ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

«Введение в теорию и практику случайных процессов»

по дисциплинам

«Теория случайных процессов» и «Теория вероятности и математическая статистика»

Автор
Поркшеян В. М.

Ростов-на-Дону, 2014

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 01.03.04 и 10.05.01 очной формы обучения.

Автор

Декан факультета «ИиВТ»,

к. ф.-м. н., доцент

Поркшеян В.М.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1 Определение случайного процесса. Основные подходы к заданию случайных процессов. Понятие реализации и сечения. Элементарные случайные процессы.

Случайным (стохастическим, вероятностным) процессом называется функция действительного переменного t, значениями которой являются соответствующие случайные величины X(t).

В теории случайных процессов t трактуется как время, принимающее значения из некоторого подмножества T множества действительных чисел ($t \in T$, $T \subset R$).

В рамках классического математического анализа под функцией y=f(t) понимается такой тип зависимости переменных величин t и y, когда конкретному числовому значению аргумента t соответствует и притом единственное числовое значение функции y. Для случайных процессов ситуация принципиально иная: задание конкретного аргумента t приводит к появлению случайной величины X(t) с известным законом распределения (если это дискретная случайная величина) или с заданной плотностью распределения (если это непрерывная случайная величина). Другими словами, исследуемая характеристика в каждый момент времени носит случайный характер с неслучайным распределением.

Значения, которые принимает обычная функция y=f(t) в каждый момент времени, полностью определяет структуру и свойства этой функции. Для случайных процессов дело обстоит иным образом: здесь совершенно не достаточно знать распределение случайной величины X(t) при каждом значении t, необходима информация об ожидаемых изменениях и их вероятностях, то есть информация о степени зависимости предстоящего значения случайного процесса от его предыстории.

Наиболее общий подход в описании случайных процессов состоит в задании всех его многомерных распределений, когда определена вероятность одновременного выполнения следующих событий:

$$\forall t_1, t_2,\dots,t_n \in T,\ n \in N: \quad X(t_i) \le x_i; \quad i=1,2,\dots,n;$$

$$F(t_1;t_2;\ldots;t_n;x_1;x_2;\ldots;x_n)=P(X(t_1)\le x_1;\ X(t_2)\le x_2;\ldots;\ X(t_n)\le x_n).$$

Такой способ описания случайных процессов универсален, но весьма громоздок. Для получения существенных результатов выделяют наиболее важные частные случаи, допускающие применение более совершенного аналитического аппарата. В частности, удобно рассматривать ***случайный процесс $X(t,\omega)$ как функцию двух переменных: $t\in T$, $\omega\in\Omega$***, которая при любом фиксированном значении $t\in T$ становится случайной величиной, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, где Ω - непустое множество элементарных событий ω; $\mathbb{A}$ - σ-алгебра подмножеств множества Ω, то есть множество событий; P - вероятностная мера, определенная на $\mathbb{A}$.

Неслучайная числовая функция $x(t)=X(t,\omega_0)$ называется реализацией (траекторией) случайного процесса $X(t,\omega)$.

Сечением случайного процесса $X(t,\omega)$ называется случайная величина, которая соответствует значению $t=t_0$.

Если аргумент t принимает все действительные значения или все значения из некоторого интервала T действительной оси, то говорят о случайном процессе **с непрерывным временем**. Если t принимает только фиксированные значения, то говорят о случайном процессе **с дискретным временем**.

Если сечение случайного процесса - дискретная случайная величина, то такой процесс называется **процессом с дискретными состояниями**. Если же любое сечение - непрерывная случайная величина, то случайный процесс называется **процессом с непрерывными состояниями**.

В общем случае задать случайный процесс аналитически невозможно. Исключение составляют так называемые **элементарные случайные процессы**, вид которых известен, а случайные величины входят как параметры:

$$X(t)=X(t,A_1,\ldots,A_n),$$

где A_i, $i=1,\ldots,n$ - произвольные случайные величины с конкретным распределением.

Пример 1. Рассматривается случайный процесс $X(t)=A\cdot e^{-t}$, где A - равномерно распределенная дискретная случайная величина, принимающая значения {-1;0;1}; $t\geq 0$. Изобразить все реализации случайного процесса X(t) и показать сечения в моменты времени $t_0=0$; $t_1=1$; $t_2=2$.

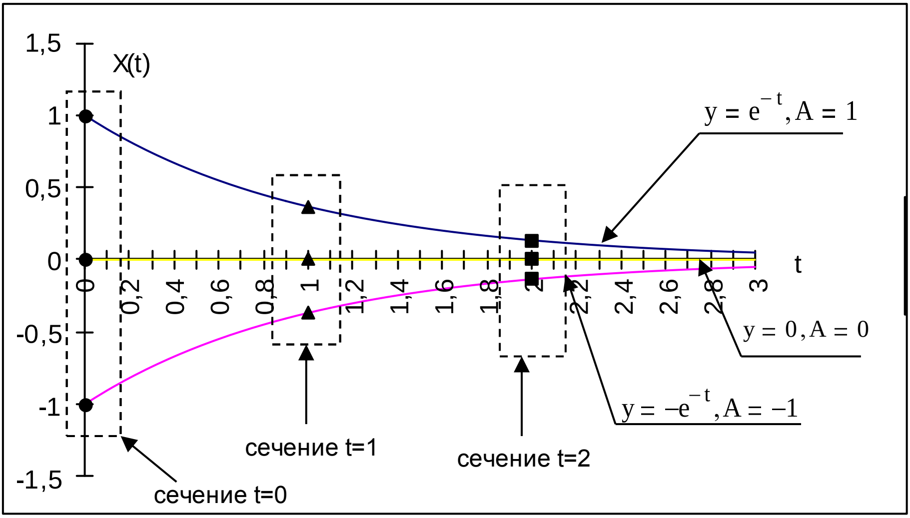
Решение.

Данный случайный процесс является процессом с непрерывным временем и дискретными состояниями. При t=0 сечением случайного процесса X(t) является дискретная случайная величина A{-1;0;1}, распределенная равномерно.

При t=0 сечением случайного процесса X(t) является дискретная случайная величина A{-1;0;1}, распределенная равномерно.

При t=1 сечением случайного процесса X(t) является дискретная случайная величина {-1/e;0;1/e}.

При t=2 сечением случайного процесса X(t) является дискретная случайная величина $\{-1/e^2;0;1/e^2\}$.

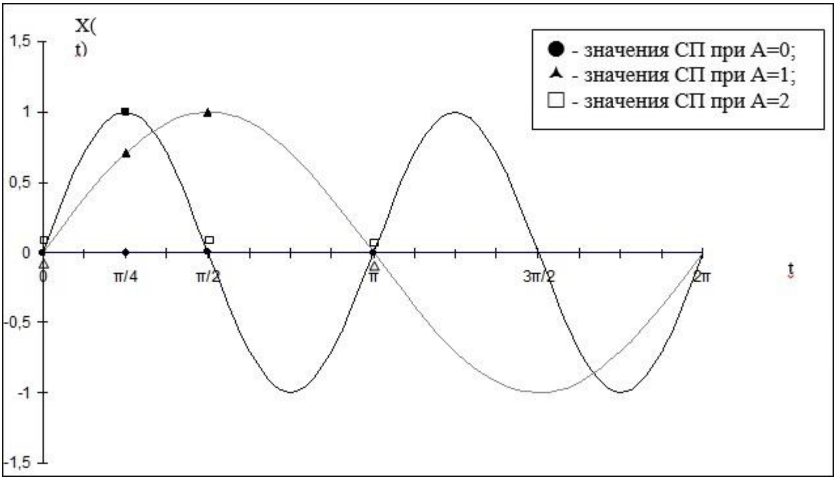


Пример 2. Рассматривается случайный процесс X(t)=sin

At, где A - дискретная случайная величина, принимающая значения {0;1;2}; аргумент t принимает дискретные значения {0; п/4; п/2; п }. Изобразить графически все реализации и сечения данного случайного процесса.

Решение.

Данный случайный процесс является процессом с дискретным временем и дискретными состояниями.



1.2. Некоторые классы и виды случайных процессов

1.1.1. Гауссовские случайные процессы

Случайный процесс X(t) называется ***гауссовским***, если все его конечномерные распределения являются нормальными, то есть

$$\forall\, t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$$

случайный вектор

$(X(t_1); X(t_2); \ldots; X(t_n))$

имеет следующую плотность распределения:

$$p(X(t_1); X(t_2);\ldots;X(t_n)) = \frac{1}{(2\cdot\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2|C|}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|C_{ij}|\cdot(x_i-a_i)\cdot(x_j-a_j)},$$

где $a_i=MX(t_i)$; $\sigma_i^2=M(X(t_i)-a_i)^2$; $c_{ij}= M((X(t_i)-a_i)\cdot(X(t_j)-a_j))$;

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix};$$ $|C_{ij}|$ -алгебраическое дополнение элемента c_{ij}.

1.1.2. Случайные процессы с независимыми приращениями

Случайный процесс $X(t)$ называется процессом ***с независимыми приращениями***, если его приращения на непересекающихся временных промежутках не зависят друг от друга:

$$\forall\, t_1, t_2,\ldots,t_n \in T: \quad t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n,$$

случайные величины

$$X(t_2)-X(t_1);\ X(t_3)-X(t_2);\ \ldots;\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

независимы.

1.1.3. Случайные процессы с некоррелированными приращениями

Случайный процесс $X(t)$ называется процессом ***с некоррелированными приращениями,*** если выполняются следующие условия:

1) $\forall\, t \in T$: $MX^2(t) < \infty$;

2) $\forall\, t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$: $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$: $M((X(t_2)-X(t_1))\cdot(X(t_4)-X(t_3)))=0$.

1.1.4. Стационарные случайные процессы (см. Глава 5)

1.1.5. Марковские случайные процессы

Ограничимся определением ***марковского*** случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь

Маркова).

Пусть система A может находиться в одном из несовместных состояний $A_1; A_2;\dots;A_n$, и при этом вероятность $P_{ij}(s)$ того, что в s-ом испытании система переходит из состояния A_i в состояние A_j, не зависит от состояния системы в испытаниях, предшествующих s-1-ому. Случайный процесс данного типа называется цепью Маркова.

1.1.6. Пуассоновские случайные процессы

Случайный процесс X(t) называется ***пуассоновским*** процессом с параметром a (a>0), если он обладает следующими свойствами:

1) $t \in T$; $T=[0, +\infty)$;
2) $X(0)=0$;
3) $\forall\, t_1, t_2, \dots, t_n$: $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n$ случайные величины $X(t_2)-X(t_1)$; $X(t_3)-X(t_2)$; …; $X(t_n)-X(t_{n-1})$ независимы;
4) случайная величина $X(t)-X(s)$, $0 \le s \le t$ имеет распределение Пуассона с параметром $a\cdot(t-s)$:

$$P(X(t)-X(s)=i)=(a(t-s))^i \cdot \frac{e^{-a(t-s)}}{i!};\quad i=0;1;2;\dots$$

1.1.7. Винеровский случайный процесс

Случайный процесс X(t) называется ***винеровским***, если он обладает свойствами:

1)-3) пуассоновского случайного процесса;
4) случайная величина $X(t)-X(s)$, $0 \le s \le t$ имеет нормальное распределение с параметрами **(0; $\sqrt{t-s}$):**

$$p(x;t-s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}.$$

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1 Понятие корреляционной теории случайных процессов

В рамках общего подхода к описанию случайных процессов характеристика сечений и любых их совокупностей осуществляется с помощью многомерных распределений. В частности, любое сечение характеризуется либо одномерной плотностью вероятности $p_1(t;\ x)$, либо одномерной функцией распределения $F(t;\ x)=P(X(t)\leq x)$. Взаимосвязь любой пары сечений характеризуется двумерной плотностью вероятности $p_2(t_1;\ t_2;\ x_1;\ x_2)$ или двумерной функцией распределения $F(t_1;\ t_2;\ x_1;\ x_2)=P(X(t_1)\leq x_1;\ X(t_2)\leq x_2)$, где $t_{1,2}$-два фиксированных момента времени; $x_{1,2}$- возможные значения случайных величин, соответствующих этим сечениям.

Аналогично вводятся плотности и функции распределения трех и более сечений, однако для большого числа случайных процессов оказывается достаточным ограничиться одномерными и двумерными распределениями.

Теория случайных процессов, основанная на изучении моментов первого и второго порядка, называется корреляционной теорией случайных процессов.

2.2 Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса

Если в каждом сечении случайного процесса существует математическое ожидание, то математическим ожиданием случайного процесса X(t) называется неслучайная функция $m_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении t равно математическому ожиданию соответствующего сечения:

$$m_X(t)=MX(t).$$

Основные свойства математического ожидания случайного процесса:

если $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то

$M\,\varphi(t)=\varphi(t);\qquad M(\varphi(t)\cdot X(t))=\varphi(t)\cdot m_X(t);$

$M(X_1(t)+X_2(t))= m_{X_1}(t) + m_{X_2}(t)$;
$M(X(t)+\varphi(t))= m_X(t)+ \varphi(t)$.

Если в каждом сечении случайного процесса существует дисперсия, то дисперсией случайного процесса X(t) называется неслучайная функция $D_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии соответствующего сечения:

$D_X(t)= DX(t)= M(X(t)-m_X(t))^2$.

Основные свойства дисперсии случайного процесса:

если $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то

$$D(\varphi(t))=0;$$

$D(X(t)+\varphi(t))=D_X(t)$; $D_X(t) = m_{X^2}(t) - m_X^2(t)$.

Среднеквадратическим отклонением случайного процесса X(t) называется арифметический квадратный корень из его дисперсии:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}.$$

2.3 Корреляционная функция случайного процесса и е свойства. Нормированная корреляционная функция

Корреляционной функцией случайного процесса X(t) называется неслучайная функция $K_X(t_1; t_2)$ двух независимых аргументов, значение которой равно корреляционному моменту сечений, соответствующих моментам времени t_1 и t_2:

$K_X(t_1; t_2)=M((X(t_1)-m_X(t_1))\cdot(X(t_2)-m_X(t_2)))$.

Основные свойства корреляционной функции:

1) $$K_X(t_1;t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - m_X(t_1))\cdot(x_2 - m_X(t_2))\cdot p(t_1;t_2;x_1;x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\cdot p(t_1;t_2;x_1;x_2)dx_1dx_2 - m_X(t_1)\cdot m_X(t_2);$$

2) $K_X(t;\, t)=D_X(t)$;
3) $K_X(t_1;\, t_2)= K_X(t_2;\, t_1)$;
4) если $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то

$$K_{\varphi(t)}(t_1;\, t_2)=0; \qquad K_{\varphi(t)+X(t)}(t_1;\, t_2)= K_{X(t)}(t_1;\, t_2);$$
$$K_{\varphi(t)\cdot X(t)}(t_1;\, t_2)= \varphi(t_1)\cdot \varphi(t_2)\cdot K_{X(t)}(t_1;\, t_2);$$

5) $\left|K_X(t_1;t_2)\right| \le \sqrt{D_X(t_1)\cdot D_X(t_2)}$;
6) $\forall a(t); \forall B \subset T: \quad \int\limits_B\int\limits_B a(t_1)\cdot a(t_2)\cdot K_X(t_1;\, t_2)dt_1dt_2 \ge 0.$

Функция вида

$$r_X(t_1;t_2)=\frac{K_X(t_1;t_2)}{\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_X(t_2)}=\frac{K_X(t_1;t_2)}{\sqrt{K_X(t_1;t_1)\cdot K_X(t_2;t_2)}}$$

называется нормированной корреляционной функцией.

2.4 Взаимная корреляционная функция и нормированная взаимная корреляционная функция двух случайных процессов

Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $R_{XY}(t_1;\, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой равно корреляционному моменту сечений этих случайных процессов в соответствующие моменты времени:

$$R_{XY}(t_1;\, t_2)= M((X(t_1)-m_X(t_1))\cdot(Y(t_2)-m_Y(t_2))).$$

Свойства взаимной корреляционной функции:
если $\varphi(t)$ и $\Psi(t)$ - неслучайные функции, то

$$R_{X(t)+\varphi(t)\ Y(t)+\Psi(t)}(t_1;\, t_2)= R_{XY}(t_1;\, t_2);$$
$$R_{X(t)\cdot\varphi(t)\ Y(t)\cdot\Psi(t)}(t_1;\, t_2)= \varphi(t_1)\cdot \Psi(t_2)\cdot R_{XY}(t_1;\, t_2);$$
$$R_{XY}(t_1;t_2)=R_{YX}(t_2;t_1);$$
$$\left|R_{XY}(t_1;\, t_2)\right| \le \sqrt{D_X(t_1)\cdot D_Y(t_2)}.$$

Функция вида

$$r_{XY}(t_1;t_2)=\frac{R_{XY}(t_1;t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_Y(t_2)}}$$

называется нормированной взаимной корреляционной функцией случайных процессов X(t) и Y(t).

2.5 Вероятностные характеристики суммы двух случайных величин

Теорема 1. Математическое ожидание суммы двух случайных процессов X(t) и Y(t) равно сумме их математических ожиданий:

$$m_{X+Y}(t)=m_X(t)+m_Y(t).$$

Теорема 2. Корреляционная функция суммы двух случайных процессов X(t) и Y(t) имеет вид:

$$K_{X+Y}(t_1;t_2)=K_X(t_1;t_2)+K_Y(t_1;t_2)+R_{XY}(t_1;t_2)+R_{YX}(t_2;t_1).$$

Следствие 1. Если случайные процессы X(t) и Y(t) некоррелированны, то

$$K_{X+Y}(t_1;t_2)=K_X(t_1;t_2)+K_Y(t_1;t_2);\quad D_{X+Y}(t)=D_X(t)+D_Y(t).$$

Следствие 2. Если случайный процесс X(t) и случайная величина Y некоррелированны, то

$$K_{X+Y}(t_1;t_2)=K_X(t_1;t_2)+D_Y.$$

<u>Пример 3.</u> Рассматривается случайный процесс $Y(t)=X\cdot e^{-t}$ $(t\geq 0)$, где X - нормально распределенная с параметрами m и σ случайная величина. Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную и нормированную корреляционные функции, одномерную плотность распределения.

