ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математический анализ» (Часть 2)

Авторы
Ермилова О. В.,
Артамонова Е. А.

Ростов-на-Дону, 2025

Аннотация

«Учебное пособие» предназначено для студентов очной формы обучения, технических направлений и специальностей. Может быть использовано для аудиторной и самостоятельной работы по дисциплине «Математический анализ».

Авторы

Старший преподаватель каф. «Прикладная математика»
Ермилова О. В.
Старший преподаватель каф. «Прикладная математика»
Артамонова Е. А.

Оглавление

Глава 1. неопределённый интеграл 5

1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.. 5
1.2. Свойства и таблица неопределенного интеграла...... 6
1.2. Основные методы интегрирования. 11
Задания для самостоятельного решения. 21
1.3. Интегралы, приводящиеся к интегралам «группы четырёх»...27
1.4. Методы интегрирования различных классов функций. 31
1.5. «Берущиеся» и «не берущиеся» интегралы. 69

Глава 2. определённый интеграл 71

2.1. Определение определенного интеграла и геометрический смысл. 71
2.2. Формула Ньютона-Лейбница...................................73
2.3. Свойства определенного интеграла. 75
2.3. Методы вычисления определенного интеграла........79
2.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах интегрирования................................85
2.5. Несобственные интегралы. 87
2.6. Приложения определенного интеграла...................99

Глава 3. Дифференциальные Уравнения........................ 129

3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка, общие понятия..130
3.2. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Метод изоклин. 135
3.3. Основные виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решений.................................137

Глава 4. Дифференциальные Уравнения высших порядков 195

4.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия...195
4.2. Основные виды дифференциальных уравнений высших порядков и методы их решений...............................198

Глава 5. Системы Дифференциальных Уравнений 256

5.1. Системы дифференциальных уравнений, основные

понятия..256
5.2. Методы решения систем линейных дифференциальные уравнений, с постоянными коэффициентами..261
Перечень использованных информационных ресурсов 275

ГЛАВА 1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.

При изучении дифференциального исчисления основной задачей была: по данной функции $F(x)$, найти её производную $F'(x)$. Разнообразные вопросы математического анализа и его приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$,производная от которой была бы равна функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Таким образом, восстановление функции по известной производной этой функции - одна из задач интегрального исчисления.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Пример 1.1. Показать, что функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$.

Решение.

Так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}(x^4)' = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 = f(x)$, то $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$. Очевидно, что первообразными будут так же любые функции вида $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, где $C = const$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3 = f(x)$.

Теорема 1.1. Если функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C-постоянное число.

Доказательство.

Пусть функция $\Phi(x)$ любая другая первообразная для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то есть $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a;b)$ имеем:

$\left(\Phi(x) - F(x)\right)' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, следовательно

$\Phi(x) - F(x) = C$, то $\Phi(x) = F(x) + C$.

Совокупность всех первообразных $F(x)+C$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, $C=const$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x)+C.$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования, $\int$ – знак неопределенного интеграла.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется **интегрированием.**

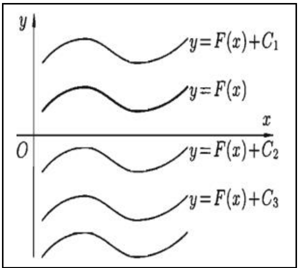

Рис.1

Геометрический смысл неопределенного интеграла – это семейство параллельных интегральных кривых $y=F(x)+C$, где каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства(рис.1).

График каждой первообразной (кривой) называется **интегральной кривой.**

Замечание: Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

1.2. Свойства и таблица неопределенного интеграла.

Отметим свойства неопределенного интеграла, вытекающие из его определения.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = \left(F(x)\right)' + (C)' =$$
$$= F'(x) = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Доказательство.

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx =$$
$$= F'(x)dx = f(x)dx.$$

Замечание: из данных свойств, следует, что интегрирование является обратной операцией к дифференцированию, обратное так же верно.

Пример 1.2. Проверить, верно ли равенство:
$\int(2x+3)dx = x^2 + 3x + C$.

Решение.

$d(x^2 + 3x + C) = (x^2 + 3x + C)'dx = (2x+3)dx$,
дифференциал правой части исходного равенства совпадает с подынтегральным выражением в левой части ,следовательно, равенство верно.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции, то есть

$$\boldsymbol{\int dF(x) = F(x) + C.}$$

Доказательство.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций, то есть

$$\boldsymbol{\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.}$$

Доказательство.

Действительно, пусть $F(x), G(x)$ – первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то есть
$F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, тогда,

$$\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int\big(F'(x) \pm G'(x)\big)dx =$$
$$= \int \big(F(x) \pm G(x)\big)'dx = \int d\big(F(x) \pm G(x)\big) =$$
$$= F(x) \pm G(x) + C = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) =$$
$$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \text{где } C = C_1 \pm C_2.$$

Замечание: Это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций, то есть

$$\int\big(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)\big)dx =$$
$$= \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть

$$\boldsymbol{\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}, \text{ где } k - const.$$

Доказательство.

$$\int kf(x)\,dx = \int kF'(x)\,dx = \int \left(kF(x)\right)'\,dx =$$
$$= \int d\left(kF(x)\right) = kF(x) + C_1 = k\left(F(x) + \frac{C_1}{k}\right) =$$
$$= k(F(x) + C) = k\int f(x)\,dx\text{, где } C = \frac{C_1}{k}.$$

Замечание: свойства 4 и 5 можно объединить в одно и получить равенство

$$\int \left(k_1 f(x) + k_2 g(x)\right) dx = k_1 \int f(x)\,dx + k_2 \int g\,(x)dx -$$

-линейность неопределённого интеграла, данное равенство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

6.Инвариантность формулы интегрирования:

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной x любой дифференцируемой функции от нее $u = \varphi(x)$, то есть

Если $\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}$, то и $\int \boldsymbol{f(u)du = F(u) + C}$, где $u = \varphi(x)$ произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Доказательство.

Пусть x –независимая переменная, $f(x)$ –непрерывная функция и $F(x)$ –её первообразная, тогда как нам уже известно $\int f(x)dx = F(x) + C$.Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$-непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F\left(\varphi(x)\right)$. В силу инвариантности дифференциала функции

$dF(u) = F'(u)du = f(u)du$. Отсюда,

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C.$$

Так, например, если $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, то

$$\int cos^3 x d(cos\,x) = |u = cosx| = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{cos^4 x}{4} + C.$$

Таким образом, любая формула интегрирования остается справедливой при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции .

В частности, вместо буквы x при интегрировании может быть использована любая другая буква, например u, t, z и так далее.

Заменим в формуле $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, например x на u: $\int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C$.

Таблица неопределенных интегралов.

Пользуясь тем, что действие обратное интегрированию дифференцирование, можно составить таблицу основных интегралов с помощью которой получаем различные значения неопределенных интегралов от заданных функций.

Таблица основных интегралов.

1. $\int 0du = C, C = const;$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$

4. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C;$

5. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1;$

6. $\int e^u du = e^u + C;$

7. $\int cosudu = sinu + C;$

8. $\int sinudu = -cosu + C;$

9. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C;$

10. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C;$

13. «Длинный» логарифм:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = ln\left|u + \sqrt{u^2+k}\right| + C;$$

14. «Высокий» логарифм:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

Интегралы в выше приводимой таблице называются **табличными**. Их следует знать наизусть.

Зная свойство неопределённого интеграла: производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$\left(\int f(u)du\right)' = f(u),$ можно вывести каждую из формул приведённых в таблице основных интегралов.

Покажем, например, справедливость формулы

8) $\int sinudu = -cosu + C,$ для этого достаточно показать, что производная правой части равенства, равна подынтегральной функции, находящейся в левой части равенства, то есть, то есть

$$(-cosu+C)'=-(cosu)'+(C)'=sinu=f(u).$$

Аналогично докажем, например, справедливость формул 4) и 12):

4) $\int\frac{du}{u}=ln|u|+C$, подынтегральная функция $\frac{1}{u}$ определена для всех значений $u\neq 0$, возможны два случая:

а) Если $u>0$, то $|u|=u$ и $ln|u|=ln\,u$, то $(ln|u|+C)'=$
$=(ln\,u+C)'=(lnu)'+(C)'=\frac{1}{u}$;

б) Если $u<0$, то $|u|=-u$ и $ln|u|=ln(-u)$, то

$$(ln|u|+C)'=(ln(-u)+C)'=\frac{1}{-u}(-u)'=\frac{1}{u}.$$

В обоих случаях получили подынтегральную функцию $\frac{1}{u}$, следовательно, формула верна;

12) $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C$, $\left(\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C\right)'=$

$$=\frac{1}{a}\left(arctg\frac{u}{a}\right)'+(C)'=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\right)\left(\frac{u}{a}\right)'=$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{u^2}{a^2}}\right)\frac{1}{a}(u)'=\frac{1}{a^2}\frac{a^2}{u^2+a^2}=\frac{1}{u^2+a^2}$$

- получили подынтегральную функцию, формула верна.

Таким же образом, можно показать справедливость остальных формул, займитесь этим самостоятельно.

Пример 1.3. Используя таблицу и, основные свойства неопределенных интегралов найти интеграл:

а) $\int\sqrt{x^3}dx$; **б)** $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}-5\cdot 2^x+1\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{4}{x^2+9}-\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx.$

Решение.

а) В таблице интегралов - интеграла от корня нет, зато есть интеграл от степенной функции (формула 3 в таблице интегралов), поэтому переходя от корня к степени и интегрируя, получим:

$$\int\sqrt{x^3}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C;$$

б) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные формулы 3, 5,2 соответственно, имеем:

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}-5\cdot 2^x+1\right)dx=2\int x^{-\frac{5}{3}}dx-5\int 2^x dx+\int dx=$$
$$=\left(-3x^{-\frac{2}{3}}+C_1\right)-\left(5\cdot\frac{2^x}{ln\,2}+C_2\right)+(x+C_3);$$

Замечание: при каждом интегрировании мы получаем свою произвольную постоянную, но нет необходимости писать её при вычислении каждого интеграла. Достаточно написать ее после выполнений всех интегрирований, так как сумма (разность) постоянных является постоянной $C=C_1-C_2+C_3$.

Таким образом, имеем:

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}-5\cdot 2^x+1\right)dx=-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-5\frac{2^x}{ln\,2}+x+C;$$

в) Применяя свойства неопределенного интеграла и табличные формулы, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2+9}-\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx=4\int\frac{dx}{x^2+3^2}-$$
$$-3\int\frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{4}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right)-$$
$$-3arcsin\left(\frac{x}{5}\right)+2\,ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$$

Пример 1.4. Вычислить интеграл $\int(x^2-2sinx++3)dx$ и проверить результат дифференцированием.

Решение.

$$\int(x^2-2sinx+3)dx=\int x^2dx-2\int sinxdx+3\int dx=$$
$$=\frac{1}{3}x^3+2cosx+3x+C;$$

<u>Проверка:</u>

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3+2cosx+3x+C\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'+$$
$$+2(cosx)'+3(x)'+(C)'=x^2-2sinx+3=f(x),$$

производная правой части полученного равенства совпадает с подынтегральной функцией, расположенной в левой части равенства $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$– значит интеграл вычислен правильно.

1.2. Основные методы интегрирования.

При интегрировании нет какого–либо общего приема вычисления интеграла. Имеется лишь ряд методов, позволяющих свести данный интеграл к табличному виду. Такими методами являются: метод непосредственного интегрирования, метод подведения функции под знак дифференциала, метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Данные методы интегрирования могут быть использованы как самостоятельно, так и в совокупности. Разберем каждый метод отдельности, а затем рассмотрим примеры совместного их применение.

1.2.1. Метод непосредственного интегрирования.

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием.**

Пример 1.5. Вычислить интеграл:

а) $\int \sqrt{x}(1+x^2)dx$;**б)**$\int \frac{x+2\sqrt{x}-7xe^x}{x}dx$; **в)**$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$.

Решение.

а) Раскрываем скобки и раскладываем полученное выражение на сумму интегралов (переходя от корня к степени), а затем воспользуемся таблицей интегралов (формула 3 в таблице):

$$\int \sqrt{x}(1+x^2)dx = \int \left(\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C;$$

б) Разложив интеграл на сумму интегралов - разделив числитель на знаменатель и применив свойства неопределенного интеграла, получим:

$$\int \frac{x+2\sqrt{x}-7xe^x}{x}dx = \int \left(\frac{x}{x}+\frac{2\sqrt{x}}{x}-\frac{7xe^x}{x}\right)dx =$$

$$= \int \left(1+2x^{-\frac{1}{2}}-7e^x\right)dx = \int dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 7\int e^x dx =$$

$$= x + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 7e^x + C = x + 4\sqrt{x} - 7e^x + C;$$

в) Раскладывая знаменатель (выражение под корнем) на множители и разделив числитель на знаменатель, получим табличные интегралы:

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\cdot\sqrt{2+x^2}}dx =$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right| + arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

1.2.2. Метод подведения функции под знак дифференциала.

Пусть функция под знаком интеграла имеет не табличный вид $\int f(\varphi(x))dx$.
Главной задачей метода подведения функции под знак дифференциала является приведение исходного интеграла к табличному виду $\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$, при помощи следующих преобразований дифференциала:
1) $\boldsymbol{f(x)dx = d(\int f(x)\, dx)}$**-внесение функции под знак дифференциала**, когда мы вносим функцию под знак дифференциала, то мы её интегрируем;
2) $\boldsymbol{d(f(x)) = f'(x)dx}$ **-вынесение функции из под знака дифференциала**, когда выносим функцию из-под знака дифференциала (раскрываем дифференциал),то есть находим её производную.

Пример 1.6. Вычислить интеграл:
а) $\int cos(x^3)d(x^3)$;**б)** $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$;**в)** $\int \frac{dx}{e^{-\frac{x}{2}}}$;**г)** $\int \frac{dx}{3x-1}$;
д) $\int \frac{sin\, xdx}{\sqrt[3]{cos\, x}}$;**е)** $\int \frac{2xdx}{x^4-1}$

Решение.

а) Подынтегральное выражение уже является подведенным под знак дифференциала, по формуле интегрирования $\int cos\, udu = sin\, u + C$, где $u = u(x)$ имеем:
$\int cos(x^3)d(x^3) = sin(x^3) + C$;
б) Заметем, что $2xdx$ есть не что иное, как дифференциал $d(x^2)$,действительно,
$d(x^2) = (x^2)'dx = 2xdx$, перепишем интеграл так: $\int e^{x^2} 2x\, dx = \int e^{x^2}\, d\,(x^2) = e^{x^2} + C$.
в) Преобразуем подынтегральную функцию:
$f(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x}{2}}} = e^{\frac{x}{2}}$, получим интеграл $\int \frac{dx}{e^{-\frac{x}{2}}} = \int e^{\frac{x}{2}}\, dx$ далее смотрим в таблицу интегралов и находим наиболее подходящую формулу: $\int e^u du = e^u + C$.Учитывая, что $\frac{1}{2}dx = d(\int \frac{1}{2}dx) = d\left(\frac{x}{2}\right)$,умножаем и

делим полученный интеграл на два и вносим $\frac{1}{2}$ под знак дифференциала, получаем табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{e^{-\frac{x}{2}}} = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2\int \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = 2\int e^{\frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2e^{\frac{x}{2}} + C;$$

г) Используя формулу $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$, приведем исходный интеграл к табличному виду $\int \frac{d(3x-1)}{3x-1}$, учитывая, что $3dx = d(\int 3dx) = d(3x) = d(3x-1)$ имеем:

$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{3}{3}\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3} ln|3x-1| + C;$

д) Преобразуем подынтегральную функцию

$f(x) = \frac{sin\, x}{\sqrt[3]{cos\, x}} = (cos\, x)^{-\frac{1}{3}} sin\, x$. Учитывая, что $sin\, x\, dx =$ $= d(\int sin\, x\, dx) = -d(cos\, x)$ и применяя табличную формулу $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$,имеем:

$$\int \frac{sin\, x\, dx}{\sqrt[3]{cos\, x}} = \int (cos\, x)^{-\frac{1}{3}} sin\, x\, dx = -\int (cos\, x)^{-\frac{1}{3}} d(cos\, x) =$$

$$= -\frac{(cos\, x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3(cos\, x)^{\frac{2}{3}}}{2} + C;$$

е) Учитывая, что $2xdx = d(\int 2xdx) = d(x^2)$ и применяя табличную формулу $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ имеем:

$$\int \frac{2xdx}{x^4-1} = \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 - 1^2} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C.$$

Посмотрим, на следующих примерах, как применяются совместно (в одном примере) два приёма- метод разложения на алгебраическую сумму и подведение функции под знак дифференциала.

Пример 1.7. Вычислить интеграл:

а) $\int \frac{x+2}{x+3} dx$;**б)** $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} dx$;**в)** $\int \frac{3\sqrt{x} - 2cos\frac{1}{x^2}}{x^3} dx$.

Решение.

а) С помощью алгебраических преобразований построим в числителе знаменатель и почленно разделим, далее учитывая, что $d(x+3) = (x+3)'dx = 1dx = dx$ получим:

$$\int \frac{x+2}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)-1}{x+3} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{d(x+3)}{x+3} = x - ln|x+3| + C;$$

б) По формуле $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$имеем:

$e^{3x} - 1 = (e^x)^3 - 1^3 = (e^x - 1)(e^{2x} + e^x + 1)$,тогда

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx = \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x-1}dx = \int (e^{2x}+e^x+1)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) + \int e^x dx + \int dx = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + x + C.$$

в) Почленно делим числитель на знаменатель и учитывая, что $x^{-3}dx = d(\int x^{-3}dx) = d\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)$ имеем:

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 2\cos\frac{1}{x^2}}{x^3}dx = 3\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3}dx - 2\int \frac{\cos\frac{1}{x^2}}{x^3}dx =$$
$$= 3\int x^{-\frac{5}{2}}dx - 2\int \cos\frac{1}{x^2}\cdot x^{-3}dx = 3\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\left(-\frac{3}{2}\right)} +$$
$$+ \int \cos\frac{1}{x^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + \sin\frac{1}{x^2} + C.$$

1.2.3. Метод замены переменной.

Иногда для того, чтобы привести интеграл к табличному виду необходимо выполнить замену переменной (подстановку).Метод замены переменной заключается в введении новой переменной интегрирования $x = \varphi(t)$ или $t = \varphi(x)$, относительно которой исходный интеграл является табличным или сводящимся к табличному (в случае «удачной» подстановки), далее вычисляют преобразованный интеграл, а затем возвращаются к старой переменной.

Если $f(x)$ –непрерывная функция, $F(x)$ –её первообразная ,а $\varphi(x)$ –дифференцируемая функция, то изложенная идея выглядит так:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = d(\varphi(x)) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(t)\,dt =$$
$$= F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Результат легко проверяется дифференцированием:

$$\left(F(\varphi(x)) + C\right)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Запишем алгоритм вычисления неопределённого интеграла при использовании метода замены переменной.

Алгоритм (замены переменной):

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $t = \varphi(x)$;

2)Найти связь между дифференциалами t и $\varphi(x)$(продифференцировать обе части равенства $t = \varphi(x)$):

$dt = \varphi'(x)dx$;

3) Перейти к новой переменной t;

4)Проинтегрировать и вернуться к старой переменной x.

Для удобства, замену обычно пишут в прямых скобках | |.

Пример 1.8. Вычислить интеграл:

а) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}dx}{\sqrt{2x-1}}$; **б)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}$;**в)** $\int x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx$;**г)** $\int \sqrt{e^{lnx}-1}\,dx$.

Решение.

а) Вводим новую переменную и избавляемся от иррациональности:

$$\sqrt{2x-1} = t,$$
$$t^2 = 2x-1;$$

Продифференцировав обе части равенства $t^2 = 2x-1$, получим:

$d(t^2) = d(2x-1)$,

$(t^2)'dt = (2x-1)'dx$,

$2tdt = 2dx$, откуда $tdt = dx$;

Переходим в исходном интеграле к новой переменной t, заменяем $\sqrt{2x-1}$ на t,а dx на tdt;

Интегрируем и возвращаемся к старой переменной.

Таким образом, получим:

$$\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}dx}{\sqrt{2x-1}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{2x-1} \\ t^2 = 2x-1 \\ 2tdt = 2dx \\ tdt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{e^t}{t} \cdot tdt = \int e^t dt =$$

$$= e^t + C = e^{\sqrt{2x-1}} + C;$$

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{\sqrt{1-(lnx)^2}} = \left| \begin{matrix} t = lnx \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsint + C = arcsin(lnx) + C;$$

в) $\int x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx = \left| \begin{matrix} t = x^2+2 \\ dt = 2xdx \\ \frac{dt}{2} = xdx \end{matrix} \right| = \int t^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt =$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + C = \frac{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C =$$

$$=\frac{1}{5}(x^2+2)^2\sqrt{x^2+2}+C.$$

г) $\int\sqrt{e^x-1}\,dx=\left|\begin{array}{c} t=\sqrt{e^x-1}\\ t^2=e^x-1\\ t^2+1=e^x\\ ln(t^2+1)=x\\ \frac{2tdt}{t^2+1}=dx\end{array}\right|=\int t\frac{2tdt}{t^2+1}=$

$$=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=2(t-arctgt)+C=2\left(\sqrt{e^x-1}-arctg\sqrt{e^x-1}\right)+C.$$

Заметим, что пример 1.8. б), в) удобно решить иначе - методом подведения функции под знак дифференциала, внося $\frac{1}{x}$ и $2x$ под знак дифференциала соответственно:

б) $\frac{1}{x}dx=d\left(\int\frac{1}{x}dx\right)=d(lnx)$,тогда

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}=\int\frac{\frac{1}{x}dx}{\sqrt{1-ln^2x}}=\int\frac{d(lnx)}{\sqrt{1-(lnx)^2}}=$$

$$=arcsin(lnx)+C;$$

в)$2xdx=d(\int 2xdx)=d(x^2)=d(x^2+2)$, тогда

$$\int x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int(x^2+2)^{\frac{3}{2}}d(x^2+2)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{5}(x^2+2)^2\cdot\sqrt{x^2+2}+C.$$

Замечания:

1)принципиальной разницы между подведением функции под знак дифференциала и методом подстановки нет, но с точки зрения оформления задания метод введения нового аргумента гораздо короче;

2) Метод подведения функции под знак дифференциала не универсален (не всегда работает),так как
 в некоторых случаях невозможно подвести функцию под знак дифференциала или внесение функции под дифференциал не приводит исходный интеграл к табличному виду, или является очень громоздким действием;

3) Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается с практикой.

1.2.4. Метод интегрирования по частям.

Еще один метод сведения некоторых интегралов к табличному виду. Метод основан на известной формуле производной произведения $(uv)' = u'v + v'u$
или в дифференциальной форме $d(uv) = vdu + udv$.
Проинтегрировав обе части последнего равенства, получим $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла имеем:

$$uv = \int vdu + \int udv.$$

Откуда, получим формулу

$$\int udv = uv - \int vdu \quad \mathbf{(1.1)}$$

Формула (1.1) называется **формулой интегрирования по частям.**

Данная формула показывает, что нахождение интеграла $\int udv$ приводит к нахождению интеграла $\int vdu$,который окажется табличным или сводящимся к табличному (в случае правильных действий), в отличии от интеграла $\int udv$.
При применении формулы интегрирования по частям используют следующее правило.

Правило интегрирования по частям: за u берем ту часть подынтегрального выражения, которая при дифференцировании упростится, за dv интеграл от которой табличный или может быть приведен к табличному.
Рассмотрим основные **виды интегралов, интегрируемых по частям:**

$$\mathbf{1)} \int \boldsymbol{P_n(x)} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{sinkx} \\ \boldsymbol{coskx} \\ \boldsymbol{e^{kx}} \end{Bmatrix} \boldsymbol{dx} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = P_n(x) \ \Rightarrow \ du = P_n'(x)dx \\ dv = \begin{Bmatrix} sinkx \\ coskx \\ e^{kx} \end{Bmatrix} dx \ \Rightarrow \ v = \int \begin{Bmatrix} sinkx \\ coskx \\ e^{kx} \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{k} coskx \\ \frac{1}{k} sinkx \\ \frac{1}{k} e^{kx} \end{Bmatrix} \end{matrix} \right|$$

$$\mathbf{2)}\ \int P_n(x)\cdot\begin{Bmatrix} lnkx \\ arcsinkx \\ arccoskx \\ arctgkx \\ arcctgkx \end{Bmatrix} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \begin{Bmatrix} lnkx \\ arcsinkx \\ arccoskx \\ arctgkx \\ arcctgkx \end{Bmatrix} \Rightarrow du = \begin{Bmatrix} (lnkx)' \\ (arcsinkx)' \\ (arccoskx)' \\ (arctgkx)' \\ (arcctgkx)' \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \frac{k}{kx} \\ \frac{k}{\sqrt{1-(kx)^2}} \\ \frac{-k}{\sqrt{1-(kx)^2}} \\ \frac{k}{1+(kx)^2} \\ \frac{-k}{1+(kx)^2} \end{Bmatrix} dx \\ dv = P_n(x)dx \ \Rightarrow \ v = \int P_n(x)\,dx \end{matrix} \right|$$

Здесь $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + \ldots + a_n$ – многочлен от x степени n,где $n = 0,1,2 \ldots$

Пример 1.9. Вычислить интеграл:

а)$\int xe^{5x}dx$; **б)** $\int xlnxdx$;**в)**$\int arctgxdx$;**г)**$\int \frac{xsinx}{cos^3x}dx$;

д) $\int (x^2+1)\sin x\,dx$.

Решение.

а) Чтобы привести интеграл к табличному виду применяем метод интегрирование по частям, так как никакой другой метод не работает. Заметим, что x при дифференцировании упрощается, действительно $x' = 1$,следовательно за u принимаем x, а за dV оставшуюся часть подынтегрального выражения, то есть $e^{5x}dx$,вычисляя du и v получим:

$$\int xe^{5x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, \qquad du = dx \\ dv = e^{5x}dx, v = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C.$$

б) Здесь x при дифференцировании упрощается, но при этом интеграл от $ln\,x$ не табличный, тогда:

$$\int x\ln x\,dx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx, v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix}=\ln x\frac{x^2}{2}-$$

$$-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+C=$$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C;$$

в) $\int arctgxdx=\begin{vmatrix} u=arctg\,x, & du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx, & v=\int dx=x \end{vmatrix}=$

$$=x\,arctg\,x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\,arctg\,x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=$$

$$=x\,arctg\,x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=x\,arctg\,x-\frac{1}{2}ln(1+x^2)+C;$$

г) $\int\frac{xsinx}{cos^3x}dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\frac{sinx}{cos^3x}dx, & v=-\int(cosx)^{-3}d(cosx)=\frac{1}{2cos^2x} \end{vmatrix}=$

$$=\frac{x}{2cos^2x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{cos^2x}=\frac{x}{2cos^2x}-\frac{1}{2}tgx+C;$$

Замечание: формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно. Рассмотрим, как это сделать на следующем примере.

д) Применяя, формулу интегрирования по частям дважды, имеем:

$$\int(x^2+1)sinxdx=\begin{vmatrix} u=x^2+1, & du=2xdx \\ dv=sinxdx, & v=-\cos x \end{vmatrix}=$$

$$=-(x^2+1)cosx-\int(-cosx)2xdx=-(x^2+1)cosx+$$

$$+2\int xcosxdx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=cosxdx, & v=sinx \end{vmatrix}=$$

$$=-(x^2+1)cosx+2\left(xsinx-\int sinxdx\right)=$$

$$=-(x^2+1)cosx+2(xsinx+cosx)+C.$$

Иногда повторное интегрирование по частям приводит к исходному интегралу, такие интегралы называются **круговыми или циклическими интегралами**.

Примерами круговых интегралов являются интегралы вида $\int e^{kx}\cos(\beta x)dx$, $\int e^{kx}\sin(\beta x)dx$, $\int\sin(\ln k\,x)dx$, $\int\cos(\ln k\,x)dx$ и так далее. Разберём на примере как они вычисляются.

Пример 1.10. Вычислить интеграл $\int e^{2x}cosxdx$.

Решение.

Для дальнейшего упрощения решения положим

$I = \int e^{2x} cosxdx$,тогда

$$I = \int e^{2x} cosxdx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x} sinx - 2\int sinx e^{2x} dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = sinxdx, & v = -cosx \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x} sinx - 2(-e^{2x} cosx + 2\int cosxe^{2x} dx) =$$

$$= e^{2x} sinx + 2e^{2x} cosx - 4\int cosx\, e^{2x} dx;$$

В результате повторного интегрирования по частям функцию не удалось привести к табличному виду. Однако последний интеграл ничем не отличается от исходного:

$$\underline{\int e^{2x} cosxdx} = e^{2x} sinx + 2e^{2x} cosx - 4\underline{\int e^{2x} \cos x\, dx}$$

или $I = e^{2x} sinx + 2e^{2x} cosx - 4I$, следовательно,

$5I = e^{2x}(sinx + 2cosx)$,

$$I = \frac{e^{2x}}{5}(sinx + 2cosx) + C.$$

Таким образом, $\int e^{2x} cosxdx = \frac{e^{2x}}{5}(sinx + 2cosx) + C.$

Замечание: как мы видим вычисление интегралов требует индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции, соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

Задания для самостоятельного решения.

1.Методом разложением на алгебраическую сумму вычислить следующие интегралы:

1.	$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 5xcosx - x + 1}{x} dx$	**14.**	$\int \frac{cos2x}{cosx - sinx} dx$
2.	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$	**15.**	$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$
3.	$\int \frac{cos2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$	**16.**	$\int \frac{x^{\frac{3}{4}} + 2 + 7\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$

4.	$\int \frac{(3-x^2)^3}{x} dx$	**17.**	$\int (x^2+\sqrt{x})^2 dx$
5.	$\int \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx$	**18.**	$\int \frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^2} dx$
6.	$\int \frac{4-(2x-3)(x^2+16)}{x^2+16} dx$	**19.**	$\int \frac{(x^3+2)^2}{\sqrt{x}} dx$
7.	$\int \frac{(9x^2+4)\sin x-3}{9x^2+4} dx$	**20.**	$\int \left(\frac{2}{4x^2+1}+\frac{9-x^2}{3+x}\right) dx$
8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$	**21.**	$\int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$
9.	$\int \frac{6x^5-3^x x^3\ln 3+x^4}{x^3} dx$	**22.**	$\int \left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx$
10.	$\int 2^x \cdot 3^{2x} dx$	**23.**	$\int \left(\frac{\sqrt{x}-5}{x}\right)^2 dx$
11.	$\int \frac{3x^4-5x^2\cos x+7x}{x^2} dx$	**24.**	$\int (x^2-1)(\sqrt{x}+4) dx$
12.	$\int ctg^2 x\, dx$	**25.**	$\int \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
13.	$\int \cos^2\frac{x}{2} dx$	**26.**	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$

Ответы:

1.1. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+5sinx-x+ln|x|+C$; **1.2.** $ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+C$;

1.3. $-ctgx-tgx+C$; **1.4.** $27\,ln|x|-\frac{27}{2}x^2+\frac{9}{4}x^4-\frac{x^6}{6}+C$;

1.5. $x-cosx+C$; **1.6.** $arc\,tg\left(\frac{x}{4}\right)-x^2+3x+C$;

1.7. $-cosx-\frac{1}{2}arctg\left(\frac{3x}{2}\right)+C$; **1.8.** $tgx-ctgx+C$;

1.9. $2x^3-3^x+\frac{x^2}{2}+C$; **1.10.** $\frac{18^x}{ln18}+C$;

1.11. $x^3-5sinx+7ln|x|+C$; **1.12.** $-ctgx-x+C$;

1.13. $\frac{1}{2}(x+sinx)+C$; **1.14.** $sinx-cosx+C$;

1.15. $x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$; **1.16.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}}+7x+C$;

1.17. $\frac{x^5}{5}+\frac{4}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C$; **1.18.** $\frac{x^3}{3}-x^2+3x+C$;

1.19. $\frac{2}{13}x^6\sqrt{x}+\frac{8}{7}x^3\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$; **1.20.** $arctg2x+3x--\frac{x^2}{2}+C$;

1.21. $-5ctgx-cosx+C$; **1.22.** $\frac{x^3}{3}+4x-\frac{4}{x}+C$;

1.23. $ln|x|+\frac{20}{\sqrt{x}}-\frac{25}{x}+C$; **1.24.** $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4x+C$;

1.25. $15x^{\frac{1}{3}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+C$; **1.26.** $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}$.

2. Методом подведением функции под знак дифференциала вычислить следующие интегралы:

1.	$\int sin(1-4x)dx$	**14.**	$\int \frac{x}{sin^2(x^2+1)}dx$
2.	$\int \frac{dx}{sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}$	**15.**	$\int \frac{cosx}{4+sin^2x}dx$
3.	$\int (0,7)^{1-2x}dx$	**16.**	$\int \frac{dx}{e^{-x}(1+e^x)}$
4.	$\int \frac{e^x dx}{e^x+4}$	**17.**	$\int \frac{x^2}{cos^2(x^3+3)}dx$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$	**18.**	$\int \frac{x}{4+x^4}dx$

6.	$\int \frac{2dx}{5x-1}$	**19.**	$\int \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$
7.	$\int \frac{dx}{(x-1)^5}$	**20.**	$\int \frac{sinxdx}{\sqrt{cosx}}$
8.	$\int \frac{11dx}{(x+2)^3}$	**21.**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$
9.	$\int \frac{4dx}{x+3}$	**22.**	$\int \frac{tg^5x}{cos^2x}dx$
10.	$\int \frac{dx}{x\,ln\,x}$	**23.**	$\int \frac{dx}{ctg^2xsin^2x}$
11.	$\int \frac{dx}{xln^2x}$	**24.**	$\int (2x-1)cos(x^2-x)\,dx$
12.	$\int 10^{2x+1}\,dx$	**25.**	$\int (4-x^2)^{11}2x\,dx$
13.	$\int \frac{e^{tgx}}{cos^2x}dx$	**26.**	$\int e^{-3x^2+5}\,xdx$

Ответы:

2.1. $\frac{1}{4}cos(1-4x)+C$; **2.2.** $-4\,ctg\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+C$;

2.3. $-\frac{1}{2\,ln\,0{,}7}(0{,}7)^{1-2x}+C$; **2.4.** $ln(e^x+4)+C$;

2.5. $\frac{2}{3}\sqrt{3x-4}+C$; **2.6.** $\frac{2}{5}ln|5x-1|+C$; **2.7.** $-\frac{1}{4(x-1)^4}+C$;

2.8. $-\frac{11}{2(x+2)^2}+C$; **2.9.** $4\,ln|x+3|+C$; **2.10.** $ln|lnx|+C$;

2.11. $-\frac{1}{lnx}+C$; **2.12.** $\frac{10^{2x+1}}{2ln10}+C$; **2.13.** $e^{tgx}+C$;

2.14. $-\frac{1}{2}ctg(x^2+1)+C$; **2.15.** $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{sinx}{2}\right)+C$;

2.16. $ln|1+e^x|+C$; **2.17.** $\frac{1}{3}tg(x^3+3)+C$;

2.18. $\frac{1}{4}arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$; **2.19.** $2\sqrt{lnx}+C$;

2.20. $-2\sqrt{cosx}+C$; **2.21.** $\frac{1}{2}ln\left|x^2+\sqrt{x^4-1}\right|+C$;

2.22. $\frac{1}{6}tg^6x+C$; **2.23.** $\frac{1}{ctgx}+C$; **2.24.** $sin(x^2-x)+C$;

2.25. $-\frac{(4-x^2)^{12}}{12}+C$; **2.26.** $-\frac{1}{6}e^{-3x^2+5}+C$.

3.Найти интегралы методом замены переменной:

1.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	**14.**	$\int x\sqrt{2-x}\,dx$
2.	$\int e^{\sin^2 x}\sin(2x)\,dx$	**15.**	$\int \frac{3arctg^2 x}{x^2+1}dx$
3.	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$	**16.**	$\int x\sqrt{x-1}\,dx$
4.	$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$	**17.**	$\int \sqrt{5x-3}\,dx$
5.	$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$	**18.**	$\int \frac{xdx}{4x^2-1}$
6.	$\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4}dx$	**19.**	$\int \frac{tg^6 2xdx}{cos^2 2x}$
7.	$\int \frac{cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	**20.**	$\int \frac{dx}{(x+1)ln(x+1)}$
8.	$\int x\sqrt[4]{x^2+4}dx$	**21.**	$\int \frac{ctg^7 3xdx}{sin^2 3x}$
9.	$\int x\sqrt{x-5}dx$	**22.**	$\int \frac{x}{x^4+1}dx$
10.	$\int x(x+1)^{10}dx$	**23.**	$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$
11.	$\int \frac{e^x dx}{10-6e^x}$	**24.**	$\int (5x-1)^8 xdx$
12.	$\int \frac{x^3dx}{(x-1)^2}$	**25.**	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$
13.	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx$	**26.**	$\int e^{-x^3}x^2dx$

Ответы:

3.1. $-\sqrt{4-x^2}+C$; **3.2.** $e^{\sin^2 x}+C$;

3.3. $\frac{1}{2}arcsin(x^2)+C$; **3.4.** $\frac{(2\ln x+3)^4}{8}+C$;

3.5. $\frac{1}{4}\ arcsin(x^4)+C$; **3.6.** $-\frac{1}{9(x^3+3x+1)^3}+C$;

3.7. $3\sin(\sqrt[3]{x})+C$; **3.8.** $\frac{2}{5}(x^2+4)^{\frac{5}{4}}+C$;

3.9. $\frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5}+\frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3}+C$;

3.10. $\frac{1}{12}(x+1)^{12}-\frac{1}{11}(x+1)^{11}+C$;

3.11. $-\frac{1}{6}ln|10-6e^x|+C$;
3.12. $\frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1)+3ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$;
3.13. $2\sqrt{(x+1)^3}-8\sqrt{x+1}+C$;
3.14. $\frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(2-x)^3}+C$;
3.15. $arctg^3x+C$;**3.16.** $\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}\sqrt{x-1}(x-1)+C$;
3.17. $\frac{2}{15}\sqrt{5x-3}(5x-3)+C$;**3.18.** $\frac{1}{8}ln|4x^2-1|+C$;
3.19. $\frac{1}{14}tg^7 2x+C$;**3.20.** $ln|ln(x+1)|+C$;
3.21. $-\frac{1}{24}ctg^8 3x+C$; **3.22.** $\frac{1}{2}arctg(x^2)+C$;
3.23. $\frac{1}{3}arcsin\left(\frac{x^3}{2}\right)+C$;**3.24.** $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{10}}{10}+\frac{(5x-1)^9}{9}\right)+C$;
3.25. $-\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+C$; **3.26.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C.$

4.Найти интегралы, используя формулу интегрирование по частям:

1.	$\int xe^{-x}dx$	**14.**	$\int (4x+1)e^{-2x}dx$
2.	$\int (x+3)\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$	**15.**	$\int (x^2+3)lnxdx$
3.	$\int x\ln^2 x\,dx$	**16.**	$\int (x^2+2)cosxdx$
4.	$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$	**17.**	$\int (12x+3)e^x dx$
5.	$\int \arcsin x\,dx$	**18.**	$\int x2^x dx$
6.	$\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx$	**19.**	$\int arccos4xdx$
7.	$\int x^2\ln xdx$	**20.**	$\int (5x+2)cos3xdx$
8.	$\int xarctg\,x\,dx$	**21.**	$\int ln^2xdx$
9.	$\int (x+1)sin(2x+1)dx$	**22.**	$\int arctg2xdx$
10.	$\int (1-x)cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$	**23.**	$\int (2x+3)3^{2x}dx$
11.	$\int (3x-1)sin2xdx$	**24.**	$\int cos(\ln x)dx$

12.	$\int (2x+1)\ln x dx$	**25.**	$\int e^x \sin x\, dx$
13.	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	**26.**	$\int x^2 \arccos 3x dx$

Ответы:

4.1. $-e^{-x}(x+1)+C$;**4.2.** $-2(x+3)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+4\sin\left(\frac{x}{2}\right)+C$;

4.3. $\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{x^2}{4}+C$;**4.4.** $x tg\, x+\ln|\cos x|+C$;

4.5. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; **4.6** $(x^2+2x+1)\sin x+(2x+2)\cos x+C$;

4.7. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$; **4.8.** $\frac{1}{2}x^2 arctg\, x-\frac{1}{2}(x-arctg\, x)+C$;

4.9. $-\frac{1}{2}(x+1)\cdot\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$;

4.10. $2(1-x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)—4\cos\left(\frac{x}{2}\right)+C$; **4.11.** $\frac{1}{2}(1-3x)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C$;

4.12. $(x^2+x)\ln x-x-\frac{x^2}{2}+C$; **4.13.** $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$;

4.14. $-\,e^{-2x}\left(2x+\frac{3}{2}\right)+C$; **4.15.** $\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-3x+C$;

4.16. $x^2\sin x+2x\cos x+C$; **4.17.** $e^x(12x-9)+C$;

4.18. $\frac{2^x(x\ln 2-1)}{\ln^2 2}+C$;**4.19.** $x\arccos 4x-\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2}+C$;

4.20. $\frac{1}{3}(5x+2)\sin 3x+\frac{5}{9}\cos 3x+C$;**4.21.** $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$;

4.22. $x arctg 2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$; **4.23.** $(2x+3)\cdot\frac{3^{2x}}{2\ln 3}-\frac{3^{2x}}{2\ln^2 3}+C$;

4.24. $\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$;**4.25.** $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$;

4.26. $\frac{1}{3}x^3\arccos 3x+\frac{1}{243}(1-9x^2)\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{81}\sqrt{1-9x^2}+C$.

