y) \geq |\rho(x,z)-\rho(y,z)|$.

6) Доказать, что для метрического пространства X справедливо неравенство $|\rho(x,z)-\rho(y,t)| \leq \rho(x,y)+\rho(z,t)$.

Доказательство

Преобразуем и оценим левую часть неравенства

$$|\rho(x,z)-\rho(y,t)| = |\rho(x,z)-\rho(z,y)+\rho(z,y)-\rho(y,t)| \leq$$

$$\leq |\rho(x,z)-\rho(z,y)| + |\rho(z,y)-\rho(y,t)|$$

Здесь использовали свойство модуля $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Далее воспользуемся неравенством, доказанным в предыдущей задаче, $|\rho(x,z)-\rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$. В итоге получим требуемое неравенство

$|\rho(x,z)-\rho(y,t)| \leq \rho(x,y)+\rho(z,t)$.

7) Доказать, что вместо трех аксиом метрики достаточно ввести две аксиомы:

1) $\rho(x,y)=0 \leftrightarrow x=y$, 2) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

Доказательство

Здесь достаточно доказать симметрию $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

В аксиоме 2 положим $z=x$, тогда $\rho(x,y)\leq \rho(x,x) + \rho(y,x)$. $\rho(x,x)=0$ по первой аксиоме, тогда имеем $\rho(x,y)\leq \rho(y,x)$.

Далее в аксиоме 2 меняем местами элементы x, y и полагаем $z=y$. Используем первую аксиому, получим

$\rho(y,x)\leq\rho(y,y)+\rho(x,y)=\rho(x,y)$. Рассмотрим полученные неравенства в системе $\begin{cases} \rho(x,y) \leq \rho(y,x), \\ \rho(x,y) \geq \rho(y,x). \end{cases}$

Из нее следует, что $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

8) Пусть X – метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y)$. Доказать, что функции

а) $$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

б) $$\rho_2(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$$

в) $\rho_3(x,y)=\ln(1+\rho(x,y))$ являются метриками.

Доказательство

Рассмотрим функцию $\rho_1(x,y)$. Функция неотрицательна ($\rho_1(x,y)\geq 0$), так как числитель дроби неотрицателен, а знаменатель положителен. Здесь и далее используем условие, что $\rho(x,y)$ – метрика и, поэтому, она удовлетворяет аксиомам метрики, в частности $\rho(x,y)\geq 0$. Функция $\rho_1(x,y)$, представленная в виде дроби, обращается в ноль тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, то есть $\rho(x,y)=0$. В этом случае обязательно $x=y$, так как $\rho(x,y)$ - метрика. Итак, аксиома тождества выполняется.

Доказательство аксиомы симметрии очевидно:

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=\frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)}=\rho_1(y,x)$$

Докажем справедливость неравенства треугольника. Выпишем неравенство треугольника для функции $\rho_1(x,y)$.

$$\rho_1(x,y)\leq\rho_1(x,z)+\rho_1(z,y).$$

Если в процессе тождественных преобразований неравенства, мы получим верное неравенство, то справедливость исходного неравенства будет доказана. Подставим выражение новой функции через метрику $\rho(x,y)$, перенесем слагаемые в одну сторону, получим

$$\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}-\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\geq 0$$

Приведем к общему знаменателю выражение в левой части неравенства. Знаменатель дроби положителен, поэтому дробь неотрицательна, если числитель неотрицателен, то есть

$$\left(\rho(x,z)(1+\rho(z,y)+\rho(z,y)(1+\rho(x,z))\right)(1+\rho(x,y))-$$
$$-\rho(x,y)(1+\rho(x,z))(1+\rho(z,y)\geq 0$$

Представим неравенство в более удобной форме, собирая слагаемые с $\rho(x,y)$, раскрывая внутренние скобки и приводя подобные члены.