<u>Решение.</u>

Математическое ожидание: $m_Y(t)=M(Xe^{-t})=e^{-t}m_X=me^{-t}$.

Дисперсия: $D_Y(t)=D(Xe^{-t})=e^{-2t}\,DX=\sigma^2e^{-2t}$.

Стандартное отклонение:

$$\sigma_Y(t)=\sqrt{D_Y(t)}=\sigma\cdot e^{-t}.$$

Корреляционная функция:

$$K_Y(t_1;\, t_2)=M((Xe^{-t_1}-me^{-t_1})\cdot(Xe^{-t_2}-me^{-t_2}))=$$
$$=e^{-(t_1+t_2)}M(X-m)^2=\sigma^2 e^{-(t_1+t_2)}.$$

Нормированная корреляционная функция:

$$r_Y(t_1;\,t_2)=\frac{K_Y(t_1;\,t_2)}{\sigma_Y(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2)}=\frac{\sigma^2\cdot e^{-(t_1+t_2)}}{\sigma\cdot e^{-t_1}\cdot\sigma\cdot e^{-t_2}}=1.$$

По условию задачи случайная величина X распределена нормально; при фиксированном значении t сечение Y(t) линейно зависит от случайной величины X, и по свойству нормального распределения сечение Y(t) также распределено нормально с одномерной плотностью распределения:

$$p(t;\,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_Y(t)}\cdot e^{-\frac{(y-m_Y(t))^2}{2\sigma_Y^2(t)}}.$$

Пример 4. Найти основные характеристики случайного процесса $Y(t)=W\cdot e^{-Ut}$ (t>0), где W и U - независимые случайные величины; U распределена равномерно на отрезке [0; a]; W имеет математическое ожидание m_W и стандартное отклонение σ_W.

Решение.

Математическое ожидание:

$$m_Y(t)=M(We^{-Ut})=MW\cdot M(e^{-Ut})=m_w\cdot M(e^{-Ut});$$

$$M(e^{-Ut})=\int_0^a\frac{1}{a}e^{-ut}du=-\left.\frac{e^{-ut}}{at}\right|_0^a=\frac{1-e^{-at}}{at};$$

$$m_Y(t)=\frac{m_W(1-e^{-at})}{at},\quad (t>0).$$

Корреляционная функция:

$$K_Y(t_1,t_2)=M(Y(t_1)\cdot Y(t_2))-m_Y(t_1)\cdot m_Y(t_2)=M(We^{-Ut_1}\cdot We^{-Ut_2})-$$
$$-m_Y(t_1)\cdot m_Y(t_2)=M(W^2)\cdot M(e^{-U(t_1+t_2)})-m_W^2\cdot\frac{(1-e^{-at_1})\cdot(1-e^{-at_2})}{a^2t_1t_2};$$

так как

$$\sigma_W^2 = M(W^2) - m_W^2, \quad M(W^2) = \sigma_W^2 + m_W^2,$$

то

$$K_Y(t_1, t_2) = (\sigma_W^2 + m_W^2) \cdot \frac{1 - e^{-a(t_1 + t_2)}}{a(t_1 + t_2)} - m_W^2 \frac{(1 - e^{-at_1}) \cdot (1 - e^{-at_2})}{a^2 t_1 t_2}.$$

Дисперсия:

$$D_Y(t) = K_Y(t, t) = (\sigma_W^2 + m_W^2) \cdot \frac{1 - e^{-2at}}{2at} - m_W^2 \frac{(1 - e^{-at})^2}{a^2 t^2}.$$

Пример 5. Найти одномерный закон распределения случайного процесса: Y(t)=Vcos(Ψt-U), где V и U независимые случайные величины; V нормально распределена с параметрами (m_V; σ_V); Ψ-const; U- равномерно распределена на отрезке [0; 2п].

Решение.

Математическое ожидание случайного процесса Y(t):

$$M_Y(t) = M(V \cdot \cos(\psi t - U)) = m_v \cdot M(\cos(\psi t - U)) =$$

$$= m_v \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\psi t - u) du = \frac{m_v}{2\pi} (-\sin(\psi t - u)) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Дисперсия:

$$D_Y(t) = M(Y(t))^2 = M(V^2 \cos^2(\psi t - U)) = M(V^2) \cdot M(\cos^2(\psi t - U)) =$$

$$= (\sigma_V^2 + m_V^2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\psi t - 2u)}{2} du = \frac{\sigma_V^2 + m_V^2}{4\pi} \cdot (u - \frac{\sin(2\psi t - 2u)}{2}) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\sigma_V^2 + m_V^2}{2}.$$

Стандартное отклонение: $\sigma_Y(t) = \sqrt{D_Y(t)} = \sqrt{\dfrac{\sigma_V^2 + m_V^2}{2}}.$

Переходим к выводу одномерного закона распределения. Пусть t-фиксированный момент времени, и случайная величина U принимает фиксированное значение U=u - const; $u \in$ [0; 2п], тогда получаем следующие условные характеристики случайного процесса Y(t):

$$M(Y(t)|\ U=u)=m_V\cdot\cos(\Psi t-u);$$

$$D(Y(t)|\ U=u)=\sigma_V^2\ \cdot\cos^2(\Psi t-u);$$

$$\sigma(Y(t)|\ U=u)=\sigma_V\ \cdot|\cos(\Psi t-u)|.$$

Так как случайная величина V распределена нормально и при заданном значении случайной величины U=u все сечения линейно зависимы, то условное распределение в каждом сечении является нормальным и имеет следующую плотность:

$$p_Y(t;y\,|\,U=u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_V\,|\cos(\psi\,t-u)\,|}\cdot e^{-\frac{(y-m_V\cdot\cos(\psi\,t-u))^2}{2\sigma_V^2\cos(\psi\,t-u)}}.$$

Безусловная одномерная плотность случайного процесса Y(t):

$$p_Y(t;y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p_Y(t;y\,|\,U=u)du.$$

Очевидно, что это распределение уже не является нормальным.

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ СЛУЧАЙНОГО АНАЛИЗА

3.1 Сходимость и непрерывность

3.1.1 Классические виды сходимости

В стандартном курсе математического анализа вводятся следующие типы сходимости.

а) Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ***сходящейся к числу*** x при $n\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ (сколь угодно малого) существует номер N_ε, начиная с которого все последующие элементы последовательности принадлежат ε-окрестности точки x:

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n>N_\varepsilon: \quad |x_n - x|<\varepsilon.$$

б) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется ***поточечно сходящейся*** на множестве X к функции f (x), если она сходится (как числовая последовательность) при каждом фиксированном $x\in X$ к значению f (x).

Частным случаем поточечной сходимости является ***равномерная*** сходимость.

в) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется ***сходящейся почти всюду*** на множестве X к функции f (x), если она сходится поточечно к f (x) на множестве X за исключением множества точек X_0 меры нуль.

В теории вероятности такое понимание сходимости (кроме в)) мало содержательно. Тем не менее, приведенные здесь определения позволяют в полной мере ощутить разницу классических подходов и их вероятностных аналогов.

3.1.2 Сходимость по вероятности

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится по ***вероятности*** к случайной величине X при $n\to\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0: \quad \lim_{n\to\infty}P(|X_n - X|<\varepsilon)=1.$$

Обозначение: $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{вер.}}{\longrightarrow}} X.$

Обратите внимание, что при $n\to\infty$ имеет место классическая сходимость вероятности $P(|X_n - X| < \varepsilon)$ к 1, то есть с возрастанием номера n можно гарантировать сколь угодно близкие к 1 значения вероятности. Но при этом нельзя гарантировать близости значений случайных величин X_n к значениям случайной величины X ни при каких сколь угодно больших значениях n, поскольку мы имеем дело со случайными величинами.

Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$ называется ***стохастически непрерывным в точке*** $t_0 \in T$, если $X(t) \xrightarrow[t \to t_0]{\text{вер.}} X(t_0)$.

3.1.3 Сходимость в среднем в степени p ≥ 1

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ ***сходится в среднем в степени*** $p \geq 1$ к случайной величине X, если

$$\lim_{n \to \infty} M((X_n - X)^p = 0.$$

Обозначение: $X_n \xrightarrow{p} X$.

В частности, $\{X_n\}$ сходится ***в среднеквадратичном*** к случайной величине X, если

$$\lim_{n \to \infty} M((X_n - X)^2 = 0.$$

Обозначение:

$$X = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}}\, X_n \quad \text{или} \qquad X_n \xrightarrow{2} X.$$

Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$ называется ***непрерывным в среднеквадратичном*** в точке $t_0 \in T$, если

$$X(t_0) = \underset{t \to t_0}{\text{l.i.m.}}\, X(t).$$

3.1.4 Сходимость почти наверное (сходимость с вероятностью 1)

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ ***сходится почти наверное*** к случайной величине X, если

$$P\{\omega: \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0 \ \} = 1,$$

где $\omega \in \Omega$ - элементарное событие вероятностного пространства $(\Omega, \mathbb{A}, P)$.

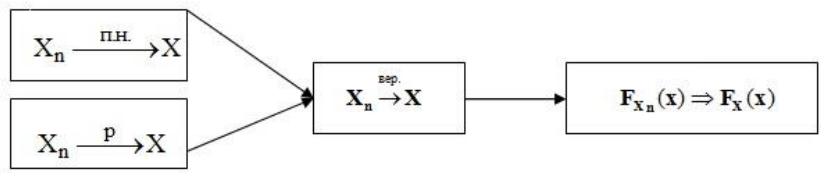
Обозначение: $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$.

3.1.5 Слабая сходимость

Говорят, что последовательность $\{F_{X_n}(x)\}$ функций распределения случайных величин X_n ***слабо сходится*** к функции распределения $F_X(x)$ случайной величины X, если имеет место поточечная сходимость в каждой точке непрерывности функции $F_X(x)$.

Обозначение: $F_{X_n}(x) \Rightarrow F_X(x)$.

3.1.6 Связь различных типов сходимости



Если последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится к случайной величине X почти наверное или в среднем в степени $p \geq 1$, то она автоматически сходится к X и по вероятности. В свою очередь, сходимость по вероятности гарантирует слабую сходимость последовательности функций распределения.

3.2 производная случайного процесса и её свойства

В соответствии с классическим определением, производная случайного процесса $X(t)$ должна быть определена как предел разностного отношения $\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$ при $h \to 0$ в смысле соответствующей сходимости. Можно показать, что сходимость по вероятности обладает рядом недостатков, которые делают этот подход практически бесполезным.

Случайный процесс X(t) называется дифференцируемым, если существует случайный процесс $X'(t)$ такой, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left(\frac{X(\Delta t+t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right)^2=0.$$

При этом случайный процесс $X'(t)$ называется производной случайного процесса X(t) и обозначается следующим образом:

$$X'(t)=\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{X(\Delta t+t)-X(t)}{\Delta t}.$$

Теорема 1. Математическое ожидание производной случайного процесса равно производной от математического ожидания самого случайного процесса:

$$m_{X'}(t)=m'_X(t).$$

Следствие. $$m_{X^{(n)}}(t)=m_X^{(n)}(t).$$

Теорема 2. Корреляционная функция производной случайного процесса X(t) равна второй смешанной производной от его корреляционной функции:

$$K_{X'}(t_1;t_2)=\frac{\partial^2 K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}.$$

Теорема 3. Взаимная корреляционная функция случайного процесса X(t) и его производной $X'(t)$ равна частной производной его корреляционной функции по переменной, соответствующей производной:

$$R_{XX'}(t_1;t_2)=\frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_2};\qquad R_{X'X}(t_1;t_2)=\frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1}.$$

3.3 Интеграл от случайного процесса и его свойства

Интегралом от случайного процесса X(t) на отрезке [0, t] называется предел в среднеквадратичном при $\lambda \to 0$ ($n \to 0$)

$$Y(t) = \underset{\lambda \to 0}{l.i.m.}\ \sigma = \int_0^t X(s)ds$$

интегральных сумм $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} X(s_i)(t_{i+1} - t_i),$

где $s_i \in (t_i;\, t_{i+1})$; $\lambda = \max(t_{i+1} - t_i)$, $i=0,\dots,n-1$.

Теорема 4. Математическое ожидание интеграла от случайного процесса равно интегралу от его математического ожидания:

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(s)ds, \qquad Y(t) = \int_0^t X(s)ds.$$

Теорема 5. Корреляционная функция интеграла от случайного процесса X(t) равна двойному интегралу от его корреляционной функции:

$$K_Y(t_1; t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(s_1; s_2)ds_1 ds_2.$$

Теорема 6. Взаимная корреляционная функция случайного процесса X(t) и его интеграла равна интегралу от корреляционной функции случайного процесса X(t):

$$R_{XY}(t_1; t_2) = \int_0^{t_2} K_X(t_1; s)ds; \quad R_{YX}(t_1; t_2) = \int_0^{t_1} K_X(s; t_2)ds.$$

Пример 6. Случайный процесс X(t) имеет вид: $X(t)=Ae^{-t}$ ($t \geq 0$), где A - произвольно распределенная непрерывная случайная величина, имеющая конечное математическое ожидание m и конечную дисперсию σ^2. Найти характеристики случайных процессов X(t), $X'(t)$ и $Y(t) = \int_o^t X(s)ds.$

Решение.

1) Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, корреляционная функция и нормированная корреляционная функция случайного процесса X(t) имеют вид (см. Пример

3):

$$m_X(t) = me^{-t}; \quad D_X(t) = \sigma^2 e^{-2t}; \quad \sigma_X(t) = \sigma e^{-t};$$

$$K_X(t_1;t_2) = \sigma^2 e^{-(t_1+t_2)}; \quad r_X(t_1;t_2) = 1.$$

2) Переходим к расчету характеристик случайного процесса $X'(t)$. В соответствии с Теоремами 1-3 получаем:

$$m_{X'}(t) = m'_X(t) = (me^{-t})' = -me^{-t};$$

$$K_{X'}(t_1;t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1\, \partial t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2}(\sigma^2 e^{-(t_1+t_2)}) = \sigma^2 e^{-(t_1+t_2)};$$

$$D_{X'}(t) = K_{X'}(t;t) = \sigma^2 e^{-2t};$$

$$\sigma_{X'}(t) = \sqrt{D_{X'}(t)} = \sigma e^{-t}; \qquad r_{X'}(t_1;t_2) = \frac{K_{X'}(t_1;t_2)}{\sigma_{X'}(t_1)\cdot\sigma_{X'}(t_2)} = 1.$$

За исключением математического ожидания (которое поменяло знак), все остальные характеристики сохранились полностью. Взаимные корреляционные функции случайного процесса X(t) и его производной $X'(t)$ имеют вид:

$$R_{XX'}(t_1;t_2) = \frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_2} = -\sigma^2 \cdot e^{-(t_1+t_2)};$$

$$R_{X'X}(t_1;t_2) = \frac{\partial K_X(t_1;t_2)}{\partial t_1} = -\sigma^2 \cdot e^{-(t_1+t_2)}.$$

3) В соответствии с Теоремами 4-6 основные характеристики интеграла от случайного процесса X(t) имеют следующие значения:

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(s)\,ds = \int_0^t m\cdot e^{-s}\,ds = m\cdot(1-e^{-t});$$

$$K_Y(t_1;t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(s_1;s_2)ds_1 ds_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \sigma^2\cdot e^{-(s_1+s_2)}ds_1 ds_2 =$$
$$= \sigma^2(1-e^{-t_1})\cdot(1-e^{-t_2});$$

$$D_Y(t) = K_Y(t;t) = \sigma^2\,(1-e^{-t})^2;$$

$$\sigma_Y(t)=\sqrt{D_Y(t)}=\sigma(1-e^{-t}); \qquad r_Y(t_1;t_2)=\frac{K_Y(t_1;t_2)}{\sigma_Y(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2)}=1.$$

Взаимные корреляционные функции случайного процесса X(t) и его интеграла Y(t):

$$R_{XY}(t_1;t_2)=\int_0^{t_2}K_X(t_1;s)\,ds=\int_0^{t_2}\sigma^2\cdot e^{-(t_1+s)}\,ds=\sigma^2 e^{-t_1}\cdot(1-e^{-t_2});$$

$$R_{YX}(t_1;t_2)=\int_0^{t_1}K_X(s;t_2)\,ds=\int_0^{t_1}\sigma^2\cdot e^{-(s+t_2)}\,ds=\sigma^2 e^{-t_2}\cdot(1-e^{-t_1}).$$

ГЛАВА 4. КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1 Понятие канонического разложения случайного процесса

Случайная величина V называется ***центрированной***, если ее математическое ожидание равно 0. Элементарным центрированным случайным процессом называется произведение центрированной случайной величины V на неслучайную функцию φ(t): X(t)=V φ(t). Элементарный центрированный случайный процесс имеет следующие характеристики:

$$MX(t) = M(V\varphi(t)) = \varphi(t)\ MV = 0;$$

$$DX(t) = D(V\varphi(t)) = \varphi^2(t)\ D_V; \qquad \sigma_X(t) = |\varphi(t)| \cdot \sigma_v;$$

$$K_X(t_1;t_2) = M((X(t_1) - MX(t_1)) \cdot (X(t_2) - MX(t_2))) =$$
$$= M(V\varphi(t_1) \cdot V\varphi(t_2)) = \varphi(t_1)\ \varphi(t_2) D_V;$$

$$r_X(t_1;t_2) = \frac{K_X(t_1;t_2)}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)} = \pm 1.$$

Выражение вида $X(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot \varphi_k(t)$***,***

где $\varphi_k(t)$***, k=1;2;...-неслучайные функции;*** V_k***, k=1;2;...-некоррелированные центрированные случайные величины, называется каноническим разложением случайного процесса X(t), при этом случайные величины*** V_k ***называются коэффициентами канонического разложения; а неслучайные функции*** $\varphi_k(t)$ ***- координатными функциями канонического разложения.***

Рассмотрим характеристики случайного процесса

$$X(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t):$$

$$MX(t) = M\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\, MV_k = M\varphi_0(t) = \varphi_0(t); \qquad \varphi_0(t) = m_X(t);$$

$$K_X(t_1;t_2) = M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)V_k \cdot \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(t_2)V_m\right) = M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}V_kV_m\ \varphi_k(t_1)\varphi_m(t_2)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)\ \varphi_m(t_2)\cdot M(V_kV_m).$$

Так как по условию $M(V_kV_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m; \\ D_{V_k}, & k = m, \end{cases}$ то

$$K_X(t_1;t_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)\,\varphi_k(t_2)\cdot D_{V_k}; \qquad D_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(t)\cdot D_{V_k};$$

$$r_X(t_1;t_2) = \frac{K_X(t_1;t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_X(t_2)}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)\,\varphi_k(t_2)\cdot D_{V_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(t_1)\,D_{V_k}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(t_2)\,D_{V_k}}}.$$

Очевидно, что один и тот же случайный процесс имеет различные виды канонического разложения в зависимости от выбора координатных функций. Более того, даже при состоявшемся выборе координатных функций существует произвол в распределении случайных величин $V_к$. На практике по итогам экспериментов получают оценки для математического ожидания и корреляционной функции: $\hat{m}_X(t)$ и $\hat{K}_X(t_1;t_2)$. После разложения $\hat{K}_X(t_1;t_2)$ в двойной ряд Фурье по координатным функциям $\varphi_к(t)$:

$$\hat{K}_X(t_1;t_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)\,\varphi_k(t_2)\cdot D_{V_k}$$

получают значения дисперсий D_{V_k} случайных величин $V_к$.