1.3. Интегралы, приводящиеся к интегралам «группы четырёх».

К интегралам «группы четырех» относятся интегралы, подынтегральная функция которых представляет дробь со знаменателем – квадратным трехчленом или квадратным корнем из него, а именно интегралы вида:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c},\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Правило вычисление интегралов вида

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c},\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Для вычисления таких интегралов выделяем из квадратного трёхчлена полный квадрат, и выражение под знаком полного квадрата принимаем за новую переменную. Запишем подробный алгоритм данных действий.

1)Выделяем полный квадрат в знаменателе, то есть

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a};$$

2)При помощи подстановки $t=x+\frac{b}{2a}$ или подведения единицы под знак дифференциала $d\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)'dx=1dx=dx$ приводим преобразованный интеграл к одному из табличных интегралов 11)-14) .

Рассмотрим, как это сделать на примере 1.11.

Пример 1.11. Вычислить интеграл:

а) $\int\frac{dx}{x^2-6x+5}$;**б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$; **в)** $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$;**г)** $\int\frac{2x+1}{x^2+6x+10}dx$.

Решение.

а) Мы имеем дело с интегралом вида $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Выделяя полный квадрат, в знаменателе имеем:

$x^2-6x+5=(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)-9+5=(x-3)^2-4$.

<u>1 способ</u>:(замена $t=x-3$)

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+5}=\int\frac{dx}{(x-3)^2-4}=\left|\begin{matrix}t=x-3\\dt=dx\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2-2^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot2}ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}ln\left|\frac{x-3-2}{x-3+2}\right|+C=\frac{1}{4}ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$$

<u>2 способ:</u> (подведение функции под знак дифференциала, $d(x-3)=(x-3)'dx=dx$)

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+5}=\int\frac{dx}{(x-3)^2-4}=\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2-2^2}=$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2} ln\left|\frac{x-3-2}{x-3+2}\right| + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C;$$

б) Выделяя полный квадрат в знаменателе $-x^2 - 2x = -(x^2 + 2x + 1) + 1 = 1 - (x + 1)^2$ и применяя (в таблице основных интегралов) формулу $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C$, имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x + 1)^2}} = \int \frac{d(x + 1)}{\sqrt{1^2 - (x + 1)^2}} =$$
$$= arcsin(x + 1) + C;$$

в) В данной ситуации для того, чтобы привести данный интеграл к табличному виду $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + k}\right|$,достаточно вынести $\frac{1}{\sqrt{2}}$ за знак интеграла (2 под корнем в знаменателе). Таким образом, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2+\frac{3}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}}\right| + C.$$

г) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+10} dx = \int \frac{2x+1}{(x+3)^2+1} dx = \left|\begin{matrix} t = x + 3 \\ dt = dx \\ x = t - 3 \end{matrix}\right| =$

$$= \int \frac{2(t - 3) + 1}{t^2 + 1} dt = \int \frac{2t - 5}{t^2 + 1} dt = \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt -$$
$$-5 \int \frac{dt}{t^2 + 1^2} = \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} - 5arctgt = ln(t^2 + 1) -$$
$$-5arctgt + C = ln((x + 3)^2 + 1) - 5arctg(x + 3) + C.$$

Задания для самостоятельного решения.

5. Найти интегралы, приводящиеся к интегралам «группы четырех»:

1.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{-5 - 4x + x^2}}$	**14.**	$\int \frac{3xdx}{x^2 + 2x + 2}$
2.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 3}}$	**15.**	$\int \frac{(2x + 3)dx}{\sqrt{9 + 4x + x^2}}$
3.	$\int \frac{2x - 3}{x^2 + 4x + 1} dx$	**16.**	$\int \frac{(4x - 5)dx}{x^2 - 6x + 10}$
4.	$\int \frac{(4x + 3)dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$	**17.**	$\int \frac{(6x + 5)dx}{x^2 + 4x + 9}$
5.	$\int \frac{(x - 1)dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$	**18.**	$\int \frac{(x + 3)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$
6.	$\int \frac{3x - 4}{x^2 - 4} dx$	**19.**	$\int \frac{(5x - 10)dx}{x^2 - 6x + 25}$

7.	$\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+2x+2}$	**20.**	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-x^2}}$
8.	$\int \frac{(6x-7)dx}{x^2+4x+13}$	**21.**	$\int \frac{(4x+11)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$
9.	$\int \frac{dx}{x^2-2x-8}$	**22.**	$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$
10.	$\int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}$	**23.**	$\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}$
11.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	**24.**	$\int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{-x^2-4x}}$
12.	$\int \frac{(4x-1)dx}{x^2-2x+10}$	**25.**	$\int \frac{(3x-4)dx}{2x^2+5x+10}$
13.	$\int \frac{(x-2)dx}{2x^2+5}$	**26.**	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2+6x+10}$

Ответы:

5.1. $\sqrt{x^2-4x-5}+2ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-5}\right|+C$;

5.2. $ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+3}\right|+C$;

5.3.$ln|x^2+4x+1|-\frac{7}{2\sqrt{3}}ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C$;

5.4. $4\sqrt{x^2-5}+3ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C$;

5.5. $\sqrt{x^2+2x-1}-2\ ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right|+C$;

5.6. $\frac{1}{2}\ (ln|x-2|+5ln|x+2|)+C$;

5.7. $\frac{3}{2}ln|x^2+2x+2|-4arctg(x+1)+C$;

5.8. $3\ ln|x^2+4x+13|--\frac{19}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$;

5.9. $\frac{1}{6}ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C$; **5.10.** $\sqrt{6x-8-x^2}+arcsin(x-3)+C$;

5.11. $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$;

5.12. $2ln(x^2-2x+10)+\ arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$;

5.13. $\frac{1}{4}ln(2x^2+5)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ arctg\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)+C$;

5.14. $\frac{3}{2}ln(x^2+2x+2)-3\ artg(x+1)+C$;

5.15. $2\sqrt{x^2+4x+9}—ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+9}\right|+C$;

5.16. $2ln(x^2-6x+10)+\ 7arctg(x-3)+C$;

5.17. $3ln(x^2+4x+9)-\frac{7}{\sqrt{5}}\ arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+C$;

5.18. $\sqrt{x^2+2x+2}+2ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$;

5.19. $\frac{5}{2}ln(x^2-6x+25)+\frac{5}{4}\ arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C$;

5.20. $-\sqrt{3-x^2}+arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$;

5.21. $4\sqrt{x^2+8x+7}-5ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+7}\right|+C$;

5.22. $\sqrt{3-2x-x^2}-4arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$;

5.23. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$;

5.24. $-5\sqrt{-x^2-4x}-8arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$;

5.25. $\frac{3}{4}ln(2x^2+5x+10)-\frac{31}{2\sqrt{55}}\,arctg\left(\frac{4x+5}{\sqrt{55}}\right)+C$;

5.26. $\frac{1}{2}ln(x^2+6x+10)-6\,arctg(x+3)+C$.

1.4. Методы интегрирования различных классов функций.

Рассмотрим методы интегрирования различных классов функций: дробно-рациональных, тригонометрических и иррациональных функций. Интегралы от данных функций сводятся к табличным соответствующей подстановкой для данного типа подынтегрального выражения.

1.4.1. Интегрирование дробно-рациональных функций.

Дробно-рациональной функций (рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, то есть функция вида

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}} \quad \textbf{(1.2)},$$

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$,
$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ – многочлены от переменной x степени m,n соответственно, $m,n\in N$ -натуральные числа.

Рациональная дробь называется **правильной**, если $m<n$ и **неправильной**, если $m\geq n$.

Например, дробь $\frac{2x^2+x}{x^3-2x+1}$ –правильная, так как
$m=2<n=3$, где $Q_2(x)=2x^2+x$,$P_3(x)=x^3-2x+1$;
дробь $\frac{5x^3-2x-1}{x^2(x+1)}$ неправильная, так как $m=n=3$,
$Q_3(x)=5x^3-2x-1$, $P_3(x)=x^2(x+1)=x^3+x^2$.

Как мы узнаем далее, всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых **простейших рациональных дробей —** это правильные рациональные дроби следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$;**2)** $\frac{A}{(x-a)^n}$;**3)** $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;**4)** $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где a, p, q, A, B— действительные числа, $n = 2,3 \dots$

В дробях 3),4) предполагается, что квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, то есть $D = p^2 - 4q < 0$.

Если мы научимся интегрировать простейшие рациональные дроби и раскладывать правильную рациональную дробь на сумму простейших, то задача интегрирования рациональных дробей будет решена.

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Рассмотрим, как интегрируются простейшие (элементарные) рациональные дроби.

Интегрирование элементарной дроби вида **1)** $\frac{A}{x-a}$.

Для того чтобы вычислить интеграл от элементарной дроби $\int \frac{Adx}{x-a}$,достаточно подвести единицу под знак дифференциала $dx = d(x-a)$:

$\int \frac{Adx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A ln|x-a| + C$.

Интегрирование элементарной дроби вида **2)** $\frac{A}{(x-a)^n}$.

Учитывая, что $dx = d(x-a)$ имеем:

$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$.

Замечание: интегралы от элементарных дробей $\int \frac{Adx}{x-a}, \int \frac{Adx}{(x-a)^n}$ можно привести к табличному и другому способу, с помощью замены $x-a$,просто это займет немного больше времени. Покажем, как это работает:

1)$\int \frac{Adx}{x-a} = \left| \begin{matrix} t = x-a \\ dt = dx \end{matrix} \right| = A\int \frac{dt}{t} = A ln|t| + C = A ln|x-a| + C$;

2)$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} dx = \left| \begin{matrix} t = x-a \\ dt = dx \end{matrix} \right| =$

$= A\int t^{-n}\, dt = A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$.

Пример 1.12. Вычислить интеграл: **а)** $\int \frac{2dx}{x-7}$;**б)** $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$.

Решение.

а) 1 способ: (подведение функции под знак дифференциала)

Учитывая, что $dx = d(x-7)$ имеем:

$\int \frac{2dx}{x-7} = 2\int \frac{d(x-7)}{x-7} = 2ln|x-7| + C$;

2 способ: (замена переменной)

Сделав замену переменной $t = x - 7$ имеем:

$$\int \frac{2dx}{x-7} = \begin{vmatrix} t = x-7 \\ dt = dx \end{vmatrix} = 2\int \frac{dt}{t} = 2ln|t| + C =$$

$2ln|x-7| + C$;

б) <u>1 способ</u>:(подведение функции под знак дифференциала)

Для начала преобразуем подынтегральную функцию-выделим полный квадрат и заметим, что перед нами простейшая рациональная дробь второго вида, приведём его к табличному виду путем подведения единицы под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = \int (x-3)^{-2}\, d(x-3) =$$

$$= \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-3} + C;$$

<u>2 способ:</u> (замена переменной)

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = \begin{vmatrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\, dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-3} + C.$$

<u>Интегрирование элементарной дроби вида</u> **3)** $\boldsymbol{\frac{Ax+B}{x^2+px+q}}$ **.**

Дробь третьего вида $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ интегрируется $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ по следующему алгоритму:

1)Находим производную знаменателя:

$(x^2+px+q)' = 2x+p$;

2) Строим в числителе производную знаменателя:

$Ax + B = \frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B = \frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)$;

3)Разбиваем преобразованный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q};$$

первый из них путем внесения числителя под знак дифференциала$(2x+p)dx = d(x^2+px+q)$, сводится к табличному интегралу, а во втором интеграле необходимо выделить полный квадрат и проинтегрировать, используя одну из формул 11)-14) в таблице интегралов.

Рассмотрим, как это сделать на примере 1.13.

Пример 1.13. Вычислить интеграл:

а) $\int \frac{7x+4}{x^2+8x+25}dx$;**б)** $\int \frac{5x-2}{x^2+4x+5}dx$;**в)** $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx.$

Решение.

а)1) Находим производную знаменателя:

$(x^2+8x+25)' = 2x+8;$

2)В числителе строим производную знаменателя:

$7x+4 = \frac{7}{2}(2x+8) - 28 + 4 = \frac{7}{2}(2x+8) - 24;$

3) Разбиваем преобразованный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{7x+4}{x^2+8x+25}dx = \int \frac{\frac{7}{2}(2x+8)-24}{x^2+8x+25}dx =$$

$$= \frac{7}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+8x+25}dx - 24\int \frac{dx}{x^2+8x+25} =$$
$$= \frac{7}{2}\int \frac{d(x^2+8x+25)}{x^2+8x+25} - 24\int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2+3^2} =$$
$$= \frac{7}{2}ln|x^2+8x+25| - 8\,arctg\,\frac{x+4}{3} + C;$$

б) Находим производную знаменателя:

$(x^2+4x+5)' = 2x+4;$

В числителе строим производную знаменателя:

$5x-2 = \frac{5}{2}(2x+4) - 12;$

Разбиваем преобразованный интеграл на сумму двух:

$$\int \frac{5x-2}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-12}{x^2+4x+5}dx =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - 12\int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - 12\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1^2} =$$
$$= \frac{5}{2}ln|x^2+4x+5| - 12\,arctg\,(x+2) + C;$$

в) Повторяя аналогичный алгоритм решения, имеем:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}-1}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{2} ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{3}{2} ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Замечание: интегралы от рациональных дробей третьего вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$, можно решить и другим способом-методом замены переменной-для этого необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, выражение в скобках будет новой переменной, относительно которой исходный интеграл сводится к табличному виду.

Интегрирование элементарной дроби вида **4)** $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$.

Интегрирование простейших дробей четвертого вида $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$ является довольно сложной задачей, состоящей из громоздких вычислений.

Рассмотрим частный случай при $A = 0, B = 1$.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q =$$

$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$, где $a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ и замены

$t = x + \frac{p}{2}, dt = dx$, представить в виде $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ и получить для него рекуррентную формулу. Для этого применим к интегралу $I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$ формулу интегрирования по частям:

$$I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} = \int ((t^2 + a^2)^{n-1})^{-1} dt =$$

$$= \int (t^2 + a^2)^{1-n} dt = \left| \begin{matrix} u = (t^2 + a^2)^{1-n}, du = \frac{2(1-n)tdt}{(t^2 + a^2)^n} \\ dv = dt, \quad v = \int dt = t \end{matrix} \right| =$$

$$= (t^2 + a^2)^{1-n}\, t - \int \frac{2(1-n)t^2dt}{(t^2 + a^2)^n} = t((t^2 + a^2)^{n-1})^{-1} +$$

$$+2(n-1)\int \frac{t^2dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} +$$

$$+2(n-1)\int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^n}dt = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} +$$

$$+2(n-1)\left(\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}\right);$$

Учитывая, что $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ получим:

$$I_{n-1} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1)(I_{n-1} - a^2I_n)$$

$$I_{n-1} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2\,a^2(n-1)I_n$$

Находим из последнего равенства I_n:

$$2\,a^2(n-1)I_n = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - I_{n-1} + 2nI_{n-1} - 2I_{n-1}$$

$$2\,a^2(n-1)I_n = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - 3I_{n-1} + 2nI_{n-1}$$

$$a^2(2n-2)I_n = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}|:\ a^2(2n-2)$$

$$\boldsymbol{I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}} \quad \mathbf{(1.3)}$$

Получили рекуррентную формулу, позволяющую вычислить интеграл I_n, если мы знаем интеграл I_{n-1} .

Рассмотрим теперь интеграл от элементарной дроби четвёртого вида в общем случае, то есть интеграл $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{A}{2}\int (x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^n} = \left|\begin{matrix} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \\ a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n};$$

Итак, $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A(x^2+px+q)^{1-n}}{2(1-n)} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) I_n$

Далее к полученному интегралу $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ применяется рекуррентная формула (1.3).

Рассмотрим на практике интегрирование простейшей дроби четвертого типа.

Пример 1.14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение.

Здесь $A = 0, B = 1$.Согласно формуле $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1}$,в нашем случае $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1^2)^2}, n = 2, a = 1$,поэтому имеем:

$$I_2 = \frac{x}{1^2(2\cdot 2-2)(x^2+1^2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{1^2(2\cdot 2-2)} I_1,$$

$I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} I_1$, где $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C$.

Таким образом, $I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\, arctgx + C$.

Пример 1.15. Вычислить интеграл $\int \frac{4x+1}{(x^2-4x+8)^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{4x+1}{(x^2-4x+8)^2}dx = \int \frac{2(2x-4)+9}{(x^2-4x+8)^2}dx =$$
$$= 2\int \frac{(2x-4)dx}{(x^2-4x+8)^2} + 9\int \frac{dx}{(x^2-4x+8)^2} =$$
$$= 2\int (x^2-4x+8)^{-2}\, d(x^2-4x+8) + 9\int \frac{dx}{((x-2)^2+4)^2}$$

$$= 2\frac{(x^2-4x+8)^{-1}}{-1} + 9\int \frac{dx}{((x-2)^2+4)^2} = \left| \begin{matrix} t = x-2 \\ dt = dx \end{matrix} \right| =$$
$$= -\frac{2}{x^2-4x+8} + 9\int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = -\frac{2}{x^2-4x+8} + 9\, I_2;$$

Далее к интегралу $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2^2)^2}$,

применяется рекуррентная формула

$I_n = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1}$,

в нашем случае, где $n = 2, a = 2$ имеем:

$I_2=\frac{t}{4(2\cdot2-2)(t^2+4)^{2-1}}+\frac{2\cdot2-3}{4(2\cdot2-2)}I_1$, $I_2=\frac{t}{8(t^2+4)}+\frac{1}{8}I_1$,где

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{t}{2}\right)+C,$$

$$I_2=\frac{t}{8(t^2+4)}+\frac{1}{16}\,arctg\left(\frac{t}{2}\right)+C;$$

Возвращаясь к старой переменной, имеем:

$$I_2=\frac{x-2}{8((x-2)^2+4)}+\frac{1}{16}\,arctg\left(\frac{x-2}{2}\right)+C;$$

Возвращаясь к исходному интегралу, окончательно имеем:

$$\int\frac{4x+1}{(x^2-4x+8)^2}dx=-\frac{2}{x^2-4x+8}+9\left(\frac{x-2}{8((x-2)^2+4)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}\,arctg\left(\frac{x-2}{2}\right)\right)+C.$$

Замечание: в рациональных дробях вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$, при $n=2$ можно обойтись и без рекуррентной формулы (1.3), преобразовав подынтегральное выражение и применив формулу интегрирование по частям. Рассмотрим, как это сделать на примере 1.16.

Пример 1.16. Вычислить интеграл $\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+2)^2}dx.$

Решение.

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x-2)+8}{(x^2-2x+2)^2}dx=$$
$$=\frac{5}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{(x^2-2x+2)^2}+8\int\frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}=$$
$$=\frac{5}{2}\int(x^2-2x+2)^{-2}\,d(x^2-2x+2)+8\int\frac{dx}{((x-1)^2+1)^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=\ x-1\\ dt=dx\end{matrix}\right|=-\frac{5}{2(x^2-2x+2)}+8\int\frac{dt}{(t^2+1)^2};$$

Проинтегрируем отдельно $\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=$$
$$=arctgt-\int\frac{t\cdot tdt}{(t^2+1)^2}=$$

$$= \left| \begin{array}{ll} & u = t, \qquad du = dt \\ dv = \dfrac{t}{(t^2+1)^2}dt, & v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (t^2+1)^{-2} d(t^2+1) = -\dfrac{1}{2(t^2+1)} \end{array} \right|$$

$$= arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} -$$

$$-\frac{1}{2}arctgt = \frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} + C;$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получим:

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+2)^2}dx = -\frac{5}{2(x^2-2x+2)} +$$

$$+8\left(\frac{1}{2}arctg(x-1) + \frac{x-1}{2((x-1)^2+1)}\right) + C =$$

$$= -\frac{5}{2(x^2-2x+2)} + 4arctg(x-1) + \frac{4(x-1)}{((x-1)^2+1)} + C.$$

Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Интегрировать простейшей дроби мы уже умеем. Рассмотрим, как проинтегрировать рациональную дробь, которая не является элементарной.

Теорема 1.2 (теорема о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей). Всякую правильную рациональную дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можно представить единственным образом, в виде суммы простейших дробей типов 1) — 4) этом:

а) Каждому неповторяющемуся множителю вида $(\boldsymbol{x-a})$ в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует одна простейшая дробь вида $\frac{A}{x-a}$;

б) Каждому неповторяющемуся множителю вида $(\boldsymbol{x-a})^{\boldsymbol{n}}$ в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует сумма простейших дробей

$\frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$;

в) Каждому неповторяющемуся множителю вида

$(\boldsymbol{x^2+px+q})$,в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует одна простейшая дробь вида$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

г) Каждому неповторяющемуся множителю вида

$(\boldsymbol{x^2+px+q})^{\boldsymbol{n}}$ в разложении знаменателя правильной рациональной дроби соответствует сумма простейших дробей

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Замечания: в разложениях б), в) предполагается, что квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней, то есть $D=p^2-4q<0$.

Постоянные $A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, B_2, \ldots$ называют **неопределенными коэффициентами.**

Например, если правильная дробь $m<n$, имеет вид $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q_m(x)}{(x-a)(x-b)^2(x^2+px+q)^2}$, то её разложение на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{C_1x+C_2}{x^2+px+q}+\frac{C_3x+C_4}{(x^2+px+q)^2};$$

Теорема 1.3 (теорема о разложении неправильной рациональной дроби). Всякую неправильную рациональную дробь $f(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $m\geq n$, можно разложить, и притом единственным образом, на сумму многочлена $M_{m-n}(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ $(k<n)$, то есть представить в виде $\boldsymbol{\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}}$, где $M_{m-n}(x)$-целая часть, а $Q_k(x)$- остаток от деления $Q_m(x)$ на $P_n(x)$.

Правило (интегрирования рациональных дробей):

1) Если подынтегральная дробь неправильная, то ее необходимо представить в виде суммы многочлена $M_{m-n}(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ (разделив $Q_m(x)$на $P_n(x)$ уголком, из неё выделяют целую часть$M_{m-n}(x)$, которая интегрируется непосредственно, и правильную рациональную дробь $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$);

2) Раскладываем знаменатель правильной дроби $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ на множители и представляем правильную рациональную дробь $\frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$ в виде суммы простейших дробей 1)— 4) применяя теорему 1.2., находим коэффициенты $A, A_1, A_2, \ldots, A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, B_2 \ldots$ по следующему алгоритму:

а) Сумму всех простейших дробей привести к общему знаменателю;

б) Числитель получившейся дроби приравнять числителю исходной дроби.

в)Найти коэффициенты одним из методов: **метод неопределённых коэффициентов** -приравнять коэффициенты при оди-

наковых степенях многочленов в левой и правой частях равенства, полученную систему уравнений решить относительно неизвестных коэффициентов, входящих в числители простейших дробей; либо **методом произвольных значений-** в уравнение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных вещественных значений x и находят коэффициенты(в качестве произвольных значений принимаются значения x при которых знаменатель обращается в ноль);
3) Вычислить интеграл от полученной суммы простейших дробей: простейшие дроби интегрируют по отдельности, с помощью соответствующих методов интегрирования.

Пример 1.17. Представить дробь в виде суммы простейших дробей: **а)** $\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}$; **б)** $\frac{x^2+1}{x^3-1}$;**в)**$\frac{1}{(x^3-x)(x-1)}$.

Решение.

а) Представлена правильная рациональная дробь, так как $m=2<n=3$,разложим её знаменатель на множители $x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)$.
Получим первый корень $x_1=0$, для разложения квадратного трёхчлена в скобках решим квадратное уравнение: $x^2-2x-3=0$,$D=(-2)^2-4(-3)=16>0$,
$x_{2,3}=\frac{2\pm4}{2}$, $x_2=3, x_3=-1$, то есть имеем дело со случаем, когда многочлен x^3-2x^2-3x имеет простые действительные корни $x_1=0, x_2=3, x_3=-1$, следовательно разложение знаменателя на множители имеет вид: $x^3-2x^2-3x=x(x+1)(x-3)$. Разложение исходной дроби в соответствии с теоремой 1.2.а) будет следующим:

$$\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}=\frac{x^2+3}{x(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3};$$

Найти коэффициенты A, B, C ,как нам было известно ранее, можно одним из методов: методом неопределённых коэффициентов или методом произвольных значений. Для того, чтобы воспользоваться данными методами необходимо для начала, правую часть полученного выше равенства привести к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1)}{x^3-2x^2-3x};$$

Так как две дроби с одинаковыми знаменателями равны, то тождественно равны их числители:

$$x^2+3=A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1);$$

Найдем коэффициенты A, B, C двумя способами:

<u>1 способ</u> (метод произвольных значений)- находим x при которых знаменатель дроби равен нулю, подставляя их значения поoче-

редно в левую и правую часть полученного равенства, имеем:

$x = 0, \quad -3A = 3, \quad \underline{A = -1};$

$x = -1, \quad 4B = 4, \quad \underline{B = 1};$

$x = 3, \quad 12C = 12, \quad \underline{C = 1};$

Следовательно, $\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3};$

<u>2 способ</u> (метод неопределённых коэффициентов)- раскрываем скобки в уравнении

$x^2 + 3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1);$

$x^2 + 3 = A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + x);$

$(A + B + C)x^2 + (-2A - 3B + C)x^1 + (-3A)x^0 =$

$= 1x^2 + 0x^1 + 3x^0;$

Числа, обозначенные большими буквами A, B, C-коэффициенты, пока неизвестны. Находим их методом неопределенных коэффициентов, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^2: $A + B + C = 1$

x^1: $-2A - 3B + C = 0.$

x^0: $-3A = 3$

Решаем полученную систему $\begin{cases} A + B + C = 1 \\ -2A - 3B + C = 0 \\ A = -1 \end{cases}$,чтобы исключить C из первого уравнения, вычтем из него второе уравнение и найдем B:

$3A + 4B = 1, \; -3 + 4B = 1, \; B = 1.$

Подставляя в первое уравнение $A = -1$ и $B = 1$ найдемC, $C = 1 - (A + B) = 1.$

Итого, $\frac{x^2+3}{x^3-2x^2-3x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}$,результаты совпали.

б) Перед нами правильная рациональная дробь, так как $m = 2 < n = 3$,для того, чтобы представить данную правильную дробь в виде суммы простейших дробей, разложим её знаменатель на множители

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Получим первый корень $x_1 = 1$ –простой вещественный, для разложения квадратного трёхчлена на множители $x^2 + x + 1$ решим квадратное уравнение:

$x^2 + x + 1 = 0$,

$D = 1^2 - 4 = -3 < 0$, то есть имеем дело с комплексно-сопряжёнными корнями, следовательно разложение исходной дроби на сумму простейших дробей в соответствии с теоремой 1.2. будет иметь вид:

$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

Переходим к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{x^3-1};$$

Поскольку имеются комплексно-сопряжённые корни, коэффициенты A, B, C удобнее найти методом неопределённых коэффициентов:

$A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1) = x^2+1,$

$Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C = x^2+1$

$(A+B)x^2+(A-B+C)x^1+(A-C)x^0 = x^2+0x^1+x^0;$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} B=1-A & (1) \\ A-B+C=0 & (2) \\ C=A-1 & (3) \end{cases},$$

Для того, чтобы найти A подставим равенства (1)и (3)во второе уравнение системы:

$$A-(1-A)+A-1=0, \qquad 3A=2, \qquad A=\frac{2}{3},$$

Следовательно, $C = A-1 = \frac{2}{3}-1 = -\frac{1}{3}$,

$$B = 1-A = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

Таким образом, разложение правильной дроби $\frac{x^2+1}{x^3-1}$на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1};$$

в) Так как $m=0<n=4$,то дробь правильная, разложим её знаменатель на множители:

$(x^3-x)(x-1) = x(x^2-1)(x-1) =$

$= x(x-1)(x+1)(x-1) = x(x-1)^2(x+1);$

Получили следующие корни:

$x_1=0, x_{2,3}=1, n=2, x_4=-1$, следовательно разложение исходной дроби на сумму простейших дробей в соответствии с теоремой 1.2. будет иметь вид:

$$\frac{1}{(x^3-x)(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1};$$

$$\frac{1}{(x^3-x)(x-1)} = \frac{A(x-1)^2(x+1)+Bx(x-1)(x+1)+Cx(x+1)+Dx(x-1)^2}{x(x-1)^2(x+1)};$$

$A(x-1)^2(x+1)+Bx(x-1)(x+1)+Cx(x+1)+Dx(x-1)^2 = 1,$

Поскольку в разложении знаменателя на множители фигурируют только вещественные корни, для нахождения коэффициентов используем метод частных значений:

$x = 0, \qquad A = 1; x = 1, 2C = 1, C = \frac{1}{2};$

$x = -1, \qquad -4D = 1, D = -\frac{1}{4};$

НайдёмB ,положив $x = 2$:

$A(2-1)^2(2+1) + 2B(2-1)(2+1) + 2C(2+1) + 2D(2-1)^2 = 1,$

$3A + 6B + 6C + 2D = 1,$

$3 + 6B + 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 1,$

$6B = -\frac{9}{2}, B = -\frac{3}{4}.$

Таким образом, $\frac{1}{(x^3-x)(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{-\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}$.

Пример 1.18. Вычислить интеграл $\int \frac{2-x}{x^3+4x^2+8x} dx$.

Решение.

1)Под знаком интеграла правильная рациональная дробь $m = 1 < n = 3$,поэтому переходим к следующему этапу;

2)Разложим знаменатель дроби на множители:

$x^3 + 4x^2 + 8x = x(x^2 + 4x + 8)$, уравнение $x^2 + 4x + 8$ не имеет вещественных корней, так как $D = 4^2 - 4 \cdot 8 = -16 < 0$, то есть имеем дело со случаем, когда многочлен в знаменателе имеет комплексно-сопряженные корни. Оба сомножителя x и $x^2 + 4x + 8$ присутствуют в знаменателе в первой степени, поэтому разложение исходной дроби на простейшие дроби в соответствии с теоремой 1.2. а), в) соответственно будет следующим: $\frac{2-x}{x^3+4x^2+8x} = \frac{2-x}{x(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+8}$, переходя к общему знаменателю получим,$\frac{2-x}{x^3+4x^2+8x} = \frac{Ax^2+4Ax+8A+Bx^2+Cx}{x^3+4x^2+8x}$, приравнивая числители имеем:

$Ax^2 + 4Ax + 8A + Bx^2 + Cx = 2 - x;$

$(A+B)x^2 + (4A+C)x^1 + (8A)x^0 = 0x^2 - 1x^1 + 2x^0;$

$x^2\colon\ A + B = 0;$

$x^1\colon\ 4A + C = -1;$

$x^0\colon\ 8A = 2.$

Получим систему $\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + C = -1 \\ 8A = 2 \end{cases}$, решая её найдём A, B, C:

$\begin{cases} B = -A \\ C = -1 - 4A \\ A = \frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ C = -2 \\ A = \frac{1}{4} \end{cases}$;

3)Возвращаясь к исходному интегралу, имеем:

$$\int \frac{2-x}{x^3+4x^2+8x}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}x - 2}{x^2+4x+8} \right) dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} -$$
$$-\frac{1}{4}\int \frac{x+8}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{4}ln|x| - \frac{1}{4}\int \frac{x+8}{x^2+4x+8}dx;$$

Проинтегрируем отдельно простейшую рациональную дробь третьего вида $\int \frac{x+8}{x^2+4x+8}dx$,используя метод замены переменной, получим:

$$\int \frac{x+8}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{x+8}{(x+2)^2+2^2}dx = \begin{vmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \\ x = t-2 \end{vmatrix} =$$
$$= \int \frac{t-2+8}{t^2+2^2}dt = \int \frac{t+6}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}dt +$$
$$+6\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{6}{2}arctg\frac{t}{2} = \frac{1}{2}ln|t^2+4| +$$
$$+3arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}ln|(x+2)^2+4| + 3arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

Итого,$\int \frac{2-x}{x^3+4x^2+8x}dx = \frac{1}{4}ln|x| - \frac{1}{8}ln((x+2)^2+4) - \frac{3}{4}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$

Пример 1.19. Вычислить$\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

Решение.

1)Дробь под знаком интеграла является правильной, так как $m = 0 < n = 4$, поэтому переходим к следующему этапу;

2) Разложим знаменатель дроби $\frac{1}{x^4-x^2}$ на множители:

$x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$

имеем вещественный корень $x_1 = 0, n = 2$(кратность корня) случай б) в теореме 1.2 и вещественные корни $x_{1,2} = \pm 1, n = 1$ случай а) в теореме 1.2. Получим следующее разложение на простейшие дроби: $\frac{1}{x^4-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$

Переходя к общему знаменателю и приравнивая числители, имеем:

$A\,x(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1) = 1$;

Находим коэффициенты A, B, C, D. В данном случае (вещественном) для их нахождения, удобнее применить метод произвольных значений:

$x=0,\quad -B=1,\ B=-1;$

$x=1,\qquad 2C=1,\ C=\dfrac{1}{2};$

$x=-1,\ -2D=1,\ D=-\frac{1}{2}.$

Зная B, C, D полагая, например, $x=2$ найдем A :

$x=2,\qquad 6A+3B+12C+4D=1,$

$6A+3(-1)+12\cdot\dfrac{1}{2}+4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1,$

$6A-3+6-2=1,$

$6A+1=1, A=0;$

3)Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2}=\int\left(\frac{0}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=-\int x^{-2}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1}--\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}ln|x-1|-\frac{1}{2}ln|x+1|+C.$$

Замечание: для упрощения решения системы, состоящей из коэффициентов, иногда полезно группировать два метода нахождения коэффициентов, рассмотренных выше. Как это сделать рассмотрим на примере 1.20.

Пример 1.20. Вычислить интеграл $\int\frac{x^7}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Решение.

1)Так как, дробь неправильная $(m=7>n=3)$, то в соответствии с теоремой 1.3, выделим из неё целую часть путем деления многочлена на многочлен «уголком»:

$$\begin{array}{l|l} -\ x^7 & x^3-x^2+x-1 \\ \quad \underline{x^7-x^6+x^5-x^4} & \overline{x^4+x^3+1-\text{целая часть}} \\ \qquad -\ x^6-x^5+x^4 & \\ \qquad\quad \underline{x^6-x^5+x^4-x^3} & \\ \qquad\qquad\qquad -\ x^3 & \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^3-x^2+x-1} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x^2-x+1-\text{остаток} & \end{array}$$

$$\int\frac{x^7}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(x^4+x^3+1+\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+x+\int\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx;$$

2)Осталось проинтегрировать правильную дробь $\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}$,для этого разложим знаменатель полученной дроби на множители и найдем коэффициенты, комбинируя два способа нахождения коэффициентов:

$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$,

$x_1=1$ вещественный корень; уравнение x^2+1 не имеет вещественных корней, действительно $D<0$, то есть имеются комплексно-сопряженные корни.

В соответствии с теоремой 1.2. в) получим разложение на простейшие дроби:

$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$;

$x^2-x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$.

Применяя для начала метод произвольных значений, полагая $x=1$ в подчеркнутом уравнении, найдем A:

$x=1,\ \ 2A=1,\ \ A=\frac{1}{2}$.

Оставшиеся коэффициенты данным методом найти не получается, для их нахождения, применим метод неопределенных коэффициентов, раскрываем скобки в последнем уравнении и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях имеем:

$x^2-x+1=Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C$;

$x^2-x+1=(A+B)x^2+(C-B)x^1+(A-C)x^0$;

x^2: $A+B=1$

x^1: $C-B=-1$

x^0: $A-C=1$

Подставляя $A=\frac{1}{2}$ (найденное ранее методом частных значений) в полученную систему

$\begin{cases} A+B=1 \\ C-B=-1 \\ A-C=1 \end{cases}$ имеем:

$\begin{cases} \frac{1}{2}+B=1 \\ C-B=-1 \\ \frac{1}{2}-C=1 \end{cases}, \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$, коэффициенты найдены;

3)Возвращаясь, к правильной дроби, получим:

$$\int\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x-1}{x^2+1}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(ln|x-1|+\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-arctgx\right)=\frac{1}{2}ln|x-1|+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}arctgx=\frac{1}{2}ln|x-1|+\frac{1}{4}ln(x^2+1)-$$
$$-\frac{1}{2}arctgx+C;$$

В итоге, имеем:

$$\int\frac{x^7}{x^3-x^2+x-1}dx=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+x+\int\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+x+\frac{1}{2}ln|x-1|+\frac{1}{4}ln(x^2+1)-\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Пример 1.21. Вычислить интеграл $\int\frac{x^3-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$.

Решение.

1)Так как, $(x-1)(x+2)(x-3)=(x^2+x-2)(x-3)=$ $=x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6=x^3-2x^2-5x+6$, то дробь неправильная $(m=n=3)$, выделим целую часть и перейдём к правильной дроби, в данном случае это удобно сделать путём алгебраических преобразований-построив в числителе знаменатель:

$$\frac{x^3-x^2-x+2}{x^3-2x^2-5x+6}=\frac{(x^3-2x^2-5x+6)+x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}=1+\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}=$$
$$=1+\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6};$$

Таким образом, $\int\frac{x^3-x^2-x+2}{x^3-2x^2-5x+6}dx=\int\left(1+\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}\right)dx=$

$$=\int dx+\int\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}dx=x+\int\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}dx;$$

2)Осталось проинтегрировать правильную дробь $\frac{x^2+4x-4}{x^3-2x^2-5x+6}=\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x+2)(x-3)}$,для этого разложим дробь на простейшие дроби, в соответствии с теоремой 1.2. а) имеем:

$$\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}=$$
$$=\frac{A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)};$$

$$x^2+4x-4=A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2);$$

Применяя метод произвольных значений, для нахождения коэффициентов A,B,Cимеем:

$$x=1,-6A=1,A=-\frac{1}{6};x=-2,15B=-8,B=-\frac{8}{15};$$

$x = 3, 10C = 17, C = \frac{17}{10};$

$$\int \frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{-\frac{8}{15}}{x+2} + \frac{\frac{17}{10}}{x-3} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{8}{15}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{17}{10}\int \frac{d(x-3)}{x-3} =$$

$$= -\frac{1}{6}ln|x-1| - \frac{8}{15}ln|x+2| + \frac{17}{10}ln|x-3| + C.$$

Задания для самостоятельного решения.