$$\rho(x,y)(\rho(x,z)\rho(z,y)-1)+\rho(x,z)+\rho(z,y)+$$
$$+2\rho(x,z)\rho(z,y)\geq 0$$

Или

$$(\rho(x,z)+\rho(z,y)-\rho(x,y))+$$
$$+\rho(x,z)\rho(z,y)(2+\rho(x,y))\geq 0$$

Первое слагаемое неотрицательно в силу неравенства треугольника, второе – в силу не отрицательности метрики $\rho(x,y)$. Получили верное неравенство, следовательно, неравенство треугольника для функции $\rho_1(x,y)$ верно и $\rho_1(x,y)$ является метрикой.

Рассмотрим функцию $\rho_2(x,y)$. Не отрицательность функции и справедливость первых двух аксиом очевидна и основывается на свойствах метрики $\rho(x,y)$. Проверим выполнение неравенства треугольника

$$\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)\geq\rho_2(x,y).$$

Пусть элементы *x*, *y*, *z* таковы, что хотя бы одна из функций ρ(x,*z*) или ρ(*y*,*z*) не меньше 1, тогда

$$\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)=1+\varepsilon\geq 1\geq\rho_2(x,y).$$

Неравенство верно. Здесь ε - неотрицательная величина,

$$\varepsilon=\begin{cases}\rho(x,z), & \rho(x,z)\leq 1\\ \rho(z,y), & \rho(z,y)\leq 1\\ 1, & \rho(x,z)\geq 1\cap\rho(z,y)\geq 1\end{cases}$$

Осталось рассмотреть случай ρ (x,*z*)<1 и ρ (*y*,*z*)<1. Тогда

$$\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)=\rho(x,z)+\rho(z,y)\geq$$
$$\geq\rho(x,y)\geq\rho_2(x,y).$$

Справедливость неравенства доказана. При доказательстве использовалось неравенство10треугольника для метрики

$\rho(x,y)$ и очевидное неравенство $\rho_2(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}\le\rho(x,y)$.

Все аксиомы метрики для функции $\rho_2(x,y)$ выполняются, следовательно $\rho_2(x,y)$ - метрика.

Рассмотрим функцию $\rho_3(x,y)=\ln(1+\rho(x,y))$. Неравенство $\rho_3(x,y)\ge 0$ следует из свойств логарифмической функции $\ln x\ge 0,\quad x\ge 1$ и метрики $\rho(x,y)\ge 0$. Аксиомы тождества и симметрии очевидны и основываются на свойствах метрики $\rho(x,y)$:

$$\rho_3(x,y)=\ln(1+\rho(x,y))=0\leftrightarrow\rho(x,y)=0\leftrightarrow x=y.$$

$$\rho_3(x,y)=\ln(1+\rho(x,y))=\ln(1+\rho(y,x))=\rho_3(y,x)$$

Проверим выполнение третьей аксиомы, используя возрастание логарифмической функции и свойства метрики $\rho(x,y)$.

$$\begin{aligned}\rho_3(x,y)&=\ln(1+\rho(x,y))\le\ln(1+\rho(x,z)+\rho(y,z))\le\\ &\le\ln(1+\rho(x,z)+\rho(y,z)+\rho(x,z)\rho(y,z))=\\ &=\ln\big((1+\rho(x,z))(1+\rho(y,z))\big)=\ln(1+\rho(x,z))+\\ &+\ln(1+\rho(y,z))=\rho_3(x,z)+\rho_3(y,z)\end{aligned}$$

В силу выполнения аксиом, $\rho_3(x,y)$ является метрикой.

9) Доказать, что пространство R^n n-мерных векторов с метрикой $\rho(x_p,x_q)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}((x_p)_k-(x_q)_k)^2}$ - полное.