Пример 7. Случайный процесс X(t) имеет следующее каноническое разложение: $X(t) = m_0(t) + \sum_{k=1}^{n}V_k\cos kt$, где $V_к$- нормально распределенные некоррелированные случайные величины с параметрами (0; $\sigma_к$); $m_0(t)$ - неслучайная функция.

Найти основные характеристики случайного процесса X(t), включая плотности распределения.

Решение.

Из полученных ранее общих формул имеем:

$$MX(t)=m_X(t)=m_0(t);$$

$$DX(t)=\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kt\cdot D_{V_k};\quad \sigma_X(t)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kt\cdot D_{V_k}};\quad D_{V_k}=\sigma_k^2;$$

$$K_X(t_1;t_2)=\sum_{k=1}^{n}\cos kt_1\cos kt_2\, D_{V_k};\ r_X(t_1;t_2)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt_1\cos kt_2\, D_{V_k}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2 kt_1\, D_{V_k}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2 kt_2\, D_{V_k}}}.$$

В каждом сечении случайный процесс X(t) имеет нормальное распределение, так как является линейной комбинацией некоррелированных нормально распределенных случайных величин V_k, при этом одномерная плотность распределения имеет вид:

$$p_1(t;x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X(t)}\cdot e^{-\frac{(x-m_0(t))^2}{2\sigma_X^2(t)}}.$$

Двумерный закон распределения также является нормальным и имеет следующую двумерную плотность распределения:

$$p_2(t_1;t_2;x_1;x_2)=(4\pi^2\cdot D_X(t_1)\cdot D_X(t_2)\cdot(1-r_X^2(t_1;t_2)))^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{A}{2(1-r_X^2(t_1;t_2))}};$$

$$A=\frac{(x_1-m_0(t_1))^2}{D_X(t_1)}-\frac{2r_X(t_1;t_2)(x_1-m_0(t_1))(x_2-m_0(t_2))}{\sqrt{D_X(t_1)\cdot D_X(t_2)}}+\frac{(x_2-m_0(t_2))^2}{D_X(t_2)}.$$

Пример 8. Известны математическое ожидание $m_X(t)$ и корреляционная функция $K_X(t_1;t_2)=t_1t_2$ случайного процесса X(t), где $0\le t\le T$. Найти каноническое разложение X(t) по координатным функциям $\phi_k=\sin\frac{\pi kt}{T}$ при условии, что коэффициенты разложения V_k - нормально распределенные случайные величины.

Решение.

Корреляционная функция имеет следующее разложение

$$K_X(t_1;t_2)=t_1t_2=\sum_{k=1}^{\infty} D_{V_k}\sin\frac{\pi k t_1}{T}\sin\frac{\pi k t_2}{T},$$

следовательно,

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} K_X(t_1;t_2)\cdot\sin\frac{\pi k t_1}{T}\cdot\sin\frac{\pi k t_2}{T}\,dt_1dt_2=$$

$$=D_{V_k}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\sin^2\frac{\pi k t_1}{T}\cdot\sin^2\frac{\pi k t_2}{T}\,dt_1dt_2;$$

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos\dfrac{2\pi k t_1}{T}}{2}\cdot\frac{1-\cos\dfrac{2\pi k t_2}{T}}{2}\cdot dt_1dt_2=T^2;$$

$$D_{V_k}=\frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} t_1t_2\cdot\sin\frac{\pi k t_1}{T}\cdot\sin\frac{\pi k t_2}{T}\cdot dt_1dt_2;$$

Так как

$$\int_{-T}^{T} x\sin\frac{\pi k x}{T}dx=-\frac{T}{\pi k}\left(x\cos\frac{\pi k x}{T}-\frac{T}{\pi k}\sin\frac{\pi k x}{T}\right)\Bigg|_{-T}^{T}=\frac{2T^2\cdot(-1)^{k+1}}{\pi k},$$

то

$$D_{V_k}=\frac{1}{T^2}\left(\frac{2T^2(-1)^{k+1}}{\pi k}\right)^2=\frac{4T^2}{\pi^2k^2};\qquad \sigma_{V_k}=\frac{2T}{\pi k}.$$

Плотность распределения случайных величин V_k:

$$p_{V_k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{V_k}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{V_k}^2}}$$

Каноническое разложение случайного процесса $X(t)$ имеет вид:

$$X(t)=m_X(t)+\sum_{k=1}^{\infty}V_k\sin\frac{\pi k t}{T}.$$

4.2 Понятие обобщенной функции. Дельта-функция Дирака. Интегральное каноническое представление случайных процессов.

Обобщенной функцией называется предел последовательности однопараметрического семейства непрерывных функций.

Дельта-функция Дирака $\delta(t)$ **-** это обобщенная функция, являющаяся результатом предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в семействе функций $\delta_\varepsilon(t)$

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \varepsilon; \\ (2\varepsilon)^{-1}, & |t| < \varepsilon. \end{cases}$$

Среди свойств δ-функции отметим следующее:

1. $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\,d\omega = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1;$

3. Если f(t)- непрерывная функция, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)dt = \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t)\,\delta(t)dt = f(0);$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0).$$

Случайный процесс X(t), корреляционная функция которого имеет вид

$$K_X(t_1;t_2) = W(t_1)\cdot\delta(t_1 - t_2),$$

называется нестационарным «белым шумом». Если W(t₁)=W - const, то X(t)-стационарный «белый шум».

Как следует из определения, никакие два, даже сколь угодные близкие, сечения «белого шума» не коррелированны. Выражение W(t) называется ***интенсивностью «белого шума».***

Интегральным каноническим представлением случайного процесса X(t) называется выражение вида

$$X(t)=m_X(t)+\int_{\Lambda} Z(\lambda)\cdot\varphi(\lambda;t)\,d\lambda,$$

где $Z(\lambda)$ ***- случайная центрированная функция;*** $\varphi(\lambda;t)$***- неслучайная функция непрерывных аргументов*** λ ***и*** t***.***

Корреляционная функция такого случайного процесса имеет вид:

$$K_X(t_1;t_2)=M\Big(\int_{\Lambda} Z(\lambda)\cdot\varphi(\lambda;t_1)\,d\lambda\cdot\int_{\Lambda} Z(\lambda)\cdot\varphi(\lambda;t_2)\,d\lambda\Big)=$$

$$=\int_{\Lambda}\int_{\Lambda}\varphi(\lambda_1;t_1)\cdot\varphi(\lambda_2;t_2)\cdot M(Z(\lambda_1)\cdot Z(\lambda_2))\,d\lambda_1 d\lambda_2\,.$$

Можно показать, что существует неслучайная функция G(λ) такая, что

$$M(Z(\lambda_1)\cdot Z(\lambda_2))=G(\lambda_1)\cdot\delta(\lambda_1-\lambda_2),$$

где $G(\lambda_1)$ - плотность дисперсии; δ(x) - дельта-функция Дирака. Получаем

$$K_X(t_1;t_2)=\int_{\Lambda}\varphi(\lambda_1;t_1)\cdot\left(\int_{\Lambda}\varphi(\lambda_2;t_2)\cdot G(\lambda_1)\cdot\delta(\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_2\right)d\lambda_1=$$

$$=\int_{\Lambda}\varphi(\lambda_1;t_1)\varphi(\lambda_1;t_2)\,G(\lambda_1)\,d\lambda_1.$$

Следовательно, дисперсия случайного процесса X(t):

$$D_X(t)=K_X(t;t)=\int_{\Lambda}\varphi^2(\lambda;t)\cdot G(\lambda)\,d\lambda\,.$$

4.3 Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов

Рассматривается следующая задача: на вход системы (устройства, преобразователя) S подается «входной сигнал», имеющий характер случайного процесса X(t). Система преобразовывает его в «выходной сигнал» Y(t):

$$X(t) \to S \to Y(t).$$

Формально преобразование случайного процесса X(t) в Y(t) может быть описано с помощью так называемого оператора системы A_t:

$$Y(t)=A_t(X(t)).$$

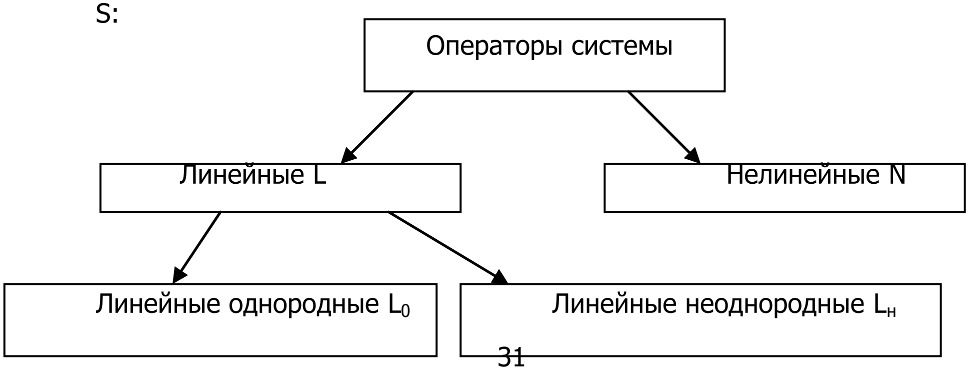
Индекс t показывает, что данный оператор осуществляет преобразование по времени. Возможны следующие постановки задачи о преобразовании случайного процесса.

Известны законы распределения или общие характеристики случайного процесса X(t) на входе в систему S, задан оператор A_t системы S, требуется определить закон распределения или общие характеристики случайного процесса Y(t) на выходе системы S.

Известны законы распределения (общие характеристики) случайного процесса X(t) и требования к случайному процессу Y(t); надо определить вид оператора A_t системы S, наилучшим образом удовлетворяющего заданным требованиям к Y(t).

Известны законы распределения (общие характеристики) случайного процесса Y(t) и задан оператор A_t системы S; требуется определить законы распределения или общие характеристики случайного процесса X(t).

Принята следующая классификация операторов A_t системы S:



$$L_0\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L_0\left(x_i(t)\right)$$

$$L_н\left(x(t)\right) = L_0\left(x(t)\right) + \varphi(t)$$

Рассмотрим воздействие линейной неоднородной системы

$L_н(\ldots)=L_0(\ldots)+\varphi(t)$

на случайный процесс $X(t)$, имеющий следующее каноническое разложение:

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot \varphi_k(t).$$

Получаем:

$$Y(t) = L_н\left(X(t)\right) = L_0(m_X(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} L_0(V_k(\varphi_k(t)) + \varphi(t) =$$

$$= L_0(m_X(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot L_0(\varphi_k(t)) + \varphi(t);$$

введем обозначения

$$L_0(m_X(t)) = \psi_0(t); \; L_0(\varphi_k(t) = \psi_k(t); \; k \in N,$$

тогда каноническое разложение $Y(t)$ приобретает вид:

$$Y(t) = \varphi(t) + \psi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \; \psi_k(t) \cdot$$

Математическое ожидание случайного процесса$Y(t)$:

$$MY(t) = M(\varphi(t) + \psi_0(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \, MV_k = \varphi(t) + \psi_0(t) = m_Y(t);$$

корреляционная функция случайного процесса $Y(t)$:

$$K_Y(t_1;t_2) = M((Y(t_1) - m_Y(t_1)) \cdot (Y(t_2) - m_Y(t_2))) =$$

$$= M(\sum_{k=1}^{\infty} V_k L_0(\varphi_k(t_1) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} V_m L_0(\varphi_m(t_2))) = \sum_{k=1}^{\infty} L_0(\varphi_k(t_1)) \cdot L_0(\varphi_k(t_2)) \cdot D_{V_k} =$$

$$= L_{0_{t_1}}(L_{0_{t_2}}(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t_1) \cdot \varphi_k(t_2) D_{V_k}));$$

следовательно,

$$K_Y(t_1;t_2) = L_{0_{t_1}}(L_{0_{t_2}}(K_X(t_1;t_2))) = L_{0_{t_2}}(L_{0_{t_1}}(K_X(t_1;t_2))) \cdot$$

С другой стороны

$$K_X(t_1;t_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t_1)\cdot\psi_k(t_2)D_{V_k}.$$

Дисперсия случайного процесса Y(t):

$$D_Y(t)=K_Y(t;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^2(t)D_{V_k}=\lim_{t_2\to t}L_{0_{t_2}}(L_{0_t}(K_X(t;t_2))).$$

В заключении этого пункта отметим, что операторы дифференцирования и интегрирования случайных процессов являются линейными однородными.

2. Рассматривается квадратичное преобразование:

$Y(t)=(X(t))^2$, $\quad X(t)=m_X(t)+\sum_{k=1}^{n}V_k\,\varphi_k(t)=m_X(t)+\overset{\circ}{X}(t),$

V_k-центрированные случайные величины, имеющие симметричное относительно нуля распределение; любые четыре из них независимы в совокупности. Тогда

$$Y(t)=(X(t))^2=(m_X(t)+\sum_{k=1}^{\infty}V_k\,\varphi_k(t))^2=$$

$$=m_X^2(t)+2m_X(t)\sum_{k=1}^{n}V_k\,\varphi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}V_k^2\,\varphi_k^2(t)+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}V_kV_m\,\varphi_k(t)\varphi_m(t);$$

$$m_Y(t)=M(m_X(t)+\overset{\circ}{X}(t))^2=m_X^2(t)+2m_X(t)\cdot M(\overset{\circ}{X}(t))+M(\overset{\circ}{X}{}^2(t))=$$

$$=m_X^2(t)+D_X(t)=m_X^2(t)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(t)\,D_{V_k}.$$

Введем неслучайные функции

$$\psi_k(t)=2m_X(t)\cdot\varphi_k(t);\quad \nu_k(t)=\varphi_k^2(t);\quad \varphi_{km}(t)=2\varphi_k(t)\cdot\varphi_m(t)$$

и случайные величины

$$U_k=V_k^2-D_{V_k},\quad W_{km}=V_k\cdot V_m,$$

тогда случайный процесс Y(t) приобретает вид

$$Y(t)=m_Y(t)+\sum_{к=1}^{n}V_k\ \psi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}U_k\ \nu_k(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\ \sum_{m=k+1}^{n}W_{km}\varphi_{km}(t).$$

Представляем возможность читателю самостоятельно доказать центрированность и некоррелированность случайных величин V_k; U_k; W_{km}; $k,m=1,...,n$. Это, в свою очередь, означает, что получено каноническое разложение случайного процесса Y(t). Корреляционная функция Y(t):

$$K_Y(t_1;t_2)=M\big((Y(t_1)-m_Y(t_1))\cdot(Y(t_2)-m_Y(t_2))\big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t_1)\,\psi_k(t_2)\,D_{V_k}+\sum_{k=1}^{n}\nu_k(t_1)\,\nu_k(t_2)\,D_{U_k}+\sum_{k=1}^{n-1}\ \sum_{m=k+1}^{n}\varphi_{km}(t_1)\,\varphi_{km}(t_2)D_{W_{km}};$$

$$D_{U_k}=D\left(V_k^2-D_{V_k}\right)=M\left(V_k^2-D_{V_k}\right)^2=MV_k^2-D_{V_k}^2;$$

$$D_{W_{km}}=D(V_kV_m)=M\left(V_k^2V_m^2\right)=D_{V_k}D_{V_m}.$$

Дисперсия:

$$D_Y(t)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k^2(t)\,D_{V_k}+\sum_{k=1}^{n}\nu_k^2(t)\,D_{U_k}+\sum_{k=1}^{n-1}\ \sum_{m=k+1}^{n}\varphi_{km}^2(t)\,D_{W_{km}}.$$

Пример 9. Случайный процесс X(t) имеет следующую структуру

$$X(t)=t+\sum_{k=1}^{n}V_ke^{-a_kt},$$

где V_k центрированные некоррелированные случайные величины с дисперсиями D_{V_k}; a_k –const; $a_k>0$; k=1,2…;n. Найти характеристики и составить каноническое разложение случайного процесса Y(t):

$$Y(t)=A\frac{dX(t)}{dt}+B\int_0^t X(s)ds,\quad \text{где } A,B-\text{const}.$$

Решение.