6. а) Найти интегралы от правильных рациональных дробей:

1.	$\int \frac{dx}{x^3+1}$	**14.** $\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x}dx$
2.	$\int \frac{dx}{x^3-x}$	**15.** $\int \frac{5x^3+8x^2-1}{(x^3-x^2)(x+1)}dx$
3.	$\int \frac{4x^2+13x}{(x+2)(x^2-x-6)}dx$	**16.** $\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$
4.	$\int \frac{2x^2+5}{(x^2+2)(x^2+3)}dx$	**17.** $\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$
5.	$\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+2x+1)}dx$	**18.** $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$
6.	$\int \frac{3x}{x^3+x^2+2x+2}dx$	**19.** $\int \frac{x^2-38x+157}{(x+4)(x-9)(x-1)}dx$
7.	$\int \frac{x}{x^3-1}dx$	**20.** $\int \frac{2x^2-5x+6}{x^3+x^2-6x}dx$
8.	$\int \frac{dx}{x^4+x^2}$	**21.** $\int \frac{3x^2+15}{(x^2+4x+13)(x-1)}dx$
9.	$\int \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-1}dx$	**22.** $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$
10.	$\int \frac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$	**23.** $\int \frac{x^2+2}{x^3-2x^2+x}dx$
11.	$\int \frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$	**24.** $\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)(x-3)}dx$
12.	$\int \frac{dx}{x^5-x^2}$	**25.** $\int \frac{dx}{x^4-1}$
13.	$\int \frac{3x-16}{x^3+8x^2+16x}dx$	**26.** $\int \frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5}dx$

б) Найти интегралы от неправильных рациональных дробей:

1.	$\int \frac{x^2-2}{x+1}dx$	**14.**	$\int \frac{x^3-12x^2-42}{x-3}dx$
2.	$\int \frac{x^3}{x-2}dx$	**15.**	$\int \frac{x^3+1}{x^2-2}dx$
3.	$\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$	**16.**	$\int \frac{x^3+4x-13}{x^3-3x^2+4x-12}dx$
4.	$\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$	**17.**	$\int \frac{x^3-2x^2+3x}{x+1}dx$
5.	$\int \frac{x^3}{x-3}dx$	**18.**	$\int \frac{4x^3-1}{x+1}dx$
6.	$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$	**19.**	$\int \frac{x^5}{x-1}dx$
7.	$\int \frac{4x^3-1}{x+1}dx$	**20.**	$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$
8.	$\int \frac{2x^3+x}{x-1}dx$	**21.**	$\int \frac{x^2+1}{2x^2+4x+2}dx$
9.	$\int \frac{x^2}{x^2-9}dx$	**22.**	$\int \frac{3x^3+4x^2}{3x+2}dx$
10.	$\int \frac{x^2+x}{x^2+1}dx$	**23.**	$\int \frac{x^3}{1-x}dx$
11.	$\int \frac{x^3}{x-2}dx$	**24.**	$\int \frac{x^3}{x^2+4x+8}dx$
12.	$\int \frac{4x^3-1}{x+1}dx$	**25.**	$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$
13.	$\int \frac{x^4}{x^2+3}dx$	**26.**	$\int \frac{x^6}{x-1}dx$

Ответы:

6.1.а) $\frac{1}{3}ln|x+1| - \frac{1}{6}ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$

б) $\frac{x^2}{2} - x - ln|x+1| + C;$

6.2.а) $\frac{1}{2}ln|x^2-1| - ln|x| + C;$ **б)** $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\,ln|x-2| + C;$

6.3.а) $ln|x+2|+3ln|x-3|-\frac{2}{x+2}+C$; **б)** $\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\,ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

6.4.а) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$;**б)** $x+\frac{1}{2}\,ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

6.5.а) $\frac{2}{3}ln|x-2|+\frac{1}{3}ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$;

б) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+9x+27\,ln|x-3|+C$;

6.6.а) $-ln|x+1|+\frac{1}{2}ln|x^2+2|+\sqrt{2}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

б) $\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C$;

6.7. а) $\frac{1}{3}ln|x-1|-\frac{1}{6}ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

б) $\frac{4x^3}{3}-2x^2+4x-\ ln|x+1|+C$;

6.8.а) $-\frac{1}{x}-arctgx+C$;**б)** $\frac{2x^3}{3}+x^2+3x+\ 3ln|x-1|+C$;

6.9. а) $\frac{1}{2}(ln|x-1|-ln|x+1|+ln(x^2+1))+C$;**б)** $x+\frac{3}{2}ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$;

6.10. а) $ln|x-1|+ln|x^2+2x+5|+\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$;

б) $x+\frac{1}{2}ln(x^2+1)-arctgx+C$;

6.11.а) $2ln|x|-\frac{1}{x}-\ 2ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$;

б) $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8ln|x-2|+C$;

6.12. а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

б) $\frac{x^3}{3}+4x-2x^2-5\,ln|x+1|+C$;

6.13. а) $-ln|x|+ln|x+4|-\frac{7}{x+4}+C$;

б) $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$;

6.14.а) $-2ln|x|+ln|x+1|+2ln|x-1|+C$

б) $\frac{x^3}{3}-27x-\frac{9}{2}x^2-123\,ln|x-3|+C$;

6.15.а) $ln|x|+3ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+ln|x+1|+C$;

б) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+ln|x^2-2|+C$;

6.16.а) $5ln|x-2|+3ln|x-4|+\frac{1}{2}ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C$;

б) $x+\ 2ln|x-3|+\frac{1}{2}ln|x^2+4|+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}+C$;

6.17.а) $-ln|x-1|-16ln|x+2|+18ln|x+3|+C$;

б) $\frac{x^3}{3}+6x-\frac{3}{2}x^2-6\,ln|x+1|+C$;

6.18.а) $2ln|x+2|+3ln|x-4|-\frac{1}{2}ln(x^2-2x+4)-$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$;**б)** $\frac{x^3}{3}+3x+\frac{3}{2}x^2-3\,ln|x-1|+C$;

6.19.а) $-3ln|x-1|+5ln|x+4|-ln|x-9|+C$;
б)$\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ +ln|x-1|+C$;
6.20.а) $-ln|x|+ +3ln|x-2|+\frac{3}{2}ln|x+3|+C$;
б)$\frac{x^2}{2}-\ \frac{1}{2}ln(x^2+1)+C$;
6.21.а) $ln|x-1|-ln(x^2+4x+13)-\frac{10}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$;
б) $\frac{1}{2}\left(x-ln(x^2+2x+1)-\frac{2}{x+1}\right)+C$;
6.22.а) $\frac{1}{2}\ ln|x+1|-\frac{1}{4}ln(x^2+1)+\frac{1}{2}arctgx+C$;
б) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{9}x+\frac{8}{27}\ ln|3x+2|+C$;
6.23.а) $2ln|x|-ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$;
б)$-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\ ln|x-1|+C$;
6.24.а) $\frac{1}{2}\ ln|x-1|-4ln|x-2|+\frac{9}{2}\ ln|x-3|+C$;
б)$\frac{x^2}{2}-4x+4ln(x^2+4x+8)+8arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)+C$;
6.25.а) $\frac{1}{4}\ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C$;**б)**$\frac{x^2}{2}+arctgx+C$;
6.26.а) $\frac{1}{2}\ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C$;
б) $\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ ln|x-1|+C$.

1.4.2. Интегрирование тригонометрических функций.

Интегралы вида

$$\int R(sinx;cosx)\,dx \quad (1.3)$$

называются **интегралами от тригонометрических функций**. Здесь $R(sinx;cosx)$ – обозначение некоторой функции от переменных $sinx$ и $cosx$ над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение и деление).

Интегралы вида $\int R(sinx;cosx)\,dx$ всегда можно проинтегрировать с помощью **универсальной тригонометрической подстановки $t=tg\frac{x}{2}$**. Для данной подстановки имеем:

$\frac{x}{2}=arctgt,\ x=2arctgt,\ \ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$sinx\ =\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ cosx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

В результате исходное выражение приводится к интегралу от ра-

циональной функции переменной t:
$\int R(sinx; cosx)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$, как интегрируются рациональные функции мы уже знаем (см. главу 1.4.1.)

Замечание: универсальная подстановка весьма громоздка, поэтому на практике применяют и другие более простые подстановки, в зависимости от вида подынтегральной функции, позволяющие рационализировать исходный интеграл.

Рассмотрим различные виды интегральных функции и запишем соответствующие им подстановки:

1) **Подынтегральная функция нечетная относительно $cosx$**, то есть $R(sinx; -cosx) = -R(sinx; cosx)$,тогда интеграл $\int R(sinx; cosx)\,dx$, рационализируется при помощи подстановки $t = sinx$.

В частности, интегралы вида $\int cos^{2n-1}x \cdot sin^{\alpha} x\,dx$,где $n \in N, \alpha \in R$ интегрируются аналогично, только при $n = 2,3, \ldots$, необходимо выделить множитель
$cos^2x = 1 - sin^2x$.

2) **Подынтегральная функция нечетная относительно $sinx$,то есть $R(-sinx; cosx) = -R(sinx; cosx)$** , то необходимо сделать подстановку $t = cosx$,

В частности, интегралы вида $\int sin^{2n-1}x \cdot cos^{\alpha} x\,dx$,где $n \in N, \alpha \in R$ интегрируются аналогично, только при $n = 2,3, \ldots$, необходимо выделить множитель
$sin^2x = 1 - cos^2x$.

3) **Функция под знаком интеграла четная относительно $sinx$ и $cosx$**, то есть
$R(-sinx; -cosx) = R(sinx; cosx)$, тогда для преобразования подынтегральной функции в рациональную используется подстановка $t = tgx$.

Для данной подстановки имеем:
$x = arctgt,\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt\ , sinx = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,
$cosx = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Таким образом:
$\int R(sinx; cosx)\,dx = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$.

В частности, при вычислении интегралов вида
$\int cos^{2n}xdx\ , \int sin^{2m}x\,dx$, где $m, n \in N$, удобнее применять формулы понижения степени:

$cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$, $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$.

Замечание: иногда при интегрировании тригонометрических функций данного вида (четных относительно $sinx$ и $cosx$) удобно применить формулы $sin\,2x = 2sinxcosx$ и $sin^2x + cos^2x = 1$.

4)Интегралы произведения синусов и косинусов различных аргументов $\int cos\,mxcos\,nxdx$, $\int sin\,mxcos\,nxdx$, $\int sin\,mxsin\,nxdx$ приводятся к табличным с помощью формул преобразования произведения синусов, косинусов в сумму (разность):

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)\,x);$$

$$sin\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)\,x);$$

$$sin\,\alpha\,sin\,\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)\,x - cos(\alpha+\beta)\,x).$$

5)Для интегралов вида $\int tg^nxdx, \int ctg^nxdx$,где $n \in N$. Необходимо выделить множитель $tg^2x = \frac{1}{cos^2x} - 1$ или $ctg^2x = \frac{1}{sin^2x} - 1$, в зависимости от вида подынтегральной функции.

Пример 1.22. Вычислить интеграл:

а)$\int \frac{sinx}{2cosx+cos^2x}dx$; **б)**$\int \frac{cos^5xdx}{sin^4x}$; **в)**$\int \frac{dx}{sin^4x\cdot cos^4x}$; **г)** $\int \frac{dx}{sin^2x\cdot cos^2x}$;
д) $\int \frac{dx}{sin^4x\cdot cos^2x}$;**е)** $\int sin^2xcos^2xdx$; **ё)** $\int sin\,5xsin2xdx$;
ж) $\int sin^2\,3xdx$; **з)** $\int cos^4\,xdx$; **и)**$\int ctg^3\,xdx$; **й)** $\int tg^2\,2xdx$;
к) $\int \frac{dx}{4\,sin\,x+3\,cos\,x+5}$;**л)**$\int \frac{dx}{sin^2x-sinxcosx}$;**м)** $\int \frac{dx}{9+cos\,x}$.

Решение.

а) Так как подынтегральная функция $R(sinx;cosx)$=$\frac{sinx}{cosx+cos^2x}$ - нечетная относительно $sinx$,действительно,

$R(-sinx;cosx) = \frac{-sinx}{cosx+cos^2x} = -\frac{sinx}{cosx+cos^2x} = -R(sinx;cosx)$,

поэтому делаем подстановку $t = cosx$:

$$\int \frac{sinx}{2cosx+cos^2x}dx = \left|\begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \\ -dt = sinxdx \end{matrix}\right| = -\int \frac{dt}{2t+t^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t^2+2t+1)-1} = -\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-1^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}ln\left|\frac{t+1-1}{t+1+1}\right| + C = -\frac{1}{2}ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C = -\frac{1}{2}ln\left|\frac{cosx}{cosx+2}\right| + C;$$

б) Так как, подынтегральная функция $R(sinx;cosx) = \frac{cos^5x}{sin^4x}$ нечетная относительно косинуса, то

есть $R(sinx; -cosx) = \frac{(-cosx)^5}{sin^4x} = -\frac{cos^5x}{sin^4x} = -R(sinx; cosx)$, при этом $n = 3$,предварительно преобразовав подынтегральную функцию, выделив множитель
$cos^2x = 1 - sin^2x$ и сделав подстановку $t = sinx$, имеем:

$$\int \frac{cos^5x}{sin^4x}dx = \int \frac{cos^4xcosx}{sin^4x}dx = \int \frac{(cos^2x)^2cosx}{sin^4x}dx =$$

$$= \int \frac{(1-sin^2x)^2cosxdx}{sin^4x} = \left| \begin{matrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{matrix} \right| = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt =$$

$$= \int \frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^4} = \int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1)\,dt = \frac{t^{-3}}{-3} + 2t^{-1} + t + C =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3sin^3x} + \frac{2}{sinx} + sinx + C;$$

в) Под знаком интеграла четная относительно $sinx$ и $cosx$ функция, то есть $R(-sinx; -cosx) =$
$= \frac{1}{(-sinx)^4(-cosx)^4} = \frac{1}{sin^4x \cdot cos^4x} = R(sinx; cosx)$, поэтому данное выражение рационализируется при помощи подстановки $t = tg\,x$:

$$\int \frac{dx}{sin^4x \cdot cos^4x} = \left| \begin{matrix} t = tg\,x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ sin^4x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \\ cos^4x = \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2}} =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1+3t^2+3(t^2)^2+(t^2)^3}{t^4}dt =$$

$$= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4}dt = \int (t^{-4} + 3t^{-2} + 3 + t^2)dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{3}{t} + 3t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3\,tg^3x} - \frac{3}{tg\,x} + 3tgx + \frac{tg^3x}{3} + C;$$

г) Функция под знаком интеграла чётная относительно $sinx$ и $cosx$,так как $R(-sinx; -cosx) =$
$= R(sinx; cosx)$, но здесь нет необходимости делать подстановку $t = tgx$, гораздо удобнее преобразовать подынтегральную функцию, используя основное тригонометрическое тождество $sin^2x + cos^2x = 1$,в итоге получим:

$$\int \frac{sin^2x + cos^2xdx}{sin^2xcos^2x} = \int \frac{dx}{\frac{1}{4}sin^2 2x} = 4\int \frac{dx}{sin^2 2x} = 2\int \frac{d(2x)}{sin^2 2x} =$$

$$= -2ctg2x + C;$$

д) Функция под знаком интеграла чётная $R(-sinx;-cosx)=R(sinx;cosx)$,рационализируется при помощи подстановки $t=tg\,x$,но в данном случае имеет смысл воспользоваться тождеством
$sin^2x+cos^2x=1$, тогда имеем:

$$\int\frac{dx}{sin^4xcos^2x}=\int\frac{(sin^2x+cos^2x)dx}{sin^4xcos^2x}=\int\frac{dx}{sin^2xcos^2x}+$$

$$+\int\frac{dx}{sin^4x}=4\int\frac{dx}{sin^2 2x}++\int\frac{1}{sin^2x}\cdot\frac{1}{sin^2x}dx=$$

$$=2\int\frac{d(2x)}{sin^2x}-\int\frac{1}{sin^2x}d(ctgx)=-2ctg2x-$$

$$-\int(ctg^2x+1)d(ctgx)\ =-2ctg2x-\int(ctgx)^2d(ctgx)-$$

$$-\int d(ctgx)=-2ctg2x-\tfrac{1}{3}ctg^3x-ctgx+C;$$

е) Функция под знаком интеграла чётная $R(-sinx;-cosx)=R(sinx;cosx)$,рационализируется при помощи подстановки $t=tg\,x$,но в данном случае будет удобно воспользоваться тождеством $sin\,2x=2sinxcosx$, а именно преобразуем подынтегральную функцию:

$$sin^2xcos^2x=(sinxcosx)^2=\frac{1}{4}(2sinxcosx)^2=$$

$=\frac{1}{4}sin^2 2x$, и учитывая, что, $sin^2x=\frac{1-cos2x}{2}$ имеем:

$$\int sin^2xcos^2xdx=\tfrac{1}{4}\int sin^2 2xdx=\tfrac{1}{4}\int\tfrac{1-cos4x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-cos4x)\,dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}sin4x\right)+C;$$

ё) Преобразовывая произведение синусов в разность косинусов

$$sin\,5x\,sin\,2x=\frac{1}{2}(cos(5x-2x)-cos(5x+2x))=$$

$=\frac{1}{2}(cos(3x)-cos(7x))$, получим:

$$\int sin5xsin2x\,dx=\frac{1}{2}\int(cos3x-cos7x)\,dx=\frac{1}{2}\int cos3xdx-$$

$$-\frac{1}{2}\int cos7x\,dx=\frac{1}{6}\int cos3x\,d(3x)-\frac{1}{14}\int cos7x\,d(7x)=$$

$$=\frac{1}{6}sin\,3x-\frac{1}{14}sin\,7x+C;$$

ж) Так как подынтегральная функция $f(x) = sin^2\, 3x$ имеет вид $\int sin^{2m} x\, dx,$, где $m \in N$,то применяя формулу понижения степени

$sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}, sin^2 3x = \frac{1-cos6x}{2}$, получим:

$$\int cos^2 3x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + cos6x)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int cos\, 6x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\int cos(6x)\, d(6x)\right) = \frac{x}{2} - \frac{sin6x}{12} + C;$$

з) $\int cos^4 xdx = \int (cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + cos\, 2x)^2\, dx =$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2cos2x + cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int cos2xdx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int cos^2 2x\, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{8}\int (1 + cos\, 4x)dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{sin\, 2x}{4} + \frac{1}{8}\left(\int dx + \frac{1}{4}\int cos4x\, d(4x)\right) = \frac{x}{4} + \frac{sin\, 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(x + \frac{sin\, 4x}{4}\right) + C;$$

и) Интеграл имеет вид $\int ctg^n xdx$,где $n = 3 \in N$.Необходимо выделить множитель $ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} - 1$:

$$\int ctg^3 x\, dx = \int ctg^2 xctgx\;\; dx = \int \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1\right) ctgx\, dx \;=$$

$$= \int \frac{1}{sin^2 x} ctgx\, dx - \int ctgx\, dx = -\int (ctgx)^1 d(ctgx) -$$

$$- \int \frac{cosx}{sin\, x}dx = -\frac{ctg^2 x}{2} - \int \frac{d(sin\, x)}{sin\, x} = -\frac{ctg^2 x}{2} - ln|sin\, x| + C;$$

й)

$$\int tg^2 2x\, dx = \int \left(\frac{1}{cos^2 2x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{cos^2 2x}dx - \int dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{cos^2 2x} - x = \frac{tg2x}{2} - x + C;$$

к) Подынтегральная функция общего вида (ни чётная, ни нечётная), то есть не обладает ни одним из перечисленных выше свойств, поэтому применяем универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$:

$$\int \frac{dx}{4sinx + 3cosx + 5} = \left| \begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ sinx = \dfrac{2t}{1+t^2}, cosx = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}+\frac{5+5t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int\frac{dt}{\frac{(1+t^2)(2t^2+8t+8)}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\int(t+2)^{-2}d(t+2)=-\frac{1}{t+2}+C=$$

$$=-\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)+2}+C;$$

л) Функция под знаком интеграла чётная относительно $sinx$ и $cosx$, так как $R(-sinx;-cosx)=$ $=R(sinx;cosx)$, сделаем подстановку $t=tg\,x$, предварительно преобразовав подынтегральную функции:

$$\int\frac{dx}{sin^2x-4sinxcosx}=\int\frac{dx}{cos^2x\left(\frac{sin^2x}{cos^2x}-\frac{4sinxcosx}{cos^2x}\right)}=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{cos^2x}dx}{tg^2x-4tgx}=\int\frac{d(tgx)}{tg^2x-4tgx}=|t=tgx|=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2-4t}=\int\frac{dt}{(t-2)^2-4}=\int\frac{d(t-2)}{(t-2)^2-2^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}ln\left|\frac{t-2-2}{t-2+2}\right|+C=\frac{1}{4}ln\left|\frac{t-4}{t}\right|+C=\frac{1}{4}ln\left|\frac{tgx-4}{tgx}\right|+C;$$

м) Применяем универсальную подстановку, имеем:

$$\int\frac{dx}{9+cos\,x}=\left|\begin{matrix}t=tg\frac{x}{2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(9+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{9+9t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{8t^2+10}=$$

$$=\int\frac{dt}{4t^2+5}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{5}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)+C=$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10} arctg\left(\frac{2\sqrt{5}tg\frac{x}{2}}{5}\right) + C.$$

Задания для самостоятельного решения.

7. Найти интегралы от тригонометрических функций:

1. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$	**14.** $\int \frac{dx}{4-\cos x}$
2. $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$	**15.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$
3. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$	**16.** $\int \frac{\sin x+\sin^3 x dx}{2\cos^2 x-1}$
4. $\int \cos^2 4x\,dx$	**17.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx$
5. $\int \frac{\cos^4 3x}{\sin^6 3x} dx$	**18.** $\int \sin^3 x\cos^8 x\,dx$
6. $\int tg^5 x\,dx$	**19.** $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}$	**20.** $\int \sin^2\frac{3x}{2} dx$
8. $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right) dx$	**21.** $\int tg^2\frac{x}{2} dx$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+1}$	**22.** $\int \sin^6 x\cos^3 x\,dx$
10. $\int \frac{dx}{\sin x+2}$	**23.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$
11. $\int \sin^2 10x\,dx$	**24.** $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$
12. $\int \sin 3x\cos 7x dx$	**25.** $\int \frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}$
13. $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x\,dx$	**26.** $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$

Ответы:

7.1. $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$;**7.2.** $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$;

7.3. $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$;**7.4.** $\frac{x}{2} + \frac{1}{16}\sin 8x + C$;

7.5. $-\frac{1}{15}ctg^5 3x + C$;**7.6.** $\frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x - \ln|\cos x| + C$;

7.7. $tgx-\frac{1}{3}tg^3x-2ctg2x+C$;**7.8.** $\frac{1}{2}sinx+\frac{1}{4}sin2x+C$;

7.9. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tgx)+C$;**7.10.** $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right)+C$;

7.11. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{40}sin20x+C$;**7.12.** $\frac{1}{8}cos4x-\frac{1}{20}cos10x+C$;

7.13. $\frac{3}{4}sin^{\frac{4}{3}}x+C$;**7.14.** $\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\left(\frac{\sqrt{15}}{3}tg\frac{x}{2}\right)+C$;

7.15. $\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C$;**7.16.** $\frac{1}{2}cosx-\frac{3}{4\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{2}cosx-1}{\sqrt{2}cosx+1}\right|+C$;

7.17. $-\frac{3}{\sqrt[3]{cosx}}-\frac{3}{5}cosx\cdot\sqrt[3]{cos^2x}+C$;**7.18.** $\frac{1}{11}cos^{11}x-\frac{1}{9}cos^9x+C$;

7.19. $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right)+C$;**7.20.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}sin3x+C$;**7.21.** $2tg\frac{x}{2}-x+C$;

7.22. $\frac{1}{7}sin^7x-\frac{1}{9}sin^9x+C$;**7.23.** $-\frac{1}{3sin^3x}+\frac{1}{sinx}+C$;

7.24. $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}tgx)+C$;**7.25.** $cosx-2arctg(cosx)+C$;

7.26. $x-tg\frac{x}{2}+C$.

1.4.3. Интегрирование иррациональных функций.

Перед тем как находить интеграл от иррациональной функции, вспомним ее определение. Функция называется **иррациональной**, если переменная величина находится под знаком корня.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой, может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим подстановки для интегрирования различных типов иррациональных функций:

1) Рассмотрим интеграл

$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{ax+b};(\boldsymbol{ax+b})^{\frac{m_1}{n_1}};(\boldsymbol{ax+b})^{\frac{m_2}{n_2}};\ldots;(\boldsymbol{ax+b})^{\frac{m_k}{n_k}}\right)\boldsymbol{dx}$**,** где

R — рациональная функция, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$— целые числа, a, b-действительные числа.

Подстановка, рационализирующая подынтегральную функцию, имеет вид: $\boldsymbol{ax+b=t^S}$, $adx=st^{S-1}dt, dx=\frac{s}{a}t^{s-1}dt,$ где s — наименьшее общее кратное (НОК)

чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то есть, наименьшее натуральное число, делящееся нацело на $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Пример 1.23. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$.

Решение.

Переходя от корня к степени, имеем: $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}}$ заметим, что $n_1 = 4, n_2 = 2$, НОК$(2,4) = 4 = s$,следовательно данное выражение рационализируется с помощью подстановки $x = t^4$:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}}} = \left| \begin{array}{c} x = t^4 \left(t = \sqrt[4]{x}\,\right) \\ dx = 4t^3 dt \\ x^{\frac{1}{4}} = (t^4)^{\frac{1}{4}} = t \\ x^{\frac{1}{2}} = (t^4)^{\frac{1}{2}} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{4t^3 dt}{t - t^2} dt = -4 \int \frac{t^2}{t-1} dt =$$

$$= -4 \int \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt == -4 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= -4\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + C = -4\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt[4]{x} + ln\left|\sqrt[4]{x} - 1\right|\right) + C.$$

Пример 1.24. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[6]{x-1}} dx$.

Решение.

Переходя от корня к степени, имеем: $\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{6}}} dx$ заметим, что $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 6$, НОК$(3,4,6) = 12 = s$,следовательно данное выражение рационализируется с помощью подстановки $x - 1 = t^{12}$:

$$\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}} + (x-1)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{6}}} dx = \left| \begin{array}{c} x - 1 = t^{12}, t = \sqrt[12]{x-1} \\ dx = 12t^{11} dt \\ (x-1)^{\frac{1}{3}} = (t^{12})^{\frac{1}{3}} = t^4 \\ (x-1)^{\frac{1}{4}} = (t^{12})^{\frac{1}{4}} = t^3 \\ (x-1)^{\frac{1}{6}} = (t^{12})^{\frac{1}{6}} = t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^4 + t^3}{t^2} 12t^{11} dt = 12 \int (t^4 + t^3) t^9\, dt = 12 \int (t^{13} + t^{12})\, dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{14}}{14} + \frac{t^{13}}{13}\right) + C = \quad 12\left(\frac{\sqrt[12]{(x-1)^{14}}}{14} + \frac{\sqrt[12]{(x-1)^{13}}}{13}\right) + C =$$

$$= \frac{6}{7}(x-1)\sqrt[6]{x-1} + \frac{12}{13}(x-1)\sqrt[12]{x-1} + C.$$

Замечание: аналогично рационализируются интегралы вида

$\int R\left(\frac{ax+b}{cx+d};\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}};\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}};\dots;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$,то есть при помощи подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$.

Пример 1.25. Найти интеграл $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение.

Переходя от корня к степени, имеем: $\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{(x-1)^2}$ заметим, что $n=3$,НОК(3) =3=s, следовательно данное выражение рационализируется с помощью подстановки $\frac{x+1}{x-1}=t^3$, учитывая, что

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x-1)'(x+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$$ имеем:

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^2}=\left|\begin{array}{c}\frac{x+1}{x-1}=t^3,t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\\ -\frac{2}{(x-1)^2}dx=3t^2dt\\ \frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{3}{2}t^2dt\end{array}\right|=$$

$$=\int t\left(-\frac{3}{2}t^2\right)dt=-\frac{3}{2}\int t^3dt=-\frac{3}{8}t^4+C=$$

$$=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C=-\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

2)Интегралы вида $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$ рационализируются при помощи соответствующей тригонометрической подстановки:

	вид	подстановка
1	$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=asint$ или $x=acost$
2	$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=atgt$ или $x=actgt$
3	$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{a}{cost}$ или $x=\frac{a}{sint}$

Опираясь на формулы $sin^2x+cos^2x=1$ и $1+tg^2x=\frac{1}{cos^2x}$, разберём как получены эти формулы, рассмотрим для примера 1 случай $\sqrt{\boldsymbol{a^2 - x^2}}$:

Наша задача задача-избавиться от знака корня для этого делаем замену $x = asint$:

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (asint)^2} = \sqrt{a^2(1 - sin^2t)} =$
$= \sqrt{a^2cos^2t} = \sqrt{(acost)^2} = |acost|;$

Учитывая, что $a^2 - x^2 \geq 0, x^2 \leq a^2, -a \leq x \leq a$,но саму первообразную будем искать на промежутке $-a < x < a$, то есть при $x\epsilon(-a; a)$,это делается для того, чтобы исключить нули знаменателя$\sqrt{a^2 - x^2}$.

Определим промежуток изменения новой переменной t,для этого в неравенство$-a < x < a$ подставим $x = asint$:

$-a < asint < a|: a,$
$-1 < sint < 1,$
$arcsin(-1) < t < arcsin1,$
$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ или $t\epsilon\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом,$\sqrt{a^2 - x^2} = |acost| = acost$, так как $a > 0$,а $cost > 0$,при $t\epsilon\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Осталось определить выражение для dx:

$x = asint, dx = d(asint), dx = (asint)'dt, dx = acostdt.$

Итак, $\boldsymbol{\sqrt{a^2 - x^2} = acost, dx = acostdt}$,что и требовалось показать. Аналогично выводятся и остальные подстановки.

Замечания: указанные радикалы (корни) могут стоять как в числителе, так и в знаменателе, так и вообще без знака корня;

Пример 1.26. Вычислить интеграл$\int \sqrt{4 - x^2}dx$.

Решение.

Интеграл$\int \sqrt{2^2 - x^2}dx$ имеет вид$\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right)du$,

где $a = 2$,следовательно, интеграл рационализируется при помощи тригонометрической подстановки $x = 2sint$:

$$\int \sqrt{4 - x^2}dx = \left|\begin{matrix} x = 2sint \\ dx = 2costdt \\ \sqrt{4 - x^2} = 2cost \\ t = arcsin\frac{x}{2} \end{matrix}\right| = 4\int cos^2tdt =$$

$$= 2\int(1 + cos2t)dt = 2\int dt + \int cos2td(2t) = 2t + sin2t + C =$$

$$= 2t + 2sintcost + C = 2t + 2sint \cdot \sqrt{1 - sin^2t} + C = 2arcsin\frac{x}{2} +$$

$$+x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + C = 2arcsin\frac{x}{2} + x \cdot \sqrt{\frac{4 - x^2}{4}} + C =$$

$$= 2arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

Замечание: данный пример можно решить и другим способом-методом интегрирование по частям, покажем, как это сделать.

$$I = \int \sqrt{4-x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{4-x^2}, du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} \\ dv = dx, \qquad v = \displaystyle\int dx = x \end{matrix} \right| = x\sqrt{4-x^2} +$$

$$+ \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{(4-x^2)-4}{\sqrt{4-x^2}}dx = x\sqrt{4-x^2} -$$

$$- \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2}dx + 4arcsin\frac{x}{2};$$

Итак, $\int \sqrt{4-x^2}dx = x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2}dx + 4arcsin\frac{x}{2}$ или

$$I = x\sqrt{4-x^2} - I + 4arcsin\frac{x}{2},$$

$$2I = x\sqrt{4-x^2} + 4arcsin\frac{x}{2} \;|:2,$$

$$2I = x\sqrt{4-x^2} + 4arcsin\frac{x}{2} \;|:2,$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2arcsin\frac{x}{2} + C.$$

Таким образом, $\int \sqrt{4-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2arcsin\frac{x}{2} + C.$

Пример 1.27. Вычислить интеграл:

а) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;**б)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; **в)** $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Решение.

а) Интеграл $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ имеет вид $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$,где $a = 3$,следовательно, интеграл рационализируется при помощи подстановки $x = \frac{3}{cost}$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{3}{cost} \\ cost = \dfrac{3}{x}\left(t = arccos\left(\dfrac{3}{x}\right)\right) \\ dx = \dfrac{3sint}{cos^2t}dt, \\ \sqrt{x^2-9} = \sqrt{\dfrac{9}{cos^2t} - 9} = \\ = \sqrt{9\left(\dfrac{1}{cos^2t} - 1\right)} = \\ = \sqrt{9tg^2t} = 3tgt \end{matrix} \right| = \int 3tgt\frac{3sintcost}{3cos^2t}dt =$$

$$= 3\int tg^2t dt = 3\int\left(\frac{1}{cos^2t}-1\right) = 3(tgt-t)+C =$$

$$= 3\left(\frac{sint}{cost}-t\right)+C = 3\left(\frac{sint}{cost}-t\right)+C = 3\left(\frac{\sqrt{1-cos^2t}}{cost}-t\right)+C =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{x}\right)^2}}{\frac{3}{x}}-arccos\left(\frac{3}{x}\right)\right)+C = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}-arccos\left(\frac{3}{x}\right)\right)+C =$$

$$= \sqrt{x^2-9}-3arccos\left(\frac{3}{x}\right)+C;$$

б) Интеграл $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1^2+x^2}}$ имеет вид $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$,где $a=1$,следовательно, интеграл рационализируется с помощью подстановки $x=tgt$:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left|\begin{matrix} x=tgt, \\ dx=\frac{1}{cos^2t}dt, \\ \sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+tg^2t}= \\ =\sqrt{\frac{1}{cos^2t}}=\frac{1}{cost} \\ t=arctgx \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{tg^2t\,cos^2t\frac{1}{cost}} = \int\frac{dt}{tg^2tcost} =$$

$$= \int\frac{dt}{\frac{sin^2t}{cos^2t}cost} = \int\frac{dt}{\frac{sin^2t}{cost}} = \int\frac{costdt}{sin^2t} = \int(sint)^{-2}d(sint) =$$

$$= -\frac{1}{sint}+C = -\frac{1}{\frac{sint}{cost}}\cdot\frac{1}{cost}+C = -\frac{1}{tgt}\cdot\frac{1}{cost}+C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C;$$

в)

$$\int\frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \left|\begin{matrix} x=2sint, sint=\frac{x}{2}, \\ dx=2costdt, \\ \sqrt{4-x^2}=2cost, \\ t=arcsin\frac{x}{2} \end{matrix}\right| = \int\frac{8sin^3t+1}{2cost4sin^2t}2costdt =$$

$$= \int\frac{8sin^3t+1}{4sin^2t}dt = \int\left(2sint+\frac{1}{4sin^2t}\right)dt = 2cost-\frac{1}{4}ctgt+C =$$

$$= 2\sqrt{1 - sin^2 t} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{sin^2 t} - 1} + C = 2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} - 1} + C =$$

$$= 2\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{x^2} - 1} + C = \sqrt{4 - x^2} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C.$$

3)Интегралы вида$\int \boldsymbol{R\left(x; \sqrt{x^2 + px + q}\right) dx}$ рационализируется по следующему правилу.

Правило: выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене $x^2 + px + q$ и вводим новую переменную $\boldsymbol{u}$ (выражение в скобках, выделенного квадрата) ,получим интеграл одного из трех видов (относительно новой переменной u): $\int \boldsymbol{R(u; \sqrt{a^2 - u^2})du}$, $\int \boldsymbol{R(u; \sqrt{a^2 + u^2})du}$, $\int \boldsymbol{R(u; \sqrt{u^2 - a^2})du}$, после чего делаем соответствующие тригонометрические замены: $u = asint\ (u = acost)$, $u = atgt(u = actgt)$,$u = \frac{a}{cost}\ (u = \frac{a}{sint})$.

Пример 1.28. Вычислить интеграл $\int \sqrt{5 - x^2 - 4x}dx$.

Решение.

Преобразуем подынтегральную функцию выделяя полный квадрат под корнем: $5 - x^2 - 4x = 9 - (x + 2)^2$.Сделав подстановку $u = x + 2, du = dx$ имеем:

$$\int \sqrt{5 - x^2 - 4x}dx = \int \sqrt{9 - (x + 2)^2}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x + 2 \\ du = dx \end{matrix} \right| = \int \sqrt{9 - u^2}\, du;$$

Заметим, что полученный интеграл$\int \sqrt{9 - u^2}\, du$ имеет вид$\int R(u; \sqrt{a^2 - u^2})du$, где $u = x + 2, a = 3$,следовательно интеграл рационализируется с помощью подстановки $u = 3sint$:

$$\int \sqrt{9 - u^2}\, du = \left| \begin{matrix} u = 3sint\left(t = arcsin\frac{u}{3}\right) \\ du = 3costdt \\ \sqrt{9 - u^2} = \sqrt{9 - 9sin^2 t} = \\ = \sqrt{9(1 - sin^2 t)} = 3cost \end{matrix} \right| =$$

$$= \int 3cost\, 3costdt = 9\int cos^2 tdt = \frac{9}{2}\int (1 + cos2t)\, dt =$$

$$=\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}sin2t\right)+C=\frac{9}{2}\left(arcsin\frac{u}{3}+\frac{u}{9}\sqrt{9-u^2}\right)+C=$$
$$=\frac{9}{2}\left(arcsin\frac{x+2}{3}+\frac{x+2}{9}\sqrt{9-(x+2)^2}\right)+C.$$

Пример 1.29. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8x+15}}$.

Решение.

Преобразуем подынтегральную функцию выделяя полный квадрат под корнем: $x^2-8x+15=(x-4)^2-1$.Сделав подстановку $u=x-4, du=dx$ имеем:

$$\int\frac{dx}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8x+15}}=\int\frac{dx}{(x-4)^2\sqrt{(x-4)^2-1}}=$$
$$=\left|\begin{matrix}u=x-4\\ du=dx\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2-1}};$$

Заметим, что полученный интеграл $\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2-1}}$имеет вид$\int R\left(u;\sqrt{u^2-a^2}\right)du$, где $u=x-4, a=1$,следовательно интеграл рационализируется с помощью подстановки $u=\frac{1}{cost}$:

$$\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2-1}}=\left|\begin{matrix}u=\dfrac{1}{cost}\\ du=((cost)^{-1})'dt\\ du=\dfrac{sint}{cos^2t}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\dfrac{sint}{cos^2t}dt}{\left(\dfrac{1}{cost}\right)^2\sqrt{\dfrac{1}{cos^2t}-1}}=$$
$$=-\int\frac{sintdt}{cos^2t\dfrac{1}{cos^2t}\sqrt{tg^2t}}=\int\frac{sint}{tgt}dt=\int costdt=sint+C=$$
$$=\sqrt{1-cos^2t}+C=\left|u=\frac{1}{cost},cost=\frac{1}{u}\right|=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{u}\right)^2}+C=$$
$$=-\sqrt{1-\frac{1}{(x-4)^2}}+C=-\frac{\sqrt{(x-4)^2-1}}{x-4}+C.$$

Задания для самостоятельного решения.
8.Найти интегралы от иррациональных функций:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$	**14.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$
2. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$	**15.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}+\sqrt[4]{1-2x}}$	**16.** $\int\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}}dx$

4. $\int \sqrt{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x^2}$	**17.** $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$
5. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$	**18.** $\int \frac{1-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x^2}}dx$
6. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$	**19.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$
7. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$	**20.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x+16}\,dx$
8. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$	**21.** $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}\,dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$	**22.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{x+\sqrt{x}}dx$	**23.** $\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$
11. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx$	**24.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
12. $\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}dx$	**25.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$
13. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$	**26.** $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

Ответы:

8.1. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C;$

8.2. $x-+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6arctg\left(\sqrt[6]{x}\right)+C;$

8.3. $-(1-2x)^{\frac{1}{2}}-2(1-2x)^{\frac{1}{4}}-2ln\left|(1-2x)^{\frac{1}{4}}-1\right|+C;$

8.4. $2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C;$ **8.5.** $3x-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+6arctg\left(\sqrt[6]{x}\right)+C;$

8.6. $\frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right)+C;$

8.7. $6\cdot\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|\right)+C;$

8.8. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$ **8.9.** $\sqrt{x^2-4}--4arccos\frac{2}{x}+C;$

8.10. $4x^{\frac{1}{4}}+2ln\left|x^{\frac{1}{2}}+1\right|+4arctg\left(x^{\frac{1}{4}}\right)+C\ ;$

8.11. $-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C;$ **8.12.** $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C;$

8.13. $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(\frac{x+1}{10}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C;$

8.14. $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C;$

8.15. $2arctg\left(\sqrt{x+1}\right)+C;$ **8.16.** $x-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+C;$

8.17. $-2arctg\left(\sqrt{1-x}\right)+C;$

8.18. $\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} - \frac{15}{11}x^{\frac{11}{15}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$;**8.19.**$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$;

8.20. $2\sqrt{x} - 8\,arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right) + C$;**8.21.**$-\frac{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}{12x^3} + C$;

8.22. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{x} + C$;**8.23.**$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + C$;

8.24. $tg(arcsinx) + C$;**8.25.**$-\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + C$;

8.26. $\frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$.