Доказательство

Возьмем фундаментальную последовательность $\{\boldsymbol{x}_p\}$, тогда существует номер N, что $\forall p,q>N$ выполняется условие

$$\rho(x_p, x_q) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}((x_p)_k - (x_q)_k)^2} < \varepsilon \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}((x_p)_k - (x_q)_k)^2 < \varepsilon^2$$

Так как все слагаемые неотрицательны, то имеем $\forall k \in [1,n]$, $((x_p)_k - (x_q)_k)^2 < \varepsilon^2 \quad \rightarrow \quad \left|(x_p)_k - (x_q)_k\right| < \varepsilon$.

Это означает, что $\{(x_p)_k\}$ – фундаментальная последовательность действительных чисел. По признаку Коши фундаментальная последовательность в пространстве действительных чисел всегда имеет предел, обозначим его $(x)_k = \lim\limits_{p\to\infty}(x_p)_k$.

Рассмотрим точку $x=\{(x)_1,(x)_2,\ldots,(x)_n\}$. Очевидно $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x$, то есть R^n – полное.

10) Пусть X – полное метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y)$. Доказать, что пространство X с метриками:

а) $\rho_1(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$

б) $\rho_2(x,y) = \min\{\rho(x,y),1\}$

в) $\rho_3(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$ является полным.

Для доказательства полноты пространств необходимо показать, что любая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий данному пространству.

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность. Так как X – полное метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y)$, то в этой метрике последовательность $\{x_n\}$ имеет предел $x_0 \in X$. Покажем, что и в метрике $\rho_j(x,y)$ $(j=1,2,3)$ $\{x_n\}$ сходится к x_0.

Зададим малое $\varepsilon>0$. Существование предела означает, что можно найти натуральное число N, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Оценим расстояние между x_n и x_0 в разных метриках $\rho_j(x,y)$.

Очевидно

$$\rho_1(x_n, x_0) = \frac{\rho(x_n, x_0)}{1+\rho(x_n, x_0)} < \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Здесь использовались неравенства $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ и $1+\rho(x_n, x_0) \geq 1$.

$$\rho_2(x_n, x_0) = \min\{\rho(x_n, x_0), 1\} = \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$$

$$\rho_3(x_n, x_0) = \ln(1+\rho(x_n, x_0)) < \ln(1+\varepsilon)$$

Разложим логарифм в ряд по степеням ε.

$$\ln(1+\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\varepsilon^k}{k}$$

Ряд сходится при $\varepsilon<1$. Известно, что остаток знакочередующегося ряда имеет знак первого (отброшенного) члена и меньше его по модулю. Поэтому $\ln(1+\varepsilon) < \varepsilon$. Окончательно имеем $\rho_3(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Следовательно, $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в пространстве X с метриками $\rho_j(x, y)$, а так как $x_0 \in X$, то пространство с метриками $\rho_j(x, y)$ - полное.

НОРМИРОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Множество L элементов $x,y,z,\ldots$ называется линейным пространством, если в нем определены две операции:

1) Сложение, то есть каждым двум элементам $x,y\in L$ поставлен в соответствие элемент $(x+y)\in L$, называемый суммой;
2) Умножение на число, то есть каждому элементу $x\in L$ и каждому скаляру $\lambda\in K$ (числовое поле) ставится в соответствие элемент $(\lambda x)\in L$, называемый произведением элемента на скаляр.

При этом для любых элементов $x,y,z\in L$ и любых скаляров $\lambda,\mu\in K$ предполагаются выполненными следующие аксиомы:

1) $x+y = y+x$,
2) $x+(y+z) = (x+y)+z$,
3) существует нулевой элемент $\boldsymbol{0}\in L$, такой, что $x+\boldsymbol{0}=x$,
4) для любого элемента $x\in L$ существует обратный элемент $(-x)\in L$, такой, что $x+(-x)=\boldsymbol{0}$,
5) $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\cdot\mu)\cdot x=\mu\cdot(\lambda\cdot x)$,
6) $1\cdot x=x$; $0\cdot x=\boldsymbol{0}$,
7) $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$,
8) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$.