Случайный процесс X(t) имеет следующие характеристики:

$$m_X(t)=t;\qquad K_X(t_1;t_2)=\sum_{k=1}^{n}e^{-a_k(t_1+t_2)}D_{V_k};$$

$$D_X(t)=\sum_{k=1}^{n}e^{-2a_kt}D_{V_k}.$$

Поскольку случайный процесс Y(t) является результатом преобразования линейным однородным оператором случайного процесса X(t), воспользуемся полученными ранее формулами:

$$m_Y(t)=A\frac{dm_X(t)}{dt}+B\int_0^t m_X(s)ds=A+\frac{Bt^2}{2};$$

$$K_Y(t_1;t_2)=A\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{-a_k(t_1+t_2)}D_{V_k}\right)+B\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sum_{k=1}^{n}e^{-a_k(\tau_1+\tau_2)}D_{V_k}d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=A\sum_{k=1}^{n}e^{-a_k(t_1+t_2)}a_k^2D_{V_k}+B\sum_{k=1}^{n}(1-e^{-a_kt_1})\cdot(1-e^{-a_kt_2})\frac{D_{V_k}}{a_k^2};$$

$$D_Y(t)=A\sum_{k=1}^{n}a_k^2D_{V_k}e^{-2a_kt}+B\sum_{k=1}^{n}(1-e^{-a_kt})^2\frac{D_{V_k}}{a_k^2}.$$

Каноническое разложение случайного процесса Y(t) имеет вид:

$$Y(t)=A+\frac{Bt^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{B(1-e^{-a_kt})-Aa_k^2e^{-a_kt}}{a_k}V_k.$$

Пример 10. Задан случайный процесс X(t) следующего вида:

$$X(t)=U_1\cos\psi t+U_2\sin\psi t,$$

где U_1,U_2 - независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $(0;\sigma)$; $\psi-\text{const}$. Найти каноническое разложение и характеристики случайного процесса Y(t): $\quad Y(t)=(X(t))^2.$

Решение.

$$Y(t)=(X(t))^2=(U_1\cos\varphi t+U_2\sin\psi t)^2=$$

$$=U_1^2\cos^2\psi t+2U_1U_2\sin\psi t\cos\psi t+U_2^2\sin^2\varphi t.$$

Так как

$$MU_1^2 = MU_2^2 = \sigma^2; \qquad M(U_1U_2) = 0,$$

то случайный процесс $Y(t)$ может быть записан в такой форме:

$$Y(t) = \sigma^2 + (U_1^2 - \sigma^2)\cos^2\psi t + 2U_1U_2\sin\psi t\ \cos\psi t + (U_2^2 - \sigma^2)\sin^2\psi t =$$
$$= \sigma^2 + V_1\cos^2\psi t + V_2\sin 2\psi t + V_3\sin^2\psi t,$$

где

$$V_1 = U_1^2 - \sigma^2; \qquad V_2 = U_1U_2; \qquad V_3 = U_2^2 - \sigma^2.$$

Очевидно, что случайные величины $V_{1,2,3}$ центрированы:

$$MV_1 = MV_2 = MV_3 = 0.$$

Покажем, что они попарно некоррелированные. Так как U_1 и U_2 независимы и центрированы, то

$$M(V_1V_2) = M((U_1^2 - \sigma^2)U_1U_2) = M(U_1^3U_2) - \sigma^2 M(U_1U_2) =$$
$$= M(U_1^3)\cdot MU_2 - \sigma^2 MU_1 \cdot MU_2 = 0;$$

аналогично, $$M(V_2V_3) = 0.$$

$$M(V_1V_3) = M((U_1^2 - \sigma^2)\cdot(U_2^2 - \sigma^2)) = M(U_1^2 - \sigma^2)\cdot M(U_2^2 - \sigma^2) = 0.$$

Таким образом, получено каноническое разложение случайного процесса $Y(t)$:

$$Y(t) = \sigma^2 + V_1\cos^2\psi t + V_2\sin 2\psi t + V_3\sin^2\psi t,$$

где $\sigma^2 = m_Y(t)$. Так как в случае нормального распределения

$$MU_1^4 = MU_2^4 = 3\sigma^4, \qquad \text{(докажите!)}$$

то

$$MV_1^2 = MV_3^2 = M(U_1^2 - \sigma^2)^2 = M(U_1^4) - 2\sigma^2 M(U_1^2) + \sigma^4 = 3\sigma^4 - 2\sigma^4 + \sigma^4 = 2\sigma^4,$$
$$MV_2^2 = M(U_1U_2)^2 = M(U_1^2)\,M(U_2)^2 = \sigma^4.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
K_Y(t_1;t_2) = M((&V_1\cos^2\psi t_1 + V_2\sin 2\psi t_1 + V_3\sin^2\psi t_1)\times \\
&\times(V_1\cos^2\psi t_2 + V_2\sin 2\psi t_2 + V_3\sin^2\psi t_2)) = \\
&= 2\sigma^4\cos^2\psi t_1\cdot\cos^2\psi t_2 + 4\sigma^4\sin^2\psi t_1\cdot\cos^2\psi t_1\times \\
&\times\sin^2\psi t_2\cdot\cos^2\psi t_2 + 2\sigma^4\cdot\sin^2\psi t_1\cdot\sin^2\psi t_2 = \\
&\quad = 2\sigma^4(\cos\psi t_1\cdot\cos\psi t_2 + \sin\psi t_1\cdot\sin\psi t_2)^2 = \\
&\quad = 2\sigma^4\cos^2\psi(t_2 - t_1);
\end{aligned}
$$

$$D_Y(t) = 2\sigma^4.$$

ГЛАВА 5. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

5.1 Понятие стационарного случайного процесса. Стационарность в узком и широком смысле

Значительное число происходящих в природе событий, в частности, связанных с эксплуатацией технических устройств, носит «почти» установившийся характер, то есть картина таких событий, подверженных незначительным случайным флуктуациям, тем не менее, в целом с течением времени сохраняется. В этих случаях принято говорить о стационарных случайных процессах.

Например, летчик выдерживает заданную высоту полета, но разнообразные внешние факторы (порывы ветра, всходящие потоки, изменение тяги двигателей и т.п.) приводят к тому, что высота полета колеблется около заданного значения. Другим примером могла бы служить траектория движения маятника. Если бы он был предоставлен сам себе, то при условии отсутствия систематических факторов, приводящих к затуханию колебаний, маятник находился бы в режиме установившихся колебаний. Но различные внешние факторы (порывы ветра, случайные колебания точки подвеса и т.п.), не меняя в целом параметров колебательного режима, делают характеристики движения не детерминированными, а случайными.

Стационарным (однородным во времени) называют случайный процесс, статистические характеристики которого не меняются с течением времени, то есть являются инвариантными относительно временных сдвигов.

Различают случайные процессы стационарные в широком и узком смысле.

Стационарным случайным процессом в узком смысле называется случайный процесс X(t), все вероятностные характеристики которого не меняются со временем, то есть

$$\forall n \in N \qquad u \qquad \forall \tau, t_i; \quad i = 1; 2; \ldots; n$$

таких, что

$$t_i;\tau;t_i+\tau\in[0;T]$$

выполняется условие

$F(t_1;\ t_2;\ldots\ ;t_n;\ x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n)=F(t_1+\tau;\ t_2+\tau;\ldots\ ;t_n+\tau;\ x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n)$,

и, следовательно, все n-мерные распределения зависят не от моментов времени $t_1;\ t_2;\ldots\ ;t_n$, а от длительности временных промежутков τ_i:

$$\tau_1=t_2-t_1;\ \tau_2=t_3-t_2;\ \ldots;\tau_{n-1}=t_n-t_{n-1}.$$

В частности, одномерная плотность распределения вообще не зависит от времени t:

$$p_1(t;x)=p_1(x),$$

двумерная плотность сечений в моменты времени t_1 и t_2

$$p_2(t_1;t_2;x_1;x_2)=p_2(t_1;t_1+\tau_1;x_1;x_2)=p_2(\tau_1;x_1;x_2)$$

n-мерная плотность сечений в моменты времени $t_1;\ t_2\ldots;\ t_n$:

$$p_n(t_1;t_2;\ldots;t_n;x_1;x_2;\ldots;x_n)=p_n(t_1;t_1+\tau_1;t_1+\tau_2;\ldots;t_1+\tau_{n-1};x_1;x_2;\ldots;x_n)=$$
$$=p_n(\tau_1;\tau_2;\ldots;\tau_{n-1};x_1;x_2;\ldots;x_n).$$

Случайный процесс X(t) называется стационарным в широком смысле, если его моменты первого и второго порядка инвариантны относительно временного сдвига, то есть его математическое ожидание не зависит от времени t и является константой, а корреляционная функция зависит только от длины временного промежутка между сечениями:

$$m_X(t)=m;$$
$$K_X(t_1;t_2)=k(t_2-t_1)=k(\tau)$$

Очевидно, что стационарный случайный процесс в узком смысле является стационарным случайным процессом и в широком смысле; обратное утверждение не верно.

5.2 Свойства вероятностных характеристик стационарного случайного процесса

1. $m_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(t;x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx = m, \quad m - const;$

2. $$K_X(t_1;t_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - m)(x_2 - m) \cdot p_2(t_1;t_2;x_1;x_2)\, dx_1 dx_2 =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - m)(x_2 - m) \cdot p_2(\tau;x_1;x_2) dx_1 dx_2 = k_X(\tau).$$

3. Корреляционная функция стационарного случайного процесса четна:

$$k_X(\tau) = k_X(-\tau).$$

4. Дисперсия стационарного случайного процесса есть константа, равная значению ее корреляционной функции в точке $\tau = 0$:

$$D_X(t) = K_X(t;t) = k_X(0); \qquad k_X(0) \geq 0.$$

5. $|k_X(\tau)| \leq k_X(0).$

6. Корреляционная функция стационарного случайного процесса является положительно определенной, то есть

$$\forall\varphi(t);\ \forall B \subset [0;T]:$$

$$\int\limits_B\int\limits_B k_X(t_2 - t_1) \cdot \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2)\, dt_1 dt_2 \geq 0.$$

Нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса $r_X(\tau) = \dfrac{k_X(\tau)}{k_X(0)}$ также четна, положительно определена и при этом

$$|r_X(\tau)| \le 1; \quad r_X(0) = 1.$$

Пример 11. Найти характеристики и сделать вывод о типе случайного процесса X(t):

$$X(t) = U_1 \cos\omega t + U_2 \sin\omega t,$$

где U_1 и U_2 - некоррелированные случайные величины; $\omega - \text{const};$

$$m_{U_1} = m_{U_2} = 0, \quad \sigma_{U_1} = \sigma_{U_2} = \sigma.$$

Решение.

$$MX(t) = \cos\omega t \cdot MU_1 + \sin\omega t \cdot MU_2 = 0;$$

$$K_X(t_1;t_2) = M((U_1 \cos\omega t_1 + U_2 \sin\omega t_1)\cdot(U_1 \cos\omega t_2 + U_2 \sin\omega t_2)) =$$

$$= M(U_1^2 \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 + U_1 U_2 \sin\omega(t_1 + t_2) + U_2^2 \sin\omega t_1 \cdot \sin\omega t_2) =$$

$$= \sigma^2(\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 + \sin\omega t_1 \cdot \sin\omega t_2) = \sigma^2 \cos\omega(t_2 - t_1) = \sigma^2 \cos\omega\tau;$$

$$D_X(t) = \sigma^2; \quad \sigma_X(t) = \sigma; \quad r_X(\tau) = \cos\omega\tau.$$

Следовательно, случайный процесс X(t) является стационарным в широком смысле. Как следует из **Примера 10**, если U_1 и U_2 независимые, центрирование и нормально распределенные случайные величины, то случайный процесс $Y(t) = (X(t))^2$ также является стационарным в широком смысле.

Пример 12. Доказать стационарность в широком смысле случайного процесса X(t):

$$X(t) = V\cos(\psi t - \theta),$$

где V и θ независимые случайные величины; MV=m_V - const; $DV = \sigma_V^2 - \text{const};$ θ - равномерно распределенная на отрезке $[0;2\pi]$ случайная величина; $\psi - \text{const}.$

Решение.

Запишем X(t) следующим образом:

$$X(t) = V\cos\theta\cos\psi t + V\sin\theta\sin\psi t.$$

Так как случайная величина θ равномерно распределена на отрезке $[0;2\pi]$, то плотность распределения имеет вид:

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le x \le 2\pi; \\ 0, & x < 0; \; x > 2\pi, \end{cases}$$

следовательно,

$$M(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx = 0; \qquad M(\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0;$$

$$D(\cos\theta) = M(\cos^2\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2};$$

$$D(\sin\theta) = M(\sin^2\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2};$$

$$M(\sin\theta\cdot\cos\theta) = 0.$$

Получаем

$$m_X(t) = MV\cdot M(\cos\theta)\cdot\cos\psi t + MV\cdot M(\sin\theta)\cdot\sin\psi t = 0;$$

$$K_X(t_1;t_2) = M((V\cos\theta\cos\psi t_1 + V\sin\theta\sin\psi t_1)(V\cos\theta\cos\psi t_2 + V\sin\theta\sin\psi t_2)) =$$

$$= M(V^2)\cdot(M(\cos^2\theta)\cdot\cos\psi t_1\cdot\cos\psi t_2 + M(\sin\theta\cdot\cos\theta)\times$$

$$\times(\sin\psi t_1\cos\psi t_2 + \sin\psi t_2\cdot\cos\psi t_1) + M(\sin^2\theta)\cdot\sin\psi t_1\cdot\sin\psi t_2) =$$

$$= \frac{\sigma_v^2 + m_v^2}{2}\cdot\cos\psi(t_2 - t_1) = \frac{\sigma_v^2 + m_v^2}{2}\cdot\cos\psi\tau.$$

$$D_X(t) = \frac{\sigma_v^2 + m_v^2}{2}; \quad r_X(\tau) = \cos\psi\tau.$$

Так как случайный процесс X(t) имеет постоянные математическое ожидание и дисперсию, а корреляционная функция является функцией τ, то вне зависимости от закона распределения случайной величины V случайный процесс X(t) является стационарным в широком смысле.

5.3 Стационарно связанные случайные процессы

Случайные процессы X(t) и Y(t) называются стационарно связанными, если их взаимная корреляционная функция зависит

только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$: $R_{XY}(t_1;t_2) = r_{XY}(\tau)$.

Стационарность самих случайных процессов X(t) и Y(t) не означает их стационарной связанности.

Отметим основные свойства стационарно связанных случайных процессов, производной и интеграла от стационарных случайных процессов,

1) $r_{XY}(\tau) = r_{YX}(-\tau)$.

2) $k_{X'}(\tau) = -k''_X(\tau)$; $k_{X^{(n)}}(\tau) = (-1)^n k_X^{(2n)}(\tau)$;

3) $r_{XX'}(\tau) = k'_X(\tau)$; $r_{X'X}(\tau) = -k'_X(\tau)$;

4)

$$K_Y(t_1;t_2) = \int_0^{t_2}(t_2-\tau)k_X(\tau)d\tau - \int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)k_X(\tau)d\tau + \int_0^{t_1}(t_1-\tau)k_X(\tau)d\tau,$$

где $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$;

5) $D_Y(t) = 2\int_0^t (t-\tau)k_X(\tau)d\tau$,

где $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$;

6) $R_{XY}(t_1;t_2) = \int_0^{t_2} k_X(s-t_1)\,ds = \int_{-t_1}^{t_2-t_1} k_X(\tau)\,d\tau$;

$$R_{YX}(t_1;t_2) = \int_0^{t_1} k_X(t_2-s)\,ds = \int_{t_2-t_1}^{t_2} k_X(\tau)\,d\tau.$$

Пример 13. Корреляционная функция стационарного случайного процесса X(t) имеет вид

$$k_X(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau|).$$

Найти корреляционные функции, дисперсии, взаимные корреляционные функции случайных процессов X(t), $X'(t)$,

$$Y(t) = \int_0^t X(s)ds.$$

Решение.

Ограничимся анализом случая $\tau \geq 0$:

$$k_X(\tau) = e^{-\tau}(1 + \tau); \qquad D_X(t)=1.$$

Далее без комментариев:

$$k_{X'}(\tau) = -k''_X(\tau) = -(e^{-\tau}(1+\tau))'' = e^{-\tau}(1-\tau);$$

$$D_{X'}(t) = k_{X'}(0) = 1;$$

$$r_{XX'}(\tau) = k'_X(\tau) = (e^{-\tau}(1+\tau))' = -e^{-\tau}\tau;$$

$$r_{X'X}(\tau) = -k'_X(\tau) = e^{-\tau}\tau;$$

$$K_Y(t_1;t_2) = \int_0^{t_2}(t_2-\tau)e^{-\tau}(1+\tau)d\tau - \int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)e^{-\tau}(1+\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^{t_1}(t_1-\tau)\,e^{-\tau}\,(1+\tau)\,d\tau.$$

Воспользуемся следующим соотношением:

$$\int_0^a (a-\tau)e^{-\tau}(1+\tau)d\tau = e^{-a}(a+3) - 3 + 2a,$$

Получаем:

$$K_Y(t_1;t_2) = e^{-t_2}(t_2+3) - e^{-t_2+t_1}(t_2-t_1+3) + e^{-t_1}(t_1+3) - 9 + 4t_2;$$

$$D_Y(t) = K_Y(t;t) = 2e^{-t}(t+3) - 12 - 4t;$$

$$R_{XY}(t_1;t_2)=\int_{-t_1}^{t_2-t_1} e^{-|\tau|}(1+|\tau|)d\tau=\int_{-t_1}^{0} e^{\tau}(1-\tau)d\tau+\int_{0}^{t_2-t_1} e^{-\tau}(1+\tau)d\tau=$$

$$=\int_{0}^{t_1} e^{-\tau}(1+\tau)d\tau+\int_{0}^{t_2-t_1} e^{-\tau}(1+\tau)d\tau=4-e^{-t_1}(2+t_1)-e^{-t_2+t_1}(2+t_2-t_1);$$

$$R_{YX}(t_1;t_2)=\int_{t_2-t_1}^{t_2} e^{-\tau}(1+\tau)d\tau=e^{-t_2+t_1}(2+t_2-t_1)-e^{-t_2}(2+t_2).$$

Обратите внимание, что в результате дифференцирования стационарный случайный процесс X(t) переходит в стационарный случайный процесс $X'(t)$, при этом X(t) и $X'(t)$ стационарно связаны. При интегрировании стационарного случайного процесса X(t) возникает нестационарный случайный процесс Y(t), и при этом X(t) и Y(t) не являются стационарно связанными.