1.5. «Берущиеся» и «не берущиеся» интегралы.

Как уже отмечалось выше, операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегда выбранный путь интегрирования является наилучшим, более коротким, простым. Интегрирование часто может быть выполнено не единственным способом. Многое зависит от знания рекомендуемых искусственных приемов интегрирования и от практических навыков решения интегралов.

Пример 1.30. Вычислить $\int \frac{dx}{cos^4x}$.

Решение.

$\int \frac{dx}{cos^4x}$, можно найти, не используя рекомендуемую подстановку $t = tgx$, а применив искусственный прием:

$$\int \frac{dx}{cos^4x} = \int \frac{(sin^2x + cos^2x)dx}{cos^4x} = \int \left(\frac{sin^2x}{cos^2x}\cdot\frac{1}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^4x}\right)dx =$$

$$= \int tg^2x \cdot \frac{1}{cos^2x}dx + \int \frac{dx}{cos^2x} = \int (tgx)^2 d(tgx) + tgx =$$

$$= \frac{tg^3x}{3} + tgx + C.$$

Пример 1.31. Вычислить $\int \frac{3x^2+8x+4}{x(x^2+4x+4)}dx$.

Решение.

Вряд ли стоит вычислять интеграл $\int \frac{3x^2+8x+4}{x(x^2+4x+4)}dx$

раскладывая подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2+8x+4}{x(x^2+4x+4)} = \frac{3x^2+8x+4}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2};$$

Заметив, что числитель $3x^2 + 8x + 4$ является производной знаменателя, так как

$x(x^2 + 4x + 4) = x^3 + 4x^2 + 4x$, легко получить табличный инте-

грал:
$\int \frac{3x^2+8x+4}{x(x^2+4x+4)}dx = \int \frac{3x^2+8x+4}{x^3+4x^2+4x}dx = ln|x^3+4x^2+4x| + C$.

Рассмотренные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл. Говорят, что $\int f(x)dx$ **берется** (вычисляется), если интеграл выражается через элементарные функции. Если интеграл не выражается через элементарные функции, то интеграл **не берется** (или его нельзя найти).
Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы (так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна подынтегральному выражению):

1) $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона;
2) $\int sin(x^2)dx$, $\int cos(x^2)dx$ - интегралы Френеля;
3) $\int \frac{dx}{lnx}$ - интегральный логарифм;
4) $\int \frac{e^x}{x}dx$ - приводится к интегральному логарифму;
5) $\int \frac{sinx}{x}dx$, $\int \frac{cosx}{x}dx$ - интегральный синус и косинус соответственно.

Замечание: первообразные от функций 1)-5), хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента.

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение определенного интеграла и геометрический смысл.

Рассмотрим задачу о вычислении площади **криволинейной трапеции** –фигуры, ограниченной двумя вертикальными прямыми $x = a, x = b$, осью Ox и кривой $y = f(x)$, где $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$ функция (рис.2).

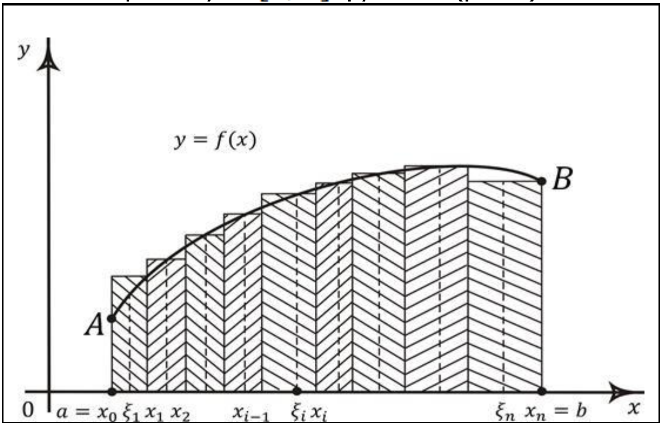

Рис.2

Для определенности будем считать, что функция $y = f(x)$ неотрицательна.
Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей с помощью точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ (рис.2). Из каждого отрезка $[x_{i-1}; x_i], i = 1,2, \dots, n$ возьмем произвольную точку ξ_i и вычислим $f(\xi_i)$.Умножим найденное значение функции $f(\xi_i)$ на длину частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$: $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.
Криволинейная трапеция разобьется на n элементарных полос шириной Δx_i и высотой $f(\xi_i)$, площадь каждой из которых приближенно равна $f(\xi_i)\Delta x_i$.
Образуем сумму всех таких произведений:

$$\boldsymbol{S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i} \quad \textbf{(2.1)}$$

Сумма вида (2.1) называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки Δx_i и данному выбору промежуточных точек ξ_i .
Геометрический смысл суммы S_n очевиден: это сумма площадей

прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$.
Обозначим через $\Delta = max\Delta x_i$ длину наибольшего частичного отрезка разбиения, если $\Delta = max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a;b]$ стремится к бесконечности ($n \to \infty$).

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм при стремлении к нулю длины наибольшего частичного отрезка разбиения, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора в каждом из них точки $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \mathbf{(2.2)}$$

Функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на отрезке $[a;b]$.
Числа a и b называются соответственно **нижним и верхним пределами интегрирования** соответственно, а отрезок $[a;b]$ – **отрезком интегрирования**. Функция $f(x)$ называется подынтегральной **функцией**, $f(x)dx$ **– подынтегральным выражением**, x **– переменной интегрирования**.

Из определения определенного интеграла следует **геометрический смысл определенного интеграла:** определенный интеграл от неотрицательной функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции, то есть $S \approx S_n = \int_a^b f(x)dx$.

Так же из определения следует, что определенный интеграл представляет собой некоторое число и не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = k;$$

Рассмотрим какими свойствами должна обладать функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, чтобы существовал определенный интеграл от этой функции на данном отрезке? Ответ на поставленный вопрос дает теорема Коши.

Теорема Коши (теорема о существования определенного интеграла):

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Примем её без доказательства.
Таким образом, непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

2.2. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a;b]$, а $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$,то $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{F(x)}|_a^b = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)}$**(2.3)**

Доказательство.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$,как показано на рис.2. Рассмотрим тождество:

$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big)+\ldots+$
$+\big(F(x_1) - F(x_0)\big)$. Преобразуем каждую разность в скобках, по формуле Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, $\xi \epsilon [a; b]$, получим:

$F(b) - F(a) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})+\ldots+F'(\xi_1)(x_1 - x_0) =$
$= \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$,то она интегрируема на отрезке $[a;b]$. Поэтому существует предел интегральной суммы равный определенному интегралу от

$f(x)$ на $[a;b]$.Переходя в равенстве $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ к пределу при $\Delta = max\Delta x_i \to 0$, получаем

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(F(b)-F(a)\right)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, то есть

$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$. Теорема доказана.

Полученная формула (2.3) называется **формулой Ньютона — Лейбница** или основной формулой интегрального исчисления.

Алгоритм решения определенного интеграла:

1) Сначала находим первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$;

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$;

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$;

4) Рассчитываем разность $F(b)-F(a)$, то есть, находим число - определенный интеграл.

Замечание: формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Пример 2.1. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл:

а) $\int_1^2 x^5dx$; **б)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;**в)** $\int_0^{lg2} 2^x\cdot 5^x dx$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x)=x^5$на отрезке $[1;2]$ имеет первообразную $F(x)=\frac{x^6}{6}$, тогда по формуле (4.3) получим:

$$\int_1^2 x^5dx=\left.\frac{x^6}{6}\right|_1^2=\frac{2^6}{6}-\frac{1^6}{6}= =\frac{63}{6}=10{,}5;$$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=arcsin\left.\frac{x}{2}\right|_0^1 = arcsin\frac{1}{2}-arcsin\frac{0}{2}=\frac{\pi}{6}$;

в) Как известно интеграла от произведения не существует, поэтому после преобразования получим:

$$\int_0^{lg2} 2^x \cdot 5^x dx = \int_0^{lg2} (2\cdot 5)^x dx = \int_0^{lg2} 10^x dx = \frac{10^x}{ln10}\Big|_0^{lg2} =$$

$$= \frac{1}{ln10}(10^{lg2}-1) = \frac{1}{ln10}.$$

2.3. Свойства определенного интеграла.

Вычисление определенного интеграла очень часто проводится с использованием первых пяти свойств, свойства определённого интеграла позволяют упрощать непосредственное вычисление интегралов, так что мы будем при надобности на них ссылаться. Остальные свойства определенного интеграла, в основном, применяются для оценки различных выражений. Прежде чем перейти к свойствам определенного интеграла, условимся, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$интегрируемы на отрезке$[a;b]$ и

имеют первообразные $F(x)$, $G(x)$соответственно.

1.При перемене верхнего и нижнего пределов интегрирования местами значение определенного интеграла меняется на противоположное, то есть

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.}$$

Доказательство.

По формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) =$$
$$= -F(x)|_b^a = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Определенный интеграл с совпадающими пределами интегрирования равен нулю, то есть

$$\boldsymbol{\int_a^a f(x)dx = 0.}$$

Доказательство.

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле

Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть

$$\int_a^b \boldsymbol{kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\,, k = const.}$$

Доказательство.

Составим интегральную сумму для подынтегральной функции $kf(x)$:

$\sum_{i=1}^n k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$,где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i =$

$= k\int_a^b f(x)dx$, то есть функция $kf(x)$интегрируема на $[a;b]$.Таким образом, выполняется равенство

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

4. Интеграл суммы (разности) нескольких функций равен сумме (разности) интегралов от каждой из них:

$\boldsymbol{\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.}$

Доказательство.

Доказательство этого свойства, абсолютно схоже с предыдущим:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \left(f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\right)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

Замечание: данное свойство справедливо для суммы (разности) любого конечного числа слагаемых.

Пример 2.2. Вычислить $\int_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1)dx;$.

Решение.

Применяя свойства 3),4) получим табличные интегралы:

$$\int_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1)dx = (x^4 - 2x^3 + x^2 + x)|_1^2 =$$

$$= 2^4 - 2\cdot 2^3 + 2^2 + 2 - (1^4 - 2\cdot 1^3 + 1^2 + 1) = 5;$$

5. Если отрезок интегрирова- ния разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям, то есть если $c\epsilon[a;b]$,то

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \int_a^c \boldsymbol{f(x)dx} + \int_c^b \boldsymbol{f(x)dx}.$$

Доказательство.

Пусть $c = x_m$- точка деления отрезка $[a;b]$ на части (это можно сделать в виду независимости предела интегральной суммы от способа разбиения отрезка $[a;b]$), тогда интегральную сумму можно разбить на две суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i;$$

Каждая из сумм является интегральной суммой отрезков $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, соответственно. Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$,получим:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Замечание: это свойство справедливо при любом расположении точек a, b, c (как для $c\epsilon[a;b]$,так и для $c \le a$ или $c \ge b$).

6. «Теорема о среднем». Определённый интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке внутри него, то есть, если $c\epsilon[a;b]$, то

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{f(c)(b-a)}.$$

Доказательство.

По формуле Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$,по формуле Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$,

$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$=$f(c)(b-a)$,

следовательно$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$;

7. Если функция $\boldsymbol{f(x) \ge 0}$ $(\boldsymbol{f(x) \le 0})$ для любого значения аргумента $x\epsilon[a;b]$,то$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx \ge 0}$ $\left(\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx \le 0}\right)$.

Доказательство.

По «теорема о среднем» (свойство 6):

$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$,где $c\epsilon[a;b]$;

Рассмотрим случай, когда $f(x) \geq 0$ для всех $x\epsilon[a;b]$, то и $f(c) \geq 0$, при $b-a > 0$.

Поэтому $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \geq 0$.

Аналогично для случая $f(x) \leq 0$.

Следствия:

1)Если $f(x) \leq g(x)$для всех $x\epsilon[a;b]$,то

$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

2)Если $f(x) \geq g(x)$для всех $x\epsilon[a;b]$,то

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Это означает, что можно интегрировать неравенства. Отметим, что дифференцировать неравенства нельзя.

8. Модуль определенного интеграла не превосходит интеграл от модуля подынтегральной функции, то есть

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

Доказательство.

Проинтегрируем очевидное неравенство

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ получим:

$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, следовательно,$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

9. Если функция $f(x)$принимает на отрезке $[a;b]$ свои наименьшее m и наибольшее значение M , то имеет место неравенство $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Доказательство.

Так как для любого $x\epsilon[a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$,интегрируя неравенство получим:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx,$$

$$mx|_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq Mx|_a^b,$$

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

2.4. Методы вычисления определенного интеграла.

Так как формула Ньютона–Лейбница сводит задачу вычисления определенного интеграла от непрерывной функции к нахождению первообразной, то все основные методы вычисления неопределенных интегралов переносятся и на задачу вычисления определенных интегралов. Однако, имеются некоторые особенности:

1) Метод непосредственного интегрирования- определенного интеграла состоит в том, что путем тождественных преобразований и применения свойств определенного интеграла, исходный интеграл приводится к одному или нескольким табличным интегралам, которые вычисляются по формуле Ньютона-Лейбница, то есть данный метод в определенном интеграле работает так же как и в неопределенном, только добавляются пределы интегрирования. Рассмотрим, как работает этот метод на примерах.

Пример 2.3. Вычислить интеграл:

а) $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x}dx$; **б)** $\int_{-1}^0 x(x^2-2)^2dx$; **в)** $\int_0^1 \frac{2^x}{4^{-x}}dx$;

г) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+cos2x}{2}}\,dx.$

Решение.

а) $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x}dx = \int_1^e \left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - lnx\right)\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - ln2 - \left(\frac{1^2}{2} - ln1\right) =$

$= \frac{3}{2} - ln2;$

б) $\int_{-1}^0 x(x^2-2)^2dx = \int_{-1}^0 x(x^4-4x^2+4)dx =$

$$= \int_{-1}^0 (x^5-4x^3+4x)dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^4 + 2x^2\right)\Big|_{-1}^0 =$$

$$= \frac{0^6}{6} - 0^4 + 2\cdot 0^2 - \left(\frac{(-1)^6}{6} - (-1)^4 + 2(-1)^2\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{6}+1\right) = -\frac{7}{6};$$

в) $\int_0^1 \frac{2^x}{4^{-x}}dx = \int_0^1 2^x \cdot 4^x dx = \int_0^1 8^x dx = \frac{8^x}{ln8}\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{ln8}(8-8^0) = \frac{7}{ln8}$;

г) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+cos2x}{2}}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{cos^2x}\, dx = \int_0^{\pi} |cosx| dx;$

Так как, $cosx > 0$,при$x\epsilon \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,то$|cosx|$ на данном промежутке равен$cosx$,то есть$|cosx| = cosx$,а при $x\epsilon\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $cosx < 0$, то есть$|cosx| = -cosx$,отсюда имеем:

$$\int_0^{\pi} |cosx| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-cosx)dx = sinx|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$
$$-sinx|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 - \left(sin\pi - sin\frac{\pi}{2}\right) = 1-(-1) = 2.$$

2)Подведение функции под знак дифференциала.

Напомним, что главной задачей данного метода является приведение исходного интеграла к табличному виду, путем подведения функции под знак дифференциала. В определенном интеграле суть метода не меняется, добавляются лишь пределы интегрирования.

Пример 2.4. Вычислить интеграл:

а) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(7+5x)^2}$ **б)**$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ctgxdx}{sin^2x}$;**в)** $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$;**г)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2x - sin^4x}$.

Решение.

а) Учитывая, что $d(7+5x) = 5dx$ имеем:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(7+5x)^2} = \frac{1}{5}\int_{-1}^{0} (7+5x)^{-2} d(7+5x) =$$
$$= -\frac{1}{5(7+5x)}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14};$$

б) Так как$\frac{1}{sin^2x}dx = -d(ctgx)$ имеем:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ctgxdx}{sin^2x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctgx \frac{1}{sin^2x}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctgx\, d(ctgx) =$$
$$= -\frac{ctg^2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}ctg^2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(ctg^2\frac{\pi}{2} - ctg^2\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2};$$

в) Так как $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2+1)$ имеем:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}\ d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2(x^2+1)}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

г) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2x - sin^4x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2x(1-sin^2x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2xcos^2x} =$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{(2sinxcosx)^2} = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{sin^2 2x} = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(2x)}{sin^2 2x} =$$

$$-2ctg2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -2\left(ctg\frac{2\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{3}\right) = -2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

3)Замена переменной в определенном интеграле.

Подобно тому, как это было в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет свести интеграл к табличному виду. Замена переменной в определенном интеграле отличается от замены переменной в неопределенном интеграле тем, что в результате замены изменяются пределы интегрирования и нет необходимости выполнять обратную замену.

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема 2.2. Если функция $y = f(x)$непрерывна на отрезке$[a;b]$,а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $x' = \varphi'(t)$ на отрезке $[t_1;t_2]$, где $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$и при этом функция $f\left(\varphi(t)\right)$ определена и непрерывна на $[t_1;t_2]$,тогда справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt \quad \textbf{(2.4)}$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на отрезке$[a;b]$.Так как $\left(F\left(\varphi(t)\right)\right)' = F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$, то $F\left(\varphi(t)\right)$является первообразной для функции

$f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t\epsilon[t_1;t_2]$. Поэтому по формуле Ньютона –Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{t_1}^{t_2} = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Формула (2.4) называется **формулой замены переменной** в определенном интеграле.

Пример 2.5. Вычислить интеграл:

а) $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; **б)** $\int_0^1 x(2-x^2)^7\,dx$; **в)** $\int_0^{ln2} \frac{dz}{e^z+1}$; **г)** $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;

д) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}dx$.

Решение.

а) Сделав замену $t = \sqrt{x-1}$, не забудем заменить пределы интегрирования, если $x = 2$,то $t(2) = \sqrt{2-1} = 1$, если $x = 5$,то $t(5) = \sqrt{5-1} = 2$.

Таким образом, решение имеет вид:

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \left|\begin{array}{c} t = \sqrt{x-1} \\ t^2 = x-1 \\ t^2+1 = x \\ 2tdt = dx \\ t(2) = 1, t(5) = 2 \end{array}\right| = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t}2tdt =$$

$$= 2\int_1^2 (t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_1^2 = 2\left(\frac{8}{3}+2-\left(\frac{1}{3}+1\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{7}{3}+1\right) = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3};$$

б) $$\int_0^1 x(2-x^2)^7\,dx = \left|\begin{array}{c} t = 2-x^2 \\ dt = -2xdx \\ xdx = -\frac{dt}{2} \\ t(0) = 2 \\ t(1) = 1 \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int_2^1 t^7\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8}\Big|_2^1 =$$

$$= -\frac{1}{16}t^8|_2^1 = -\frac{1}{16}(1-2^8) = \frac{255}{16};$$

в) Сделав подстановку $t = e^z$ получим:

$$\int_0^{ln2}\frac{dz}{e^z+1}=\left|\begin{matrix} t=e^z\\ lnt=lne^z\\ lnt=z\\ \frac{1}{t}dt=dz\\ t(0)=1\\ t(ln2)=2\end{matrix}\right|=\int_1^2\frac{\frac{1}{t}dt}{t+1}=\int_1^2\frac{dt}{t^2+t}=$$

$$=\int_1^2\frac{dt}{\left(t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{4}}=\int_1^2\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_1^2=ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_1^2=ln\frac{2}{3}-ln\frac{1}{2}=ln\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=ln\frac{4}{3};$$

г) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix} x=sint\\ dx=costdt\\ t=arcsinx\\ t(0)=0,\\ t(1)=arcsin1=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sin^2t}\,costdt=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}sin\pi\right)$$
$$=\frac{\pi}{4};$$

д) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}dx=\left|\begin{matrix} t=tgx\\ x=arctgt\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\\ t\left(\frac{\pi}{4}\right)=tg\frac{\pi}{4}=1\\ t\left(\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\end{matrix}\right|=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)(1+t)^2}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{(1+t)^2}=$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}(1+t)^{-2}d(1+t)=-\frac{1}{1+t}\Big|_1^{\sqrt{3}}=-\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

Замечание: при замене переменной в определенном интеграле следует помнить, что вводимая функция должна быть непрерывна на отрезке интегрирования.

4) Интегрирование по частям в определенном интеграле.

При выводе формулы интегрирования по частям в неопределенном интеграле было получено равенство $udv = d(uv) - vdu$. Проинтегрировав его в пределах от a до b в соответствии со свойствами определенного интеграла, имеем:

$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu = uv|_a^b - \int_a^b vdu \text{ или}$$

$$\boldsymbol{\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu} \ \textbf{(2.5)}$$

Формула (2.5) называется **формулой интегрирования по частям** в определенном интеграле.

Пример 2.6. Вычислить интеграл:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\frac{x}{2}dx$;**б)** $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$; **в)** $\int_1^2 (x^2-1)e^x dx$;**г)** $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Решение.

а) Интегрируем по частям, получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\frac{x}{2}dx = \left|\begin{matrix} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin\frac{x}{2}dx, v = \int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}dx = -2\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} - 0\right) + 4\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\left(\sin\frac{\pi}{4} - 0\right) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-\pi);$$

б) $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln(1+x), \ du = \frac{1}{1+x}dx \\ dv = dx, v = \int dx = x\end{matrix}\right| =$

$$= x\ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}dx = \ln 2 - 0 -$$

$$-\int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \ln 2 - \left(x - \ln(x+1)\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2 - 0 + \ln 1) =$$

$$= 2\ln 2 - 1;$$

в) $\int_1^2 (x^2-1)e^x dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 - 1, \ du = 2xdx \\ dv = e^x dx, v = \int e^x dx = e^x\end{matrix}\right| =$

$$= (4-1)e^2 - 0 - 2\left(xe^x|_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right) = 3e^2 -$$

$$-2(2e^2 - e - e^x|_1^2) = 3e^2 - 4e^2 + 2e + 2e^2 - 2e = e^2$$

г) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, \ du = 2xdx \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, v = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2}\end{matrix}\right| =$

$$= x^2\sqrt{1+x^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = 4\sqrt{5} - \int_0^2 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) =$$

$$= 4\sqrt{5} - \frac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\Big|_0^2 = 4\sqrt{5} - \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

2.5. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке$[-a;a]$ симметричном относительно $(\cdot)x=0$. Докажем, следующее:

$$\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \begin{cases} \boldsymbol{2\int_0^a f(x)\,dx}, & \text{если } \boldsymbol{f(x)} - \text{чётная} \\ \boldsymbol{0}, & \text{если } \boldsymbol{f(x)} - \text{нечётная} \end{cases} \quad \textbf{(2.6)}$$

Разобьем отрезок интегрирования$[-a;a]$ на части $[-a;0]$ и$[0;a]$.Тогда используя свойства определенного интеграла, имеем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (2.7)$$

Сделаем в первом интеграле (в сумме) подстановку $x=-t$ получим:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x=-t \\ dx=-dt \\ t=-x \\ t(-a)=a \\ t(0)=0 \end{matrix} \right| = \int_a^0 f(-t)\,(-dt) = \int_0^a f(-t)\,dt =$$

$= \int_0^a f(-x)\,dx$ (определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования);

Вернемся к равенству (2.7):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx;$$

Если функция $f(x)$ –чётная, то есть $f(-x)=f(x)$,то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx +$$
$$+\int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,;$$

Если функция $f(x)$ –нечётная, то есть $f(-x)=-f(x)$,то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$= 0.$$

Таким образом, равенство (2.7) принимает вид (2.6).

Пример 2.7. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Решение.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ является четной, так как $f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$. Следовательно, по формуле (2.6) получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=2arctgx|_0^1=2(arctg1-arctg0)=$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.8. Найти интегралы:

а) $\int_{-2}^{2}x^3dx$; **б)** $\int_{-\pi}^{\pi}sin^3xcos^2xdx$; **в)** $\int_{-4}^{4}x^5e^{-x^2}dx$.

Решение.

а) Благодаря формуле (2.6) можно не вычисляя интеграл сказать, что он равны нулю, так как, подынтегральная функция $f(x)=x^3$ нечетная,
$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$,а пределы интегрирования симметричны.
Итак, $\int_{-2}^{2}x^3dx=0$;

б) $\int_{-\pi}^{\pi}sin^3xcos^2xdx=0$, так как функция $f(x)=sin^3x\cdot cos^2x$ –нечётная,
$f(-x)=sin^3(-x)cos^2(-x)=-sin^3xcos^2x=-f(x)$;

в) Аналогично, $\int_{-4}^{4}x^5e^{-x^2}dx=0$, $f(x)=x^5e^{-x^2}$,
$f(-x)=(-x)^5e^{-(-x)^2}=-x^5e^{-x^2}=-f(x)$.

Задания для самостоятельного решения.

9.Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница, применив один из методов интегрирования:

1. $\int_0^{\pi}(2x+sin2x)dx$	**14.** $\int_1^{e}\frac{1+ln^3x}{x}dx$
2. $\int_0^{3}x\sqrt{x+1}dx$	**15.** $\int_0^{1}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$
3. $\int_0^{\pi}sin^2xdx$	**16.** $\int_1^{3}\frac{dx}{(x-5)^2}$
4. $\int_1^{2}\frac{dx}{x^3+x}$	**17.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2tgxdx}{cos^2x}$

5. $\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$	**18.** $\int_0^{\pi} \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$	**19.** $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$
7. $\int_1^{e} x\ln x\,dx$	**20.** $\int_0^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$
8. $\int_1^{e}\frac{\sin(\ln x)dx}{x}$	**21.** $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\cos 8x\,dx$	**22.** $\int_1^{2} xe^x\,dx$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$	**23.** $\int_0^{1}(2x-1)^6\,dx$
11. $\int_4^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$	**24.** $\int_0^{2} \sin^3 x\cos x\,dx$
12. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}$	**25.** $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{6xdx}{(3x^2-1)^4}$
13. $\int_0^{1}\frac{xdx}{x^4+1}$	**26.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\,(1+2\cos x)\,dx$

Ответы:

9.1. π^2; **9.2.** $\frac{116}{15}$; **9.3.** $\frac{\pi}{2}$; **9.4.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$; **9.5.** $\arcsin\frac{2}{3}$;

9.6. $-\frac{1}{2}$; **9.7.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$; **9.8.** $1-\cos 1$; **9.9.** $-\frac{17}{120}$;

9.10. $\frac{2}{3}$; **9.11.** $7+2\ln 2$; **9.12.** $\frac{1}{3}$; **9.13.** $\frac{\pi}{8}$; **9.14.** $\frac{5}{4}$;

9.15. $\frac{1}{4}$; **9.16.** $\frac{1}{4}$; **9.17.** 1; **9.18.** π; **9.19** $\frac{\pi}{6}$; **9.20.** $\frac{\pi-2}{4}$;

9.21. $\frac{\ln 2}{2}$; **9.22.** e^2; **9.23.** $\frac{1}{7}$; **9.24.** $\frac{1}{4}$; **9.25.** 21. **9.26.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

2.6. Несобственные интегралы.

Для существования $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимы условия: 1) $[a;b]$ – конечен; 2) $f(x)$ – ограничена на промежутке $[a;b]$ (необходимое условие существования определенного интеграла). Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай, когда одно из этих условий не выполнено. В соответствии с этим различают: несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку интегрирования), несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций).

2.5.1. Несобственные интегралы первого рода.

Пусть, функция $f(x)$, определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$(рис.3). Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом первого рода.**

Обозначение: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Если этот предел существует и равен некоторому числу, а не бесконечности, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, а число, которому равен предел, принимается за его значение. В противном случае интеграл называется **расходящимся** и ему не приписывается никакого значения.

Замечание: несобственный интеграл первого рода выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (рис.3)

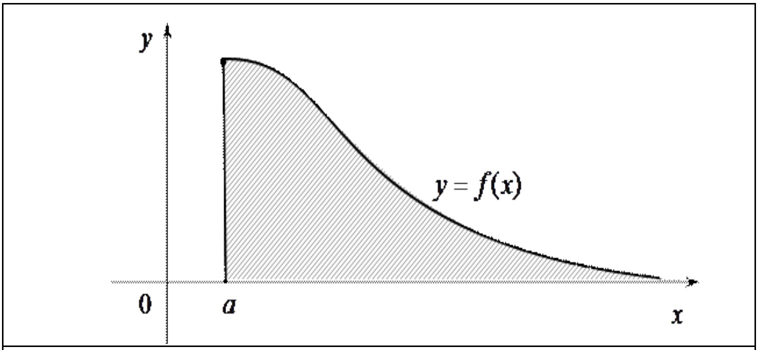

Рис.3

Аналогично определяется несобственные интеграл на промежутке$(-\infty;b)$:$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$;

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования, обозначаемый символом$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, нужно предварительно представить в виде суммы двух несобственных интегралов, один из которых с конечным верхним пределом

интегрирования, другой - с конечным нижним пределом интегрирования:
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где $c = const$, интеграл слева сходится, если сходятся оба интеграла справа.

Замечание: в качестве внутренней точки удобно взять значение $c = 0$ при условии, что подынтегральная функция непрерывна в этой точке.

Пример 2.9. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:
а)$\int_{-\infty}^{0} cosxdx$; **б)**$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; **в)** $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$; **г)**$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$.

Решение.

а) $\int_{-\infty}^{0} cosxdx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} cosxdx = \lim_{a\to-\infty} sinx|_a^0 =$
$= \lim_{a\to-\infty}(sin0 - sina) = 0 - \lim_{a\to-\infty} sina = \nexists$, так как при
$a \to -\infty$ функция $sina$ не имеет предела, сследовательно, интеграл расходится;
б)$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to+\infty} arctg(x+1)|_1^b =$
$\lim_{b\to+\infty} (arctg(b+1) - arctg2) = arctg(+\infty) - arctg2 =$

$= \frac{\pi}{2} - arctg2$;
в) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} x^{-2}dx = -\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{x}\Big|_a^{-1} =$
$= -\lim_{a\to-\infty}\left(-1 - \frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1;$
г) Поскольку оба предела интегрирования (верхний и нижний) бесконечны разбиваем интеграл на два несобственных интеграла, если они оба сходятся, то исходный интеграл сходится:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} = \int_{-\infty}^{0} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} +$$
$$+ \int_{0}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} +$$

$+ \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$, но в данном случае это не рационально, так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$ является четной $f(-x) = f(x)$ с симметричными пределами интегрирования, будет удобным воспользоваться формулой (4.6), то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} =$$

$$= 2\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)};$$

Под знаком интеграла рациональная дробь, поэтому применяя алгоритм интегрирования рациональных дробей, получим:

$$\frac{2x^2+5}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

(так как, знаменатель полученной дроби имеет комплексные корни $D<0$)

$(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2) = 2x^2+5$

$(A+C)x^3+(B+D)x^2+(3A+2C)x+3B+2D = 2x^2+5$

x^3: $A+C=0$,

x^2: $B+D=2$,

x^1: $3A+2C=0$,

x^0: $3B+2D=5$.

Получим систему $\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=2 \\ 3A+2C=0 \\ 3B+2D=5 \end{cases}$, решая её получим $\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}$. Коэффициенты найдены, вернемся к вычислению предела:

$$2\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+2)(x^2+3)} = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} +\right.$$

$$\left.+\int_0^b \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right) = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^b +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^b\right) = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - arctg0\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right) - arctg0\right)\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}\right) =$$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\pi.$

Пример 2.10. При каких значениях α несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится и при каких расходится?

Решение.

Если $\alpha \neq 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\, dx =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1 \\ -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$,то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} ln|x|\big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} (lnb - ln1) = \infty.$

Таким образом, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Замечание: в некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл. Достаточно лишь знать, сходится он или расходится.

Сформулируем признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема 2.3. (признак сравнения).
Если на промежутке $[a;+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Теорема 2.4. (предельный признак). Если существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < k < +\infty$ $(f(x) > 0,\ \varphi(x) > 0)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание: В качестве эталона для сравнения функций часто берут функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.В примере 2.10 показано, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 2.11. Исследовать сходимость интеграла: **а)** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(2^x+1)}$; **б)** $\int_1^{+\infty} ln\frac{x^2+1}{x^2} dx$; **в)** $\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+2}}$;

г) $\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x}dx$;**д)** $\int_1^{+\infty}\frac{2+sinx}{\sqrt{x}}dx$.

Решение.

а)Сравним функцию $f(x)=\frac{1}{x^2(2^x+1)}$ с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$.Как известно, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, так как $\alpha=2>1$.На промежутке $x\in[1;+\infty)$
имеем $f(x)=\frac{1}{x^2(2^x+1)}<\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$,следовательно интеграл$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(2^x+1)}$сходится по признаку сравнения (из сходимости большего интеграла следует сходимость меньшего);

б) Здесь подынтегральная функция
$f(x)=ln\frac{x^2+1}{x^2}>0$, при $x\in[1;+\infty)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}>0$, интеграл от которой сходиться $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ $(\alpha=2>1)$. А так как существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$(используем предельный признак):

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{b\to+\infty}\frac{ln\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=1,$$

следовательно исходный интеграл $\int_1^{+\infty}ln\frac{x^2+1}{x^2}dx$ сходится.

Оставшиеся несобственные интегралы:
в) $\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+2}}$;г) $\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x}dx$;д) $\int_1^{+\infty}\frac{2+sinx}{\sqrt{x}}dx$,
рекомендуется исследовать на сходимость самостоятельно, для закрепления изученного материала.

2.5.2. Несобственные интегралы второго рода.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке$[a;b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x=b$ (рис.4). Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом второго рода**.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$.

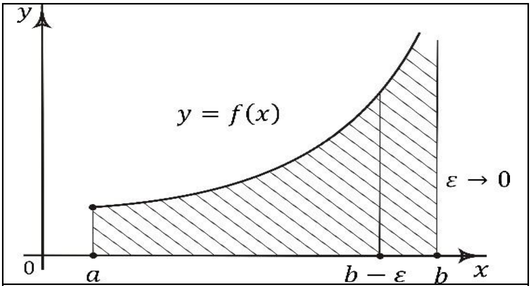

Рис.4

Замечание: несобственный интеграл второго рода выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (рис.4)

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке$(a;b]$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, то $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв во внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $c = const$.

Если сходятся оба интеграла справа, то сходится и суммарный интеграл слева.

Замечание: точек разрыва внутри отрезка может быть несколько. В частности, если подынтегральная функция разрывна на концах интервала то есть одновременно при $x = a$ и при $x = b$,то необходимо сместиться в окрестности этих точек справа и слева соответственно, то есть

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx$, Если сходятся оба интеграла справа, то сходится и суммарный интеграл слева.

Пример 2.12. Вычислить несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость:

а)$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$; **б)** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$; **в)** $\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{x^2-1}$; **г)** $\int_{-\frac{1}{8}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

а) Так как подынтегральная функция

$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ разрывна в $(\cdot)x = 2$, смещаемся в окрестность точки слева:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}(x-2)^{-2}d(x-2) =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(x-2)}\Big|_0^{2-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2-\varepsilon-2}-\frac{1}{0-2}\right) = \frac{1}{0}+\frac{1}{2} = \infty,$$

следовательно, исходный интеграл расходится;

б) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{lnx}}$ разрывна в $(\cdot)x = 1$,так как О.О.Ф: $\begin{cases} x\sqrt{lnx} \neq 0 \\ lnx \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \neq 0, \sqrt{lnx} \neq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$,

$\begin{cases} x \neq 0, x \neq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > 1}$.

В соответствии с правилом вычисления несобственных интегралов второго рода, имеем:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{lnx}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{1}{x}(lnx)^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e (lnx)^{-\frac{1}{2}}d(lnx) =$$
$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{lnx}\Big|_{1+\varepsilon}^e = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{lne}-\sqrt{ln(1+\varepsilon)}\right) = 2;$$

в) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ разрывна на концах интервала, то есть при $x = \pm 1$,поэтому имеем:

$$\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{x^2-1} = \int_{-1}^0 \frac{3xdx}{x^2-1} + \int_0^1 \frac{3xdx}{x^2-1} =$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{2xdx}{x^2-1} + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{2xdx}{x^2-1} =$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(x^2-1)}{x^2-1} =$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln|x^2-1|\Big|_{-1+\varepsilon}^0 + ln|x^2-1|\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(ln|0^2-1| - ln|(-1+\varepsilon)^2-1| +$$
$$+ln|(1-\varepsilon)^2-1| - ln|0^2-1|) = \frac{3}{2}(-ln0+ln0),$$

интеграл слева расходится, так как оба интеграла справа расходятся ($ln0$– не существует);

г)Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ разрывна во внутренней $(\cdot)x = 0$. Поэтому,

$$\int_{-\frac{1}{8}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-\frac{1}{8}}^0 x^{-\frac{1}{3}}dx + \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{1}{8}}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{1}{3}}dx +$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-\frac{1}{8}}^{0-\varepsilon} + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^1 =$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left((0-\varepsilon)^{\frac{2}{3}}-\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1^{\frac{2}{3}}-(0+\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}=-\frac{3}{8}+\frac{3}{2}=\frac{9}{8}.$$

Пример 2.13. При каких значениях α несобственный интеграл $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится и при каких расходится?

Решение.

Функция $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ разрывна в (·) $x=0$. Рассмотрим случаи:

Если $\alpha\neq 1$, то $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\alpha}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{0+\varepsilon}^1=$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\begin{cases}\infty, & \alpha>1\\ \frac{1}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1\end{cases};$$

Если $\alpha=1$, то

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}ln|x|\,\Big|_{0+\varepsilon}^1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln1-ln(0+\varepsilon)\right)=\infty.$$

Таким образом, интеграл сходится $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ при $0<\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geq 1$.

Замечание: в некоторых задачах интегрирования нет необходимости вычислять интеграл, достаточно установить его сходимость или расходимость. Сформулируем признаки сходимости несобственных интегралов второго рода.

Теорема 2.5. (признак сравнения)

Пусть непрерывные на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$, $\varphi(x)$, при $x=b$ терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0\leq f(x)\leq\varphi(x)$. Из сходимости интеграл $\int_a^b\varphi(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b\varphi(x)dx$.

Теорема 2.6. (предельный признак)

Пусть функции $f(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, в точке $x=b$ терпят разрыв. Если существует предел $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,\ 0<k<b$, то интегралы $\int_a^b\varphi(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание: в качестве эталона для сравнения функций часто берут функцию $\varphi(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$.В примере 2.13 показано, что несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ сходится при $0<\alpha<1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Пример 2.14. Исследовать сходимость интеграла:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}$;**б)** $\int_0^1 \frac{dx}{tgx}$;**в)** $\int_0^1 \frac{sin2x}{\sqrt[3]{x}}dx$;**г)** $\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x)=\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}$ разрывна в точке $x=0$.Сравним ее с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ интеграл от которой $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ сходится, так как $\alpha=\frac{1}{3}<1$.Очевидна такая оценка на промежутке $(0;1]$:

$f(x)=\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}<\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, следовательно, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}$ сходится (по признаку сравнения);

б) Функция $f(x)=\frac{1}{tgx}$ разрывна в точке $x=0$.Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, интеграл от которой $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ расходится, так как $\alpha=1$. А так как существует предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1\neq 0\neq\infty$, то по предельному признаку интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{tgx}$ расходится.

Следующие несобственные интегралы, для закрепления изученного материала, рекомендуется исследовать на сходимость самостоятельно: в) $\int_0^1 \frac{sin2xdx}{\sqrt[3]{x}}$;г) $\int_0^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}$.