Линейное пространство называется нормированным пространством, если каждому элементу $x\in L$ поставлено в соответствие число $\|x\|$ (норма x) так, что выполнены три аксиомы:

1) $\|x\|\geq 0$, $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$,
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$,
3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Основные задачи функционального анализа, используемые в контрольных работах, по теме нормированные пространства

1) Убедиться, что выполняются аксиомы нормы в пространстве столбцов $x=\{x_k\}_{k=1}^{m}$ $\quad(x_k\in R)$, где норма введена форму-

лой $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2}$.

Решение

$\|x\|$≥0 как квадратный корень из неотрицательного числа.

$\|x\|$=0 ↔ $\sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2}$=0 ($\sqrt{a} = 0 \leftrightarrow a = 0$) ↔ $\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2$=0 сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, только если все слагаемые равны нулю ↔ ∀k $|x_k|^2$=0 (a^2=0 ↔ a=0) ↔ ∀k, $|x_k|$=0 ($|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$) ↔ ∀k, x_k=0 ↔ x=0.

Проверим вторую аксиому

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{m} |\lambda x_k|^2} = \sqrt{\sum_{r=1}^{m} |\lambda|^2 |x_k|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{r=1}^{m} |x_k|^2} =$$

$$= |\lambda| \sqrt{\sum_{r=1}^{m} |x_k|^2} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Проверим аксиому треугольника

$$\|x + y\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left| x_k^{\ 2} + 2x_k y_k + y_k^{\ 2} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{m} |x_k y_k| + \sum_{k=1}^{m} |y_k|^2$$

Далее используем неравенство Коши-Буняковского: $\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2} \sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}$ или

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}}.$$

Оцениваем с его помощью второе слагаемое, имеем

$$\sum_{k=1}^{m}|x_k|^2+2\sum_{k=1}^{m}|x_k y_k|+\sum_{k=1}^{m}|y_k|^2\le\sum_{k=1}^{m}|x_k|^2+$$

$$+2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}|y_k|^2}+\sum_{k=1}^{m}|y_k|^2=$$

$$=\left(\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\right)=\left(\|x\|+\|y\|\right)^2$$

Итак $\|x+y\|^2\le\left(\|x\|+\|y\|\right)^2$.

Учитывая не отрицательность нормы, и извлекая квадратный корень из неравенства, получим третью аксиому нормы $\|x+y\|\le\left(\|x\|+\|y\|\right)$.

Все аксиомы нормы выполняются, следовательно, введенная функция действительно является нормой.

2) Проверить аксиомы нормы в пространстве столбцов $x=\{x_k\}_{k=1}^{m}$ $(x_k\in R)$, где норма введена формулой $\|x\|=\max\limits_{1\le k\le m}|x_k|$

Решение

$\|x\|=\max\limits_{1\le k\le m}|x_k|\ge 0$, как наибольшее из неотрицательных чисел.

Пусть $\|x\|=\max\limits_{1\le k\le m}|x_k|=0$. Если максимальное из неотрицательных чисел равно нулю, то тогда все числа равны нулю, то есть $\leftrightarrow\forall$k, $|x_k|=0$ ($|a|=0\leftrightarrow a=0$) $\leftrightarrow$ $\forall$k, $x_k=0$ $\leftrightarrow$ $x=0$. Первая аксиома выполняется.

$\|\lambda x\|=\max\limits_{1\le k\le m}|\lambda x_k|=\max\limits_{1\le k\le m}\left(|\lambda|\cdot|x_k|\right)=$ (положительную константу можно выносить из аргумента функции максимума) $=|\lambda|\cdot\max\limits_{1\le k\le m}|x_k|=|\lambda|\cdot\|x\|$. Вторая аксиома справедлива.

Пусть $\forall k$, $|x_k+y_k|\le$ {используем неравенство треугольника для модулей действительных чисел $|a+b|\le|a|+|b|$}

$\leq |x_k| + |y_k| \leq \max\limits_{1\leq k\leq m}|x_k| + \max\limits_{1\leq k\leq m}|y_k| = \|x\| + \|y\|$.