5.4 Эргодические стационарные случайные процессы и их характеристики

Среди стационарных случайных процессов есть особый класс процессов, называемых эргодическими, которые обладают следующим свойством: их характеристики, полученные усреднением множества всех реализаций, совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени одной реализации, наблюдаемой на интервале (0, T) достаточно большой продолжительности. То есть на достаточно большом временном промежутке <u>любая</u> реализация проходит через <u>любое</u> состояние независимо от того, каково было исходное состояние системы при t=0; и в этом смысле любая реализация полностью представляет всю совокупность реализаций.

Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина

Для любого стационарного случайного процесса в узком смысле X(t), имеющего конечное математическое ожидание

$M|X(t)| < \infty$ с вероятностью 1 существует предел

$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = M(X|J_X)$ для ССП с непрерывным временем,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i) = M(X|J_X)$ для ССП с дискретным временем.

Если при этом X(t) – эргодический стационарный случайный процесс, то $M(X|J_X) = MX(t) = m \; - \; const$.

В условии теоремы $M(X|J_X)$ - условное математическое ожидание случайного процесса X(t) относительно J_x; J_x – σ-алгебра инвариантных по отношению к X(t) событий; событие A называется инвариантным относительно X(t), если $\exists B \in$ $B(R^T)$ такое, что A={ω: X(ω,t)$\in$B}.

Достаточные условия эргодичности

Теорема 1. Стационарный случайный процесс X(t) эргодичен относительно математического ожидания, если его корреляционная функция $k_X(\tau)$ стремится к нулю при τ→∞;

при этом: $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = m_X$.

Теорема 2. Стационарный случайный процесс X(t) эргодичен относительно дисперсии, если корреляционная функция стационарного случайного процесса $Y(t)=X^2(t)$ стремится к нулю при τ→∞;

при этом: $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (X(t)-m_X)^2 dt = D_X$.

Теорема 3. Стационарный случайный процесс X(t) эргодичен относительно корреляционной функции, если стремится к нулю при τ→∞ корреляционная функция стационарного случайного процесса

$$Z(t,\tau)=(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X);$$

при этом:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X)dt=k_X(\tau).$$

При практических расчетах интервал (0;T) разбивается на n равных частей $\Delta t=\frac{T}{n}$; в каждом промежутке выбирается точка t_i (например, середина). Если ограничиться формулой прямоугольников, получаем

$$m_X\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X(t_i);$$

$$D_X\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X(t_i)-m_X)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^2(t_i)-m_X^2;$$

$$k_X(\tau)\approx k_X\left(\frac{mT}{n}\right)=\frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}(X(t_i)-m_X)\cdot(X(t_{i+m})-m_X)=$$

$$=\frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}X(t_i)\,X(t_{i+m})-m_X^2;\qquad m=0;1;2;\ldots;n-1.$$

<u>Пример 14.</u> X(t) – эргодический стационарный случайный процесс, V – случайная величина, имеющая математическое ожидание m_v и дисперсию D_v ($D_v\neq 0$); X(t) и V независимы. Исследовать на эргодичность случайный процесс Y(t): Y(t)=X(t)+V.

<u>Решение.</u>

Так как случайный процесс X(t) и случайная величина V независимы, то

$$m_Y(t)=m_X(t)+m_v;\ k_Y(\tau)=k_X(\tau)+D_v.$$

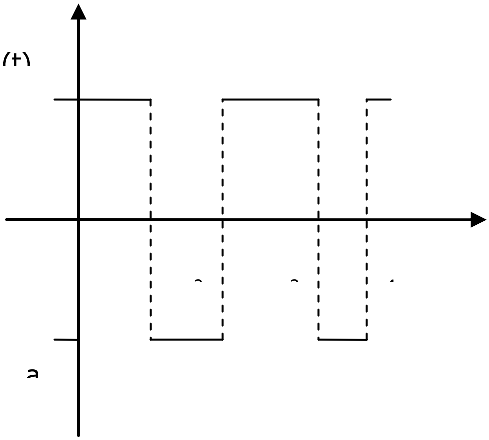
При этом

$$\lim_{\tau\to\infty}k_Y(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}(k_X(\tau)+D_V)=\lim_{\tau\to\infty}k_X(\tau)+D_V=D_V\neq 0.$$

Следовательно, случайный процесс Y(t) не является эргодичным по математическому ожиданию; то есть наложение на эргодический случайный процесс независимой случайной величины разрушает эргодичность.

<u>Пример 15.</u> Рассматривается простейший поток событий с интенсивностью λ. Случайный процесс $X(t)$ принимает значения $+a$ и $-a$ $(a>0)$; при этом $X(t)$ скачком меняет свое состояние с $+a$ на $-a$ или наоборот в момент наступления очередного события в потоке. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

<u>Решение.</u>



По смыслу задачи события в потоке происходят в произвольные моменты времени (см. рис.), поэтому для любого значения t с равной вероятностью ½ СП $X(t)$ может принимать значения $+a$, и $-a$; Поэтому одномерный закон распределения каждого сечения очевиден (см. таблицу). Получаем $m_X(t)=-a\cdot0{,}5+a\cdot0{,}5=0$; $D_X(t)=(-a)^2\cdot0{,}5+a^2\cdot0{,}5=a^2$.

X(t)	-a	+a
P	0,5	0,5

Корреляционная функция имеет вид:

$$K_X(t_1;t_2)=M((X(t_1)-m_X)\cdot(X(t_2)-m_X))= M(X(t_1)X(t_2)).$$

Произведение $X(t_1)X(t_2)$ может принимать только два значения:

1) $-a^2$, если в интервале (t_1, t_2) в простейшем потоке произошло нечетное число событий;

2) a^2, если в интервале (t_1, t_2) в потоке происходит четное число событий.

Вероятность k событий на временном промежутке $\tau=t_2-t_1$

(τ≥0) в простейшем потоке с интенсивностью λ находится по формуле Пуассона:

$$P(\xi = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}.$$

Поэтому полная вероятность всех четных k имеет вид:

$$P_{чет} = P(X(t_1)\cdot X(t_2) = a^2) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda\tau)^{2m} \frac{e^{-\lambda\tau}}{(2m)!} = e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m}}{(2m)!} = e^{-\lambda\tau} ch(\lambda\tau) =$$

$$= e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}}{2} = \frac{1+e^{-2\lambda\tau}}{2};$$

$$P_{нечет} = 1 - P_{чет} = P(X(t_1)\cdot X(t_2) = -a^2) = \frac{1-e^{-2\lambda\tau}}{2}.$$

Получаем следующее значение корреляционной функции:

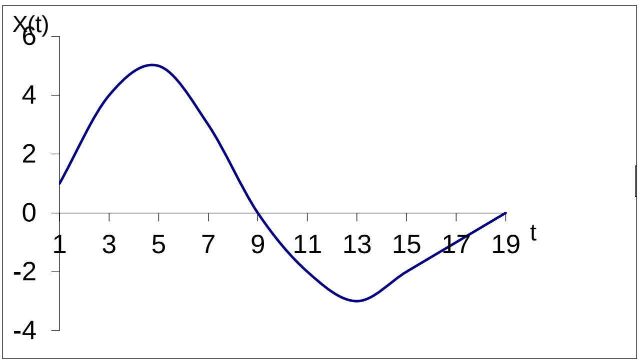
$$K_X(t_1;t_2) = k_X(\tau) = a^2 \frac{1+e^{-2\lambda\tau}}{2} - a^2 \frac{1-e^{-2\lambda\tau}}{2} = a^2 e^{-2\lambda\tau} \quad (\tau \ge 0).$$

Окончательно,

$$k_X(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}; \qquad k_X(\tau) \to 0 \ \text{ при } \ \tau \to \infty,$$

то есть случайный процесс X(t) стационарен и эргодичен.

<u>Пример 16.</u> По заданной реализации эргодического случайного процесса X(t) найти приближенные значения его характеристик.



<u>Решение.</u>

Временной интервал (0;20) разобьем на 10 интервалов точками

0, 2, 4,…, 20. В качестве расчетных моментов времени выбираем середины полученных интервалов:

i										0
t_i						11	3	5	7	9
$X(t_i)$						2	3	2	1	
$X^2(t_i)$		6	5							

Математическое ожидание:

$$m_X \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X(t_i) = \frac{1+4+5+3+0-2-3-2-1+0}{10} = 0{,}5.$$

Дисперсия:

$$D_X \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^2(t_i) - m_X^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X(t_i) =$$

$$= \frac{1+16+25+9+0+4+9+4+1+0}{10} - \frac{1}{4} = 6{,}65.$$

Корреляционная функция:

$$k_X(\tau) \approx k_X\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m} X(t_i)\,X(t_{i+m}) - m_X^2\,; \qquad m = 0; 1; 2; \ldots; n-1;$$

m=0: $k_X(0) \approx D_X = 6{,}65$

m=1: $$k_X(2) \approx \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X(t_i)X(t_{i+1}) - m_X^2 =$$

$$= \frac{1\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 3+3\cdot 0+0\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)+(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot 0}{9} - \frac{1}{4} =$$

$$= 5\frac{23}{36} \approx 5{,}639$$

m=2: $$k_X(4) \approx \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X(t_i)X(t_{i+2}) - m_X^2 =$$

$$=\frac{1\cdot 5+4\cdot 3+5\cdot 0+3\cdot(-2)+0\cdot(-3)+(-2)\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)+(-2)\cdot 0}{8}-\frac{1}{4}=2$$

m=3: $$k_X(6)\approx\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}X(t_i)X(t_{i+3})-m_X^2=$$

$$=\frac{1\cdot 3+4\cdot 0+5\cdot(-2)+3\cdot(-3)+0\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot 0}{7}-\frac{1}{4}=-2{,}25$$

m=4: $$k_X(8)\approx\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X(t_i)X(t_{i+4})-m_X^2=$$

$$=\frac{1\cdot 0+4\cdot(-2)+5\cdot(-3)+3\cdot(-2)+0\cdot(-1)+(-2)\cdot 0}{6}-\frac{1}{4}\approx-5{,}08$$

m=5: $$k_X(10)\approx\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X(t_i)X(t_{i+5})-m_X^2=$$

$$=\frac{1\cdot(-2)+4\cdot(-3)+5\cdot(-2)+3\cdot(-1)+0\cdot 0}{5}-\frac{1}{4}=-5{,}65$$

m=6: $$k_X(12)\approx\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X(t_i)X(t_{i+6})-m_X^2=$$

$$=\frac{1\cdot(-3)+4\cdot(-2)+5\cdot(-1)+3\cdot 0}{4}-\frac{1}{4}=-4{,}25$$

m=7:

$$k_X(14)\approx\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X(t_i)X(t_{i+7})-m_X^2$$

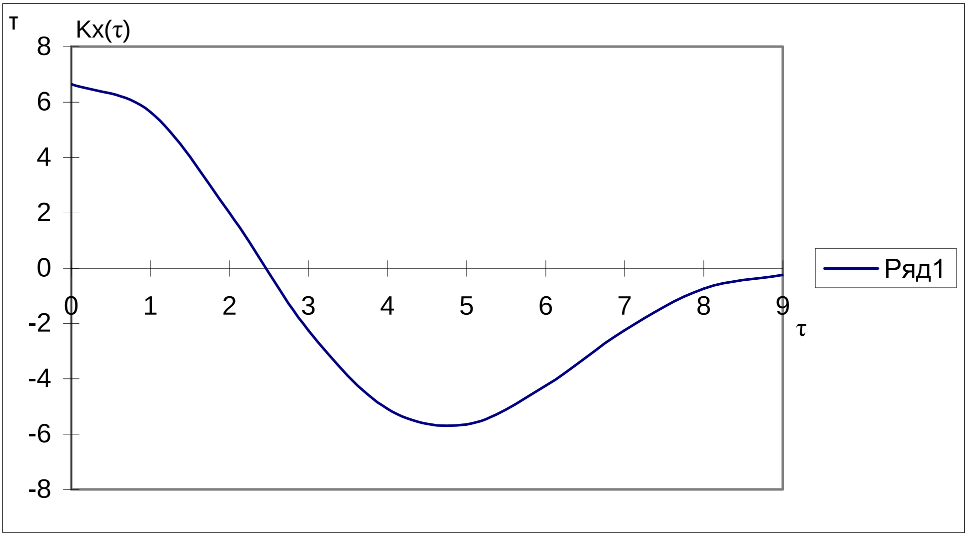
$$=\frac{1\cdot(-2)+4\cdot(-1)+5\cdot 0}{3}-\frac{1}{4}=-2{,}25$$

m=8:

$$k_X(16)\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X(t_i)X(t_{i+8})-m_X^2$$

$$= \frac{1\cdot(-1)+4\cdot 0}{2} - \frac{1}{4} = -0{,}75$$

m=9: $$k_X(18) \approx 1\cdot 0 - \frac{1}{4} = -0{,}25$$



ГЛАВА 6. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

6.1 Понятие спектрального разложения стационарного случайного процесса. Дискретные и непрерывные спектры. Спектральная плотность и е свойства.

1. Элементарный стационарный случайный процесс

Случайный процесс X(t) вида

$$X(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t,$$

где U и V – центрированные некоррелированные случайные величины; $DU=DV=\sigma^2$, ω – const; называется элементарным стационарным случайным процессом.

Как следует из Примера 11,

$m_X(t)=0$; $K_X(t_1;t_2)=k_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega\tau$, $\tau=t_2-t_1$; $D_X(t)=\sigma^2$,

следовательно, X(t) – стационарный в широком смысле случайный процесс. Часто его записывают в виде гармоники

$$X(t)=\sqrt{U^2+V^2}\sin(\omega t+\varphi),\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{U}{V}$$

со случайной амплитудой $\sqrt{U^2+V^2}$, случайной фазой ωt+arctgU/V и частотой ω.

2. Сумма конечного числа гармоник

$$X(t)=m_X+\sum_{p=0}^{n}(U_p\cos\omega_p t+V_p\sin\omega_p t)=$$

$$=m_X+\sum_{p=0}^{n}\sqrt{U_p^2+V_p^2}\sin(\omega_p t+\operatorname{arctg}\frac{U_p}{V_p}),$$

где U_p и V_p – центрированные некоррелированные случайные величины; $DU_p=DV_p=\sigma_p^2$. Легко показать, что

$$m_X(t)=m_X;\quad k_X(\tau)=\sum_{p=0}^{n}\sigma_p^2\cos\omega_p\tau;$$

$$D_X(t)=\sum_{p=0}^{n}\sigma_p^2.$$

3. Сумма бесконечного (счетного) числа гармоник

$$X(t)=m_X+\sum_{p=0}^{\infty}(U_p\cos\omega_p t+V_p\sin\omega_p t)=$$

$$=m_X+\sum_{p=0}^{\infty}\sqrt{U_p^2+V_p^2}\sin(\omega_p t+\operatorname{arctg}\frac{U_p}{V_p}),$$

где U_p и V_p – центрированные некоррелированные случайные величины, $DU_p=DV_p=\sigma_p^2$. Как и ранее

$$m_X(t)=m_X;\quad k_X(\tau)=\sum_{p=0}^{\infty}\sigma_p^2\cos\omega_p\tau;$$

$$D_X(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\sigma_p^2.$$

Запись стационарного случайного процесса X(t) в виде суммы гармоник со случайными амплитудами, случайными фазами и фиксированными частотами называется его спектральным разложением. Совокупность дисперсий всех гармоник стационарного случайного процесса называется дискретным спектром. Обычно дискретный спектр изображают в виде набора вертикальных отрезков, откладываемых от оси абсцисс в точках ω_p и имеющих длину σ_p^2.

Если корреляционная функция $k_X(\tau)$ является периодической функцией с периодом 2T, то она может быть легко разложена в ряд Фурье по косинусам:

$$k_X(t) = D_0 + \sum_{p=1}^{\infty} D_p \cos\frac{\pi p \tau}{T}; \quad D_0 = \frac{1}{T}\int_0^T k_X(\tau)\,d\tau;$$

$$D_p = \frac{2}{T}\int_0^T k_X(\tau)\cos\frac{\pi p \tau}{T}\,d\tau.$$

При этом коэффициенты разложения D_p образуют дискретный спектр, а координатные функции $\cos\frac{\pi p \tau}{T}$ позволяют записать каноническое разложение самого стационарного случайного процесса с точностью до m_X.

Очевидно, что если корреляционная функция $k_X(\tau)$ не обладает свойством периодичности, то стационарный случайный процесс не обладает дискретным спектром. В этом случае ограничиваются разложением корреляционной функции в ряд Фурье на представляющем интерес отрезке [-T; T]. Но следует помнить, что увеличение отрезка: $[-T; T] \subset [-T'; T']$ приводит к совершенно иному разложению, не совпадающему с первоначальным даже на отрезке [-T; T]. Другими словами, нет однозначности в разложении $k_X(\tau)$ на отрезке [-T; T]; вне указанного отрезка вообще отсутствует сходимость к $k_X(\tau)$.