Задания для самостоятельного решения.
10.Вычислить несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость:

1. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$	**14.** $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{xln^2x}$
2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(1-x)^2}$	**15.** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$

3. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$	**16.** $\int_7^{+\infty}\frac{dx}{(x-5)^2}$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}$	**17.** $\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}dx$
5. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$	**18.** $\int_8^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$
6. $\int_{-\infty}^{0}\frac{2x}{x^2+1}dx$	**19.** $\int_0^{+\infty}e^{-5x}dx$
7. $\int_0^{+\infty}2x\sin x dx$	**20.** $\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x+5}$
8. $\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{x^2+2x+10}$	**21.** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$
9. $\int_1^{+\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$	**22.** $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x+2}$
10. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4}$	**23.** $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$
11. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+5}$	**24.** $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$
12. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$	**25.** $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$
13. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	**26.** $\int_{-\infty}^{0}x^3e^{-x^2}dx$

Ответы:

10.1. $\frac{1}{2}$; **10.2.** 1; **10.3.** расходится; **10.4.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; **10.5.** $\frac{\pi}{2}$; **10.6.** расходится; **10.7.** расходится; **10.8.** $\frac{\pi}{4}$; **10.9.** расходится; **10.10.** $\frac{\pi}{4}$; **10.11.** расходится; **10.12.** $\frac{\pi}{4}$; **10.13.** расходится; **10.14.** 1; **10.15.** $\frac{\pi}{12}$; **10.16.** $\frac{1}{2}$; **10.17.** 1; **10.18.** расходится; **10.19.** $\frac{1}{5}$; **10.20.** $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-arctg2\right)$; **10.21.** π; **10.22.** $\frac{\pi}{2}$; **10.23.** $\frac{1}{2}$; **10.24.** 2; **10.25.** расходится; **10.26.** $-\frac{1}{2}$.

11. Вычислить несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость:

1. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$	**14.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	**15.** $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$
3. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$	**16.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-cos2x}$
4. $\int_3^7 \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$	**17.** $\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$
5. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$	**18.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$
6. $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$	**19.** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{sin^2(4x)}$	**20.** $\int_5^6 \frac{dx}{(x-5)^2}$
8. $\int_0^1 \ln x dx$	**21.** $\int_0^1 x\ln x dx$
9. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$	**22.** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
10. $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{1+cosx}$	**23.** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln x}}$
11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$	**24.** $\int_0^{\pi} tg\, xdx$
12. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$	**25.** $\int_2^6 \frac{dx}{(x-3)^2}$
13. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\frac{1}{x}+3}dx}{x^2}$	**26.** $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+8x-15}}$

Ответы:

11.1. расходится; **11.2.** $\frac{\pi}{2}$; **11.3.** расходится;**11.4.** $\frac{384}{5}$;

11.5.$2\sqrt{2}$;**11.6.** расходится;**11.7.** расходится;**11.8.**-1;

11.9.расходится;**11.10.**расходится;**11.11.** π;**11.12.** 2;

11.13.расходится;**11.14.** $\frac{\pi}{2}$;**11.15.** $\frac{8}{3}$;**11.16.**расходится;

11.17.расходится;**11.18.** $\frac{3}{2}$;**11.19** 4;**11.20.**расходится;

11.21.$-\frac{1}{4}$;**11.22.**$\frac{\pi}{2}$;**11.23.**$\frac{4}{3}$;**11.24.**расходится; **11.25.**расходится;

11.26. π.

2.6. Приложения определенного интеграла.

Определённый интеграл используется в различных приложениях: при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения и др.
закрепления изученного материала.

2.6.1. Вычисление площадей плоских фигур.

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат.

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла: как уже было установлено, он численно равен площади криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, то есть площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x) \geq 0, x = a, x = b, y = 0$ (рис.6), вычисляется по формуле (2.8):

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \textbf{(2.8)}$$

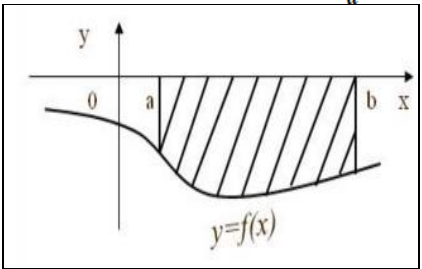

Рис. 5

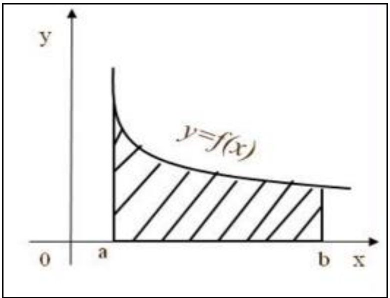

Рис. 6

Если график расположен ниже оси Ох, то есть $f(x) \leq 0$ при $x\epsilon[a;b]$ (рис.38), то площадь вычисляется по формуле (2.9):

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \textbf{(2.9)}$$

Замечание:

1) Если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным;

2) Если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна! Именно поэтому в только что рассмотренной формуле фигурирует минус (см. формулу 2.9).

3)Учитывая, что $|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$, формулы (2.8) и (2.9) можно объединить в одну:

$$\boldsymbol{S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|} \quad \textbf{(2.10)}$$

Если плоская фигура ограничена линиями $y = f_1(x), y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x\epsilon[a; b]$, и прямыми $x = a, x = b$ (рис.40), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx} \quad \textbf{(2.11)}$$

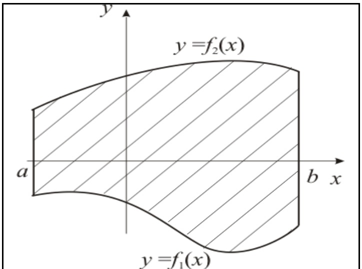

Рис. 7

Пример 2.15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x, x\epsilon[0; 3]$.

Решение.

Так как на промежутке $x\epsilon[0; 2]$ функция отрицательна

$y = x^2 - 2x < 0$, а на промежутке $x\epsilon[2; 3]$ положительна (см.рис.8), то применяя формулу (2.10) имеем:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2 +$$
$$+\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_2^3 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) + 9 - 9 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{16}{3} + 8 =$$
$$= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}(\text{ед.}^2).$$

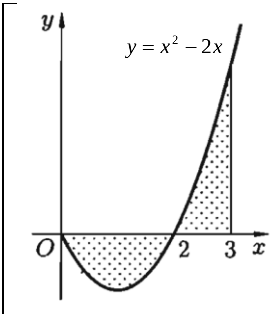

Рис. 8

Пример 2.16. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - x^2, y = 2x$.

Решение.

Найдем точки пересечения прямой $y = 2x$ и параболы $y = 3 - x^2$,для этого решим систему уравнений:

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$, $2x = 3 - x^2$,

$x^2 + 2x - 3 = 0$,

$x_1 = -3, x_2 = 1, y_1 = -6$,

$y_2 = 2$.

Таким образом, получим две точки пересечения

$M_1(-3; -6), M_2(1; 2)$(рис. 9).

Строим по данным точкам прямую $y = 2x$ и параболу $y = 3 - x^2$.Площадь полученной фигуры найдем по формуле (2.11), где

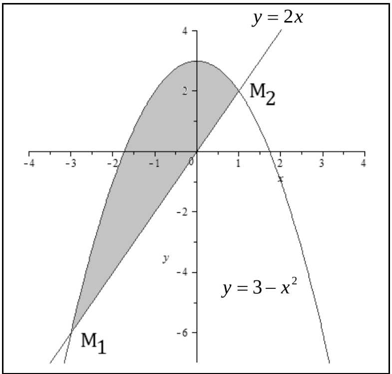

Рис. 9

$f_1(x) = 2x,\ \ f_2(x) = 3 - x^2, f_2(x) \geq f_1(x),\ x \epsilon [-3; 1]$
:

$$S = \int_{-3}^{1} (3 - x^2 - 2x)\, dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-3}^{1} =$$

$$= 3 - \frac{1}{3} - 1 - (-9 + 9 - 9) = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}\,(\text{ед.}^2).$$

Пример 2.17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x^2+4}, y = \frac{x^2}{3}$.

Решение.

Найдем точки пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений:

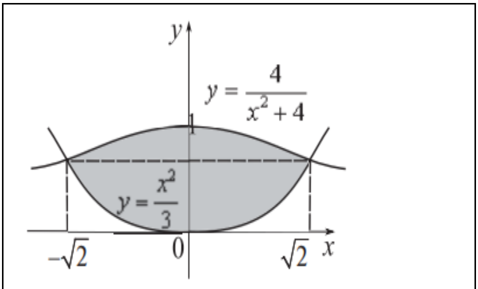

Рис. 10

$\begin{cases} y = \frac{x^2}{3} \\ y = \frac{4}{x^2+4} \end{cases}$, следовательно,

$\frac{x^2}{3} = \frac{4}{x^2+4}$,

$(x^2 + 4)x^2 = 12$,

пусть $t = x^2$, тогда,

$(t + 4)t = 12$ или $t^2 + 4t - 12 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{2},$$

$t_1 = 2, t_2 = -6$,

если $t_1 = 2$, то $x^2 = 2$,

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $y_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$;

если $t_2 = -2$, то $x^2 = -2$ –вещественных корней нет.
Таким образом, получим две точки пересечения $\left(\sqrt{2};\frac{2}{3}\right),\left(-\sqrt{2};\frac{2}{3}\right)$ (рис.10). Поскольку фигура симметричная, то найдем половину площади:

$$\frac{1}{2}S = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{x^2+4}-\frac{x^2}{3}\right)dx = \left(2arctg\frac{x}{2}-\frac{x^3}{9}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2arctg\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{9}-\left(2arctg\frac{0}{2}-\frac{0^3}{9}\right) = 2arctg\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{9}\,(\text{ед.}^2).$$

Таким образом, $S = 2\left(2arctg\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$ (ед.^{2}).

Замечание: в некоторых случаях, при нахождении площади фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$ заданной в декартовой системе координат, удобно переходить к параметрическому заданию линии, то есть, представить функциональную зависимость $y = f(x)$ через параметр t (все эти функции хорошо изучены).

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных параметрически заданной функцией.

Если криволинейная трапеция ограниченна сверху кривой, задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, y(t) \geq 0, t\epsilon[t_1;t_2]$, прямыми $x = a, x = b$ и осью Ox (рис.11), то её площадь вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt\right|} \quad \textbf{(2.12)},$$

где t_1 и t_2определяются из равенств $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$,при некотором вполне конкретном значении параметра t_1 параметрические уравнения будут определять координаты точки A, а при другом значении t_2 координаты точки B.

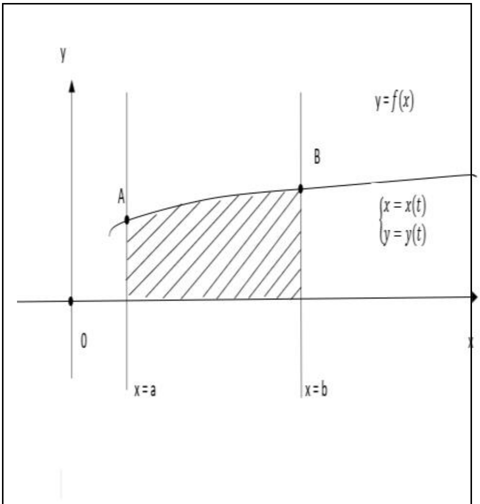

Рис. 11

Действительно, сделав подставку

$x = x(t)$и $y = y(t)$ в формуле (2.12), учитывая, что $dx = x'(t)dt$, $t\epsilon[t_1; t_2]$получим:

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ dx = x'(t)\,dt \\ x(t_1) = a \\ x(t_2) = b \end{matrix}\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt\right|.$$

Пример 2.18. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение.

Поскольку вычислении площади эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4} |\cdot 9,$$

$$y^2 = 9 - \frac{9}{4}x^2,$$

$y = \pm\sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$, $x\epsilon[-2; 2]$ –вычисление интеграла от данной функции довольно громоздко, поэтому целесообразно перейти к параметрическому заданию эллипса.

Известно, что эллипс задается параметрически уравнением$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$, $t\epsilon[0; 2\pi]$,где a, b полуоси эллипса, в нашем случае $a = 2, b = 3$,следовательно, исходное уравнение в параметрической форме имеет вид: $\begin{cases} x = 2cost \\ y = 3sint \end{cases}$, $t\epsilon[0; 2\pi]$.

Действительно, если составить таблицу значений координат $(x; y)$ точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t, 0 \le t \le 2\pi$:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	2	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
y	0	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	3	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-3	$-\sqrt{2}$	0

Нанести точки $(x;y)$ на координатную плоскость Oxy и соединить их линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка $(x;y)$ описывает эллипс с полуосями $a = 2, b = 3$ (рис.12).

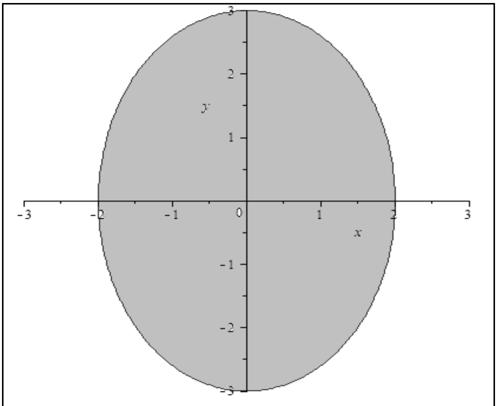

Рис. 12

Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей, найдем площадь четвертой части эллипса $\frac{1}{4}S$,здесь x изменяется от 0 до 2, при этом t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Согласно формуле (2.12), получим:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)x'(t)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 3sint(-2sint)dt =$$

$$= -6\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 tdt = 6\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2t}{2}dt = 3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt =$$

$$= 3\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sin\pi - 0 + \frac{1}{2}sin0\right) = \frac{3\pi}{2};$$

Таким образом, площадь всей фигуры равна: $S = 4\cdot\frac{3\pi}{2} = 6\pi(\text{ед.}^2)$.

Пример 2.19. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды, уравнение которой задано параметрически: $\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}, t\epsilon[0;2\pi]$.

Решение.

Для построения фигуры, заданной параметрически, составим таблицу значений координат $(x;y)$ точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t, $0 \le t \le 2\pi$:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0{,}57a$	$a\pi$	$a\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) \approx 5{,}71a$	$2\pi a$
y	0	a	$2a$	0	0

Нанесем точки $(x;y)$ на координатную плоскость Oxy и соединим их линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка $(x;y)$ описывает арку циклоиды (рис.13).

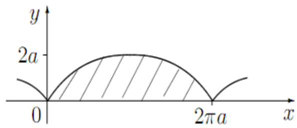

Рис. 13

Согласно формуле (2.12), получим:

$$S=\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-cost)\big(a(t-sint)\big)'dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-cost)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2cost+cos^2t)dt=$$

$$=a^2\left(\int_0^{2\pi}dt-2\int_0^{2\pi}costdt+\int_0^{2\pi}cos^2tdt\right)=$$

$$=a^2(t|_0^{2\pi}-2sint|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+cos2t)dt)=$$

$$=a^2\left(2\pi-0-2(sin2\pi-sin0)+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=a^2\left(2\pi+\frac{1}{2}\left(2\pi+\frac{1}{2}sin4\pi-0-\frac{1}{2}sin0\right)\right)=3a^2\pi.$$

Таким образом, площадь одной арки циклоиды равна: $S=3a^2\pi$(ед.^{2}).
По сути, мы вывели формулу для нахождения площади одной арки циклоиды в общем виде. И если на практике вам встретится задача с конкретным значением параметра a, то вы легко сможете проверить результат вычисления. Так, например при $a=3$, $S=3\cdot3^2\cdot\pi=27\pi$(ед.^{2}).

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных линиями, заданными в полярной системе координат.

Для нахождения площадей ограниченных кривыми заданных в полярной системе координат нам пригодятся навыки построения графиков функций в данной системе координат, поэтому необходимо вспомнить, что же такое полярная система координат.

Полярная система координат. Криволинейный сектор и сегмент.

Любая точка в полярной системе координат определяться с помощью полярных координат $M(r;\varphi)$, где r – расстояние от начала координат $O(0;0)$ (полюса) до точки $M(r;\varphi)$, φ – угол

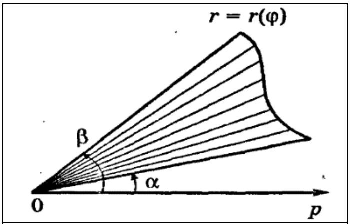

Рис. 15

между положительным направлением действительной оси Ox и (движемся против часовой стрелки) радиус-вектором r точки M (рис. 14).

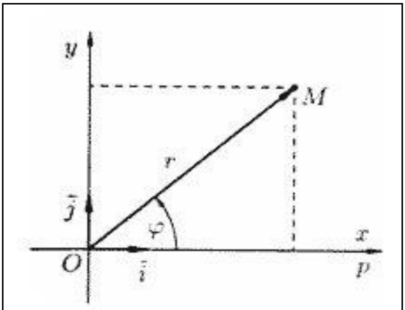

Рис. 14

Формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

Рассмотрим некоторую функцию $r = r(\varphi) \geq 0$ заданную в полярной системе координат принимающую неотрицательные значения на отрезке $\varphi \in [\alpha;\beta]$, где $r = r(\varphi)$- длина радиус – вектора, соединяющего полюс О с произвольной точкой кривой r, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси Ор.

В полярной системе может быть задан криволинейный сектор или сегмент.

Криволинейный сектор – это фигура, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$,

$\varphi = \beta$ и некоторой линией $r = r(\varphi) \geq 0$, которая непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$ (рис. 15).

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \quad \textbf{(2.13)}$$

Сегмент — это часть сектора, то есть фигура, ограниченная кривыми $r=r(\varphi), \rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$ (рис.16).

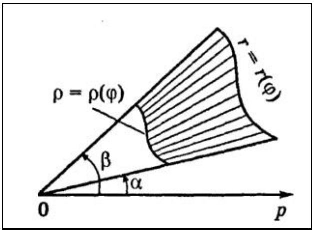

Рис. 16

Площадь сегмента может быть найдена по формуле (2.14):

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r^2(\varphi)-\rho^2(\varphi)\right)d\varphi \;\textbf{(2.14)}$$

Пример 2.20. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=2\varphi, \varphi\in[0;3\pi]$.

Решение.

Известно, что уравнение $r=a\varphi$ задает кривую в полярных координатах, которая называется спиралью Архимеда. В нашем случае $a=2$, изобразим фигуру- отметим полюс О, изобразим полярную ось Ор, начертим угловые направления φ (рис.17).

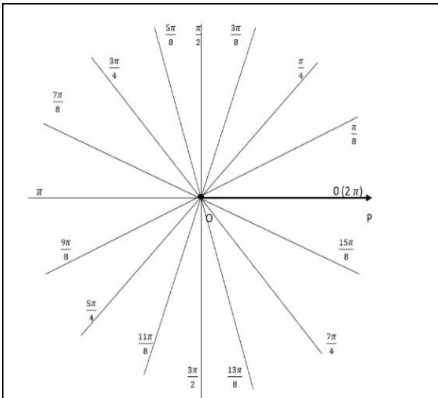

Рис. 17

Отметим найденные точки $(r;\varphi)$ и соединим их линией (рис. 18):

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π

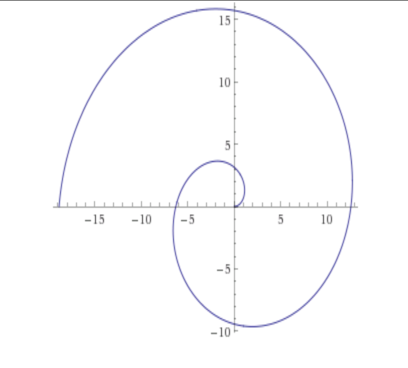

Рис. 18

Площадь полученного сектора находим по формуле (2.13):

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} (2\varphi)^2 d\varphi = 2\int_0^{3\pi} \varphi^2 d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\varphi^3\Big|_0^{3\pi} = \frac{2}{3}(3\pi)^3 = 18\pi^3(\text{ед.}^2).$$

Замечание: если в условии не указан диапазон значений угла, то либо этот диапазон совпадает с областью определения функции $r = r(\varphi)$, либо принимается равным отрезку $[0; 2\pi]$.

Пример 2.21. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 1 + cos\varphi$.

Решение.

Поскольку $r = 1 + cos\varphi$ чётная функция, действительно, $r(-\varphi) = 1 + cos(-\varphi) = 1 + cos\varphi = r(\varphi)$,а как известно, четная функция симметрична относительно оси Ox ,поэтому достаточно построить половину фигуры на промежутке $\varphi \in [0; \pi]$, а оставшуюся половину $\varphi \in [\pi; 2\pi]$ отобразить зеркально относительно полярной оси (рис.19):

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	$1+\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}9$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}7$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}3$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}1$	0

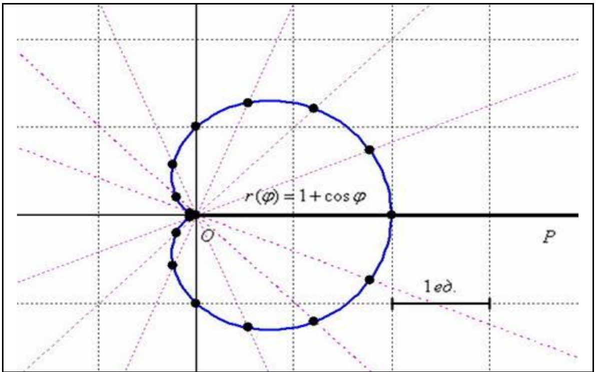

Рис. 19

Поскольку фигура симметрична относительно оси Ox, по формуле (2.13) для начала найдем половину площади $\frac{1}{2}S$:

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+cos\varphi)^2 d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+2cos\varphi+cos^2\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}(\varphi+2sin\varphi)\Big|_0^{\pi}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}(\pi-2sin\pi-0+2sin0)+$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+cos2\varphi)d\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}sin2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\left(\pi+\frac{1}{2}sin2\pi-0-\frac{1}{2}sin0\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, $S=2\cdot\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ (ед.^{2}).

Пример 2.22. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r=1, r=3, \varphi=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

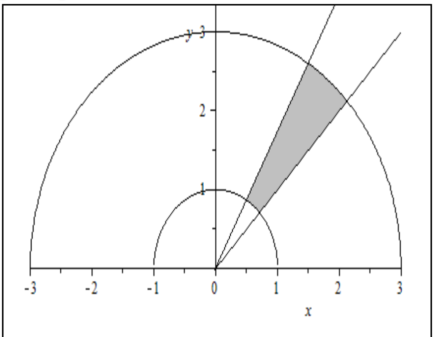

Рис. 20

Решение.

Посмотрим, как это выглядят заданные линии $r=1, r=3$ в декартовой системе координат, для этого сделаем подстановку $r=\sqrt{x^2+y^2}$:

$r = 1, \sqrt{x^2 + y^2} = 1,$

$\underline{x^2 + y^2 = 1^2}$;
$r = 3, \sqrt{x^2 + y^2} = 3,$
$\underline{x^2 + y^2 = 3^2}$.

Получили окружности с центром в начале координат и радиусами 1,3 соответственно. Построим данные линии, учитывая, что угол изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$(рис. 20), получили сегмент, его площадь находим по формуле (2.14):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(r^2(\varphi) - \rho^2(\varphi)\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (3^2 - 1^2) d\varphi =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = 4\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}\,(\text{ед.}^2).$$

Задания для самостоятельного решения.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1.	$y = sinx, y = cosx, x = 0, \left(x\epsilon\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$
2.	$y = sinx, y = cosx, y = 0$
3.	$y = x^2 - 1, y = x + 1$
4.	$y = x^2, y = \sqrt{x}$
5.	$y = tgx, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$
6.	$y = x^2 + 1, y = -x + 3$
7.	$y = 4 - x^2, y = 3x, y \geq 0$
8.	$y = -x, y = -\frac{1}{x}, x = 2$
9.	$y = \frac{2}{x}, y = 5e^x, y = 2, y = 5$
10.	$y = x^2, y = 2x$
11.	$y = x^2 - 2, y = 3 + 2x$
12.	$y = \sqrt{x}, y = \frac{x}{2}$
13.	$y = sinx, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$
14.	$y = x^2 - 1, y = 1 - x$
15.	$y = x^2, y = 2 - x$
16.	$y = x^2, y = x + 2$

17.	$y = x^2, y = 2 - x^2$
18.	$y = x^2 - 1, y = x + 5$
19.	$y = 3\sqrt{x}, y = \dfrac{3}{x}, x = 4$
20.	$x = 5 - y^2, x = -4y$
21.	$y = \dfrac{x^2}{3}, y^2 = 3x$
22.	$y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$
23.	$\begin{cases} x = 4cost \\ y = 2sint \end{cases}$
24.	$r = 1 - \cos\varphi$
25.	$r = \varphi^2, 0 \le \varphi \le \pi$
26.	$r_1 = a\cos\varphi, r_2 = 2a\cos\varphi$

Ответы:

12.1.$2-\sqrt{2}$;**12.2.**$\sqrt{2}-1$;**12.3.**$4{,}5$;**12.4.**$\frac{1}{3}$;**12.5.**$\frac{1}{2}ln2$;**12.6.** $4{,}5$;

12.7. $\frac{19}{6}$; **12.8.**$\frac{3}{2}ln2$; **12.9.**3; **12.10.**$\frac{4}{3}$; **12.11.**$20\frac{5}{6}$;**12.12.** $1\frac{1}{3}$;

12.13.1; **12.14.**$4{,}5$; **12.15.**$\frac{7}{6}$; **12.16.** $4{,}5$; **12.17.** $2\frac{2}{3}$; **12.18.** $20\frac{5}{6}$;

12.19. $14-3ln4$; **12.20.**30; **12.21.**3; **12.22.** $\frac{16}{3}$; **12.23.** 8π;

12.24. 3π; **12.25.** $\frac{\pi^5}{10}$; **12.26.** $\frac{3a^2\pi}{4}$.

2.6.2. Вычисление длины дуги плоской кривой.

Помимо нахождения площади, определённый интеграл позволяет рассчитать и другие показатели, в частности длину дуги кривой, то есть числовую характеристика протяжённости этой кривой.

Длиной дуги кривой линии называют предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной линии при неограниченном увеличении числа ее звеньев, при этом длина наибольшего звена стремиться к нулю.

Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах.

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная$y' = f'(x)$, непрерывны при всех $x \in [a;b]$, то длина дуги AB (рис.21) этой кривой, вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx} \quad \textbf{(2.15)}$$

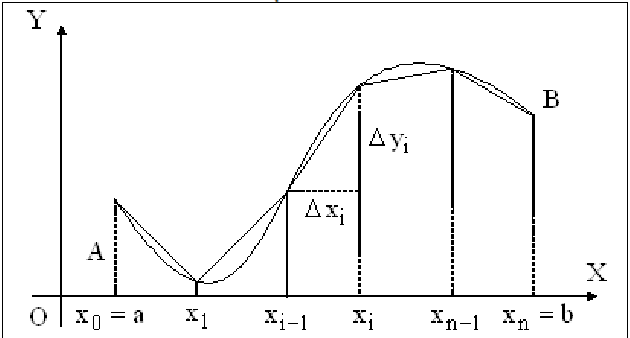

Рис. 21

1. Для нахождения длины кривой разобьем ее на n маленьких кусочков, то есть разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$(рис. 21). Пусть этим точкам соответствуют точки $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$. При большом числе разбиения дугу можно спрямить кусочком прямой (хорды) близкой по размеру. Для этого проведем хорды $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$,длины которых обозначим соответственно через $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$.
Получим ломанную $M_0M_1M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$, длина которой равна

$$L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \ldots + \Delta L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i\,;$$

2. Длину хорды (звена ломанной) $\Delta L_i (i = 1,2, \dots, n)$ можно найти, применяя теорему Пифагора из прямоугольника с катетами$\Delta x_i, \Delta y_i$:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\Delta x_i{}^2\left(1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i =$$

$= \sqrt{1+\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \sqrt{1+(f'(x_i))^2}\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$,а длина всей ломанной $M_0M_1M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i \,(2.16),$$

где $c_i \epsilon (x_{i-1}; x_i)$.

3.Длина l кривой AB по определению равна $l = \lim\limits_{max\Delta L_i \to 0} L_n = \lim\limits_{max\Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$, заметим, что при $\Delta L_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$.Функция $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$ непрерывна на отрезке$[a; b]$,так как по условию непрерывна функция$f'(x)$.Следовательно, существует предел интегральной суммы (2.16),когда $max\ \Delta x_i \to 0$:

$$l = \lim\limits_{\substack{max\Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически.

Если кривая $y = f(x)$ задана параметрически уравнением $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \epsilon [t_1; t_2]$ и функции $x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные при всех $t \epsilon [t_1; t_2]$,то длина дуги AB этой кривой, вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt} \quad \textbf{(2.17)}$$

Покажем, что длина дуги параметрической кривой, получается из формулы (2.15) подстановкой $x = x(t), y = y(t)$.Известно, что производной параметрически заданной функции вычисляется по формуле $y'(x) = \frac{y\prime(t)}{x\prime(t)}$ и $dx = x'(t)dt$,поэтому имеем:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx = \left| \begin{aligned} x &= x(t) \\ dx &= x'(t)dt \\ y'(x) &= \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{aligned} \right| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\, x'(t)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}{\left(x'(t)\right)^2}}\, x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\ dt,$$ что и требовалось показать.

Замечание: длина дуги пространственной параметрической кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ вычисляется аналогично, то есть по формуле

$$\boldsymbol{l}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})\right)^2+\left(\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t})\right)^2+\left(\boldsymbol{z}'(\boldsymbol{t})\right)^2}\boldsymbol{dt} \quad \textbf{(2.18)}$$

Вычисление длины дуги кривой, заданной в полярных координатах.

Длина дуги кривой AB заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$
вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{l}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\boldsymbol{r}')^2+\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{d\varphi} \quad \textbf{(2.19)}$$

Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке$[\alpha;\beta]$.Если в равенствах связывающих полярные и декартовы координаты$\begin{cases}x=rcos\varphi\\y=rsin\varphi\end{cases}$,угол φ считать параметром, то кривую AB можно задать параметрически $\begin{cases}x(\varphi)=r(\varphi)cos\varphi\\y(\varphi)=r(\varphi)sin\varphi\end{cases}$,тогда
$x'(\varphi)=r'(\varphi)cos\varphi-r(\varphi)sin\varphi$,
$y'(\varphi)=r'(\varphi)sin\varphi+\ r(\varphi)cos\varphi$, применяя формулу (2.17) для нахождения длины дуги имеем:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2+\left(y'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r'(\varphi)cos\varphi-r(\varphi)sin\varphi)^2+(r'(\varphi)sin\varphi+\ r(\varphi)cos\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2+\left(\ r(\varphi)\right)^2}d\varphi$, где $\varphi\in[\alpha;\beta]$,что и требовалось показать.

Замечание: в практических примерах при нахождении длины дуги, как правило, не нужно строить чертеж. Иллюстрация приведена только для некоторых примеров (для наглядности).

Пример 2.23. Найти длину дуги кривой:
а) $x^2+y^2=a^2$;**б)** $y^2=(x+1)^3, x\in[0;4]$;
в)$\begin{cases}x=acos^3t\\y=asin^3t\end{cases}$,$t\in[0;2\pi]$; **г)** $r=a(1+cos\varphi)\ ,\varphi\in[0;2\pi]$.

Решение.

а) Уравнение $x^2+y^2=a^2$ задаёт окружность, с центром в начале координат и радиусом a в декартовой системе координат, поэтому длину её дуги будем вычислять по формуле (2.15), поскольку она симметрично задана, достаточно вычислить четвертую часть длины дуги $\frac{1}{4}l$ $(x \in [0; a])$ и результат умножить на четыре.

Для этого найдем y из уравнения $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 = a^2 - x^2$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y' = \left((a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-2x)(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,и подставим в формулу (2.15):

$$\frac{1}{4}l = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_0^a \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}} dx = a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a\left(arcsin \frac{x}{a}\Big|_0^a\right) = a(arcsin1 - arcsin0) = a\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2}.$$

Тогда $l = 4 \cdot \frac{a\pi}{2} = 2a\pi(\text{ед.})$, получили общеизвестную формулу длины окружности, формулу для вычисления длины дуги окружности с центром в начале координат произвольного радиуса. Если в данном примере положить $a = 1$,получим окружность с единичным радиусом, длина дуги которой будет равна $l = 2\pi$. При различных значениях параметра a (радиуса) длина окружности будет изменяться;

б)$y^2 = (x + 1)^3, x \in [0; 4]$ – кривая задана в декартовых координатах, поэтому найдем y, y' и подставим в формулу (2.15):

$$y = \sqrt{(x + 1)^3} = (x + 1)^{\frac{3}{2}}, y' = \frac{3}{2}(x + 1)^{\frac{1}{2}},$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x + 1)^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x + 1)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{13 + 9x}dx = \frac{1}{18}\int_0^4 (13 + 9x)^{\frac{1}{2}}d(13 + 9x) =$$

$$= \frac{1}{18} \frac{(13 + 9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{27}(13 + 9x)\sqrt{13 + 9x} \quad \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{27}\left(49\sqrt{49} - 13\sqrt{13}\right) = \frac{1}{27}\left(343 - 13\sqrt{13}\right);$$

Замечание: в случаях симметричной фигуры, заданной параметрический или в полярных координатах необходимо найти часть длины дуги, иначе мы можем прийти к противоречию - нулевому результату (поскольку работаем с периодическими функциями), покажем это на примере 2.23.в)).

в) $x = acos^3t, y = asin^3t$ — это кривая называемая астроидой (рис. 22), задана параметрически, поэтому длину её дуги будем находить по формуле (2.17), для этого найдем $x'(t), y'(t)$, $\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2$, и подставим в формулу:

$x'(t) = a((cost)^3)' = -3acos^2tsint,$

$y'(t) = a((sint)^3)' = 3asin^2tcost,$

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = (-3acos^2tsint)^2 + (3asin^2tcost)^2 =$$
$$= 9a^2cos^4tsin^2t + 9a^2sin^4tcos^2t = 9a^2sin^2tcos^2t(cos^2t + sin^2t) =$$
$$= \frac{9a^2}{4}4sin^2tcos^2t = \left(\frac{3a}{2}\right)^2(2sintcost)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2(sin2t)^2$$
$$= \left(\frac{3a}{2}sin2t\right)^2;$$

<u>1способ</u>: (Найдем $l, t \in [0; 2\pi];$)

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt = \frac{3a}{2}\int_0^{2\pi} sin2t\,dt =$$
$$= -\frac{3a}{4}cos2t|_0^{2\pi} = -\frac{3a}{4}(cos4\pi - cos0) = 0$$

пришли к противоречию;

<u>2 способ:</u> (найдем $\frac{1}{4}\, l, t \in \left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$)

Заметим, что фигура симметрична относительно координатных осей, поэтому для начала найдем $\frac{1}{4}\, l$:

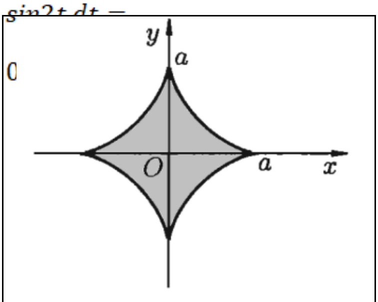

Рис. 22

$$\frac{1}{4}l = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt = \frac{3a}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin2t\,dt =$$
$$= -\frac{3a}{4}cos2t|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{3a}{4}(cos0 - cos\pi) = -\frac{3a}{4}(-2) = \frac{3a}{2},$$

следовательно, $l = 4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a;$

г) Кардиоида $r = a(1 + cos\varphi)\,, \varphi \in [0; 2\pi]$ задана в полярных координатах, следовательно, длину дуги данной кривой находим по формуле (2.19).В силу симметрии фигуры (рис.22,где $a = 1$),найдем$\frac{1}{2}l$, для этого вычислим$\sqrt{(r')^2 + r^2}$ и подставим в формулу (2.19):

$r^2 = a^2(1 + cos\varphi)^2 = a^2(1 + 2cos\varphi + cos^2\varphi),$

$(r')^2 = (a(1 + cos\varphi)')^2 = (-asin\varphi)^2 = a^2sin^2\varphi,$

$\sqrt{(r')^2 + r^2} = \sqrt{a^2sin^2\varphi + a^2(1 + 2cos\varphi + cos^2\varphi)} =$

$= \sqrt{a^2sin^2\varphi + a^2 + 2a^2cos\varphi + a^2cos^2\varphi} =$

$$= \sqrt{a^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a^2 + 2a^2\cos\varphi} =$$
$$= \sqrt{a^2 + a^2 + 2a^2\cos\varphi} = \sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)} =$$
$$= \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2} = 2a\cos\frac{\varphi}{2},$$
$$\frac{1}{2}l = \int_0^{\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2}d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$
$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4a,$$
отсюда $l = 2 \cdot 4a = 8a$.

Задания для самостоятельного решения

13. Вычислить длину дуги линии:

1.	$y = \ln(\sin x), \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$
2.	$y = \sqrt{x^3}, 0 \le x \le 1$
3.	$y = \ln(1 - x^2), 3 \le x \le 4$
4.	$\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$
5.	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$
6.	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$
7.	$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + 2 - t \\ y = 5 + t^2 \end{cases}, 0 \le t \le 2$
8.	$r = 2(1 - \cos\varphi), 0 \le \varphi \le \pi$
9.	$r = 1 + \cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi$
10.	$r = \varphi^2, 0 \le \varphi \le \sqrt{5}$
11.	$y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le \frac{1}{2}$
12.	$y = \ln(\cos x), 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$
13.	$y = 2\sqrt{x}, \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{8}$
14.	$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$
15.	$\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$
16.	$r = 1 - \sin\varphi, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$

17.	$r = 3\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
18.	$r = 2\sin\varphi,\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$
19.	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t\ , 0 \le t \le 2\pi \\ z = 4t \end{cases}$
20.	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \le x \le e$
21.	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 1$
22.	$r = e^{\varphi},\ 1 \le r \le e$
23.	$r = 6\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
24.	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \pi$
25.	$y = x\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 5$
26.	$y = 1 - \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

Ответы:

13.1. $\ln 3$; **13.2.** $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$; **13.3.** $1 + \ln\frac{6}{5}$; **13.4.** 8; **13.5.** π;

13.6. $\frac{3}{2}$; **13.7.** $4\frac{2}{3}$; **13.8.** 8; **13.9.** 2; **13.10.** $\frac{19}{3}$; **13.11.** $\frac{\pi}{6}$;

13.12. $\frac{\ln 3}{2}$; **13.13.** $2 + \ln\frac{3}{2}$; **13.14.** $\frac{2\pi}{3}$; **13.15.** 72;

13.16. 2; **13.17.** π; **13.18.** π; **13.19.** 10π; **13.20.** $\frac{e^2+1}{4}$;

13.21. $\sqrt{2}(e-1)$; **13.22.** $\sqrt{2}(e-1)$; **13.23.** 2π;

13.24. $\frac{\pi^3}{3}$; **13.25.** $\frac{343}{27}$; **13.26.** $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2.6.3. Вычисление объемов тел вращения.

Площадь криволинейной трапеции мы уже находили. Но, кроме того, данную фигуру можно ещё и вращать, причем вращать двумя способами: вокруг оси абсцисс, вокруг оси ординат (в данном разделе будут разобраны оба случая). В результате чего, получим так называемое **тело вращения** (рис.23). Вычисление объемов таких тел мы с вами и будем заниматься.

Вычисление объемов тел по заданным площадям

поперечных сечений.

Пусть имеем некоторое тело T (рис. 23). Предположим, что известна площадь $S(x)$ любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox . Эта площадь зависит от положения секущей плоскости, то есть является функцией от переменной x: $S = S(x)$.

Пусть $S(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ точками деления: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Через точку x_i проведем сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox (рис.23). Площадь полученного поперечного сечения обозначим через $S(x_i)$. Составим сумму:

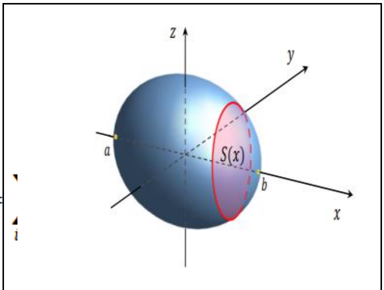

Рис. 23

$$V_n = S(\xi_1)\Delta x_1 + S(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + S(\xi_n)\Delta x_n =$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

Здесь $S(\xi_i)\Delta x_i$– объем цилиндра с площадью основания $S(\xi_i)$ и высотой Δx_i.

Пусть $\Delta = max\Delta x_i \to 0$, тогда $V_n \to V$(V– объем тела), переходя к пределу в равенстве (2.20) имеем:

$$\lim_{\Delta\to 0} V_n = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i .$$

В правой части стоит интегральная сумма для функции

$S(x)$, поэтому объем данного тела можно вычислить через определенный интеграл: $V = \int_a^b S(x)dx$ (2.21)

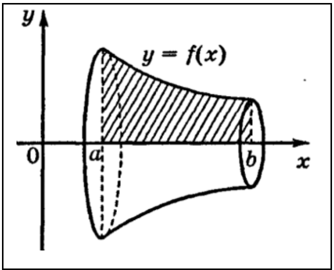

Рис.24

Вычисление объемов тел вращения.