Данное неравенство справедливо для любого k∈[1,m], следовательно, и для k, при котором левая часть максимальна, то есть

$\max\limits_{1\leq k\leq m}|x_k + y_k| \leq \|x\| + \|y\|$,

а так как

$\|x+y\| = \max\limits_{1\leq k\leq m}|x_k + y_k|$,

то получаем неравенство треугольника $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В силу выполнения всех аксиом, заданная функция является нормой.

3) Проверить, что пространство столбцов $x = \{x_k\}_{k=1}^{m}$, $(x_k \in R)$ с нормой $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{m}|x_k|$ является нормированным.

Решение

Проверим аксиомы нормированного пространства.

$\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{m}|x_k|$ ≥0, как сумма неотрицательных слагаемых, модуль числа – неотрицательное слагаемое.

$\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{m}|x_k|$ =0 {Если сумма <u>неотрицательных</u> чисел равна нулю, то все слагаемые равны нулю} ↔ ∀k, $|x_k|$ =0 ($|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$) ↔ ∀k, x_k =0 ↔ x=0. Первая аксиома выполняется.

Вторая аксиома очевидна, так как

$\|\lambda x\| = \sum\limits_{k=1}^{m}|\lambda x_k| = \sum\limits_{k=1}^{m}|\lambda||x_k| = |\lambda|\sum\limits_{k=1}^{m}|x_k| = |\lambda|\|x\|$.

Что и требовалось доказать. Здесь были использованы свойства: 1) $|ab| = |a| \cdot |b|$, 2) константу можно выносить за знак суммы.

Покажем справедливость третьей аксиомы.

$$\|x+y\| = \sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{m} \left(|x_k| + |y_k|\right) \le \sum_{k=1}^{m} |x_k| + \sum_{k=1}^{m} |y_k| =$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

Неравенство треугольника в данном случае справедливо. При доказательстве использовалось свойство модуля $|a+b| \le |a| + |b|$ и коммутативность суммы.

4) Доказать справедливость аксиом нормы в пространстве последовательностей, с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\right)$$

Решение проводится аналогично решению задачи 1).

5) Доказать, что пространство непрерывных функций $C_{[a,b]}$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ является нормированным пространством.

Решение.

$\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| \ge 0$, как максимум из неотрицательных чисел.

Положим $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0$. Если максимальное из неотрицательных чисел равно нулю, то обязательно все числа равны нулю, то есть $\leftrightarrow$ $\forall t \in [a,b]$, $|x(t)|$ =0 ($|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$) $\leftrightarrow$ $\forall t \in [a,b]$, $x(t)$ =0 $\leftrightarrow$ x=0. Первая аксиома выполняется.

Рассмотрим вторую аксиому

$\|\lambda x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |\lambda x(t)| = \max\limits_{1\le k\le m} \left(|\lambda| \cdot |x(t)|\right) =$ (положительную константу можно выносить из аргумента функции максимума) $= |\lambda| \cdot \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Вторая аксиома справедлива.

Пусть $\forall t \in [a,b]$, $|x(t)+y(t)| \le$ {используем неравенство треугольника для модулей $|a+b| \le |a|+|b|$} $\le |x(t)|+|y(t)| \le \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|y(t)| = \|x\|+\|y\|$.

Данное неравенство справедливо для любого t∈[a,b], следовательно, и для t, при котором левая часть максимальна, то есть $\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)+y(t)| \le \|x\|+\|y\|$, а так как $\|x+y\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)+y(t)|$, то получаем неравенство треугольника $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

В силу выполнения всех аксиом, заданная функция является нормой, а пространство непрерывных функций с равномерной метрикой является нормированным.