Каноническому разложению стационарного случайного процесса X(t) можно придать комплексную форму

$$X(t) = m_X + \sum_{p=0}^{\infty}(W_p e^{i\omega_p t} + \overline{W_p} e^{-i\omega_p t}) = m_X + \sum_{p=-\infty}^{\infty} W_p e^{i\omega_p t},$$

где $$W_p = \frac{1}{2}(U_p - iV_p); \; W_{-p} = \overline{W_p};$$

$$\omega_{-p} = -\omega_p; \; p \in N.$$

При этом корреляционная функция $k_X(\tau)$ принимает вид

$$k_X(t) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} D_p (e^{i\omega_p \tau} + e^{-i\omega_p \tau}) = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty} D_p e^{i\omega_p \tau}.$$

4. Непрерывный спектр. Спектральная плотность

Теорема Винера-Хинчина.

Пусть X(t) - стационарный случайный процесс с непрерывным временем, тогда существует и притом единственная ограниченная монотонно неубывающая функция S*(ω) такая, что корреляционная функция имеет вид:

$$\boldsymbol{k_X(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dS^*(\omega).}$$

Если функция S*(ω) дифференцируема:

$$dS^*(\omega) = S^{*'}(\omega)\,d\omega = s_X^*(\omega)\,d\omega,$$

то имеют место так называемые формулы Винера-Хинчина:

$$k_X(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_X^*(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega;$$

$$s_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Функция $\boldsymbol{s_X^*(\omega)}$ называется спектральной плотностью стационарного случайного процесса X(t) в комплексной форме.

Функция $\boldsymbol{s_X(\omega) = 2\, s_X^*(\omega)}$, ω≥0 называется спектральной плотностью стационарного случайного процесса X(t).

Спектральная плотность $s_X(\omega)$ и корреляционная функция $k_X(\tau)$ связаны прямым и обратным косинус-преобразованием Фурье:

$$k_X(\tau) = \int\limits_{0}^{+\infty} s_X(\omega)\,\cos\omega\tau\, d\omega;$$

$$s_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} k_X(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Функция вида

$$s_{X\ норм}(\omega)=\frac{s_X(\omega)}{D_X}=\frac{s_X(\omega)}{\int\limits_0^{+\infty} s_X(\omega)d\omega}$$

называется нормированной спектральной плотностью стационарного случайного процесса X(t).

Свойства спектральной плотности, нормированной спектральной плотности, спектральной плотности в комплексной форме.

1) $\overset{*}{s}_X(\omega)=\begin{cases}\dfrac{s_X(\omega)}{2}, & \omega\ge 0;\\ \dfrac{s_X(-\omega)}{2}, & \omega<0;\end{cases}$

2) $\overset{*}{s}_X(-\omega)=\overset{*}{s}_X(\omega);$

3) $s_X(\omega)\ge 0$; $s_{X\ норм}(\omega)\ge 0$;

4) $D_X=k_X(0)=\int\limits_0^{+\infty} s_X(\omega)\,d\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overset{*}{s}_X(\omega)\,d\omega,$ то

есть спектральная плотность

является плотностью распределения дисперсии стационарного случайно-

го процесса по частоте;

5) $\int\limits_0^{+\infty} s_{X\ норм}(\omega)\,d\omega=1.$

Пусть X(t) и Y(t) – стационарные и стационарно связанные случайные процессы со взаимной корреляционной функцией $r_{XY}(\tau)$. Функция $s_{XY}(\omega)$ вида

$$s_{XY}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_{XY}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau$$

называется взаимной спектральной плотностью.

Очевидно, что $r_{XY}(\tau)$ и $s_{XY}(\omega)$ связаны преобразованием Фурье:

$$s_{XY}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r_{XY}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau\,;$$

$$r_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} s_{XY}(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega\,.$$

В случае непрерывного спектра стационарный случайный процесс X(t) имеет следующее интегральное каноническое представление:

$$X(t)=m_X+\int_{0}^{+\infty}(U(\omega)\cos\omega t+V(\omega)\sin\omega t)\,d\omega\,,$$

где U(ω) и V(ω) представляют собой «белый шум», то есть

$$K_U(\omega;\omega_0)=K_V(\omega;\omega_0)=s_X(\omega)\cdot\delta(\omega-\omega_0)\,,$$

$s_X(\omega)$ – спектральная плотность.

Для наиболее часто встречающихся стационарных случайных процессов существуют таблицы соответствия корреляционной функции $k_X(\tau)$ и спектральной плотности в комплексной форме $s^{*}_{X}(\omega)$ (см. Приложение 3).

<u>Пример 17.</u> Найти спектральную плотность следующих стационарных случайных процессов:

а) $X(t)=U\cos\omega_0 t+V\sin\omega_0 t;$ $\omega_0>0$; X(t) – элементарный ССП;

б) $X(t)=m_X+\sum_{p=0}^{\infty}(U_p\cos\omega_p t+V_p\sin\omega_p t)\,;$

в) X(t) – стационарный «белый шум»;

г) X(t) – стационарный случайный процесс из Примера 15.

<u>Решение.</u>

а)

$$k_X(\tau) = M((U\cos\omega_0 t_1 + V\sin\omega_0 t_1)\cdot(U\cos\omega_0 t_2 + V\sin\omega_0 t_2)) = \sigma^2\cos\omega_0\tau;$$

следовательно,

$$s_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sigma^2\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\,d\tau = \frac{\sigma^2}{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\cos\tau(\omega+\omega_0)\,d\tau + \int_0^{+\infty}\cos\tau(\omega-\omega_0)\,d\tau\right) =$$

$$= \sigma^2\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\tau(\omega-\omega_0)\tau = \sigma^2(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)).$$

Так как $\omega_0>0$, $\omega\geq 0$, то $\omega+\omega_0>0$; $\delta(\omega+\omega_0)=0$.

Окончательно получаем

$s_X(\omega)=\sigma^2\delta(\omega-\omega_0)$.

Заметим, что в случае $\omega_0=0$:

$X(t)=U$; $m_X=0$; $k_X(\tau)=\sigma^2$; $s_X(\omega)=\sigma^2\,\delta(\omega)$.

б) В соответствии с теорией

$$k_X(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty}\sigma_p^2\cos\omega_p\tau,$$

поэтому по аналогии с предыдущей задачей получаем

$$s_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sigma_p^2\cos\omega_p\tau\cdot\cos\omega\tau\cdot d\tau = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sigma_p^2}{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\cos(\omega_p+\omega)\tau\cdot d\tau +\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\cos(\omega-\omega_p)\tau\cdot d\tau\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\sigma_p^2\,\delta(\omega-\omega_p).$$

Обратите внимание на следующий факт: если случайный процесс является суммой счетного числа гармоник, то есть имеет дискретный спектр, то спектральная плотность представляет собой линейную комбинацию δ-функций Дирака, принимающих бесконечное значение в точках спектра, а коэффициентами этой линейной комбинации являются соответствующие дисперсии отдельных гармоник.

в) Так как X(t) – «белый шум», то $k_X(\tau)=W\cdot\delta(\tau)$, следовательно,

$$s_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} W \cdot \delta(\tau) \cdot \cos\omega\tau \cdot d\tau = \frac{W}{\pi},$$

где W – интенсивность «белого шума».

г) Стационарный случайный процесс X(t) из Примера 15 обладает следующей корреляционной функцией

$$k_X(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|},$$

поэтому спектральная плотность $s_X(\omega)$ имеет вид:

$$s_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} a^2 e^{-2\lambda|\tau|}\cos\omega\tau \cdot d\tau = \frac{2a^2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda\tau}\cos\omega\tau \cdot d\tau.$$

Так как

$$\int e^{-2\lambda\tau}\cos\omega\tau \cdot d\tau = \frac{e^{-2\lambda\tau}(\omega\sin\omega\tau - 2\lambda\cos\omega\tau)}{\omega^2 + 4\lambda^2},$$

то
$$s_X(\omega) = \frac{4a^2\lambda}{\pi(\omega^2 + 4\lambda^2)}.$$

6.2 Линейные преобразования стационарного случайного процесса

Рассмотрим линейное преобразование L_t стационарного случайного процесса X(t), имеющего следующее спектральное разложение:

$$X(t) = m_X + \sum_{p=0}^{\infty} U_p\cos\omega_p t + V_p\sin\omega_p t.$$

Получаем случайный процесс Y(t):

$$Y(t) = L_t(X(t)) = L_t(m_X) + \sum_{p=0}^{\infty}(U_p L_t(\cos\omega_p t) + V_p L_t(\sin\omega_p t))$$

имеющий характеристики

$m_Y(t)=M(L_t(m_X))=L_t(m_X)$;

$$K_Y(t_1;t_2)=L_{t_2}(L_{t_1}(k_X(\tau)))=\sum_{p=0}^{\infty}\sigma_p^2\,(\varphi_p(t_1)\cdot\varphi_p(t_2)+\psi_p(t_1)\cdot\psi_p(t_2)),$$

где

$$\sigma_p^2=DU_p=DV_p;\quad \varphi_p(t)=L_t(\cos\omega_p t);\quad \psi_p(t)=L_t(\sin\omega_p t).$$

В общем случае в результате линейного преобразования стационарного случайного процесса X(t) возникает нестационарный случайный процесс Y(t). Для того, чтобы случайный процесс Y(t) был стационарен, линейное преобразование L_t должно обладать следующими свойствами

$L_t(m_X)$ – const; $\qquad L_{t_2}(L_{t_1}(k_X(\tau)))=k_Y(\tau)$.

Например, случайный процесс Y(t) будет стационарен, если выполняется любая пара условий

$$\begin{cases} L_t(\cos\omega_p t)=\alpha_p\cos\omega_p t; \\ L_t(\sin\omega_p t)=\pm\alpha_p\sin\omega_p t, \end{cases}$$ или

$$\begin{cases} L_t(\cos\omega_p t)=\alpha_p\sin\omega_p t; \\ L_t(\sin\omega_p t)=\pm\alpha_p\cos\omega_p t. \end{cases}$$

Отметим наиболее важные в практическом отношении линейные операторы.

1. Оператор дифференцирования: $Y(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$

Очевидно, что

$$m_Y(t)=\frac{dm_X}{dt}=0;$$

$$L_t(\cos\omega_p t)=\frac{d}{dt}(\cos\omega_p t)=-\omega_p\sin\omega_p t;$$

$$L_t(\sin\omega_p t) = \frac{d}{dt}(\sin\omega_p t) = \omega_p \cos\omega_p t,$$

то есть соблюдены все условия, при которых случайный процесс Y(t) стационарен.

При этом

$$k_Y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}k_X(\tau), \qquad s_Y^*(\omega) = \omega^2 s_X^*(\omega).$$

Данные результаты легко обобщаются на случай

$$Y_n(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}:$$

$$m_{Y_n} = 0; \qquad k_{Y_n}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}}k_X(\tau);$$

$$s_{Y_n}^*(\omega) = \omega^{2n} s_X^*(\omega).$$

2. Оператор интегрирования: $Y(t) = \int_0^t X(t)dt$

Случайный процесс Y(t) имеет следующую структуру и характеристики:

$$Y(t) = \int_0^t (m_X + \sum_{p=0}^{\infty}(U_p \cos\omega_p t + V_p \sin\omega_p t))dt =$$

$$= m_X \cdot t + \sum_{p=0}^{\infty}(U_p \frac{\sin\omega_p t}{\omega_p} + V_p \frac{1-\cos\omega_p t}{\omega_p});$$

$$m_Y(t) = m_X \cdot t;$$

$$K_Y(t_1;t_2) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{D_p}{\omega_p^2}(\sin\omega_p t_1 \cdot \sin\omega_p t_2 + (1-\cos\omega_p t_1)\cdot(1-\cos\omega_p t_2));$$

$$D_Y(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{D_p}{\omega_p^2}(\sin^2\omega_p t+(1-\cos\omega_p t)^2)=2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{D_p}{\omega_p^2}(1-\cos\omega_p t).$$

Очевидно, что случайный процесс Y(t) не является стационарным.

3. Оператор сложения: Z(t)=X(t)+Y(t)

Рассматривается сумма двух стационарных случайных процессов X(t) и Y(t) с известными характеристиками m_X; $k_X(\tau)$; m_Y; $k_Y(\tau)$ и известной взаимной корреляционной функцией $R_{XY}(t_1;t_2)$.

В соответствии с общими формулами получаем:

$m_Z(t)=m_X+m_Y$ – const;

$$K_Z(t_1;t_2)=k_X(\tau)+k_Y(\tau)+R_{XY}(t_1;t_2)+R_{YX}(t_1;t_2);$$

$$D_Z(t)=D_X+D_Y+2R_{XY}(t;t).$$

В общем случае случайный процесс Z(t) не будет стационарным. Если же X(t) и Y(t) стационарно связаны

$$R_{XY}(t_1;t_2)=r_{XY}(\tau)$$

или вообще некоррелированны

$$R_{XY}(t_1;t_2)=0,$$

то случайный процесс Z(t) стационарен. При этом либо

$$s_Z^*(\omega)=s_X^*(\omega)+s_Y^*(\omega)+2\,\mathrm{Re}(s_{XY}^*(\omega)),$$

$$s_{XY}^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}r_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,$$

либо

$$s_Z^*(\omega)=s_X^*(\omega)+s_Y^*(\omega).$$

<u>Пример 18.</u> Найти характеристики случайного процесса Y(t):

$$Y(t)=\frac{d}{dt}X(t),$$

если $m_X=0$; $k_X(\tau)=a^2e^{-2\lambda|\tau|}$; a, λ – const; $\lambda>0$.

Решение.

Очевидно, что

$$m_Y=\frac{dm_X}{dt}=0;\quad k_Y(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}(a^2e^{-2\lambda|\tau|}).$$

Остановимся подробнее на процедуре дифференцирования:

$$-\frac{d^2}{d\tau^2}(a^2e^{-2\lambda|\tau|})=-a^2\frac{d}{d\tau}(\frac{d}{d\tau}(e^{-2\lambda|\tau|}))=2\lambda a^2\frac{d}{d\tau}(e^{-2\lambda|\tau|}\frac{d|\tau|}{d\tau});$$

так как $\dfrac{d|\tau|}{d\tau}=\operatorname{sign}\tau$, $\dfrac{d(\operatorname{sign}\tau)}{d\tau}=2\delta(\tau)$, то

$$k_Y(\tau)=2\lambda a^2e^{-2\lambda|\tau|}(2\delta(\tau)-2\lambda(\operatorname{sign}\tau)^2).$$

Как показано в **Примере 17(г),** случайный процесс X(t) имеет следующую спектральную плотность

$$s_X(\omega)=\frac{4a^2\lambda}{\pi(\omega^2+4\lambda^2)},$$

следовательно,

$$s_Y(\omega)=\omega^2s_X(\omega)=\frac{4a^2\lambda\omega^2}{\pi(\omega^2+4\lambda^2)}.$$

6.3 Преобразование стационарного случайного процесса стационарной линейной системой

Известно, что стационарные линейные преобразователи могут быть описаны с помощью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} Y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} Y(t) + \ldots + a_1 \frac{d}{dt} Y(t) + a_0 Y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m}{dt^m} X(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} X(t) + \ldots + b_1 \frac{d}{dt} X(t) + b_0 X(t),$$

где X(t) – стационарный случайный процесс на входе в систему; Y(t*)* – стационарный случайный процесс на выходе, который возникает после переходных осцилляций. В такой постановке начальные значения X(t) при t=0 не играют никакой роли. Для удобства будем полагать

$$X(0) = X'(0) = \ldots = X^{(n-1)}(0) = 0.$$

После применения преобразования Лапласа получаем:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\overline{Y}(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)\overline{X}(p)$$

,

где $\overline{X}(p)$ и $\overline{Y}(p)$ - соответственно изображения стационарных случайных процессов X(t) и Y(t). Для удобства обозначим

$$A_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k; \quad B_m(p) = \sum_{k=0}^{m} b_k p^k,$$

тогда

$$\overline{Y}(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} \overline{X}(p) = C(p)\overline{X}(p).$$

Функция C(p) называется передаточной функцией стационарной линейной системы, а ее оригинал c(t) называется весовой функцией (функцией Грина) стационарной линейной системы.

В соответствии со свойствами преобразования Лапласа между реализациями стационарных случайных процессов X(t) и Y(t) имеется следующая зависимость (называемая сверткой функций c(t) и x(t)):

$$y(t)=\int_0^t c(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Как было показано ранее, стационарный случайный процесс X(t) имеет следующее каноническое разложение в комплексной форме

$$X(t)=m_X+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}W_n e^{i\omega_n t},$$

а его корреляционная функция имеет вид:

$$k_X(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}D_n e^{i\omega_n\tau}\,.$$

Рассмотрим реакцию системы на одну из гармоник, составляющих стационарный случайный процесс, то есть $x(t)=e^{i\omega t}$. Очевидно, что выходной сигнал будет иметь вид $y(t)=E\cdot e^{i\omega t}$. Так как $\frac{d^n}{dt^n}(e^{i\omega t})=(i\omega)^n e^{i\omega t}$, то дифференциальное уравнение принимает вид

$$(a_n(i\omega)^n+a_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\ldots+a_1 i\omega+a_0)Ee^{i\omega t}=$$

$$=(b_m(i\omega)^m+b_{m-1}(i\omega)^{m-1}+\ldots+b_1 i\omega+b_0)e^{i\omega t}\quad,$$

где $E=\dfrac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}=C(i\omega)\,.$

Следовательно, при возмущающем сигнале $e^{i\omega t}$ на выходе получается сигнал

$$y(t)=C(i\omega)e^{i\omega t}=\int_0^t c(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau\,.$$

Аналогично, при возмущающем сигнале $W_n e^{i\omega_n t}$ получаем

$$y_n(t)=W_n\,C(i\omega_n)e^{i\omega_n t}\,.$$

Наконец, для случайного процесса

$$X(t) = m_X + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_n e^{i\omega_n t}$$

получаем стационарный случайный процесс Y(t) со следующим спектральным разложением

$$Y(t) = m_Y + \sum_{n=\ \infty}^{+\infty} W_n C(i\omega_n) e^{i\omega_n t};$$

$$m_Y = \frac{b_0}{a_0} m_X = C(0) m_X .$$

Выходной сигнал Y(t) имеет следующие характеристики:

$$m_Y = \frac{b_0}{a_0} m_X; \qquad k_Y(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \left|C(i\omega_n)\right|^2 e^{i\omega_n \tau};$$

$$D_Y = k_Y(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \left|C(i\omega_n)\right|^2;$$

$$s_Y^*(\omega) = \left|C(i\omega)\right|^2 s_X^*(\omega),$$

где $D_n = D(W_n) = D(W_{-n})$; $\qquad W_{-n} = \overline{W}_n$.