Пусть криволинейная трапеция: $x = a, x = b, y = 0, y = f(x) \geq 0$, лежащая в плоскости $z = 0$ (плоскости Oxy),вращается вокруг оси Ox(рис.).Поперечными сечениями являются круги с радиусами $y = f(x)$,поэтому $S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$ и формула (2.21) принимает вид (2.22):

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad (2.22)$$

Итак, объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a, x = b, y = 0, y = f(x) \geq 0$ (рис.24), вычисляется по формуле (2.22).

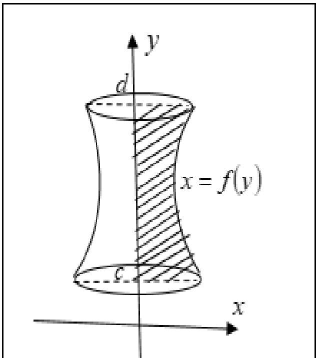

Рис. 25

Замечание:

1)В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси $Ox(y = f(x) \leq 0)$. Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат $f^2(x)$ (интеграл всегда неотрицателен).

Аналогично размышляя, получим формулу 2.23 для вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$y = c, y = d, x = 0, x = f(y) \geq 0$ (рис. 25),

$$V = \pi \int_c^d f^2(y)dy \quad (2.23)$$

2)Объём кольца, образованного вращением вокруг оси плоской фигуры, ограниченной непрерывными неотрицательными на $[a; b]$ функциями $y = f(x), y = g(x)$ $(f(x) \geq g(x))$ и прямыми $x = a, x = b$ вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx \quad (2.24)$$

3) Если вращается криволинейная трапеция вокруг оси Ox ,ограниченная линией, заданной параметрически, то чтобы рассчитать объём тела в формулу (2.22) подставляем параметрические функции $x = x(t), y = y(t)$, а также соответствующие пределы интегрирования t_1, t_2:

$V = \pi \int_a^b (y(t))^2 d(x(t)) = \pi \int_a^b y^2(t)x'(t)dt$,таким образом формула для вычисления объема фигуры, ограниченной параметрически заданными линиями, принимает вид:

$$V = \pi \int_a^b y^2(t)x'(t)dt \quad (2.25)$$

Пример 2.24. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}, y = 0, x \geq 0$.

Решение.

Построим фигуру, ограниченную линиями $y = e^{-x}, y = 0, x \geq 0$. Искомая плоская фигура заштрихована (рис.26), именно она и враща-

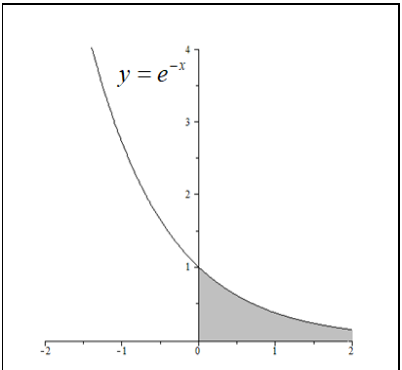

Рис.26

ется вокруг оси Ox. В результате вращения получается воронка, которая симметрична относительно оси Ox .Объем тела вращения вычисляем по формуле $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$,в нашем случае $a=0, b=+\infty, f(x)=e^{-x}$, так как плоская фигура ограничена графиком экспоненты $y=e^{-x}$ сверху.

В итоге искомый объем равен:

$$V=\pi\int_0^{+\infty}(e^{-x})^2\,dx=\pi\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}\,d(-2x)=-\frac{\pi}{2}\lim_{b\to+\infty}e^{-2x}|_0^b=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}\Big|_0^b=-\frac{\pi}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2b}}-1\right)=\frac{\pi}{2}\text{ (ед.}^3\text{)}.$$

Пример 2.25. Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями

Решение.

На рис.27 изображена плоская фигура, ограниченная линиями $y=x^3, x=0, y=8$, вокруг оси Oy(область, заштрихованная на рис.27), именно она и вращается вокруг оси Oy .В результате вращения получается ограниченная сверху парабола, которая симметрична относительно оси Oy . Так как, фигура вращается вокруг оси Oy, то и интегрировать будем по переменной y в пределах

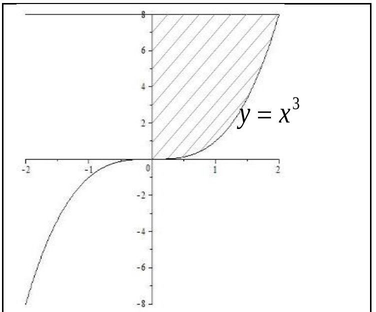

Рис. 27

$0\le y\le 8$, применяя формулу $V=\pi\int_c^d f^2(y)dy$,в нашем случае $c=0, d=8$, $f(y)=\sqrt[3]{y}$,действительно, если выразить x через y

получим $x=\sqrt[3]{y}$, подставляя $x=\sqrt[3]{y}$ в формулу находим объем:

$$V=\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{y}\right)^2dy=\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy=\frac{3\pi}{5}y\cdot y^{\frac{2}{3}}\Big|_0^8=\frac{3\pi}{5}8\cdot 8^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{3\pi}{5}8\cdot 4=\frac{96\pi}{5}\,(\text{ед.}^3)$$

Замечание: пределы интегрирования по оси Oy следует расставлять строго снизу вверх, так как y растет снизу вверх.

Пример 2.26. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x, y=3x$.

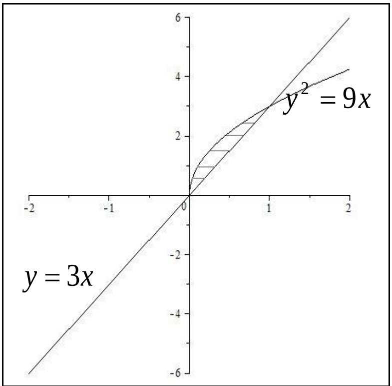

Рис. 28

Решение.

Для построения чертежа плоской фигуры найдем точки пересечения параболы $y^2=9x$ с вершиной в начале координат симметричной относительно оси Ox и прямой $y=3x$ проходящей через начало координат решив уравнение:

$\begin{cases} y^2=9x \\ y=3x \end{cases}, (3x)^2=9x,$

$9x^2-9x=0, 9x(x-1)=0,$

$x_1=0, x_2=1,$

$y_1=0, y_2=3.$

Следовательно, имеется две точки пересечения (0;0), (1;3), отмечаем данные точки на чертеже и через точки пересечения проводим кривые. Кривые в пересечении образуют область заключенную между линиями $y = 3\sqrt{x}$ (ветвь параболы $y^2 = 9x$) и

прямой $y = 3x$(рис.28), при этом $3\sqrt{x} \geq 3x$,поэтому объем находим как разность объёмов $V = V_1 - V_2$,где

$V_1 = \pi \int_0^1 9x dx$, $V_2 = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx$.

В итоге искомый объём равен:

$$V = \pi \int_0^1 (9x - (3x)^2) dx = 9\pi \int_0^1 (x - x^2) dx = 9\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= 9\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} (\text{ед.}^3).$$

Пример 2.27. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = \frac{2}{1+x^2}$.

Решение.

Выполним чертеж, для этого найдем точки пересечения заданных линий: $\begin{cases} y = \frac{2}{1+x^2}, \\ y = x^2 \end{cases}$

$$\frac{2}{1+x^2} = x^2, 2 = x^2(1+x^2),$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0, \qquad t = x^2,$$

$$t^2 + t - 2 = 0, t_1 = -2, t_2 = 1.$$

При $t_1 = -2$, $x^2 = -2$- веще-

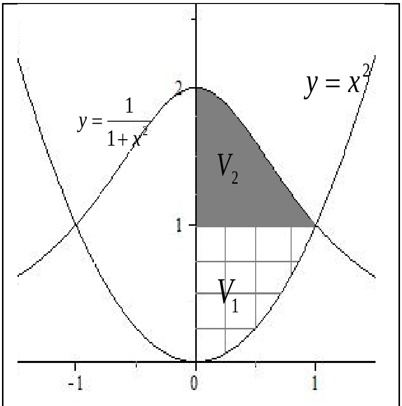

Рис. 29

ственных корней нет;
При $t_2 = 1$, $x^2 = 1$,

$x_{1,2} = \pm 1$, тогда $y_{1,2} = 1$.

Итак, кривые $y = x^2, y = \frac{2}{1+x^2}$ имеют две точки пересечения (1;1), (-1;1), отмечаем данные точки, при этом заметим, что функции $y = x^2, y = \frac{2}{1+x^2}$ - чётные, то есть симметричны относительно начала координат. Заметим, что функция $y = \frac{2}{1+x^2}$ пересекает ось Oy в точке (0;2), действительно, при $x = 0$, $y = \frac{2}{1+0^2} = 2$.

Для нахождения объема тела вращения достаточно использовать правую половину фигуры, так как полученная фигура симметрична относительно начала координат. Таким образом, заштрихованная правая часть, вращаясь вокруг оси Oy совпадёт с левой не заштрихованной частью (рис.29).

Перейдем к обратным функциям, то есть, выразим x через y: $y = x^2, x = \pm\sqrt{y}$. Обратите внимание, что правой ветви параболы $y = x^2$ соответствует обратная функция $x = \sqrt{y}$,а левой (не используемой в решении) ветви параболы соответствует обратная функция $x = -\sqrt{y}$.

Аналогично для $y = \frac{2}{1+x^2}, 1 + x^2 = \frac{2}{y}, x^2 = \frac{2}{y} - 1, x = \pm\sqrt{\frac{2}{y} - 1}$.

Объем тела вращения необходимо искать по формуле $V = \pi \int_c^d f^2(y)dy$ как сумму объемов тел вращений: $V = V_1 + V_2$

,где $V_1 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy$,так как на отрезке$[0;1]$ расположен график функции $x = \sqrt{y}$;

$V_2 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy$, так как на отрезке $[1;2]$ расположен

график функции$x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$.

Вычисляя данные интегралы получим:
$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 |_0^1 = \frac{\pi}{2}$;

$$V_2 = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1\right) dy = \pi(2ln|y| - y)|_1^2 =$$

$$= \pi(2ln2 - 2 - 2ln1 + 1) = \pi(2ln2 - 1);$$

Таким образом,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2} + \pi(2ln2 - 1) = \pi\left(2ln2 - \frac{1}{2}\right) (\text{ед.}^3).$$

Пример 2.28. Вычислить объем эллипсоида, полученного вращением вокруг оси Ox эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

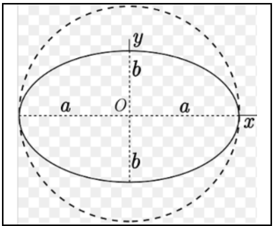

Рис. 30

Решение.

Решение упростится, если перейти к параметрическому заданию уравнения эллипса$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint' \end{cases}$ в силу симметрии полученной

фигуры (рис. 30), найдём $\frac{1}{2}V$:

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y^2(t)x'(t)dt = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2 sin^2 t(-asint)dt =$$

$$= -ab^2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 tsintdt = ab^2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - cos^2 t)d(cost) =$$

$$= ab^2\pi \left(cost - \frac{cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = ab^2\pi \left(cos0 - \frac{cos^3 0}{3}\right) =$$

$$= ab^2\pi \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}ab^2\pi.$$

Таким образом, $V = \frac{4}{3}ab^2\pi(\text{ед.}^3)$.

Задания для самостоятельного решения.

14.Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями:

1.	$x^2 - y = 0, x = -2, y = 0$ **(вокруг оси Ox)**
2.	$x^2 + y = 0, x = 1$ **(вокруг оси Ox)**
3.	$y = x^2,\ y^2 = x$ **(вокруг осиOx)**
4.	$y = -x^3, x = 1, y = 0$ **(вокруг оси Ox)**
5.	$y = 2x - x^2, y = 0$ **(вокруг оси Ox)**
6.	$y = e^x, y = 1, x = 0$ **(вокруг оси Ox)**
7.	$y^2 = (x + 4)^3, x = 0$ **(вокруг оси Oy)**
8.	$y = x^2, y = x^3$**(вокруг оси Oy)**
9.	$y = \frac{x^2}{4}, y = 0, 2x + y - 12 = 0$ **(вокруг оси Ox)**
10.	$y = x^3, x = 1, y = 0$**(вокруг оси Ox)**
11.	$y = 1 + 8x^3, x = -\frac{1}{2}, y = 1$**(вокруг оси Ox)**
12.	$y^2 + x = 0, x = 0, y = 1$ **(вокруг оси Ox)**
13.	$y^2 + x = 0, x = -1$ **(вокруг оси Ox)**
14.	$y = -4x^3, x = 1, y = 0$ **(вокруг оси Ox)**
15.	$y = 1 + 8x^3, x = 0, y = 9$ **(вокруг оси Ox)**
16.	$x - y^2 = 0, x = 0, y = -1$ **(вокруг оси Ox)**
17.	$y = 4x^3, x = 0, y = 4$ **(вокруг оси Ox)**
18.	$x^2 - y = 0, y = 1$ **(вокруг оси Ox)**
19.	$x^2 - y = 0, x = -1, y = 0$ **(вокруг оси Ox)**

20.	$y=-x^3, x=1, y=0$ **(вокруг оси Ox)**
21.	$y=\sin x, x=0, x=\pi, y=0$ **(вокруг оси Ox)**
22.	$y=\ln x, x=e, y=0$ **(вокруг оси Ox)**
23.	$y=\frac{2}{x}, x=1, y=1$ **(вокруг оси Ox)**
24.	$y^2=4-x, x=0$ **(вокруг оси Oy)**
25.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, y=\pm b$ **(вокруг оси Oy)**
26.	$x^2-y=0, y=1, x\geq 0$**(вокруг оси Ox)**

Ответы:

14.1. $\frac{32\pi}{5}$; **14.2.** $\frac{\pi}{5}$; **14.3.** $\frac{3\pi}{10}$; **14.4.** $\frac{\pi}{7}$; **14.5.** $\frac{16\pi}{15}$;**14.6.**$\frac{\pi(e^2-3)}{2}$;
14.7.$\frac{2048\pi}{35}$; **14.8.**$\frac{\pi}{10}$;**14.9.**$\frac{352\pi}{15}$;**14.10.** $\frac{\pi}{7}$;**14.11.** $\frac{5\pi}{28}$;
14.12. $\frac{\pi}{2}$;**14.13.** π;**14.14.** $\frac{16\pi}{7}$;**14.15.**$\frac{468\pi}{7}$;**14.16.** $\frac{\pi}{2}$;
14.17. $\frac{96\pi}{7}$;**14.18.** $\frac{8\pi}{5}$;**14.19.** $\frac{\pi}{5}$;**14.20.** $\frac{\pi}{7}$;**14.21.** $\frac{\pi^2}{2}$;**14.22.** $\pi(e-2)$;
14.23. $\pi(3-4\ln 2)$;
14.24. $\frac{512\pi}{15}$; **14.25.** $\frac{8\pi a^2 b}{3}$; **14.26.** $\frac{4\pi}{5}$.

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При решении задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и её производные-такие уравнения называются дифференциальными. Динамика огромного количества явлений описывается дифференциальными уравнениями.

В качестве примера можно рассмотреть следующую задачу. Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Необходимо описать демографический процесс, то есть, найти закон изменения численности населения с течением времени t.

Пусть $y = y(t)$ -число жителей региона в момент времени t. Известно, что прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, то есть

$\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t$,

$\Delta y = \Delta t y(k_1 - k_2)|:\Delta t \neq 0$,

$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$, где $k = k_1 - k_2$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} ky,$$

$y' = ky$.

Решая это уравнение, получаем математическую модель демографического процесса:

$y = Ce^{kt}$, где C – постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени).

3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка, общие понятия.

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если искомая (неизвестная) функция y зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют **обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)**, в противном случае (если независимых переменных две или более), дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение (уравнение), связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и её производную y':

$$\boldsymbol{F(x; y; y') = 0} \quad \textbf{(3.1)}$$

Уравнение (3.1) называют общим видом ОДУ первого порядка.

Уравнение (3.1) можно разрешить относительно старшей производной y',то есть записать в виде (3.2):

$$\boldsymbol{y' = f(x; y)} \textbf{(3.2),}$$

здесь $f(x; y)$- некоторая заданная функция своих аргументов x и y, определённая и непрерывная в области D на плоскости Oxy. Область D называется областью определения дифференциального уравнения.

Уравнение (3.2) называют ОДУ первого порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Например,

1)$y' \cdot x = x^5$–обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, в общем виде записывается так: $F(x; y; y') = 0$;

2)$4y''' + 2y'' = 0$ или $4 \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$– обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, в общем виде его можно записать так $F(x; y; y'; y''; y''') = 0$;

3) $y \cdot z'_x = x^5 \cdot z'_y$ или $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = x^5 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ -дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Замечание: в дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения и работать в основном с дифференциальными уравнениями разрешенными относительно старшей производной, то есть с уравнениями вида$y' = f(x; y)$.

Если в уравнении (3.2) положить $f(x; y) = \frac{P(x;y)}{Q(x;y)}$,то учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ имеем:

$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x;y)}{Q(x;y)}, |\cdot Q(x;y)dx \neq 0$, уравнение (3.2) можно записать в виде (3.3):

$$\boldsymbol{P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0} \quad \textbf{(3.3)}$$

Уравнение (3.3) называют дифференциальной формой записи ОДУ первого порядка, заметим, что переменные x и y равноправны.

Решением ДУ (3.2) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале $(a; b)$,которая при подстановке в уравнение (3.2) обращает его в тождество (равенство), то есть $\varphi'(x) = f\big(x; \varphi(x)\big)$ при $x \epsilon (a; b)$.

График решения ДУ называется его **интегральной кривой**, а процесс нахождения решения ДУ называется **интегрированием**.

Пример 3.1. Показать, что функция $y = x^3$ является решением дифференциального уравнения $3y - y' \cdot x = 0$.

Решение.

Найдем производную функции $y = x^3, y' = 3x^2$ и подставим y, y' в исходное ДУ: $3x^3 - 3x^2 \cdot x = 0, 0 = 0$, получили верное равенство, следовательно функция $y = x^3$является решением ДУ $3y - y' \cdot x = 0$.Заметим, что у рассматриваемого уравнения есть еще такое решение $y = \varphi(x; C) = Cx^3$, где C – произвольная постоянная. Действительно, подставляя $y = Cx^3$ и $y' = 3Cx^2$ в исходное уравнение, имеем: $3Cx^3 - 3Cx^2 \cdot x = 0, \ \ 0 = 0$.

Таким образом, ДУ уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений вида $y = \varphi(x; C)$, зависящих от одной произвольной постоянной C.

Такое решение, то есть функцию $y = \varphi(x; C)$ называют **общим решением** ДУ.

Пример 3.2. Показать, что для уравнения $y' = y$ функции $y = Ce^x$ и $y = e^{x+C}$ являются общими решениями.

Решение.

Действительно, если подставим первое решение $y = Ce^x$ и его производную $y' = Ce^x$ в уравнение $y' = y$,получим $Ce^x = \ Ce^x$верное равенство;

Аналогично, подставляя второе, получим:
$y = e^{x+C}, y' = e^{x+C}, e^{x+C} = e^{x+C}$.Это означает, что функции $y = Ce^x$ и $y = e^{x+C}$ являются общими решениями уравнения $y' = y$.

Заметим, что данные решения являются разными, так как первое из них обращается в ноль (при $C = 0$), а второе – не обращается в ноль ни при каких обстоятельствах.

Таким образом, решение ДУ может быть найдено неоднозначно.

Замечание: общее решение дифференциального уравнения (3.2) находится в явном виде $y = \varphi(x; C)$, но так выходит не всегда, иногда оно получается в неявном виде (3.4),

$$\Phi(x; y; C) = 0 \; \mathbf{(3.4)}$$

Соотношение (3.4),связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и произвольную постоянную C, называется **общим интегралом** уравнения (3.2).

Например, для дифференциального уравнения $y' = -\frac{y}{ctgx}$,

$y = Ccosx$ -общее решение, а $ln|y| - ln|cosx| = C$ -общий интеграл.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0,то есть $y(x_0) = y_0$ называется **начальным условием**.

Начальное условие записывается в виде (3.5):

$$y(x_0) = y_0 \; \mathbf{(3.5)}$$

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (3.2), удовлетворяющего начальному условию (3.5), называется **задачей Коши** (3.6), то есть

$$\begin{cases} y' = f(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \mathbf{(3.6)\text{- задача Коши}}.$$

Решение $y = \varphi(x; C_0)$ полученное при решении системы (3.6) будем называть **частным решением** дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$.

С геометрической точки зрения общее решение $y = \varphi(x; C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, а частное решение $y = \varphi(x; C_0)$ — это одна кривая из этого семейства линий, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

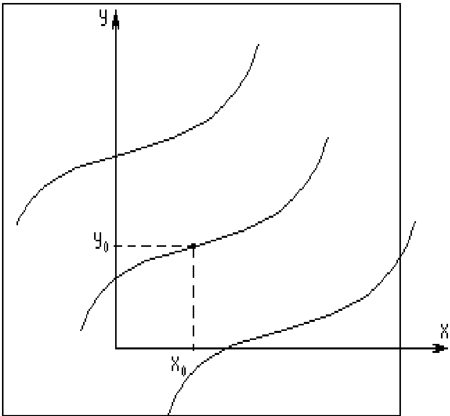

Рис. 31

Рассмотрим эту задачу подробнее. Общее решение $y = \varphi(x; C)$ определяет семейство интегральных кривых. Для того чтобы из этого семейства выделить какое-либо частное решение (интегральную кривую), необходимо задать еще дополнительные условия, в частности, такое решение можно выделить путем задания на плоскости точки $(x_0; y_0)$ (рис.31), через которую проходит интересующая нас интегральная кривая. В соответствии с этим, возникает задача отыскания такого решения уравнения $y' = f(x; y)$, которое при заданном x_0 принимает заданное значение y_0 ,это и есть задача Коши.

Например, если при решении ДУ $y \cdot y' = -x$,получился общий интеграл $x^2 + y^2 = C^2, C > 0$— это с геометрической точки зрения, семейство окружностей с центром в начале координат $(0; 0)$ и радиусом C, при различных значениях C,получим определённую окружность-частный интеграл. Положим, например, $C = 1$, получим $x^2 + y^2 = 1$– частный интеграл, то есть окружность с центром в начале координат $(0; 0)$ и радиусом 1.

Пример 3.3. Среди решений $y = -\frac{1}{5}cos5x + C$ дифференциального уравнения $y' = sin5x$,найти такое решение y, которое при $x = 0$ обращается в ноль.

Решение.

Нам требуется среди решений уравнения $y' = sin5x$ найти такое, которое при $x = 0$ обращает y в ноль, то есть выполняется равенство $y(0) = 0$;

Из условия известно, что общим решением является функция

$y = -\frac{1}{5}cos5x + C.$

Так как требуется, чтобы выполнялось условие $y(0) = 0$, то полагая $x = 0, y = 0$ в общем решении имеем:

$$0 = -\frac{1}{5}cos0 + C,$$

$$0 = -\frac{1}{5} + C,$$

$$C = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, это возможно только при $C = \frac{1}{5}$,следовательно частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$,получается из общего решения при подстановке $C = \frac{1}{5}$, то есть $y = -\frac{1}{5}cos5x + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(1 - cos5x)$- решение задачи Коши (частное решение).

Теорема 3.1 (существования и единственности задачи Коши).Если функция $f(x;y)$непрерывна в некоторой области D в плоскости Oxy и имеет в этой области непрерывную частную производную$y' = f(x;y)$, то какова бы не была точка$(x_0;y_0)$, в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения$y' = f(x;y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точкуx_0, принимающее при $x = x_0$значение $y(x_0) = y_0$, то есть существует единственное решение дифференциального уравнения.

Примем без доказательства.

3.2. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Метод изоклин.

Уравнение $y' = f(x;y)$ устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x;y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости Oxy.Это и есть геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется **изоклиной.**

Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых.

Уравнение изоклины можно получить, если положить в уравнении $y' = f(x;y), y' = C$, то есть $f(x;y) = C$ – уравнение изоклины.

Метод изоклин, особенно ценен в том случае, когда решение (общее или частное) не выражается в элементарных функциях-интеграл не берется. Разберём как он работает на примере 3.4.

Пример 3.4. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение.

Область определения уравнения, то есть функции $f(x;y) = 2x$ – вся плоскость Oxy. Для нашего ДУ уравнение изоклины $y' = C$ имеет вид $2x = C$, $x = \frac{C}{2}$,то есть изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Oy .

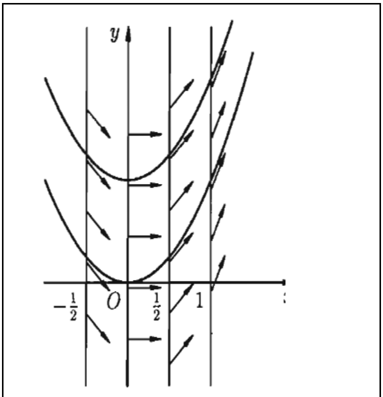

Рис. 32

Так, при $C = 0$ уравнение изоклины имеет вид $x = 0$, учитывая, что $y' = C$, а $y' = tg\alpha$ имеем:

$tg\alpha = 0$ при $\alpha = 0$;

Аналогично рассуждая, получим:

при $C = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $y' = C = tg\alpha = 1, \alpha = 45^0$;

при $C = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, $y' = C = tg\alpha = -1, \alpha = -45^0$;

при $C = 2$, $x = 2$, $y' = C = tg\alpha = 2, \alpha = arctg2 \approx 63^0$ и так далее.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклонённых к оси Ox под определённым(найденным) углом, по их направлениям строим линии. Они, как видно на рис.32, представляют собой семейство парабол.

3.3. Основные виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решений.

При решении какого-либо ДУ его стараются свести к уравнению с разделёнными переменными.

3.2.1. Уравнения с разделёнными переменными.

Наиболее простыми дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad \textbf{(3.7)},$$

где $P(x)$ и $Q(y)$ – заданные функции, функция $P(x)$ зависит только от x , $Q(y)$ - от y. В уравнении (3.7) переменные разделены, каждая функция находится только в той части равенства, где находится её дифференциал.

Уравнение вида (3.7) называют **уравнением с разделенными переменными**, а именно дифференциальной формой записи уравнения с разделенными переменными.

Процесс нахождения решения ДУ (3.7) получается интегрированием обеих частей равенства (3.7), в итоге получим общий интеграл данного уравнения, то есть соотношение вида:

$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$, где $C = const$.

Уравнением с разделенными переменными (3.7), можно разрешить относительно производной, то есть записать в виде (3.8):

$$\boldsymbol{y' = f(x) \quad (3.8)}$$

Уравнение (3.8) называют **ДУ с разделёнными переменными, разрешённым относительно производной.**

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ общее решение уравнения (3.9) ищем в виде:

$\frac{dy}{dx} = f(x) \mid \cdot dx,$

$dy = f(x)dx;$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение уравнения $y' = f(x)$:

$\int dy = \int f(x)\, dx$;

$y = F(x) + C$, где $F'(x)f(x)$.

Пример 3.5. Решить ДУ: **а)** $x^2dx + ydy = 0$;**б)**$y' = e^{-3x}$.

Решение.

а) Уравнение $x^2dx + ydy = 0$ является уравнением с разделенными переменными, заданным в дифференциальной форме $P(x)dx + Q(y)dy = 0$,где $P(x) = x^2$,

$Q(y) = y$,поэтому интегрируя обе части исходного равенства получим:

$\int x^2dx + \int ydy = C$ или $\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C$ –общий интеграл;

б) Уравнение $y' = e^{-3x}$ является уравнением с разделенными переменными, разрешённым относительно производной$y' = f(x)$,где $f(x) = e^{-3x}$ учитывая, что действие обратное дифференцированию - интегрирование, находим общее решение исходного уравнения:

$y = \int e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$, то есть

$y = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$ – общее решение ДУ.

Пример 3.6. Найти общее решение и частное решение (решение задачи Коши) ДУ и объяснить их геометрический смысл:

а)$xdx = -ydy, y(1) = 0$;**б)** $y' = 2x, y(2) = 6$.

Решение.

а) Решить задачу Коши, значит найти решение исходного ДУ, удовлетворяющего начальному условию. Для этого необходимо найти общее решение, а затем значение постоянной, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$, подставляя полученную постоянную в общее решение получим частное решение, то есть решение задачи Коши.

Уравнение $xdx = -ydy$ является уравнением с разделенными переменными (заданным в дифференциальной форме $xdx + ydy = 0, P(x)dx + Q(y)dy = 0$),где $P(x) = x, Q(y) = y$,интегрируя обе части равенства, находим общее решение (интеграл):

$\int xdx = -\int ydy$,

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1,$$

$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 | \cdot 2$,

$x^2 + y^2 = 2C_1$, для удобства, положим $2C_1 = C^2, C > 0$.

Итак, $x^2 + y^2 = C^2$ –общий интеграл, геометрически это равенство определяет семейство окружностей с центром в начале координат $(0; 0)$ и радиусом C;

Находим частный интеграл (решение задачи Коши), то есть выделим из семейства окружностей, окружность, проходящую через точку$(1;0)$.

Так как по условию $y(1)=0$, то есть $x=1, y=0$,то

$1^2+0^2=C^2, C=1$, подставляем полученную постоянную в общий интеграл получим частное решение, то есть $x^2+y^2=1^2$-окружность с центром в начале координат $(0;0)$ и радиусом $C=1$.

б) Уравнение $y'=2x$ является уравнением с разделенными переменными, разрешённым относительно производной

$y'=f(x)$,где $f(x)=2x$.

Интегрируя правую часть уравнения$y'=2x$, находим y:

$y=\int 2xdx=x^2+C$-общее решение, выясним его геометрический смысл, для этого запишем уравнение $y=x^2+C$ в виде $x^2=y-C$, $(x-0)^2=y-C$ – семейство парабол, с вершиной в точке$(0;C)$,симметричных относительно оси Oy.

Найдём частное решение, подставляя $x=2, y=6$ в общее решение

$y=x^2+C$ имеем: $6=2^2+C$, откуда $C=2$.

Таким образом, решением задачи Коши является функция $y=x^2+2$ или с геометрической точки зрения парабола $(x-0)^2=y-2$ с вершиной в точке$(0;2)$,симметричная относительно оси Oy.

Замечание: уравнения с разделёнными переменными являются частным случаем уравнений с разделяющимися переменными.

3.2.2. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными, разрешённые относительно старшей производной, имеют вид (3.9):

$$\boldsymbol{y' = f_1(x) \cdot f_2(y)} \quad (3.9)$$

Для того, чтобы решить уравнение с разделяющимися переменными, необходимо разделить переменные, чем мы сейчас и займёмся, учитывая, что

$y' = \frac{dy}{dx}$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y);$$

Умножив обе части уравнения на $\frac{dx}{f_2(y)}$, $f_2(y) \neq 0$ получим:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \mid \cdot \frac{dx}{f_2(y)},$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx;$$

Таким образом, переменные разделены-получили уравнение с разделенными переменными, то есть при дифференциале dy стоит функция зависящие от y, а при дифференциале dx – зависящая от x .

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C;$$

ДУ с разделяющимися переменными (3.9) может быть записано в дифференциальной форме (3.10):

$$\boldsymbol{P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0} \quad (3.10)$$

В этом уравнении легко разделить переменные. Для этого поделим обе части уравнения на произведение $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{Q_1(y) \cdot P_2(x)},$$

$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$ –получили уравнение с разделенными переменными, интегрируя его получим общий интеграл уравнения (3.11):

$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C$ –общий интеграл.

Замечания: при делении уравнения (3.11) на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$,могут быть потеряны решения, обращающие знаменатель в ноль, то есть полученные из уравнения $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$.Если эти решения не входят в найденный общий интеграл, то они являются особыми решениями ДУ.

Дадим более точное определение особого решения.

Функция $y = \varphi(x)$называется **особым решением** дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$, если единственность решения задачи Коши нарушается в каждой точке этой функции в области определения дифференциального уравнения. Геометрически это означает, что через каждую точку $(x_0; y_0)$,проходит более одной интегральной кривой с общей касательной.

Особое решение дифференциального уравнения не описывается общим интегралом. Поэтому, оно не выводится из общего решения ни при каком значении постоянной C.

Пример 3.7. Показать графически, что решение $y = 0$,является особым для ДУ $(y')^2 - 4y = 0$,если общее решение данного уравнение описывается формулой $y = (x + C)^2$.

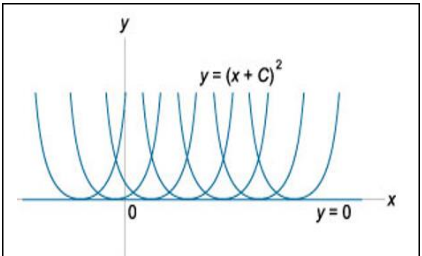

Рис. 33

Решение.

Проверим, что функция $y = (x + C)^2$ является общим решение уравнения

$\left(y'\right)^2-4y=0$,для этого найдём $y'=2(x+C)$ и подставим $y,\ y'$ в уравнение $\left(y'\right)^2-4y=0$:

$\left(2(x+C)\right)^2-4(x+C)^2=0{,}0=0$,следовательно, функция $y=(x+C)^2$является общим решение уравнения$\left(y'\right)^2-4y=0$.

Графически общее решение $y=(x+C)^2$ представляется семейства парабол, изображённых на рис.33.

Кроме этого, функция $y=0$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению$\left(y'\right)^2-4y=0{,}0=0$,но функция $y=0$ не содержится в общем решении $y=(x+C)^2$, ни при каком значении C.Графически это можно объяснить так, через каждую точку прямой $y=0$ проходит более одной интегральной кривой, то есть единственность решения на этой прямой нарушается, и, следовательно, данная прямая является особым решением дифференциального уравнения.

Пример 3.8. Найти общее решение (интеграл), особые решения (если такие имеются), частное решение (интеграл), для уравнений: **а)** $y'-2y=0, y(0)=-2$;**б)** $y'=\frac{y+2}{x}, y(-1)=1$;

в) $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0, y(0)=1$.

Решение.

а) Данное уравнение $y'-2y=0$, $y'=2y$ является уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует уравнению вида $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$, где $f_1(x)=1, f_2(y)=2y$.

Разделяя переменные имеем:

$\frac{dy}{dx}=2y\,\Big|\cdot\ \frac{dx}{y}, y\neq 0,$

$\frac{dy}{y} = 2dx,$

$\int \frac{dy}{y} = 2\int dx,$

$ln|y| = 2x + C_1,$

$log_e|y| = 2x + C_1$-общий интеграл;

Для того, чтобы получить общее решение необходимо выразить y через x, учитывая, что $log_a x = b <=> x = a^b$ имеем:

$y = e^{2x+C_1}$, $y = e^{2x} \cdot e^{C_1}$, полагая $e^{C_1} = C > 0$,получим $y = Ce^{2x}$-общее решение исходного уравнения;

Проверим, имеет ли уравнение $y' - 2y = 0$ особые решения. Так как, мы делили исходное уравнение на y, то могли потерять решение $y = 0$ обращающее знаменатель в ноль.

Подстановка $y = 0$ и $y' = 0$ в исходное уравнение $y' = 2y$, показывает, что $0 = 2 \cdot 0, 0 = 0$, то есть решение $y = 0$ является решением ДУ, однако решение$y = 0$, невозможно получить из общего решения $y = Ce^{2x}$, ошибочно считать, что это возможно при $C = 0$, так как $C > 0$.

Таким образом, решение $y = 0$ является особыми для уравнения $y' - 2y = 0$;

Найдем частное решение ДУ $y' = 2y$, то есть выделим определённую линию, из семейства кривых $y = Ce^{2x}$, удовлетворяющую условию $y(0) = -2$, то есть кривую, проходящую через точку$(0; -2)$,подставляем $x = 0, y = -2$,

в общее решение $y = Ce^{2x}$ и находим C:

$-2 = Ce^0$, $C = -2$.

Таким образом, $y = -2e^{2x}$-частное решение исходного уравнения;

б) Данное уравнение $y' = \frac{y+2}{x}$ является уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует виду $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, где $f_1(x) = \frac{1}{x}$,

$f_2(y) = y + 2$, область определения уравнения $x \neq 0$;

Разделяя переменные имеем:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{y+2}$, $y + 2 \neq 0$,

$\frac{dy}{y+2} = \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{d(y+2)}{y+2} = \int \frac{dx}{x}$,

$ln|y + 2| = ln|x| + C_1$-общий интеграл.

Для нахождения общего решения, представим константу C_1 в правой части равенства в виде lnC ,где $C > 0$, то есть в виде $C_1 = lnC$:

$ln|y + 2| = ln|x| + lnC$,

$ln|y + 2| = lnC\,|x|$,

$y + 2 = Cx$,

$y = Cx - 2$-общее решение.

Проверим, имеет ли исходное уравнение особые решения. Так как, мы делили уравнение на $f_2(y) = y + 2$, то могли потерять решение $y + 2 = 0$,обращающее знаменатель в ноль, то есть решение $y = -2$.

Подстановка $y = -2$ и $y' = 0$ в исходное уравнение $y' = \frac{y+2}{x}$,

$0 = \frac{-2+2}{x}$, $0 = 0$, показывает, что функция $y = -2$ является решением данного уравнения.Однако, подставляя $y = -2$ в общее решение $y = Cx - 2$ получим

$-2 = Cx - 2$, $Cx = 0$,отсюда $C = 0$, но выше мы полагали

$C > 0$,следовательно решение $y = -2$ не может содержаться в общем решении (невозможно подобрать в общем решении такое $C > 0$,чтобы $y = -2$).Таким образом, решение $y = -2$ является особым.

Найдем частное решение ДУ, выделим определённую линию, из семейства прямых $y = Cx - 2$, удовлетворяющую условию $y(-1) = 1$, то есть проходящую через точку$(-1; 1)$,подставляем $x = -1, y = 1$, в общее решение$y = Cx - 2$, находим C,$1 = C(-1) - 2, C = -3$.

Таким образом, $y = -3x - 2$-частное решение исходного уравнения;

в) Данное уравнение $x \cdot \sqrt{1-y^2}dx + y \cdot \sqrt{1-x^2}dy = 0$ -является уравнением с разделяющимися переменными (в дифференциальной форме), так как соответствует виду:

$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$,

где $P_1(x) = x, Q_1(y) = \sqrt{1-y^2}, P_2(x) = \sqrt{1-x^2}, Q_2(y) = y$;

Разделяя переменные имеем:

$x \cdot \sqrt{1-y^2}dx + y \cdot \sqrt{1-x^2}dy = 0 \left| \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1, y \neq \pm 1, \right.$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = C_1,$

$-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\, dx - \frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)\, dy = C_1,$

$-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) - \frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-y^2) = C_1 | \cdot (-2),$

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (1-y^2)^{\frac{1}{2}} = -2C_1$, полагая$C = -2C_1 \geq 0$,получим:

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (1-y^2)^{\frac{1}{2}} = C$– общий интеграл.

При делении исходного уравнения на$\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-x^2}$ мы могли потерять некоторые решения, которые обращают в ноль произведение

$\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=0$,то есть решения $y=\pm1$ ($\sqrt{1-y^2}=0$),.

Решения $y=\pm1$- не являются особыми, так как входят в общий

интеграл $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=C$,

Действительно, при $C=0$,

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow\ y=\pm1$;

Найдём частное решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(0)=1$:

$x=0, y=1$,

$(1-0^2)^{\frac{1}{2}}+(1-1^2)^{\frac{1}{2}}=C$,

$C=1$, следовательно $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}=1$- частный интеграл.

Пример 3.9. Найти решение дифференциального уравнения:

а) $y'x^3=2y$;**б)**$ydx+ctgxdy=0, y(0)=1$;

в)$cos^2yctgxdx+sin^2xtgydy=0$;**г)** $x\,y'-\frac{y}{lnx}=0, y(e)=1$.

Решение.