6) Доказать, что в пространстве столбцов $x = \{x_k\}_{k=1}^m$, $(x_k \in R)$ можно ввести норму по формуле $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k \cdot |x_k|^2}$, где α_k- заданные положительные константы.

Решение

$\|x\|$≥0 как квадратный корень из неотрицательного числа.

$\|x\|$=0 $\leftrightarrow$ $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k \cdot |x_k|^2}$=0 ($\sqrt{a}=0 \leftrightarrow a=0$) $\leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \cdot |x_k|^2$=0 учитываем α_k >0, сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, только если все слагаемые равны нулю $\leftrightarrow$ ∀k $\alpha_k \cdot |x_k|^2$=0 ($\alpha_k > 0$) $\leftrightarrow$ $|x_k|^2$=0 (a^2=0 $\leftrightarrow$ a=0) $\leftrightarrow$ ∀k, $|x_k|$=0 ($|a|=0 \leftrightarrow a=0$) $\leftrightarrow$ ∀k, x_k=0 $\leftrightarrow$ x=0.

Проверим вторую аксиому

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{m} \alpha_k |\lambda x_k|^2} = \sqrt{\sum_{r=1}^{m} \alpha_k |\lambda|^2 |x_k|^2} =$$

$$\sqrt{|\lambda|^2 \sum_{r=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2} == |\lambda| \sqrt{\sum_{r=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Проверим аксиому треугольника

$$\|x+y\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k + y_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left| x_k{}^2 + 2x_k y_k + y_k{}^2 \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k y_k| + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |y_k|^2$$

Далее используем неравенство Коши-Буняковского: $\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{m} a_k{}^2 \sum_{k=1}^{m} b_k{}^2$ или $\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k{}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k{}^2}$.

Оцениваем с его помощью второе слагаемое, имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{m} (\sqrt{\alpha_k} |x_k|) \cdot (\sqrt{\alpha_k} |y_k|) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |y_k|^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k |y_k|^2} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |y_k|^2 =$$

$$= \left(\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\right) = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

Итак $\|x+y\|^2 \le \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$.

Учитывая не отрицательность нормы, и извлекая квадратный корень из неравенства, получим третью аксиому нормы $\|x+y\| \le \left(\|x\| + \|y\|\right)$

Все аксиомы нормы выполняются, следовательно, введенная функция действительно является нормой.

7) Проверить аксиомы нормы в пространстве непрерывных функций, если норма элемента вычисляется по формуле

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$$

Решение

$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \ge 0$, как максимум из неотрицательных чисел.

Положим $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| = 0$. Если максимальное из неотрицательных чисел равно нулю, то обязательно все числа равны нулю, то есть $\leftrightarrow$ $\forall t\in[a,b]$, $|x'(t)|$ =0 ($|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$) $\leftrightarrow$ $\forall t\in[a,b]$, $x'(t)$ =0 $\leftrightarrow$ x=const.

Так как константа не обязательно равна нулю, то первая аксиома не выполняется и заданная функция не может являться нормой.

8) Проверить аксиомы нормы в пространстве непрерывных функций, если норма в пространстве вычисляется по формуле

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a)| + |x(b)|$$

Решение

$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a)| + |x(b)| \ge 0$, так как сумма неотрицательных слагаемых – неотрицательна.

Положим $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a)| + |x(b)| = 0$. Если сумма <u>неотрицательных</u> слагаемых равна нулю, то все слагаемые равны нулю $\leftrightarrow$

$$\begin{cases} \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| = 0 \\ |x(a)| = 0 \\ |x(b)| = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0 \\ x(a) = 0 \\ x(b) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $x(t) = const$, а из второго и третьего уравнения следует, что значение константы – нуль, то есть $x(t) = 0$. Первая аксиома выполняется.