Полученный результат допускает простое физическое толкование. При прохождении стационарного случайного процесса X(t) через стационарный линейный преобразователь меняются амплитуды дисперсий различных гармоник. Если $\left|C(i\omega_n)\right| > 1$, то соответствующая дисперсия вырастает; если $\left|C(i\omega_n)\right| < 1$, то уменьшается. Так как все гармоники имеют математическое ожидание равное 0, то уменьшение дисперсии означает, что эта гармоника фактически удаляется (отфильтровывается) из выходного сигнала.

Таким образом, если случайный процесс X(t) и его корреляционная функция $k_X(\tau)$ заданы в виде спектрального разложения, то приведенные выше формулы полностью решают вопрос о спектральном разложении случайного процесса Y(t) и расчете его характеристик.

Если же известны математическое ожидание m_X, корреляционная функция $k_X(\tau)$ или спектральная плотность

$$s_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,$$

то далее последовательно находятся

$$m_Y = \frac{b_0}{a_0}m_X; \qquad |C(i\omega)|^2;$$

$$s_Y^*(\omega) = |C(i\omega)|^2 \cdot s_X^*(\omega);$$

$$k_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_Y^*(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega; \qquad D_Y = k_Y(0).$$

Пример 19. На вход стационарной линейной системы с передаточной функцией C(p) подается «белый шум» X(t) со следующими характеристиками: m_X; $k_X(\tau) = W\,\delta(\tau)$; $s_X^*(\omega) = \frac{W}{2\pi}$. Найти характеристики выходного сигнала Y(t). Рассмотреть частный случай системы, которая описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$4\frac{d^3Y(t)}{dt^3} + 13\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 11\frac{dY(t)}{dt} + 2Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} + 7X(t).$$

Решение.

Из общих формул получаем:

$$m_Y = C(0)m_X; \quad s_Y^*(\omega) = |C(i\omega)|^2\frac{W}{2\pi}; \quad k_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_Y^*(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega;$$

$$D_Y = k_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_X^*(\omega)\,d\omega.$$

В частности, для заданной системы получаем

$$C(i\omega) = \frac{1\cdot i\omega + 7}{4(i\omega)^3 + 13(i\omega)^2 + 11(i\omega) + 2}.$$

Знаменатель дроби может быть разложен на множители:

$$4p^3 + 13p^2 + 11p + 2 = (4p+1)(p+1)(p+2),$$

следовательно,

$$C(i\omega) = \frac{i\omega + 7}{(4i\omega+1)(i\omega+1)(i\omega+2)};$$

$$\left|C(i\omega)\right|^2 = C(i\omega)\cdot\overline{C(i\omega)} = \frac{49+\omega^2}{(16\omega^2+1)(\omega^2+1)(\omega^2+4)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов данное выражение можно представить как сумму следующих дробей:

$$\left|C(i\omega)\right|^2 = \frac{52}{3}\cdot\frac{1}{4\omega^2+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\omega^2+1} + \frac{1}{\omega^2+4}.$$

Спектральная плотность случайного процесса Y(t) имеет вид:

$$s_Y^*(\omega) = \frac{W}{2\pi}\left(\frac{52}{3}\cdot\frac{1}{4\omega^2+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\omega^2+1} + \frac{1}{\omega^2+4}\right).$$

По таблице соответствий получаем

$$\frac{1}{\omega^2+4} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{2}{\pi}}{\omega^2+\tau^2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}e^{-2|\tau|}; \qquad \frac{1}{\omega^2+1} = \pi\cdot\frac{\frac{1}{\pi}}{\omega^2+1^2} \longrightarrow \pi e^{-|\tau|};$$

$$\frac{1}{4\omega^2+1} = \frac{2\pi}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2\pi}}{\omega^2+(1/2)^2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{2}|\tau|},$$

следовательно,

$$k_Y(\tau)=\frac{W}{2\pi}\left(\frac{52}{3}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}-\frac{16}{3}\cdot\pi e^{-|\tau|}+\frac{\pi}{2}e^{-2|\tau|}\right)=\frac{W}{12}\left(52e^{-\frac{1}{2}|\tau|}-32e^{-|\tau|}+3e^{-2|\tau|}\right);$$

$$D_Y=k_Y(0)=\frac{23}{12}W.$$

Пример 20. На вход линейной стационарной системы

$$a_1\frac{dY(t)}{dt}+a_0Y(t)=b_0X(t)$$

подается случайный сигнал X(t), имеющий следующие характеристики: математическое ожидание m_X и корреляционную функцию $k_X(t)=e^{-\lambda|\tau|}$. Найти характеристики выходного сигнала Y(t).

Решение.

1. Спектральная плотность случайного процесса X(t):

$$s_X^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda|\tau|}\cdot e^{-i\omega t}\,d\tau=\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+\omega^2)}.$$

2. Передаточная функция и квадрат ее модуля:

$$C(i\omega)=\frac{b_0}{a_0+ia_1\omega};\qquad |C(i\omega)|^2=\frac{b_0^2}{a_0^2+a_1^2\omega^2}.$$

3. Спектральная плотность случайного процесса Y(t):

$$s_Y^*(\omega)=\frac{b_0^2}{a_0^2+a_1^2\omega^2}\cdot\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+\omega^2)}=\frac{\lambda b_0^2}{\pi a_1^2}\cdot\frac{1}{((a_0/a_1)^2+\omega^2)(\lambda^2+\omega^2)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов получаем:

$$s_Y^*(\omega)=\frac{\lambda b_0^2}{\pi a_1^2(\lambda^2-(a_0/a_1)^2)}\left(\frac{1}{(a_0/a_1)^2+\omega^2}-\frac{1}{\lambda^2+\omega^2}\right).$$

По таблице соответствий:

$$k_Y(\tau) = \frac{\lambda b_0^2}{a_1^2(\lambda^2 - (a_0/a_1)^2)}\left(\frac{a_1}{a_0}e^{-\frac{a_0}{a_1}|\tau|} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda|\tau|}\right); \quad D_Y = \frac{b_0^2}{a_0(a_0 + \lambda a_1)}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Задан случайный процесс X(t)=f(t; A), где A-дискретная случайная величина, значения которой указаны в **Таблице 1 (Приложение 1)** . Изобразить все реализации и сечения в моменты времени, указанные в таблице.

2. Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию, нормированную корреляционную функцию и одномерную плотность (для нормально распределенных случайных величин A и B) случайного процесса X(t), структура которого описана в **Таблице 2 (Приложение 1)**. Во всех вариантах считать случайные величины A и B независимыми. (Пропуск в таблице означает совпадение законов распределения случайных величин A и B).

3. Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и нормированную корреляционную функцию случайных процессов X(t), $X'(t)$, $\int_0^t X(s)\,ds$ (см. **Таблица 3, Приложение 1)**. Найти взаимные корреляционные функции случайных процессов X(t) и $X'(t)$; X(t) и $\int_0^t X(s)\,ds$. Во всех вариантах A – произвольно распределенная случайная величина с математическим ожиданием m_A и дисперсией $D_A = \sigma^2$.

4. Задано (см. **Таблица 4, Приложение 1)** каноническое разложение случайного процесса X(t). Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию, одномерную и двумерную плотности распределения. Во всех вариантах A_k - независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами (0;1).

5. Случайный процесс X(t) (см. **Таблица 5, Приложение**

1) имеет известное математическое ожидание $m_X(t), \quad 0 \le t \le T$ и корреляционную функцию $K_X(t_1;t_2)$. Найти каноническое разложение X(t) по координатным функциям $\phi_k(t)$ при условии, что коэффициентами разложения являются нормально распределенные случайные величины V_k.

6. Задано (см. **Таблица 6, Приложение 1)** каноническое разложение случайного процесса X(t); во всех вариантах V_k - центрированные некоррелированные случайные величины с конечными дисперсиями D_{V_k}. Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и построить каноническое разложение случайного процесса Y(t):

$$Y(t) = A\frac{dX(t)}{dt} + B\int_0^t X(s)\,ds + C, \qquad \text{где } A, B, C - \text{const.}$$

7. Доказать, что случайный процесс X(t):

$$X(t) = V\cos(A\psi t - \Theta) + U\sin(B\psi t - \Theta)$$

является стационарным в широком смысле и найти его характеристики; V, U, Θ - независимые случайные величины; $MV = m_V;\ MU = m_U;$

$DV = \sigma_V^2;\ DU = \sigma_U^2;$ Θ - равномерно распределенная на отрезке $[0; 2\pi]$ случайная величина; ψ - const. Значения констант A и B взять из **Таблицы 6 (Приложение 1).**

8. Корреляционная функция стационарного случайного процесса X(t) имеет вид:

$$k_X(\tau) = e^{-A|\tau|} \cdot (B + C|\tau|).$$

Найти корреляционные функции, дисперсии, взаимные корреляционные функции случай- ных процессов X(t); $X'(t)$;

$Y(t)=\int_0^t X(s)\,ds$. Значения констант A,B,C взять из **Таблицы 6 (Приложение 1).**

9. Рассматривается простейший поток событий с интенсивностью λ. В момент наступления очередного события в потоке случайный процесс X(t) принимает одно из значений непрерывной случайной величины A. Считая все сечения независимыми, найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса X(t). Тип и параметры случайной величины A взять из **Таблицы 2 (Приложение 1).**

10. По графику одной из реализаций эргодического стационарного случайного процесса X(t) найти приближенные значения математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции (см. **Приложение 2).** Во всех вариантах считать масштабы осей Ot и OX(t) одинаковыми; $t \in [0;\, 20]$.

11. Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса X(t), если задана корреляционная функция $k_X(\tau)$ (см. **Таблица 7, (Приложение 1**).

12. Найти корреляционную функцию и дисперсию стационарного случайного процесса X(t), если задана его спектральная плотность $s^*_X(\omega)$ (см. **Таблица 8, Приложение 1).**

13. Стационарная линейная система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$A\frac{d^3Y(t)}{dt^3}+B\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+C\frac{dY(t)}{dt}+D\,Y(t)=E\frac{d^2X(t)}{dt^2}+F\frac{dX(t)}{dt}+G\,X(t).$$

На вход подается стационарный «белый шум» X(t) с характеристиками:

$$s^*_X(\omega)=\frac{W}{2\pi};\qquad k_X(\tau)=W\cdot\delta(\tau),$$

где W - интенсивность «белого шума»; δ(τ) - дельта-функция Дирака. Найти характеристики выходного сигнала Y(t).

Таблица 9

№	1	2	3	4	5	6
A,B,C, D,E,F,G	1,6,11,6,0, 1,0	1,7,16,12,0 ,0,1	1,-6,12, -8,1,0,1	1,-1,-4, -6,1,0,1	1,-1,-10, -8,0,1,1	1,3,0, -4,1,1,0
№	7	8	9	10	11	12
A,B,C,D,E, F,G	1,9,27,27,1 ,1,1	1,4,6, 4,2,0,0	1,2,-9, -18,0,2,0	1,-4,-3, 18,0,0,2	3,-9,9, -3,1,0,2	1,5,9, 5,0,1,2
№	13	14	15	16	17	18
A,B,C,D,E, F,G	1,-7,15,- 9,2,1,0	1,9,26, 24,2,0,1	1,6,-3, -10,0,2,1	1,7,2, -40,1,2,0	1,-1,-5, -3,1,0,2	1,-5,-1, 5,1,1,2
№	19	20	21	22	23	24
A,B,C,D,E, F,G	1,12,48, 64,1,2,1	1,1,-10, 8,2,1,1	1,4,5, 2,0,1,0	1,-2,-13, -10,0,0,1	1,-2,-16, 32,1,0,0	1,6,9, 4,1,2,0
№	25	26	27	28	29	30
A,B,C,D,E, F,G	1,-1,-17,- 15,0,0,2	1,-2,-13,- 10,2,0,1	1,-3,- 9,5,0,1,1	1,-15,75, -125,2,-1,0	1,-3,-8, -10,0,0,2	1,-1,-15, -25,2,1,1

14. На вход линейной стационарной системы:

$$A\frac{dY(t)}{dt}+BY(t)=C\frac{dX(t)}{dt}+D$$

подается стационарный случайный сигнал X(t) с математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $k_X(\tau)=e^{-\lambda|\tau|}$. Найти характеристики выходного сигнала Y(t). Значения коэффициентов A,B,C,D взять из **Таблицы 9.**

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X(t)	A^t	A sint	$\log_2(t+A)$	e^{-At}	A $\log_3(t+1)$	cos(At)	A cost	A^{-t}
A	$\frac{1}{9}; \frac{1}{4}$	-1; 0; 1	1; 4; 8	0; 1; 2	-1; 0; 1	0; 1; 2	-1; 0; 1	1; 2
t	$0; \frac{1}{2}; 1$	$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \pi$	0; 3; 7	0; 1; 3	0; 2; 8	$0; \frac{\pi}{2}; \pi$	$0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$	0; 1; 2

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X(t)	t arcsinA	t^2+A	arccos(At)	$\frac{1}{t+A}$	t+arctgA	$\frac{e^t}{1+A}$	t^A	A $\sin^2 t$
A	$-1; 0; \frac{1}{2}$	-2; 0; 1	-1; 0; 1	0; 1; 2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 1$	0; 1; 2	1; 2; 3	-1; 0; 2
t	0; 1	0; 1; 2	$0; \frac{1}{2}; 1$	$\frac{1}{2}; 1; 2$	$0; \frac{\pi}{2}; \pi;$	-1; 0; 1	$0; \frac{1}{2}; 1$	$0; \frac{\pi}{2}; \pi$

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X(t)	2^{t-A}	arcsin(At)	$\frac{A^2}{1+t}$	$\frac{\sin A}{t+2}$	$\log_3(2t+A)$	A tgt	t^3+A	$\frac{t}{\arccos A}$
A	0; 1; 2	$0; \frac{1}{2}; 1$	0; 1; 2	$0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$	1; 3; 9	1; 2; 3	-1;0; 1	$0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$
t	0; 2; 3	$0; \frac{1}{2}; 1$	0; 1; 3	0; 1; 2	0; 1; 4	$0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$	0; 1; 2	0; 1; 2

№	25	26	27	28	29	30
X(t)	sin(At)	$\log_2(At+1)$	cos(A+t)	$\frac{2A}{e^t}$	$(1+A)^t$	tg(At)
A	-1;0;1	0; 1; 2	$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \pi$	0; e; 4	0; 1; 2	$0; 1; \frac{3}{2}$
t	$0; \frac{\pi}{6}$	0; 3	$0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$	-1; 0; 1	0; 1; 2	$0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}$

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7
X(t)	A sint+B	$A(t^2+t)+B$	$e^{-At}+B$	sin(At)+B	Acos(2t)+ +B	Asin(t+B)	A sin(2t-B)
A	норм. распред (0; 1)	норм. распред (a; σ)	равномер. распред [-1; 1]	равномер. распред [2; 4]	норм. распред (0; 1)	норм. распред (a; σ)	норм. распред (a; σ)
B						равномер. распред [0; 2π]	равномер. распред [0; 2π]

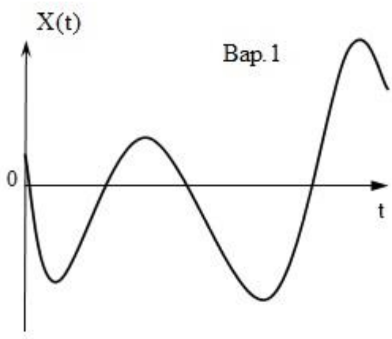
№	8	9	10	11	12	13	14
X(t)	$At+Bt^2$	Asint+ +Bcost+t	sin At+B	ln(At+1)+ +B	Acost+B	2At+B	$e^{-2At}+B$
A	норм. распред. (0; 1)	норм. распред (a; σ)	равномер. распред [-π; π]	равномер. распред [1; 2]	норм. распред (0; 1)	норм. распред (a; σ)	равномер. распред [-1; 1]
B	норм. распред. (0; 2)	норм. распред. (0; 1)	норм. распред. (0; 1)				

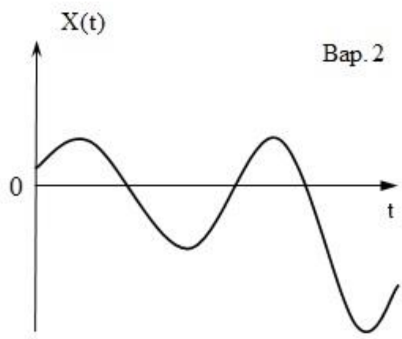
№	15	16	17	18	19	20	21
X(t)	Acos(3t+B)	Asin(t-B)	Asin(3t+B)	Asin2t+ +Bcost	At^3+Bt	cosAt+B	ln(2At+1)+ +3B
A	норм. распред. (a; σ)	норм. распред (a; σ)	норм. распред (a; σ)	норм. распред (a; σ)	норм. распред (0; 1)	равномер. распред [-π; π]	равномер. распред [1; 2]
B	равномер. распред [0; 2π]	равномер. распред [0; 2π]	равномер. распред [0; 2π]		норм. распред. (0; 2)	норм. распред. (0; 1)	