а) Данное уравнение $y'x^3=2y$ или уравнение $y'=\frac{2y}{x^3}$ (что то же самое) является уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует виду

$y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$, где $f_1(x)=\frac{1}{x^3}, f_2(y)=2y$.

Разделяя переменные и учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$ имеем:

$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x^3}\Big|\cdot\ \frac{dx}{y}, y\neq0$,

$\frac{dy}{y}=\frac{2}{x^3}dx$,

$\int\frac{dy}{y}=2\int x^{-3}dx$,

$ln|y| = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{(-2)} + C_1,$

$log_e|y| = -\frac{1}{x^2} + C_1$-общий интеграл;

Для того, чтобы получить общее решение необходимо выразить y через x, учитывая, что $log_a x = b <=> x = a^b$ имеем:

$y = e^{-\frac{1}{x^2}+C_1},$

$y = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot e^{C_1}$,полагая $e^{C_1} = C \neq 0$,получим $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$-общее решение исходного уравнения.

б) Данное уравнение $ydx + ctgxdy = 0$ -является уравнением с разделяющимися переменными (в дифференциальной форме), так как соответствует виду:

$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0,$

где $P_1(x) = 1, Q_1(y) = y, P_2(x) = ctgx, Q_2(y) = 1;$

Разделяя переменные имеем:

$ydx + ctgxdy = 0 \left| \cdot \frac{1}{yctgx}, yctgx \neq 0; \right.$

$\frac{dx}{ctgx} + \frac{dy}{y} = 0,$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{ctgx},$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{sinx}{cosx} dx,$

так как $d(cosx) = -sinxdx$ имеем:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(cosx)}{cosx},$

$ln|y| = ln|cosx| + C_1,$

Полагая $C_1 = lnC, C > 0$, имеем:

$ln|y| = lnC|cosx|,$

$y = Ccosx$-общее решение (семейство косинусов).

Найдем частное решение ДУ- выделим определённую линию, из семейства прямых $y = Ccosx$, удовлетворяющую условию $y(0) = 1$, то есть проходящую через точку$(0; 1)$,подставляем $x = 0, y = 1$, в общее решение $y = Ccosx$, находим C:

$1 = Ccos0$,$C = 1$, следовательно, $y = cosx$- частное решение исходного ДУ.

в) $cos^2yctgxdx + sin^2xtgydy = 0 -$ уравнением с разделяющимися переменными (в дифференциальной форме);

$$cos^2yctgxdx + sin^2xtgydy = 0 \Big| \cdot \frac{1}{cos^2ysin^2x}, \; cos^2ysin^2x \neq 0,$$

$$\frac{ctgx}{sin^2x}dx + \frac{tgy}{cos^2y}dy = 0,$$

$$\int \frac{ctgx}{sin^2x}dx + \int \frac{tgy}{cos^2y}dy = C_1,$$

$$-\int ctgx\, d(ctgx) + \int tgy\, d(tgy) = C_1,$$

$$\frac{tg^2y}{2} - \frac{ctg^2x}{2} = C_1 \Big| \cdot 2,$$

полагая $2C_1 = C$,имеем:

$tg^2y - ctg^2x = C$ –это и есть общий интеграл данного уравнения.

г) $x\,y' - \frac{y}{lnx} = 0 \Big| \cdot \frac{1}{x}, x \neq 0;$

$$y' - \frac{y}{xlnx} = 0,$$

$y' = \frac{y}{xlnx}$ – уравнением с разделяющимися переменными разрешённое относительно y',

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{xlnx},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{xlnx},$$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(lnx)}{lnx}$,

$ln|y| = ln|lnx| + C_1$,

полагая $C_1 = lnC, C > 0$, имеем:

$ln|y| = ln|lnx| + lnC$,

$ln|y| = lnC\,|lnx|$,

$y = Clnx$ –общее решение.

Найдём частное решение, удовлетворяющее условию $y(e) = 1$:

$1 = Clne, C = 1$,следовательно, $y = lnx$ –частное решение исходного уравнения.

Пример 3.10. Найти общее решение дифференциального уравнения $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' = y$ и проверить результат дифференцированием.

Решение.

Чтобы разобраться с видом данного уравнения, разрешим его относительно старшей производной:

$(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' = y$,

$\sqrt{x}(\sqrt{y} + 1)\, y' = y$,

$y' = \frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}$ -уравнением с разделяющимися переменными, так как соответствует виду $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, где $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$f_2(y) = \frac{y}{\sqrt{y}+1}$, область определения уравнения $x \neq 0$;

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}\Big| \cdot \frac{(\sqrt{y}+1)dx}{y}, y \neq 0$,

$\frac{(\sqrt{y}+1)dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

$\int \left(y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{y}\right) dy = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$,

$2\sqrt{y} + ln|y| = 2\sqrt{x} + C$— общий интеграл исходного дифференциального уравнения, так как искомая функция y не выражена через независимую переменную x. В этом и заключается отличие общего (частного) интеграла от общего (частного) решения. Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем обе части последнего равенства:

$$\left(2y^{\frac{1}{2}}+ln|y|\right)'=\left(2x^{\frac{1}{2}}+C\right)',$$

$$2\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot y'+\frac{1}{y}\cdot y'=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{y}\right)\cdot y'=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{y}+1}{y}\right)\cdot y'=1,$$

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot y'=y,$$

$$\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'=y.$$

Вернулись к исходному уравнение, следовательно решение найдено верно!

Задания для самостоятельного решения:

15. Найти решение ДУ с разделяющимися переменными:

1	$4-y^2+xy'=0$	**11**	$y'=y^2cosx, y(\pi)=2$
2	$y'=\dfrac{y+1}{\sqrt[4]{x}}$	**12**	$y'tgx-y=1$
3	$(x^2+4)dy=3xydx,$ $y(0)=8$	**13**	$y'=\dfrac{y}{1+x}, y(0)=2$
4	$xy'+y=y^2, y(1)=2$	**14**	$2x^2ydy-3xy^2dx=6xdx-6ydy$
5	$y'=10^{x+y}$	**15**	$2xy^2+(x^2-1)y'=0, y(0)=1$

6	$y'y = \dfrac{1-2x}{y}, y(0) = 0$	16	$y' sin^2 x ln y + y = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
7	$xy' + y = 0, y(1) = 2$	17	$(x - xy)dy + (x + xy)dx = 0;$
8	$y' = \dfrac{xy}{1+x^2}, y(1) = \sqrt{2}$	18	$(1 + e^x)y'y = e^x, y(0) = 1$
9	$y' = 3^{x-y}$	19	$(y - x^2y)dy + (x + xy^2)dx = 0, y(\sqrt{2}) = 1$
10	$(x^2+1)dy + ydx = 0,$ $y(1) = 1$	20	$(x^2+5x+7)\left(1+\sqrt{y^2+1}\right)dy -$ $-\sqrt{y^2+1}(2x+5)dx = 0$

Ответы:

15.1. $\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+2}} = xC$; **15.2.** $y = Ce^{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}} - 1$;**15.3.** $y = (x^2+4)\sqrt{x^2+4}$;

15.4. $y = \frac{2}{2-x}$;**15.5.** $y = lg\left(\frac{1}{C-10^x}\right)$; **15.6.** $y = \sqrt[3]{3(x-x^2)}$;

15.7. $y = \frac{2}{x}$;**15.8.** $y = \sqrt{1+x^2}$;**15.9.** $y = log_3(3^x + C)$;

15.10. $y = e^{-arctgx+\frac{\pi}{4}}$; **15.11.** $y = \frac{2}{1-2sinx}$; **15.12.** $y = Csinx - 1$;

15.13. $y = 2(x+1)$; **15.14.** $\frac{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{2+y^2} = C$; **15.15.** $y = \frac{1}{ln|x^2-1|+1}$;

15.16. $\frac{ln^2 y}{2} = ctgx - 1$; **15.17.** $2ln|y+1| + x - y = C$;

15.18. $y = \pm\sqrt{1 + 2ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$;**15.19.** $\frac{y^2+1}{x^2-1} = 2$;

15.20. $ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right| + y = ln(x^2+5x+7) + C.$

3.2.3. Однородные дифференциальные уравнения.

Функция $f(x; y)$ называется **однородной функцией степени** $\boldsymbol{n}(n \epsilon Z)$, если для любого значения параметра $\alpha > 0 (\alpha \epsilon R)$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{f(\alpha x;\alpha y)=\alpha^n f(x;y)}\ \textbf{(3.11)}$$

Например, функция $f(x;y)=x^2-2xy$ -является однородной функцией второй степени, так как$f(\alpha x;\alpha y)=(\alpha x)^2-2\alpha x\alpha y=\alpha^2(x^2-2xy)=\alpha^2 f(x,y)$

Уравнение вида

$$\boldsymbol{P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0}\ \textbf{(3.12)}$$

называется **однородным**, если $P(x;y)$и $Q(x;y)$ однородные функции одной и той же степени, то есть $P(\alpha x;\alpha y)=\alpha^n P(x;y), Q(tx;ty)=\alpha^n Q(x;y)$.

Уравнение вида (3.12) называют **дифференциальной формой однородного уравнения** первого порядка.

Уравнение (3.12) может быть приведено к виду

$$\boldsymbol{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)}\ \textbf{(3.13)}$$

Уравнение (3.13) называется **однородным ДУ, разрешённым относительно старшей производной.**

Таким образом, уравнение $y'=f(x;y)$ называется однородным, если функция $f(x;y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов, то есть записана в виде $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Алгоритм решения однородных уравнений.

1)Однородное уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ приводится к уравнению вида $=f\left(\frac{y}{x}\right)$;

2) При помощи замены $t=\frac{y}{x}, y=tx, y'=t'x+t,$ где $t=t(x)$- новая неизвестная функция, сводим уравнение $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ к уравнению с разделяющимися переменными, относительно неизвестной функции t и решаем его:

$t'x + t = f(t)$,

$t'x = f(t) - t$,

$\frac{dt}{dx}x = f(t) - t \,\Big|\cdot \frac{dx}{x(f(t)-t)}, x(f(t)-t) \neq 0;$

$\frac{dz}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x}$- общий интеграл решения ДУ $t'x + t = f(t)$;

3)Заменяя в общем решении (интеграле) t на $\frac{y}{x}$, получим общее решение (интеграл) исходного ДУ.

Пример 3.11. Найти общее решение (интеграл) ДУ:

а)$xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$;**б)**$xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$;

в) $y' - \frac{y}{x} - \frac{x^2y}{yx^2+y^3} = 0, y(1) = 0$; **г)**$y' = \frac{3y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + 1$.

Решение.

а) Покажем, что данное уравнение является однородным, то есть приведём к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, для этого разделим обе части исходного уравнения на $x \neq 0$:

$xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}|:x$,

$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$;

Заметим, что правая часть равенства$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$, представляет собой функцию $f\left(\frac{y}{x}\right)$ отношения $\frac{y}{x}$, то есть уравнение является однородным.

В соответствии с алгоритмом решения однородных уравнений, имеем:

$t = \frac{y}{x}$, $y = tx, y' = t' \cdot x + t$:

$t' \cdot x + t = t + e^t$,

$t' \cdot x = e^t \big| : x, x \neq 0$,

$t' = \frac{e^t}{x}$- уравнение с разделяющимися переменными относительно

t,

$t' = f_1(x) \cdot f_2(t)$,где $f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(t) = e^t$;

Решаем его (разделяем переменные):

$\frac{dt}{dx} = \frac{e^t}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{e^t}$,

$\int \frac{dt}{e^t} = \int \frac{dx}{x}$,

$-\int e^{-t} d(-t) = \int \frac{dx}{x}$,

$-e^{-t} = ln|x| + C_1$, пусть $C_1 = lnC, C > 0$,

$-e^{-t} = ln|x| + lnC$,

$-e^{-t} = lnC|x|$,

$e^{-t} = -lnC|x|$,

$e^{-t} = ln(C|x|)^{-1}$,

$e^{-t} = ln\frac{1}{C|x|}$, логарифмируя уравнение по основанию e ,учитывая ,

что $lne = log_e e = 1$ имеем:

$log_e e^{-t} = log_e \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$-tlog_e e = log_e \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$-t = ln \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$t = -ln \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$,

$\frac{y}{x} = -ln \left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$-общий интеграл,

$y = -xln\left(ln\frac{1}{C|x|}\right)$-общее реше- ние.

б) $xydx-(x^2-y^2)dy=0$- дифференциальная форма однородного уравнения $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$,где $P(x;y)=xy$ и $Q(x;y)=-(x^2-y^2)=y^2-x^2$-однородные функции второй степени ($n=2$), действительно,

$Q(tx;ty)=(ty)^2-(tx)^2=t^2(y^2-x^2)=t^2Q(x,y)$,

$P(tx;ty)=txty=t^2(xy)=t^2\,P(x;y)$, следовательно, рассматриваемое уравнение приводится к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, этим и займёмся, после чего сделаем подстановку $t=\frac{y}{x}$:

$xydx-(x^2-y^2)dy=0$,

$y^{'}=\frac{xy}{x^2-y^2}$,

$y^{'}=\frac{xy}{x^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}$,

$y^{'}=\underbrace{\frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}_{f\left(\frac{y}{x}\right)}$,

$\frac{y}{x}=t\ ,y=tx,y^{'}=t^{'}\cdot x+t$,

$t^{'}\cdot x+t=\frac{t}{1-t^2}$,

$t^{'}\cdot x=\frac{t}{1-t^2}-t$,

$t^{'}\cdot x=\frac{t-t+t^3}{1-t^2}\Big|\cdot\frac{1}{x},x\neq 0$,

$t^{'}=\frac{t^3}{(1-t^2)x}$- уравнение с разделяющимися переменными относительно t,решаем его:

$\frac{dt}{dx}=\frac{t^3}{(1-t^2)x}\Big|\cdot\frac{(1-t^2)dx}{t^3}$,

$\frac{(1-t^2)dt}{t^3}=\frac{dx}{x}$,

$$\int \frac{(1-t^2)dt}{t^3} = \int \frac{dx}{x};$$

Рассмотрим интеграл от левой части равенства $\int \frac{(1-t^2)dt}{t^3}$:

$$\int \frac{(1-t^2)dt}{t^3} = \int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{t^2}{t^3}\right)dt = \int \left(t^{-3} - \frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= \frac{t^{-2}}{-2} - ln|t| + C = -\frac{1}{2t^2} - ln|t| + C,$$

итак, $-\frac{1}{2t^2} - ln|t| = ln|x| + C_1,\ C_1 = lnC,\ C > 0,$

$$-\frac{1}{2t^2} = ln|t| + ln|x| + lnC,$$

$$-\frac{1}{2t^2} = lnC\,|xt|,$$

Вернемся к старым переменным:

$$-\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = ln\left|Cx\frac{y}{x}\right|,$$

$-\frac{x^2}{2y^2} = ln|Cy|$ –общий интеграл.

в) $y' - \frac{y}{x} - \frac{x^2y}{yx^2+y^3} = 0,$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2y}{y^3\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)},$$

$y' = \underbrace{\frac{y}{x} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}}_{f\left(\frac{y}{x}\right)}$ –однородное уравнение,

$$\frac{y}{x} = t\ , y = tx, y' = t' \cdot x + t,$$

$$t'x + t = t + \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}},$$

$$t'x = \frac{1}{1+t^2},$$

$$t'x = \frac{1}{1+t^2}\Big| \cdot \frac{1}{x}, x \neq 0,$$

$t' = \frac{1}{(1+t^2)x}$ - уравнение с разделяющимися переменными относительно t,

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(t^2+1)x} \Big| \cdot (t^2+1)dx,$

$(t^2+1)dt = \frac{dx}{x},$

$$\int (t^2+1)dt = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{t^3}{3} + t = ln|x| + C,$$

$\frac{y^3}{3x^3} + \frac{y}{x} = ln|x| + C$ –общий интеграл.

Найдём частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$:

$x = 1, y = 0$, тогда $\frac{0^3}{3 \cdot 1^3} + \frac{0}{1} = ln1 + C, C = 0$,следовательно,

$\frac{y^3}{3x^3} + \frac{y}{x} = ln|x|$ –частный интеграл.

г) Правая часть уравнения $y' = \frac{3y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + 1$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$,поэтому является однородным, применяя подстановку $t = \frac{y}{x}, y = tx, y' = t'x + t$ имеем:

$t'x + t = 3t + t^2 + 1,$

$t'x = t^2 + 2t + 1,$

$t' = \frac{t^2+2t+1}{x},$

$\frac{dt}{dx} = \frac{t^2+2t+1}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{t^2+2t+1},$

$\frac{dt}{t^2+2t+1} = \frac{dx}{x},$

$\int \frac{dt}{(t+1)^2} = \int \frac{dx}{x},$

$\int (t+1)^{-2}\, d(t+1) = \int \frac{dx}{x}$,

$\frac{(t+1)^{-1}}{-1} = ln|x| + C$,

$-\frac{1}{t+1} = ln|x| + C$,

$t + 1 = -\frac{1}{ln|x|+C}$,

$t = -\frac{1}{ln|x|+C} - 1$,

$t = -\left(\frac{1}{ln|x|+C} + 1\right)$,

Учитывая, что $t = \frac{y}{x}$ имеем:

$\frac{y}{x} = -\left(\frac{1}{ln|x|+C} + 1\right)$,

$y = -x\left(\frac{1}{ln|x|+C} + 1\right)$ –общее решение.

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида

$$\boldsymbol{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)\ (3.14)},$$

где $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \epsilon R$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$,то переменные могут быть разделены подстановкой $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α, β- некоторые числа, которые являются решениями системы уравнений $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$.

Пример 3.12. Привести дифференциальное уравнение $(y+2)dx - (2x+y+6)dy = 0$ к однородному.

Решение.

Приводим уравнение к виду $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$:

$(2x + y + 6)dy = (y + 2)dx$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{2x+y+6}$, где $a = 0, b = 1, a_1 = 2, b_1 = 1, c = 2, c_1 = 6$;

Составляем определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

следовательно переменные могут быть разделены подстановкой

$x = u + \alpha$,

$y = v + \beta$, где α, β- некоторые числа, которые являются решениями системы уравнений $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$ в нашем случае, система принимает вид $\begin{cases} \beta + 2 = 0 \\ 2\alpha + \beta + 6 = 0 \end{cases}$, решаем систему, для определения α, β:

$\begin{cases} \beta = -2 \\ \beta = -6 - 2\alpha \end{cases}$, $-6 - 2\alpha = -2, \alpha = -2$.

Итак, $\begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$, следовательно, $x = u - 2, y = v - 2$.

Делая подстановку $x = u - 2, y = v - 2$, $dx = du$, $dy = dv$, приводим исходное уравнение к однородному ДУ:

$(y + 2)dx - (2x + y + 6)dy = 0$,

$(v - 2 + 2)du - (2(u - 2) + v - 2 + 6)dv = 0$,

$vdu - (2u + v)dv = 0$.

Пример 3.13. Решить уравнение сведя его к однородному:

а) $(2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx$;

б) $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.

Решение.

а) Приводим уравнение к виду $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$:

$(2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x-2}$;

Составляем определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$,

следовательно переменные могут быть разделены подстановкой

$x = u + \alpha$,

$y = v + \beta$, где α, β- некоторые числа, которые являются решениями системы уравнений $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$ в нашем случае, система принимает вид $\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \end{cases}$,решаем систему, для определения α, β:

$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}, \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$, следовательно, $x = U + 1, y = v + 1$,отсюда

$u = x - 1, v = y - 1$;

Делая подстановку $x = u + 1, y = v + 1$, $dx = du$,

$dy = dv$,приводим исходное уравнение к однородному ДУ:

$(2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx$,

$(2(u + 1) - 2)dv = (u + 1 + 2(v + 1) - 3)du$,

$2udv = (u + 2v)du$,

$\frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{2u}$,

$v' = \frac{u(1+2\frac{v}{u})}{2u}$,

$v' = \frac{1}{2} + \frac{v}{u}$– однородное уравнение относительно функции v, $v' = f\left(\frac{v}{u}\right)$,

замена $\frac{v}{u} = t, v = tu, v' = t'u + t$:

$t'u + t = \frac{1}{2} + t$,

$t'u = \frac{1}{2}\Big| \cdot \frac{1}{u}, u \neq 0$,

$t' = -\frac{1}{2u}$-уравнение с разделяющимися относительно

$t, t' = f_1(t) \cdot f_2(u)$;

$\frac{dt}{du} = -\frac{1}{2u} | \cdot du$,

$\int dt = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$,

$t = -\frac{1}{2} ln|u| + C$,

Учитывая, что $\frac{v}{u} = t$,получим:

$\frac{v}{u} = -\frac{1}{2} ln|u| + C$,

Подставляя в уравнение $u = x - 1, v = y - 1$ переходим к первоначальной функции y от переменной x :

$\frac{y-1}{x-1} = -\frac{1}{2} ln|x-1| + C$,

$y - 1 = (x-1)\left(C - \frac{1}{2} ln|x-1|\right)$,

$y = (x-1)\left(-\frac{1}{2} ln|x-1| + C\right) + 1$-общее решение.

б) Решение найдите самостоятельно.

Замечание: в случае если в исходном уравнении вида

$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой $ax + by = z$.

Пример 3.14. Решить уравнение:

а) $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$;

б) $(3x-4y-2)dx - (3x-4y-3)dy = 0$.

Решение.

Приводим уравнение к виду $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$:

$2(x+y)dy = -(3x+3y-1)dx$,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y}$,

$y' = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y}$.

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6=0,$

переменные могут быть разделены при помощи подстановки $ax+by=z$, то есть при помощи подстановки $-3x-3y=z, -3(x+y)=z$, отсюда

$z' = -3(1+y'), 1+y' = -\frac{z'}{3}, y' = -\frac{z'}{3} - 1$, подставляя y' и

$x+y = -\frac{z}{3}$, в уравнение $y' = \frac{-3(x+y)+1}{2(x+y)}$ имеем:

$$-\frac{z'}{3} - 1 = \frac{z+1}{-\frac{2}{3}z},$$

$$\frac{z'}{3} + 1 = \frac{3(z+1)}{2z},$$

$$\frac{z'+3}{3} = \frac{3(z+1)}{2z},$$

$$z'+3 = \frac{9(z+1)}{2z},$$

$$z' = \frac{9(z+1)}{2z} - 3,$$

$$z' = \frac{9z+9-6z}{2z},$$

$z' = \frac{3z+9}{2z}$ – уравнение с разделяющимися переменными $z' = f_1(x) \cdot f_2(z)$,

где $f_1(x) = 1, f_2(z) = \frac{3z+9}{2z}$;

Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3(z+3)}{2z} \Big| \cdot \frac{zdx}{z+3}, z+3 \neq 0$$

$$\frac{zdz}{z+3} = \frac{3}{2}dx,$$

$$\int \frac{(z+3)-3}{z+3}dz = \frac{3}{2}\int dx,$$

$$\int\left(1-\frac{3}{z+3}\right)dz=\frac{3}{2}\int dx,$$

$$\int dz-3\int\frac{d(z+3)}{z+3}=\frac{3}{2}\int dx,$$

$$z-3ln|z+3|=\frac{3}{2}x+C.$$

Подставляя в уравнение $z=-3(x+y)$ переходим к первоначальной функции y от переменной x :

$$-3(x+y)-3ln|-3(x+y)+3|=\frac{3}{2}x+C,$$

$-3(x+y)-3ln|-3(x+y-1)|=\frac{3}{2}x+C$ - общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

б) Решение найдите самостоятельно и сравните с ответом, ответ: $ln|3x-4y+1|=x-y+C$ - общий интеграл.

Задания для самостоятельного решения:

16. Найти решение однородного ДУ:

1	$y'=\frac{y}{x}+sin\frac{y}{x}$	**11**	$xy'-y=\frac{x}{arctg\frac{y}{x}}$
2	$xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}, y(1)=0$	**12**	$xydy+(x^2+2xy)dx=0$
3	$xy'=y(1+lny-lnx)$	**13**	$(4y^2+x^2)y'=xy$
4	$y'=-\frac{x-y}{x+y}$	**14**	$y'=\frac{y}{x+y}$
5	$x^3dy=(x^2+y^2)ydx$	**15**	$ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$
6	$xcos\frac{y}{x}dy+\left(x-ycos\frac{y}{x}\right)dx=0$	**16**	$x^2y'=y^2+xy$
7	$y'=\frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$	**17**	$xdy=(2x+y)dx, y(1)=0$
8	$x^2y'=xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}$	**18**	$y'=\frac{y^2}{x^2}-2$

9	$xy'sin\frac{y}{x}+x=ysin\frac{y}{x}$	19	$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$
10	$xy+y^2=(2x^2+xy)y'$	20	$y'=\frac{xy^2-yx^2}{x^3}$

Ответы:

16.1. $\sqrt{\frac{cosx-1}{cosx+1}}=Cx$;**16.2.**$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=x$;**16.3.** $y=xe^{Cx}$;

16.4.$arctg\left(\frac{y}{x}\right)=ln\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}$;**16.5.**$y^2=\frac{x^2}{-2lnC|x|}$;

16.6.$sin\left(\frac{y}{x}\right)+ln|x|=C$;**16.7.**$2arctg\left(\frac{y}{x}\right)=ln\frac{C(x^2+y^2)^3}{|x|^5}$;

16.8.$y=\frac{x}{ln\left(ln\frac{1}{C|x|}\right)}$;**16.9.**$Cx=e^{cos\frac{y}{x}}$;**16.10.**$y^2=Cxe^{-\frac{y}{x}}$;

16.11$\frac{y}{x}\ arctg\frac{y}{x}=lnCx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$;**16.12.** $ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C$;

16.13.$ln|y|=\frac{x^2}{8y^2}+C$;**16.14.** $e^{\frac{x}{y}+C}=y$;**16.15.** $\sqrt{\frac{x}{y}}+ln|y|=C$;

16.16.$y=-\frac{x}{ln|x|+C}$;**16.17.**$y=2xln|x|$;**16.18.**$\sqrt[3]{\left|\frac{y-2x}{y+x}\right|}=\pm Cx$;

16.19.$\left(\frac{y}{x}\right)^2=2ln\left|\frac{C}{x}\right|$;**16.20.** $\sqrt{\frac{y-2x}{y}}=Cx$.

3.2.4. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли.

Дифференциальное уравнение называется линейным относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$\boldsymbol{y'+p(x)y=q(x)}\ \textbf{(3.15)},$$

где $p(x)$ и $q(x)$— известные функции, непрерывные на некотором интервале.

Если $q(x)=0$,то уравнение (3.15) принимает вид $y'+p(x)y=0$ и называется **линейным однородным** первого порядка, оно является уравнением с разделяющимися переменными и решается соответственно;

Если $q(x) \neq 0$,уравнение (3.15) называется **линейным неоднородным** первого порядка решается методом Бернулли или методом Лагранжа, рассмотрим каждый метод по отдельности.

Решение линейных неоднородных уравнений методом Бернулли.

Метод Бернулли – это когда решение линейного неоднородного уравнения (3.15), то есть функция y , ищется в виде произведения двух функций, то есть с помощью подстановки $\boldsymbol{y = U \cdot V}$, где $U = U(x), V = V(x)$-неизвестные функции, зависящие от x,причём одна из них произвольная отличная от нуля функция, например $V(x) \neq 0$,то есть

$y(x) = \dfrac{y(x)}{V(x)} \cdot V(x) = U(x) \cdot V(x)$, где $U(x) = \dfrac{y(x)}{V(x)}$;

Подставляя $y = U \cdot V$ и $y' = U'V + V'U$ в уравнение (3.15), имеем:

$U'V + V'U + p(x)UV = q(x);$

Сгруппировав второе и третье слагаемые в левой части данного уравнения и вынося U за скобки, получим:

$U'V + U(V' + p(x)V) = q(x)$

Поскольку первоначальная функция y была представлена в виде произведения двух функций U и V $(y = U \cdot V)$, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным (выбранным по нашему усмотрению).

Положим $V' + p(x)V = 0$ (3.16),

тогда вторая функция U,должна удовлетворять уравнению

$$U'V = q(x) \ (3.17),$$

таким образом, получим СУ: $\begin{cases} V' + p(x)V = 0 & (1) \\ U'V = q(x) & (2) \end{cases}$.

Решив первое уравнение СУ, как уравнение с разделяющимися переменными относительно V, находим V:

$V' = -p(x)V$,

$\frac{dV}{dx} = -p(x)V \left| \cdot \frac{dx}{V}, V \neq 0 \right.$,

$\frac{dV}{V} = -p(x)dx$,

$\int \frac{dV}{V} = -\int p(x)dx$,

$ln|V| = -\int p(x)dx$,

$log_e|V| = -\int p(x)dx$,

учитывая, что $log_a x = b <=> x = a^b$ имеем:

$\underline{V = e^{-\int p(x)dx}}$, здесь можно положить $C = 0$, так как на данном этапе мы искали решение, обращающее в ноль $V' + p(x)V$, а не все множество решений исходного уравнения.

Подставляя найденную функцию V в уравнение (2), получим уравнение с разделяющимися переменными относительно U, решая его находим U:

$U'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$,

$U' = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}}$ – уравнение с разделенными переменными,

$\underline{U = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.}$

Общее решение представляет собой произведение найденных функций U и V:

$y = UV = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$.

Решение линейных неоднородных уравнений методом Лагранжа (методом вариаций произвольной постоянной).

Рассмотрим уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ и найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$y' + p(x)y = 0$,

$y' = -p(x)y$- уравнение с разделяющимися переменными;

Разделяем переменные:

$\frac{dy}{dx} = -p(x)y,$

$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$

Интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = C_1 - \int p(x)dx,$

$ln|y| = C_1 - \int p(x)dx,$

$|y| = e^{C_1 - \int p(x)dx},$

$|y| = e^{C_1} \cdot e^{-\int p(x)dx}$, для упрощения решения положим $C = e^{C_1}$ и уберем знак модуля, что сводится к умножению на постоянную ± 1, которую включим в C:

$y = Ce^{-\int p(x)dx};$

Заменим постоянную C на функцию, зависящую от переменной x, то есть $C = C(x)$ и будем искать решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, находим производную y учитывая, что $(-\int p(x)dx)' = -p(x)$ и применяя правило дифференцирования произведения и сложной функции получим:

$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + \left(e^{-\int p(x)dx}\right)' C(x);$

$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)e^{-\int p(x)dx} C(x);$

Подставляя y' и y в уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ находим $C(x)$:

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x);$

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x);$

$C'(x) = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}};$

$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx};$

$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C;$

Подставляя $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$ в равенство $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$,получим общее решение исходного уравнения: $y = (\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C)e^{-\int p(x)dx}$.

Пример 3.15. Найти общее решение ДУ методом Бернулли и методом Лагранжа: **а)** $y' + 2yx = xe^{-x^2}$;
б) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;**в)**$(xy + e^x)dx - xdy = 0$.

Решение.

а)$y' + 2yx = xe^{-x^2}$-данное уравнение является линейным неоднородным уравнением$y' + p(x)y = q(x)$,где $p(x) = 2x$,

$q(x) = xe^{-x^2}$.

1 способ:(метод Бернулли)

Сделаем подстановки $y = U \cdot V$, $y' = U'V + V'U$:

$U'V + V'U + 2UVx = xe^{-x^2}$,

$U'V + U(V' + 2Vx) = xe^{-x^2}$,

решаем СУ: $\begin{cases} V' + 2Vx = 0 \\ U'V = xe^{-x^2} \end{cases}$.

Из первого уравнения находим V:

$V' + 2Vx = 0$,

$V' = -2Vx$,

$\frac{dV}{dx} = -2Vx \Big| \cdot \frac{dx}{V}$, $V \neq 0$,

$\int \frac{dV}{V} = -2\int xdx$,

$ln|V| = -x^2$,

$log_e|V| = -x^2$,

$V = e^{-x^2}$, здесь $C = 0$, так как в качестве V мы искали любую функцию, которая бы обращала левую часть в ноль, а не все множество решений уравнения;

Подставляя $V = e^{-x^2}$во второе уравнение системы $U'V = xe^{-x^2}$, находим U :

$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$,

$U' = x$,

$U = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Итак,$y = UV = (\frac{x^2}{2} + C)e^{-x^2}$-общее решение исходного ДУ.

2 способ:(метод Лагранжа)

Находим решение соответствующего однородного уравнения:

$y' + 2yx = 0$,

$y' = -2yx$- уравнение с разделяющимися переменными;

Разделяем переменные:

$\frac{dy}{dx} = -2xy$,

$\frac{dy}{y} = -2xdx$,

Интегрируем:

$\int \frac{dy}{y} = -2\int xdx$,

$ln|y| = -x^2 + C_1$,

$|y| = e^{-x^2 + C_1}$,

$|y| = e^{C_1} \cdot e^{-x^2}$,

положим $e^{C_1} = C$, $C > 0$ тогда

$y = Ce^{-x^2}$;

Заменим постоянную C на функцию от x , то есть $C = C(x)$

и будем искать решение исходного уравнения в виде:

$y = C(x)e^{-x^2}$,находим производную y по правилу дифференцирования произведения:

$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x)$;

Подставляя y' и y в исходное уравнение$y' + 2yx = xe^{-x^2}$,находим $C(x)$:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x) + 2xe^{-x^2}C(x) = xe^{-x^2};$$

$$C'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2};$$

$$C'(x) = x;$$

$$C(x) = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C;$$

Подставляя $C(x) = \frac{x^2}{2} + C$ в $y = C(x)e^{-x^2}$,получим общее решение исходного уравнения:

$$y = (\frac{x^2}{2} + C)e^{-x^2}.$$

б) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x \,|: \cos x \neq 0,$

$$\frac{y' \cos x}{\cos x} - \frac{y \sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x},$$

$y' - y \, tg\, x = 2 \sin x$-линейное неоднородное уравнение

$y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x) = -tg\, x, q(x) = 2 \sin x.$

<u>1 способ:(метод Бернулли)</u>

$y = UV; y' = U'V + V'U,$ где $U = U(x), V = V(x),$

$U'V + V'U - UV\, tg\, x = 2 \sin x,$

$U'V + U(V' - V\, tg\, x) = 2 \sin x$, решаем СУ: $\begin{cases} V' - V\, tg x = 0 \\ U'V = 2 \sin x \end{cases};$

1)Найдём V:

$$V' - V\, tg\, x = 0,$$

$$V' = V\, tg\, x,$$

$$\frac{dV}{dx} = V\, tg\, x \Big| \cdot \frac{dx}{V}, V \neq 0,$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int tg\, x dx,$$

$$ln|V| = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx,$$

$$ln|V| = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x},$$

$$ln|V| = -ln|\cos x|,$$

$ln|V| = ln|\cos x|^{-1}$,

$V = (\cos x)^{-1}$,

$V = \frac{1}{\cos x}$;

2)Найдём U:

$U'V = 2\sin x$,

$U'\frac{1}{\cos x} = 2\sin x$,

$U' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$,

$U = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$,

$y = UV = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)\frac{1}{\cos x}$ -обшее решение;

<u>2 способ:(метод Лагранжа)</u>

Находим решение соответствующего однородного уравнения:

$y' - y\, tg\, x = 0$,

$y' = ytgx$,

$\frac{dy}{dx} = ytgx$,

$\frac{dy}{y} = tgxdx$,

Интегрируем:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{sinx}{cosx}dx$,

$ln|y| = -\int \frac{d(cosx)}{cosx}$

$ln|y| = C_1 - ln|cosx|$,

$|y| = e^{C_1 - ln|cosx|}$,

$|y| = e^{C_1} \cdot e^{-\, ln|cosx|}$, положив $C = e^{C_1}$ получим:

$y = Ce^{-ln|cosx|}$, так как $e^{-ln|cosx|} = \frac{1}{e^{ln|cosx|}} = \frac{1}{cosx}$,то

$y = \frac{C}{cosx}$.

Заменяя C на $C(x)$ будем искать общее решение исходного уравнения в виде:

$$y = C(x) \cdot \frac{1}{cosx},$$

$$y' = C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)((cosx)^{-1})',$$

$$y' = C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)\frac{sinx}{cos^2x};$$

Подставляя y' и y в исходное уравнение $y' - y\,tg\,x = 2\sin x$, находим $C(x)$:

$$C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)\frac{sinx}{cos^2x} - C(x) \cdot \frac{1}{cosx} tg\,x = 2\sin x;$$

$$C'(x)\frac{1}{cosx} + C(x)\frac{sinx}{cos^2x} - C(x)\frac{sinx}{cos^2x} = 2\sin x;$$

$$C'(x)\frac{1}{cosx} = 2\sin x;$$

$$C'(x) = 2\sin x cosx;$$

$$C'(x) = sin2\,x;$$

$$C(x) = \int sin2\,x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$$

Подставляя $C(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ в $y = C(x) \cdot \frac{1}{cosx}$, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)\frac{1}{\cos x}.$$

в) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$, перейдём к виду $y' + p(x)y = q(x)$:

$$xdy = (xy + e^x)dx,$$

$$y' = \frac{xy + e^x}{x},$$

$$y' = y + \frac{e^x}{x},$$

$y' - y = \frac{e^x}{x}$–линейное уравнение, где $p(x) = -1, q(x) = \frac{e^x}{x}$;

1 способ:(метод Бернулли)

$y = UV, y' = U'V + V'U,$

$U'V + V'U - UV = \frac{e^x}{x},$

$U'V + U(V' - V) = \frac{e^x}{x},$

решаем СУ: $\begin{cases} V' - V = 0 \\ U'V = \frac{e^x}{x} \end{cases};$

1)Находим V:

$V' - V = 0,$

$\frac{dV}{dx} = V \left| \cdot \frac{dx}{V} \right., V \neq 0,$

$\int \frac{dV}{V} = \int dx,$

$ln|V| = x,$

$V = e^x;$

2)Находим U:

$U'V = \frac{e^x}{x},$

$U'e^x = \frac{e^x}{x},$

$U' = \frac{1}{x},$

$U = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C,$

Итак, $y = UV = (ln|x| + C)e^x$.

2 способ:(метод Лагранжа)

Решаем соответствующее однородное уравнение:

$y' - y = 0,$

$y' = y,$

$\frac{dy}{dx} = y,$

$\frac{dy}{y} = dx,$

Интегрируем:

$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$

$ln|y| = x + C_1,$

$|y| = e^{C_1 + x},$

$|y| = e^{C_1} \cdot e^x,$

положим $e^{C_1} = C$,тогда

$y = Ce^x$.

Заменяя C на $C(x)$ ищем общее решение исходного уравнения в виде:$y = C(x)e^x,\ y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$

Подставляя y' и y в исходное уравнение$y' - y = \frac{e^x}{x}$,находим $C(x)$:

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = \frac{e^x}{x};$$

$$C'(x)e^x = \frac{e^x}{x};$$

$$C'(x) = \frac{1}{x};$$

$$C(x) = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C;$$

Подставляя $C(x) = ln|x| + C$ в $y = C(x)e^x$,получим общее решение исходного уравнения:$y = (ln|x| + C)e^x$.

Замечание: может случиться так, что уравнение не является линейным относительно y,но является таковым относительно $x = x(y)$ и $x' = \frac{dx}{dy}$,то есть имеет вид $x' + p(y)x = q(y)$ в этом случае делаем подстановку $x = UV$ и решаем аналогично примерам выше учитывая, что $U = U(y), V = V(y)$ покажем, как это работает на примере 3.16.

Пример 3.16. Найти общее решение ДУ:

а) $y'(x+y)=1$;**б)** $y'=\frac{3y+3}{2x+y-1}$.

Решение

а) $y'(x+y)=1$,

$y'=\frac{1}{x+y}$, учитывая, что $y'=\frac{1}{x'}\left(\frac{dy}{dx}=y', \frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x'}=y'\right)$ имеем:

$\frac{1}{x'}=\frac{1}{x+y}$,

$x'=x+y$,

$x'-x=y$-линейное относительно x, $x'+p(y)x=q(y)$,

где $p(y)=-1, q(y)=y$.