Проверим выполнение второй аксиомы

$$\|\lambda \cdot x\| = \max_{t\in[a,b]} |(\lambda x)'(t)| + |\lambda \cdot x(a)| + |\lambda \cdot x(b)| =$$

$$= \max_{t\in[a,b]} |\lambda x'(t)| + |\lambda \cdot x(a)| + |\lambda \cdot x(b)| =$$

$$= \max_{t\in[a,b]} \left(|\lambda| \cdot |x'(t)|\right) + |\lambda| \cdot |x(a)| + |\lambda| \cdot |x(b)| =$$

$$= |\lambda| \max_{t\in[a,b]} \left(|x'(t)|\right) + |\lambda| \cdot |x(a)| + |\lambda| \cdot |x(b)| =$$

$$= |\lambda| (\max_{t\in[a,b]} \left(|x'(t)|\right) + |x(a)| + |x(b)|) = |\lambda| \cdot \|x\|$$

Вторая аксиома выполняется. Здесь использовались известные свойства: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, положительную константу можно выносить за знак операции максимум, общий сомножитель выносится за скобки.

Проверим третью аксиому.Пусть t$\in$[a,b]. Рассмотрим выражение

$$|(x+y)'(t)| + |x(a) + y(a)| + |x(b) + y(b)| =$$

$$= |x'(t) + y'(t)| + |x(a) + y(a)| + |x(b) + y(b)| \le$$

$$\{|a+b| \le |a| + |b|\} \le$$

$$\le |x'(t)| + |y'(t)| + |x(a)| + |y(a)| + |x(b)| + |y(b)| \le$$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a)| + |x(b)| + \max_{t\in[a,b]} |y'(t)| + |y(a)| + |y(b)| =$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

Получили $|(x+y)'(t)| + |x(a) + y(a)| + |x(b) + y(b)| \le \|x\| + \|y\|$

Данное неравенство справедливо для любого t, следовательно, и для t, при котором функция в левой части максимальна, то есть

$$\|x+y\| = \max_{t\in[a,b]} |(x+y)'(t)| + |x(a) + y(a)| + |x(b) + y(b)| \le \|x\| + \|y\|$$

Все аксиомы нормы выполняются, следовательно, заданная функция является нормой.

9) Доказать, что пр-во ограниченных числовых последователь-

ностей с нормой $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$ образует нормированное пространство. Доказательство аналогично доказательству в задаче 2.

10) Проверить, является ли пространство непрерывных на отрезке [a,b] функций нормированным, если норма введена соотношением $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a) - x(b)|$

Решение

Проверим аксиомы нормы.

Очевидно, что заданная функция неотрицательна.

$\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a) - x(b)| \ge 0$, как сумма неотрицательных слагаемых.

Положим $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a) - x(b)| = 0$. Если сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, то однозначно каждое из слагаемых обращается в ноль. Таким образом, справедлива система уравнений

$$\begin{cases} \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| = 0 \\ |x(a) - x(b)| = 0 \end{cases}$$

Полученная система равносильна системам

$$\begin{cases} |x'(t)| = 0 \\ x(a) - x(b) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0 \\ x(a) = x(b) \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x(t) = const \\ x(a) = x(b) \end{cases}$$

Второе уравнение всегда выполняется при выполнении первого уравнения последней системы. Константа может быть не равна нулю, следовательно, первая аксиома нормированного пространства не выполняется. Пространство непрерывных функций не является нормированным, а функция $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + |x(a) - x(b)|$ не является нормой.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О. и др. Основы функционального анализа.- ДГТУ, 2011, 53с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 315с.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ.- СПб.: Лань, 2009, http//e.lanbook.com/books/element/php/pl1_id=2342 С любой точки доступа для авторизованного пользователя
4. Золотарева Л.И. и др. Основные задачи функционального анализа.- ДГТУ, 2013, 12с.
5. Баранов И. В., Братищев А. В. и др. Задачи и упражнения по функциональному анализу.- ДГТУ, 2003, 9с.
6. Просветов Г.И. Функциональный анализ: задачи и решения. - М.: Альфа-Пресс, 2010, 93с.