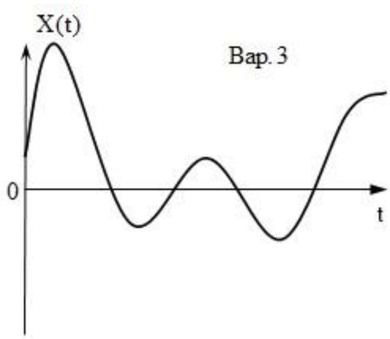
№	22	23	24	25	26	27	28
X(t)	Acos(t-B)	Acos(2t+B)	Asint+ +Bcost	cosAt+B	Asin3t+B	Acos(t+B)	3Acos2t+B
A	норм. распред (a; σ)	норм. распред (a; σ)	норм. распрд (0; σ)	равномер. распред [0; 2]	норм. распред (0; 1)	норм. распред (a; σ)	норм. распред (0; 1)
B	равномер. распред [0; 2π]	равномер. распред [0; 2π]				равномер. распред [0; 2π]	

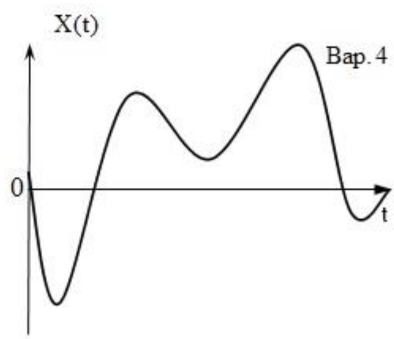
№	29	30
X(t)	$e^{-At}+Bt$	A cos(2t+B)
A	равномер. распред [1; 2]	норм. распред (a; σ)
B		равномер. распред [0; 2π]

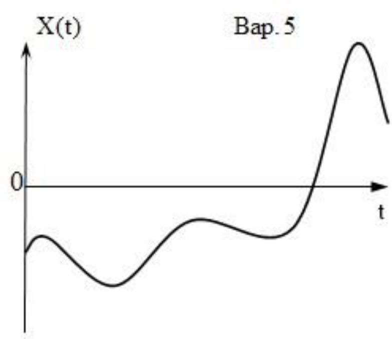
ПРИЛОЖЕНИЕ 2

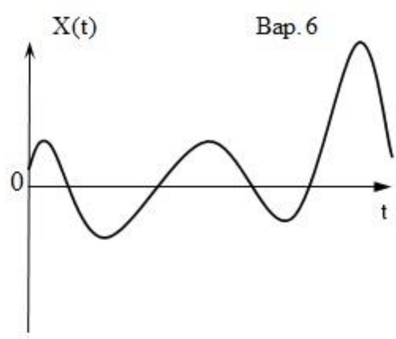


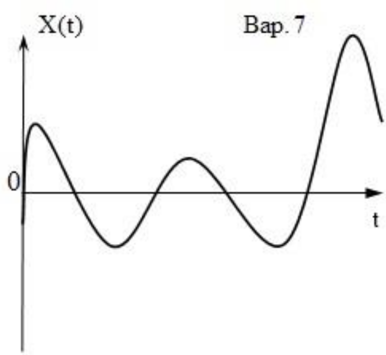


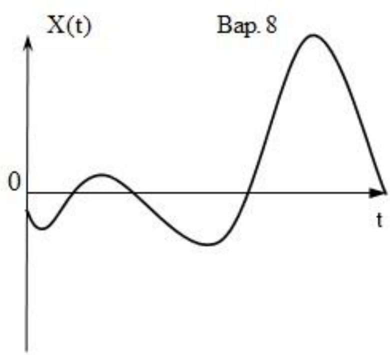


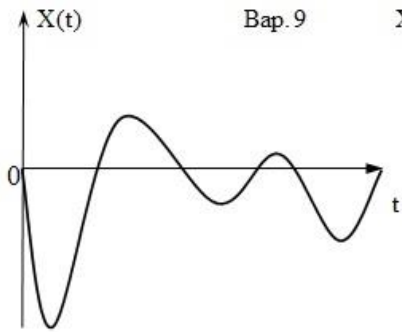


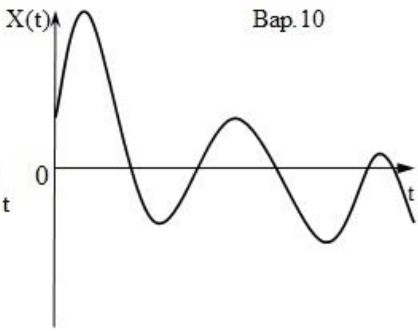


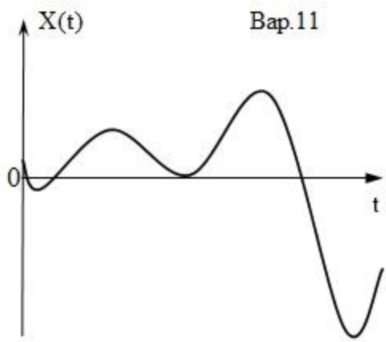


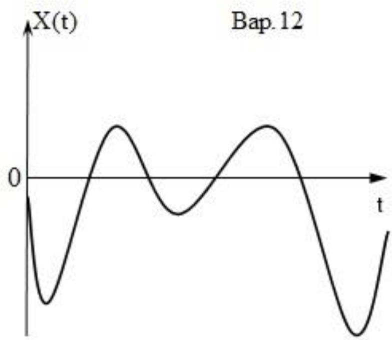

X(t)
Вар. 7
0
t

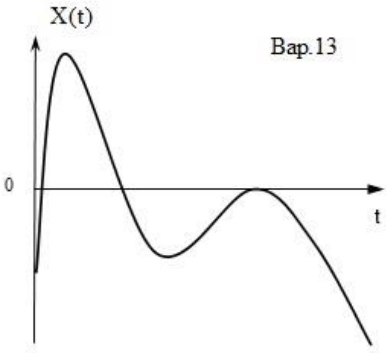

X(t)
Вар. 8
0
t

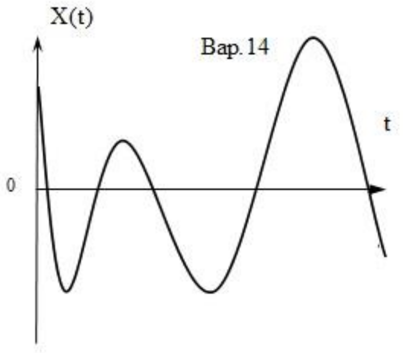

X(t)
Вар. 9
0
t

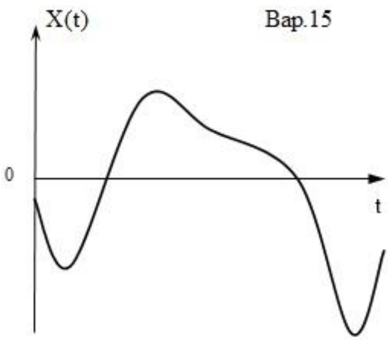

X(t)
Вар. 10
0
t

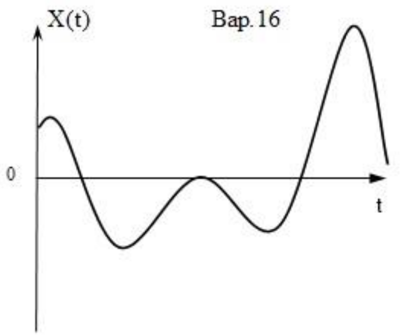

X(t)
Вар.11
0
t

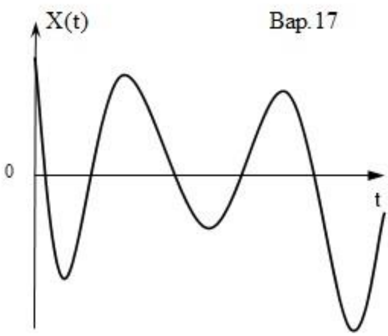

X(t)
Вар. 12
0
t

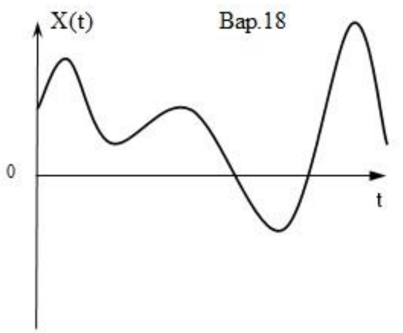

X(t)
Вар.13
0
t

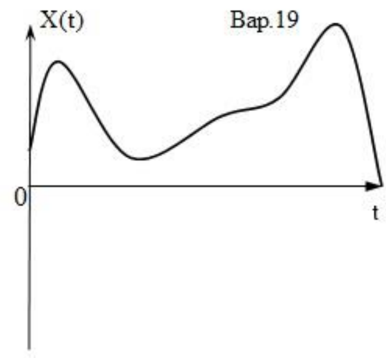

X(t)
Вар.14
0
t

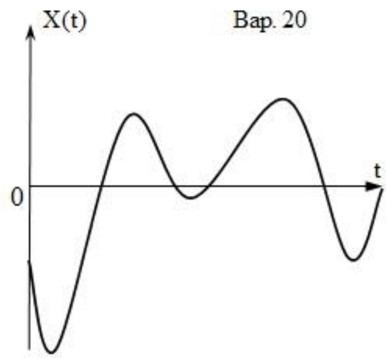

X(t)
Вар.15
0
t

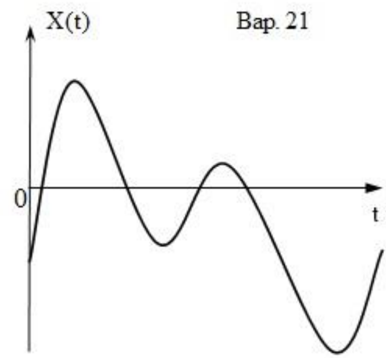

X(t)
Вар.16
0
t

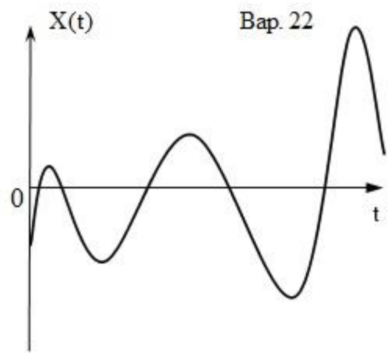

X(t)
Вар.17
0
t

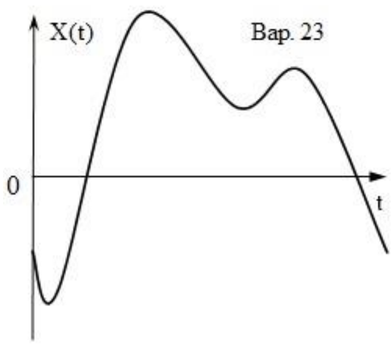

X(t)
Вар.18
0
t

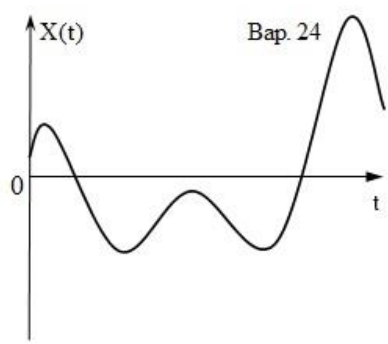

X(t)
Вар.19
0
t

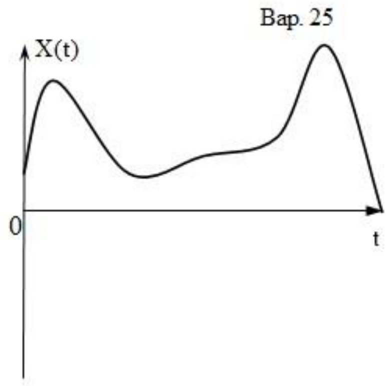

X(t)
Вар. 20
0
t

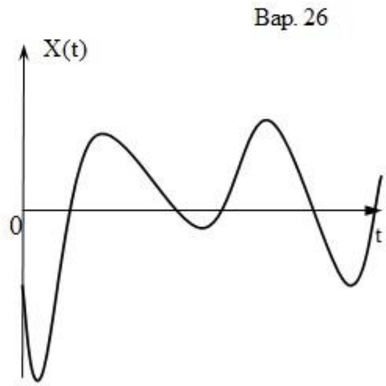

X(t)
Вар. 21
0
t

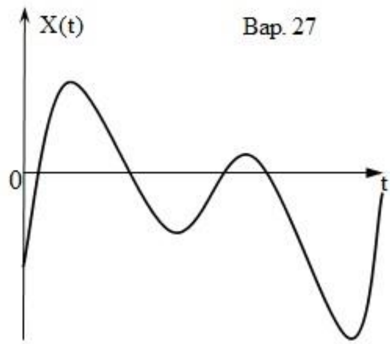

X(t)
Вар. 22
0
t

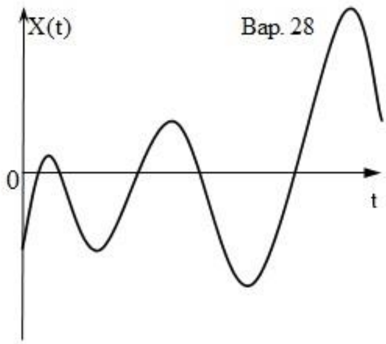

X(t)
Вар. 23
0
t

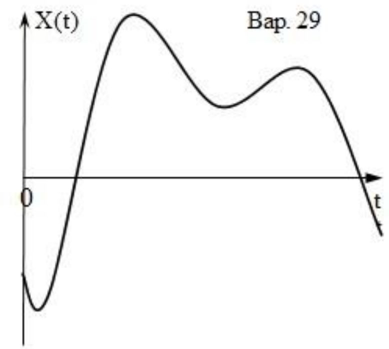

X(t)
Вар. 24
0
t

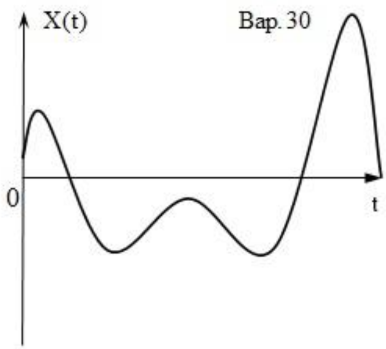

Вар. 25
X(t)
0
t


Вар. 26
X(t)
0
t


X(t)
Вар. 27
0
t


X(t)
Вар. 28
0
t


X(t)
Вар. 29
0
t


X(t)
Вар. 30
0
t

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Приложение 3

Таблица соответствий корреляционных функций $k_X(\tau)$ и спектральных плотностей $s_X^*(\omega)$

№	$k_X(\tau)$	$s_X^*(\omega)$
1	$D\delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака	$D/2\pi$
2	D	$D\delta(\omega)$
3	$\sum_{k=1}^{n} D_k \cos\beta_k\tau$	$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} D_k[\delta(\omega+\beta_k)+\delta(\omega-\beta_k)]$
4	$D\cos\beta\tau$	$\frac{D}{2}[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)]$
5	$De^{-\alpha\|\tau\|}, \quad \alpha>0$	$\frac{D\alpha}{\pi}\left(\alpha^2+\omega^2\right)^{-1}$
6	$\sum_{k=1}^{n} D_k e^{-\alpha_k\|\tau\|}$, $\alpha_k>0,\ k=1,\dots,n$	$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(D_k\alpha_k)\left(\alpha_k^2+\omega^2\right)^{-1}$
7	$De^{-\alpha\|\tau\|}\cos\beta\tau,\ \alpha>0,\ \beta>0$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{\left[\alpha^2+(\beta-\omega)^2\right]\left[\alpha^2+(\beta+\omega)^2\right]}$
8	$De^{-\alpha\|\tau\|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\|\tau\|\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(\omega^2+\alpha^2-\beta^2\right)+4\alpha^2\beta^2}$
9	$De^{-\alpha\|\tau\|}\left(\cos\beta\tau-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\|\tau\|\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2\omega^2}{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)-4\beta^2\omega^2}$
10	$De^{-\alpha\|\tau\|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta\|\tau\|\right)$, $\alpha\ge\beta$	$\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{\left[(\alpha-\beta)^2+\omega^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2+\omega^2\right]}$

№	$k_X(\tau)$	$s_X^*(\omega)$
11	$D(1-\|\tau\|)\cdot H(1-\|\tau\|)$, $H(x)$ - функция Хевисайда	$\frac{D}{2\pi}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^2$
12	$De^{-\alpha\|\tau\|}(1+\alpha\|\tau\|)$	$\frac{D}{\pi}\frac{2\alpha^4}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$
13	$De^{-\alpha\|\tau\|}\left(1+\alpha\|\tau\|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$	$\frac{D}{\pi}\frac{\alpha^5}{3(\omega^2+\alpha^2)^3}$
14	$De^{-\alpha\|\tau\|}(1+\alpha\|\tau\|-2\alpha^2\tau^2+$ $+\frac{1}{3}\alpha^2\|\tau\|^3)$	$\frac{D}{\pi}\frac{16\alpha^4\omega^4}{(\omega^2+\alpha^2)^4}$
15	$\frac{2\alpha\sin\beta\tau}{\tau}$, $\alpha>0,\ \beta>0$	$\alpha\cdot H(1-\|\omega\|/\beta)$
16	$2\alpha^2(2\cos\beta\tau-1)\frac{\sin\beta\tau}{\tau}$	$\begin{cases}0, & 0\le\|\omega\|\le\beta\\ \alpha^2, & \beta<\|\omega\|\le 2\beta\\ 0, & 2\beta<\|\omega\|\end{cases}$
17	$De^{-(\alpha\tau)^2}$	$\frac{D}{2\alpha\sqrt{\pi}}\cdot e^{-(\omega/2\alpha)^2}$
18	$De^{-\alpha\|\tau\|}(2\delta(\tau)-\alpha(\text{sign }\tau)^2)$	$\frac{D}{\pi}\cdot\frac{\alpha\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1979. 184с.

2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М. Наука, 1975.320 с.

3. Вентцель Е.С., Теория случайных процессов и ее инженерные Овчаров Л.А. приложения. М.: Высш. шк., 2000. 383 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1997. 479 с.

5. Тарасов Е.А., Учебное задание для типового расчета по матема тической статистике и теории случайных функций. Рн/Д: ДГТУ, 1996. 31