Решим его методом Бернулли, делая замену $x=UV, x'=U'V+V'U$ имеем:

$U'V+V'U-UV=y$,

$U'V+U(V'-V)=y$;

Решаем систему: $\begin{cases} V'-V=0 \\ U'V=y \end{cases}$;

1)Находим V:

$V'-V=0$,

$\frac{dV}{dy}=V$,

$\int\frac{dV}{V}=\int dy$,

$ln|V|=y$,

$V=e^{y}$;

2)Находим U:

$U'V=y$,

$U'e^{y}=y$,

$U'=ye^{-y}$,

$U=\int ye^{-y}dy=\begin{vmatrix} u=y, du=dy \\ dv=e^{-y}dy, v=-e^{-y} \end{vmatrix}=$

$$= -ye^{-y} + \int e^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C.$$

Итак, $x = UV = (C - ye^{-y} - e^{-y})e^{y} = Ce^{y} - y - 1,$

$x = Ce^{y} - y - 1.$

б)$y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$, учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$ имеем:

$\frac{1}{y'} = \frac{2x+y-1}{3y+3},$

$$x' = \frac{2x + y - 1}{3(y + 1)},$$

$x' - \frac{2x}{3(y+1)} = \frac{y-1}{3(y+1)},$

$x = UV,\ x' = U'V + V'U,$,

$$U'V + UV' - \frac{2UV}{3(y + 1)} = \frac{y - 1}{3(y + 1)},$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{2V}{3(y + 1)}\right) = \frac{y - 1}{3(y + 1)};$$

1) Находим V:

$$V' - \frac{2V}{3(y + 1)} = 0,$$

$\frac{dV}{dy} = \frac{2V}{3(y+1)}$,

$\int \frac{dV}{V} = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y+1},$

$ln|V| = \frac{2}{3}ln|y + 1|$,

$ln|V| = ln|y + 1|^{\frac{2}{3}}$,

$V = (y + 1)^{2/3};$

2) Находим U:

$$U' \cdot V = \frac{y - 1}{3(y + 1)},$$

$U' \cdot (y + 1)^{2/3} = \frac{y-1}{3(y+1)}$,

$$U' = \frac{y-1}{3(y+1)^{5/3}},$$

$$U = \int \frac{y-1}{3(y+1)^{\frac{5}{3}}} dy = \frac{1}{3}\int \frac{(y+1)-2}{(y+1)^{\frac{5}{3}}} dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(y+1)}{(y+1)^{\frac{5}{3}}} dy - \frac{2}{3}\int (y+1)^{-\frac{5}{3}} d(y+1) =$$

$$= \frac{1}{3}\int (y+1)^{-\frac{2}{3}} d(y+1) - \frac{2}{3}\frac{(y+1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\frac{2}{3}\right)} =$$

$= (y+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(y+1)^{\frac{2}{3}}} + C$,следовательно,

$$x = UV = \left((y+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(y+1)^{\frac{2}{3}}} + C\right)(y+1)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= y + 2 + C(y+1)^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, получим $y + 2 + C(y+1)^{\frac{2}{3}} = x$ –решение исходного уравнения.

Уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид:

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)y^n \text{ }, n\epsilon R, n \neq 0, n \neq 1} \quad \textbf{(3.18)}$$

где $p(x)$и $q(x)$— известные функции, непрерывные на некотором интервале.

Заметим, что уравнение Бернулли отличается от линейного уравнения тем, что в правой части есть множитель в виде степени неизвестной функции, где $n\epsilon R, n \neq 0, n \neq 1$.

Если $n = 0$,то получим $y' + p(x)y = q(x)$ –линейное уравнение.

Если $n = 1$,то получим $y' + p(x)y = q(x)y$ –уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение (3.18) приводится к линейному при помощи подстановки $t = y^{-n+1}$, для этого предварительно делим уравнение (3.18) на $y^n \neq 0$,получим:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)y}{y^n} = q(x),$$

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x).$$

Далее применяя подстановку

$t = y^{-n+1}, t' = \frac{dt}{dx} = (-n+1)y^{-n} \cdot y', y^{-n} \cdot y' = \frac{t'}{1-n}$, имеем:

$\frac{1}{1-n}t' + p(x)t = q(x)$-линейное уравнение относительно t,решая его методом Бернулли приходим к ответу.

Замечание: на практике решение уравнения (3.18) удобнее искать методом Бернулли, то есть при помощи подстановки $y = U \cdot V$, не сводя его к линейному.

Пример 3.17. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - \frac{2}{x}y = x^2y^2$двумя способами:1) методом Бернулли, сводя уравнение к линейному;2) методом Бернулли, не сводя его к линейному уравнению.

Решение.

Данное уравнение является уравнением Бернулли, так как имеет вид $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x) = x^2, n = 2 \neq 0{,}1$.

Решим данное уравнение двумя способами.

<u>1 способ:(методом Бернулли, сводя уравнение к линейному)</u>

Разделим уравнение $y' - \frac{2}{x}y = x^2y^2$ на $y^2 \neq 0$,получим:

$\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^2$ или $y^{-2} \cdot y' - \frac{2}{x}y^{-1} = x^2$,данное уравнение приводится к линейному при помощи подстановки $t = y^{-n+1} = y^{-2+1} = y^{-1}$,

$t' = (-1)y^{-2} \cdot y'$, откуда $y^{-2} \cdot y' = -t'$,после подстановки уравнение принимает вид:

$$-t' - \frac{2}{x}t = x^2 | \cdot (-1),$$

$t' + \frac{2}{x}t = -x^2$-линейное относительно t, $t' + p(x)t = q(x)$,поэтому решаем его соответственно, то есть при помощи подстановки $t = UV$,$t' = U'V + V'U$,

$$U'V + V'U + \frac{2UV}{x} = -x^2,$$

$U'V + U\left(V' + \frac{2V}{x}\right) = -x^2$, решаем систему: $\begin{cases} V' + \frac{2V}{x} = 0 \\ U'V = -x^2 \end{cases}$;

1)Находим V:

$V' + \frac{2V}{x} = 0$,

$V' = -\frac{2V}{x}$,

$\frac{dV}{dx} = -\frac{2V}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{V}$,

$\int \frac{dV}{V} = -2\int \frac{dx}{x}$,

$ln|V| = -2ln|x|$,

$ln|V| = ln|x|^{-2}$,

$V = \frac{1}{x^2}$;

2)Находим U:

$U'V = -x^2$,

$U'\frac{1}{x^2} = -x^2$,

$U' = -x^4$,

$U = -\int x^4 dx = -\frac{x^5}{5} + C$,

$t = UV = \left(-\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x^2}$,

$y^{-1} = \left(-\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x^2}$,

$\frac{1}{y} = \left(-\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x^2}$,

$y = -\frac{x^2}{\frac{x^5}{5}+C}$ –общее решение;

<u>2способ:(Методом Бернулли, не сводя уравнение к линейному)</u>

$y' - \frac{2}{x}y = x^2y^2$-уравнение Бернулли, решаем аналогично линейному, то есть при помощи подстановки $y = UV\,, y' = U'V + V'U$:

$U'V + V'U - \frac{2UV}{x} = x^2(UV)^2$,

$U'V + U\left(V' - \frac{2V}{x}\right) = x^2U^2V^2$,

Решаем систему: $\begin{cases} V' - \frac{2V}{x} = 0 \\ U'V = x^2U^2V^2 \end{cases}$,

1)находим V:

$V' - \frac{2V}{x} = 0$,

$V' = \frac{2V}{x}$,

$\frac{dV}{dx} = \frac{2V}{x}\Big|\cdot\frac{dx}{V}$,

$\int\frac{dV}{V} = 2\int\frac{dx}{x}$,

$ln|V| = 2ln|x|$,

$ln|V| = ln|x^2|$,

$V = x^2$,

2)находим U:

$U'V = x^2U^2V^2$,

$U'x^2 = x^2U^2(x^2)^2$,

$U' = x^4U^2$,

$$\frac{dU}{dx} = x^4U^2 \Big| \cdot \frac{dx}{U^2}, U \neq 0$$

$$\frac{dU}{U^2} = x^4dx,$$

$$\int U^{-2}dU = \int x^4dx,$$

$$-\frac{1}{U} = \frac{x^5}{5} + C,$$

$$U = -\frac{1}{\frac{x^5}{5}+C}.$$

Итак, $y = UV = \left(-\frac{1}{\frac{x^5}{5}+C}\right)x^2 = -\frac{x^2}{\frac{x^5}{5}+C}$.

Задания для самостоятельного решения:

17. Найти решение линейных ДУ:

1	$y' - \frac{3}{x}y = 3x, y(1) = -3$	**11**	$y' - ytgx = y^3cos^2x$
2	$x^2y' + xy + 1 = 0, y(1) = 0$	**12**	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = 1$
3	$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2y^2}$	**13**	$y'(2x+1) = 4x + 2y$
4	$y' + ytgx = cos^2x$	**14**	$y' - \frac{2}{x}y = x^5, y(1) = 1$
5	$y' - ytgx = cosx, y(0) = 0$	**15**	$y' + 2yx = y^2e^{x^2}$
6	$y' + 3y = e^{2x}$	**16**	$y' - 3yx^2 = xe^{x^3}$
7	$y' = \frac{y}{x+y^2}$	**17**	$y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1$
8	$ysinx - y'cosx = 1$	**18**	$xy' - 2y = 2x^4, y(-1) = 1$
9	$xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 0$	**19**	$y' - \frac{y}{x+1} = (x+1)(x+2), y(0) = 1$

10	$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$	20	$y = x(y' - xcosx), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Ответы:

17.1. $y = -3x^2$;**17.2.** $y = -\frac{ln|x|}{x}$;**17.3.** $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3C} \cdot \frac{1}{x}$;

17.4. $y = cosx(sinx + C)$;**17.5.** $y = \left(\frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4}\right)\frac{1}{cosx}$;

17.6. $y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)e^{-3x}$;**17.7.** $x = y^2 + Cy$;**17.8.** $y = \frac{1}{cosx}(-x + C)$;

17.9. $y = (x^2 - 1)x^2$; **17.10.** $y = \frac{x^3 + C}{xe^x}$; **17.11.** $y = \pm\frac{1}{cosx\sqrt{C - 2x}}$;

17.12. $y = (x+1)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)$;**17.13.** $y = \left(ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C\right)(2x+1)$;

17.14. $y = x^2 \cdot \left(\frac{x^4 + 3}{4}\right)$;**17.15.** $y = -\frac{e^{-x^2}}{x + C}$;**17.16.** $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{x^3}$;

17.17. $y = e^x(x+1)$;**17.18.** $y = x^4$;**17.19.** $y = (x+1)\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right)$;

17.20. $y = (sinx - 1)x$.

3.2.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Уравнение вида $\boldsymbol{P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0}$ **(3.19)** называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$, то есть имеет вид

$$\boldsymbol{dU = P(x;y)dx + Q(x;y)dy} \quad \textbf{(3.20)}$$

Здесь $U = U(x;y)$, $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$, ДУ (3.20) можно записать в виде (3.21):

$dU = 0$ (3.21), следовательно,

$U = \int 0dx = C$ и выражение

$\boldsymbol{U(x;y) = C}$ **(3.22)** -является общим интегралом решения ДУ

3.19.

Теорема 3.2: Для того , чтобы выражение $dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$,где функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$,непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, было полным дифференциалом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \textbf{(3.23)}$$

Доказательство

Необходимость.

Пусть Δ есть полный дифференциал функции U, то есть $P(x;y)dx+Q(x;y)dy= \ dU=\Delta$;

Учитывая, что $dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$, имеем:

$$P(x;y)=\frac{\partial U}{\partial x},Q(x;y)=\frac{\partial U}{\partial y}$$

Дифференцируя эти равенства по y и по x соответственно, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

А так как смешанные частные производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ равны между собой (см. раздел математического анализа -ФНП), то $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.Необходимость доказана.

Докажем достаточность.

Пусть выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Покажем, что существует функция $U(x;y)$в области D такая, что $dU(x;y)=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$, найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x;y),\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x;y).$$

Если в уравнении $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x;y)$ зафиксировать y и проинтегрировать- его по x, то получим:

$U=\int P(x;y)dx+C(y)$, здесь произвольная постоянная $C=C(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении $U=\int P(x;y)dx+C(y)$,неизвестна лишь $C(y)$. Для ее нахождения продифференцируем функцию U по y:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x;y)dx+C(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x;y)dx\right)+C'(y);$$

Используя равенство $\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x;y)$ имеем:

$Q(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx+C'(y)$,откуда

$$C'(y)=Q(x;y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx;$$

В последнем равенстве левая часть зависит только от y. Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y.

Для этого продифференцируем правую часть по x и убедимся, что её производная равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x;y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)=$$

$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x;y)dx\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, действительно, правая часть зависит только от y,то есть $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Из равенства $C'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx$,находим $C(y)$:

$$C(y) = \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C;$$

Подставляя найденное значение $C(y)$ в равенство $U = \int P(x;y)dx + C(y)$, находим функцию $U(x;y)$такую, что $dU(x;y) = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$.

Пример 3.18. Является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах: **а)** $(x^2 - y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$;

б) $(x^2 - y^2 + 1)dx + 2xydy = 0$.

Решение.

а)$P(x;y) = x^2 - y^2 + 1,\ Q(x;y) = -2xy,$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах;

б) $P = x^2 - y^2 + 1, Q = 2xy,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Алгоритм нахождения решения ДУ в полных дифференциалах.

1)Проверяем является ли исходное уравнение уравнением в полных дифференциалах, то есть проверяем справедливость условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

Если условие выполняется, говорим, что исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и переходим к пункту 2);

2)Находим функцию $U = U(x;y)$ учитывая, что

$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$, то есть $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y) \end{cases}$;

Интегрируя первое равенство в системе $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y)$

по x,учитывая, что $y = const$ имеем:

$U = \int P(x;y)dx + C(y)$, где $C(y)$ –неизвестная функция, которую предстоит найти.

Находим функцию $C(y)$,дифференцируя полученную функцию U по y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx + C'(y),$$

Подставляя в полученное равенство$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$ –второе равенство в СУ ,получим уравнение:

$Q(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx + C'(y)$, отсюда

$C'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx$,

Находим $C(y) = \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C_1$,а затем $U(x;y)$,учитывая, что

$U = \int P(x;y)dx + C(y)$, то есть

$$U = \int P(x;y)dx + \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C_1,$$

полагая$U(x;y) = C_2$,общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$\int P(x;y)dx + \int\left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy + C_1 = C_2$ или

$\int P(x;y)dx + \int \left(Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx\right)dy = C$, где $C = C_2 - C_1$.

Замечание: в пункте два (данного алгоритма) функцию U можно найти из равенства $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$,то есть интегрируя данное выражение по переменной y,алгоритм аналогичный, принципиальной разницы нет, выбор делайте в пользу той функции, которая проще интегрируется.

Пример 3.19. Решить уравнение:

а)$(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0, y(0) = 1$;

б)$(x^2 + y^2 + 1)dx + 2xydy = 0$;

в)$e^x + y + sin\, y + y'\,(e^y + x + x\cos y) = 0, y(ln\, 2) = 0$;

г)$\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = 0$.

Решение.

а)1) Проверяем является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах, то есть условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$P(x;y) = 2x + ye^{xy}\ ,\ \ Q(x;y) = 1 + xe^{xy},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x + ye^{xy})_y{}' = e^{xy} + yxe^{xy},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (1 + xe^{xy})_x{}' = e^{xy} + yxe^{xy},$$

так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Значит $Pdx + Qdy = dU,$ в то же время, $Pdx + Qdy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$,то есть

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y), \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y).$$

2)Находим функцию U, решая систему: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 1 + xe^{xy} \end{cases}$.

Для этого проинтегрируем первое уравнение по x , считая y постоянной величиной:

$U = \int (2x + ye^{xy})dx = 2\int xdx + \int e^{xy}d(xy) = x^2 + e^{xy} + C(y)$,

где $C(y)$— произвольная дифференцируемая поy функция, то есть $U = x^2 + e^{xy} + C(y)$.

Найдём $C(y)$,дифференцируя последнее равенство по y,учитывая, что $x = const$ имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + e^{xy} + C(y)\right),$$

$\frac{\partial U}{\partial y} = xe^{xy} + C'(y)$, подставляя второе уравнение системы $\frac{\partial U}{\partial y} = 1 + xe^{xy}$ в левую часть данного равенства, имеем:

$1 + xe^{xy} = xe^{xy} + C'(y)$,

$C'(y) = 1$,отсюда $C(y) = \int dy = y + C_1$, следовательно,

$U = x^2 + e^{xy} + y + C_1$.

Учитывая, что $U(x;y) = C_2$, находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$x^2 + e^{xy} + y + C_1 = C_2$ или $x^2 + e^{xy} + y = C$, где $C = C_2 - C_1$.

Найдём частый интеграл, то есть решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$:

$x = 0, y = 1$,тогда $C = e^0 + 1 = 2$.

Итак, $x^2 + e^{xy} + y = 2$ –частный интеграл;

б)$(x^2 + y^2 + 1)dx + 2xydy = 0$,

1)$\frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 + y^2 + 1)_y{}' = 2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = (2xy)_x{}' = 2y, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах;

2)Находим функцию U решая систему: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2 + 1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy \end{cases}$;

Интегрируя второе уравнение $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy$ (оно несколько проще, чем первое) по y,имеем:

$$U = \int 2xydy = 2x\int ydy = x\,y^2 + C(x);$$

Находим $C(x)$, дифференцируя полученное равенство $U = xy^2 + C(x)$ по x:

$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(xy^2 + C(x)\right)_x'$, учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2 + 1$ имеем:

$x^2 + y^2 + 1 = y^2 + C'(x)$,

$C'(x) = x^2 + 1$,

$C(x) = \int (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x + C_1$,

$U = xy^2 + \frac{x^3}{3} + x + C_1$, $U = C_2$,

$\frac{x^3}{3} + y^2x + x + C_1 = C_2$, $C = C_2 - C_1$, следовательно,

$\frac{x^3}{3} + y^2x + x = C$-общий интеграл ДУ;

в) Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ запишем уравнение

$$e^x + y + \sin y + y'\,(e^y + x + x\cos y) = 0$$

в дифференциальной форме:

$(e^x + y + \sin y) + \frac{dy}{dx}\,(e^y + x + x\cos y) = 0 | \cdot dx$,

$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$,

1)$P(x;y) = e^x + y + \sin y$, $Q(x;y) = e^y + x + x\cos y$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$,то есть

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ –ДУ в полных дифференциалах;

2)Находим U:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y \end{cases};$$

$U(x;y) = \int (e^x + y + \sin y)dx = e^x + yx + x\sin y + C(y)$;

Находим $C(y)$:

$\frac{\partial U}{\partial y} = (e^x + yx + x\sin y + C(y))_y{}'$,

$e^y + x + x\cos y = x + x\cos y + C'(y)$,

$C'(y) = e^y$,отсюда $C(y) = \int e^y\,dy = e^y + C_1$,

$U = e^x + yx + x\sin y + e^y + C_1, U = C_2$,

$C_2 = e^x + yx + x\sin y + e^y + C_1$,

$e^x + yx + x\sin y + e^y = C, C = C_2 - C_1$,

$e^x + yx + x\sin y + e^y = C$-общий интеграл.

Найдём частный интеграл:

$y = 0, x = \ln 2\,, e^{\ln 2} + 0 \cdot \ln 2 + \ln 2 \cdot \sin 0 + e^0 = C,\ C = 3\,,$

$e^x + yx + x\sin y + e^y = 3$-частный интеграл;

г) $\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = 0$,

1)$P(x;y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}, Q(x;y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-y)'(x^2+y^2) - (x^2+y^2)'(x-y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x+y)'(x^2+y^2)-(x^2+y^2)'(x+y)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2-2x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ –ДУ в полных дифференциалах;

2)Находим функцию U решая систему: $\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x+y}{x^2+y^2}\end{cases};$

Проинтегрируем первое уравнение по x , считая y постоянной имеем:

$$U(x;y)=\int\frac{x-y}{x^2+y^2}dx=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx-\int\frac{y}{x^2+y^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-y\int\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-$$

$$-y\cdot\frac{1}{y}arctg\frac{x}{y}+C(y)=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-arctg\frac{x}{y}+C(y),$$

$$U=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-arctg\frac{x}{y}+C(y);$$

Дифференцируем U по y,находим $C(y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}+C'(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}+C'(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}+C'(y),$$

$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x+y}{x^2+y^2}+C'(y)$,учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x+y}{x^2+y^2}$,имеем:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2}+C'(y),$$

$$C'(y)=0,\qquad C(y)=\int 0dy=C_1,$$

$U(x:y)=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-arctg\frac{x}{y}+C_1$,пусть $U(x:y)=C_2$,

$\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-arctg\frac{x}{y}+C_1=C_2$, полагая $C=C_2-C_1$,получим общий интеграл $\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-arctg\frac{x}{y}=C$.

Задания для самостоятельного решения.

18. Найти решение ДУ в полных дифференциалах:

1	$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0;$
2	$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$
3	$2xydx+(x^2-y^2)dy=0$
4	$\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$
5	$\frac{y}{x}dx+(3y^2+lnx)dy=0$
6	$(y^3+cosx)dx+(e^y+3xy^2)dy=0$
7	$(1+y^2sin2x)dx-2ycos^2xdy=0$
8	$(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$
9	$yx^{y-1}dx+x^ylnxdy=0$
10	$(x^2y-1)y'+xy^2-1=0$
11	$e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$
12	$y'=-\frac{e^x+y+siny}{e^y+x+xcosy}$
13	$(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0$
14	$(3x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0, y(0)=0$
15	$(3y^2+2xy+2x)dx+(6xy+x^2+3)dy=0$
16	$(5xy^2-x^3)dx+(5x^2y-y)dy=0$
17	$(2xy-5)dx+(3y^2+x^2)dy=0$
18	$\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$

19	$\left(sin2x - 2cos(x+y)\right)dx - 2cos(x+y)dy = 0, y(0) = 0$
20	$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

Ответы:

18.1.$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$;**18.2.**$\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - y}(x^2 - y) + x^2 = C$;

18.3. $3x^2y - y^3 = C$;**18.4.**$ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{xy}{x-y} = C$;**18.5**. $ylnx + y^3 = C$;

18.6. $xy^3 + e^y + sinx = C$;**18.7.**$x - y^2cos^2x = C$;

18.8.$\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$;**18.9.**$x^y = C$;**18.10**. $x^2 y^2 - 2(x+y) = C$;

18.11.$xe^y - y^2 = C$;**18.12.** $e^x + yx + e^y + xsiny = C$;

18.13.$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C$;**18.14.**$x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$;

18.15.$3xy^2 + x^2 y + 3y + x^2 = C$;**18.16.** $\frac{5}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} = C$;

18.17. $x^2 y - 5x + y^3 = C$;**18.18.** $x^2 - x + \frac{y}{x} - y^2 = C$;

18.19.$\frac{1}{2}cos2x + 2sin(x+y) = \frac{1}{2}$; **18.20.** $x^2 - y^2 = Cy^3$.

ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия.

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальные уравнения **высших порядков**.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n**–го** порядка называется соотношение вида:

$$F\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}\right) = 0 \quad (4.1),$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция переменной x;

$y', y'', \dots, y^{(n)}$– производные искомой функции, F – известная функция своих аргументов, определённая в некоторой области D.

Замечание: дифференциальное уравнение (4.1) обязательно должно содержать производную $y^{(n)}$, при этом величины $x, y, y', y'', \dots,$ функции F могут отсутствовать.

От уравнения (4.1) всегда можно перейти к уравнению (4.2):

$$y^{(n)} = f\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)}\right) \; (4.2)$$

Уравнение (4.2) называется уравнением n –**го порядка, разрешённым относительно старшей производной.**

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения называется функция вида

$y = \varphi(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$, в которую входит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, каков порядок уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при различных значениях произвольных постоянных, полученных из начальных условий.

Дифференциальные уравнения второго порядка и методы их решения.

Аналогичные понятия и определения имеют место для ДУ второго порядка при $n = 2$.

$\boldsymbol{F(x; y; y'; y'') = 0}$ $(\mathbf{4.3})$-**общий вид ДУ второго порядка**;

$\boldsymbol{y'' = f(x; y; y')}$ $(\mathbf{4.4})$**- ДУ второго порядка, разрешённое относительно старшей производной**;

Решением ДУ (4.4) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ (4.4) называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$, где C_1, C_2- не зависящие от x произвольные постоянные;

Всякое решение $y = \varphi\left(x; C_1{}^0; C_2{}^0\right)$ уравнения (4.4), полученное из общего решения $y = \varphi(x; C_1; C_2)$,при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1{}^0, C_2 = C_2{}^0$, называется **частным решением** ДУ (4.4).

Решения ДУ (4.4) записанные в виде

$\boldsymbol{\Phi(x; y; C_1; C_2) = 0}$ $(\mathbf{4.5})$,

$\boldsymbol{\Phi\left(x; y; C_1{}^0; C_2{}^0\right) = 0}$ $(\mathbf{4.6})$ называются **общим** и **частным интегралом** соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется интегральной кривой.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (4.4), удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0\ (4.7)}$$

называется **задачей Коши**.

Геометрический смысл начальных условий дифференциального уравнения второго порядка. Задача Коши.

Общее решение $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ДУ (4.4) представляет собой бесчисленное множество интегральных кривых;

Первое из начальных условий $y(x_0) = y_0$ (4.7) задает точку $M_0(x_0; y_0)$на плоскости Oxyи с его помощью определяется одна из произвольных постоянных, например C_2.

Второе из начальных условий $y'(x_0) = y'_0$ (4.7) задает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке$M_0(x_0; y_0)$,($y'(x_0) = k_{\text{кас}}$ - угловой коэффициент касательной), то есть выделяет единственную интегральную кривую, которая является графиком частного решения дифференциального уравнения (4.4), удовлетворяющего начальным условиям (4.7) см. рис.34.

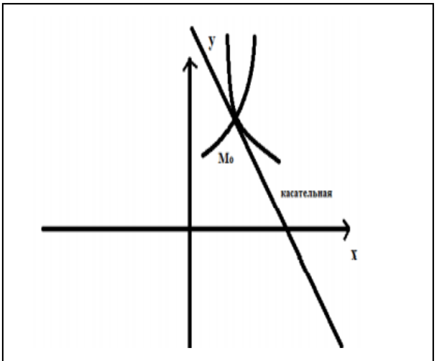

Рис. 34

Теорема 4.1. (существования и единственности задачи Коши). Если в уравнении $y'' = f(x; y; y')$ функция $f(x; y; y')$ и её частные производные $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ и $\frac{\partial f}{\partial y'} = f'_{y'}$,непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y, y' ,то для всякой $(x_0; y_0; y'_0) \epsilon D$существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y'' = f(x; y; y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Примем теорему без доказательства.

4.2. Основные виды дифференциальных уравнений высших порядков и методы их решений.

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков $F(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$ или $y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)})$ является **метод понижения порядка.** Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, на порядок ниже.

4.2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка:

I) $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}$ **(4.8)-**правая часть данного уравнения является функцией одной переменной x,порядок понижается путем последовательного интегрирования n раз;

II) $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x; y'; y''; \dots; y^{(n-1)})}$ **(4.9)** –не содержит явно искомой функции y.

Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц с помощью постановки $y^{(k)} = p, y^{(k+1)} = p', \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}$,где $p = p(x)$, тогда уравнение примет вид $F(x; p; p'; \dots; p^{(n-k)}) = 0$, Если его удастся проинтегрировать, то мы найдём функцию

$p = \Phi(x; C_1; C_2; \dots; C_{n-k})$, то есть получим уравнение вида

$y^{(k)} = \Phi(x; C_1; C_2; \dots; C_{n-k})$ – решая его, найдём общее решение ДУ (4.9).

III) $\boldsymbol{y^{(n)} = f\left(y; y'; y''; \dots; y^{(n-1)}\right)}$ **(4.10)-** не содержит явно независимой переменной x.

ДУ такого вида допускают понижение порядка на одну единицу, с помощью замены $y' = p$, где y – новая независимая переменная, а $p = p(y)$ – искомая функция, где $y = y(x)$, тогда

$$y'' = (p)' = \left(p(y(x))\right)' = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p' \cdot p.$$

Очевидно, что $y^{(n)}$будет выражаться через $p, p', p^{(n-1)}$.

Таким образом, исходное уравнение примет вид $F\left(y; p; \dots; p^{(n-1)}\right) = 0$, если удастся это уравнение проинтегрировать, то получим уравнение $p = \Phi(y; C_1; C_2; \dots; C_{n-1})$ или $y' = \Phi(y; C_1; C_2; \dots; C_{n-1})$ – это ДУ первого порядка, решая его получим общее решение исходного уравнения.

Разберём решение каждого типа уравнений, допускающих понижения степени, на примере ДУ второго порядка, то есть при $n = 2$(для лучшего восприятия материала), аналогично решаются ДУ порядка $n > 2$:

<u>**I)ДУ вида $\boldsymbol{y'' = f(x)}$ – не содержащее $\boldsymbol{y, y'}$ в явном виде.**</u>

Порядок уравнения $y'' = f(x)$ понижают, вводя новую функцию $p = p(x)$, то есть положив $y' = p$,тогда $y'' = p'$, подставляя $y'' = p'$ в исходное уравнение получим ДУ первого порядка, с разделёнными переменными относительно p, $p' = f(x)$,которое решается интегрированием правой части:

$p' = f(x)$,

$p = \int f(x)\ dx$,

$p = F(x) + C_1$, где $F'(x) = f(x)$,учитывая, что $y' = p$,

находим y:

$y' = F(x) + C_1$;

$y = \int (F(x) + C_1)dx = \int F(x)dx + C_1 \int dx = \varphi(x) + C_1 x + C_2$,

где $\varphi'(x) = F(x)$.

Итак,$y = \varphi(x) + C_1 x + C_2$общее решение исходного уравнения;

Замечание: на практике поступают немного проще, порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Покажем, как это работает в общем виде:

$y'' = f(x)$,

$y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$,

$y = \int (F(x) + C_1)\,dx = \int F(x)dx + C_1 \int dx = \varphi(x) + C_1 x + C_2$-общее решение уравнения $y'' = f(x)$.

Пример 4.1. Решить ДУ: **а)** $y'' = 6x - \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 2$;

б) $y'' = xe^{-x}, y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;**в)** $y^{IV} = sin2x$.

Решение.

а) $y'' = 6x - \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 2$ -уравнение вида $y^{(n)} = f(x), n = 2$

,последовательно интегрируя, имеем:

$$y' = \int \left(6x - \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 2\right) dx = 6\int xdx - \frac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx + 2\int dx =$$

$$= 3x^2 - x^{\frac{5}{2}} + 2x + C_1;$$

$$y=\int(3x^2-\ x^{\frac{5}{2}}+2x+C_1)dx=x^3-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+x^2+C_1x+C_2.$$

б)$y''=xe^{-x}$ -уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$, $n=2$,последовательно интегрируя имеем:

$$y'=\int x\,e^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x,du=dx \\ dv=e^{-x}dx,v=-e^{-x}\end{vmatrix}=-e^{-x}x+\int e^{-x}dx=$$

$$=-e^{-x}x-\int e^{-x}d(-x)=-e^{-x}x-e^{-x}+C_1=-e^{-x}(x+1)+C_1;$$

$$y=-\int e^{-x}(x+1)\,dx+C_1\int dx=\begin{vmatrix} u=x+1,du=dx \\ dv=e^{-x}dx,v=-e^{-x}\end{vmatrix}=$$

$$=-\left(-e^{-x}(x+1)+\int e^{-x}dx\right)+C_1x=e^{-x}(x+1)+$$

$$+\int e^{-x}d(-x)+C_1x=e^{-x}(x+1)+e^{-x}+C_1x+C_2=$$

$$=e^{-x}(x+2)+C_1x+C_2.$$

Таким образом,$y=e^{-x}(x+2)+C_1x+C_2-$ общее решение исходного ДУ;

Для того, чтобы найти частное решение найдёмy':

$$y'=-e^{-x}(x+2)+e^{-x}+C_1=-e^{-x}(x+1)+C_1;$$

Найдём частное решение, то есть решение, удовлетворяющее условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0$,подставляя $x=0, y=1,\ y'=0$ в систему$\begin{cases} y=e^{-x}(x+2)+C_1x+C_2 \\ y'=-e^{-x}(x+1)+C_1\end{cases}$,имеем: $\begin{cases}1=2e^0+C_2 \\ 0=-e^0+C_1\end{cases}$,

$$\begin{cases}C_2=-1 \\ C_1=1\end{cases};$$

Итак, $y=e^{-x}(x+2)+x-1$-частное решение.

в)$y^{IV}=\sin 2x$ -уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$, $n=4$,последовательно интегрируя четыре раза, получим:

$$y'''=\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1,$$

$$y'' = \int (-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int (-\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2)dx = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int (\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3)dx = \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{6}C_1 x^3 +$$

$+\frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$-общее решение.

II) $y'' = f(x;y')$–не содержит явно искомой функции y.

Понижаем порядок подстановкой $y' = p$,тогда

$y'' = p'$,где $p = p(x)$ –новая неизвестная функция, уравнение принимает вид $p' = f(x;p)$.

Пусть $p = \varphi(x;C_1)$-общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя $y' = p$, получаем ДУ вида I -$y' = \varphi(x;C_1)$.Для нахождения y достаточно проинтегрировать последнее уравнение

$y = \int \varphi(x;C_1)\,dx + C_2$ –общее решение уравнения $y'' = f(x;y')$.

Замечание: частным случаем уравнения $y'' = f(x;y')$ является уравнение$y'' = f(y')$, которое решается аналогично, то есть при помощи подстановки подстановкой $y' = p = p(x)$,тогда

$y'' = p' = \frac{dp}{dx}$;

Пример 4.2. Решить ДУ: **а)**$x \cdot y'' = y'$;**б)**$y'' \cdot sinx = (1 + y') \cdot \cos x$,

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; **в)** $y'' - \frac{2}{x}y' = 2x^3$;**г)** $y'' + y'^2 = 0$;

д) $x\,y''' - y'' + x^2 - 2 = 0$, $y(1) = 2, y'(1) = -\frac{1}{3}, y''(1) = -3$.

Решение.

а) $x \cdot y'' = y'$ –не содержит явно искомой функции y,поэтому понижаем его порядок при помощи подстановки $y' = p, y'' = p'$,где $p = p(x)$, $p' = \frac{dp}{dx}$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$x \cdot p' = p \,\Big|\cdot \frac{1}{x}, x \neq 0,$

$p' = \frac{p}{x}$-уравнение с разделяющимися переменными относитель-

но p, $p' = f_1(x) \cdot f_2(p)$,где $f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(p) = p;$

$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Big| \cdot \frac{dx}{p},$

$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x},$

$ln|p| = ln|x| + lnC_1, C_1 > 0,$

$ln|p| = lnC_1|x|,$

$p = C_1 x,$

$y' = C_1 x,$

$y = \int C_1 x dx = C_1 \int x dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ –общее решение ДУ;

б)$y'' sinx = (1 + y') \cos x$ – не содержит y,поэтому делаем подста-

новку $y' = p, y'' = p', p = p(x)$получим:

$p' \sin x = (1 + p) \cos x,$

$\frac{dp}{dx} \sin x = (1 + p) \cos x \,\Big|\cdot \frac{dx}{\sin x (1+p)},$

$\int \frac{dp}{1+p} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$

$\int \frac{dp}{1+p} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x},$

$ln|1 + p| = ln|sinx| + C$, положим $C = lnC_1, C_1 > 0$

$ln|1 + p| = ln|sinx| + lnC_1,$

$ln|1 + p| = lnC_1|sinx|,$

$1 + p = C_1 \sin x,$

$p = C_1 \sin x - 1,$

$y' = C_1 \sin x - 1,$

$$y = \int (C_1 \sin x - 1)dx = C_1 \int \sin x\, dx - \int dx =$$

$$= -C_1 \cos x - x + C_2;$$

Получили $y = -C_1 \cos x - x + C_2$ –общее решение ДУ, найдём частное решение, подставляя в систему $\begin{cases} y = -C_1 \cos x - x + C_2 \\ y' = C_1 \sin x - 1 \end{cases}$,

$y = 0, y' = 1, x = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\begin{cases} 0 = -C_1 \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + C_2 \\ 1 = C_1 \sin\frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}; \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Итак, $y = -2\cos x - x + \frac{\pi}{2}$ -частное решение исходного ДУ;

в) $y'' - \frac{2}{x} y' = 2x^3$ -уравнение не содержит y, поэтому делаем подстановку $y' = p, y'' = p'$, получим:

$p' - \frac{2}{x} p = 2x^3$-линейное уравнение относительно p,

$p' + f_1(x)p = f_2(x)$, где $f_1(x) = -\frac{2}{x}, f_2(x) = 2x^3$, решаем его при помощи подстановки $p = UV, p' = U'V + V'U$,

$$U'V + V'U - \frac{2}{x} UV = 2x^3,$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{2}{x} V\right) = 2x^3,$$

решаем систему $\begin{cases} V' - \frac{2}{x} V = 0 \\ U'V = 2x^3 \end{cases}$,

1)находим V:

$$V' - \frac{2}{x} V = 0,$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2}{x} V,$$

$$\int \frac{dV}{V} = 2 \int \frac{dx}{x},$$

$ln|V| = 2\,ln|x|$,

$V = x^2$;

2)находим U:

$U'V = 2x^3$,

$U'x^2 = 2x^3$,

$U' = 2x$,

$$U = \int 2xdx = x^2 + C_1,$$

$p = UV = (x^2 + C_1)x^2$,

$y' = x^4 + C_1x^2$,

$y = \int (x^4 + C_1x^2)dx = \frac{x^5}{5} + C_1\frac{x^3}{3} + C_2$ –общее решение;

г) $y'' + y'^2 = 0$ –уравнение вида $y'' = f(y')$,является частным случаем уравнения$y'' = f(x, y')$.

Понижаем его порядок при помощи замены $y' = p, y'' = p'$,где $p = p(x)$, тогда уравнение $y'' + y'^2 = 0$ принимает вид:$p' + p^2 = 0, p' = -p^2$- уравнение с разделяющимися переменными относительно p, $p' = f_1(x) \cdot f_2(p)$, где $f_1(x) = 1,\ f_2(p) = -p^2$, решая его, получим:

$\frac{dp}{dx} = -p^2 \,\Big|\cdot \frac{dx}{p^2}, p \neq 0$,

$-\int \frac{dp}{p^2} = \int dx$,

$-\int p^{-2}dp = \int dx$,

$\frac{1}{p} = x + C_1$,

$$p = \frac{1}{x + C_1},$$

$y' = \frac{1}{x+C_1}$ −уравнение с разделёнными переменными $y' = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x+C_1}$;

$y = \int \frac{dx}{x+C_1} = \int \frac{d(x+C_1)}{x+C_1} = ln|x + C_1| + C_2$-общее решение ДУ.

д) $xy''' - y'' + x^2 - 2 = 0$ −уравнение не содержит явно искомой функции y, $n = 3$,поэтому понижаем его порядок при помощи подстановки $y'' = p = p(x),\ y''' = p' = p'(x)$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$xp' - p + x^2 - 2 = 0 \Big| \cdot \frac{1}{x}, x \neq 0,$

$p' - \frac{p}{x} = \frac{2}{x} - x$- линейное относительно p,подстановка

$p = UV, p' = U'V + V'U,$

$U'V + V'U - \frac{UV}{x} = \frac{2}{x} - x,$

$U'V + U\left(V' - \frac{V}{x}\right) = \frac{2}{x} - x$,

решаем систему $\begin{cases} V' - \frac{V}{x} = 0 \\ U'V = \frac{2}{x} - x \end{cases}$,

1)Находим V:

$V' - \frac{V}{x} = 0,$

$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{x},$

$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x},$

$ln|V| = ln|x|,$

$V = x.$

2)Находим U:

$U'x = \frac{2}{x} - x| : x,$

$U' = \frac{2}{x^2} - 1,$

$U = \int (2x^{-2} - 1)dx = -\frac{2}{x} - x + C_1,$

$p = \left(-\frac{2}{x} - x + C_1\right)x,$

$y'' = C_1 x - x^2 - 2,$

$y' = \int (C_1 x - x^2 - 2)\, dx = C_1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x + C_2,$

$y = \int \left(C_1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x + C_2\right) = C_1 \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 - x^2 + C_2 x + C_3 -$ общее решение.

Найдём частное решение, подставляем $y = 2, y' = -\frac{1}{3}, y'' = -3, x = 1$ в систему $\begin{cases} y = C_1 \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 - x^2 + C_2 x + C_3 \\ y' = C_1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x + C_2 \\ y'' = C_1 x - x^2 - 2 \end{cases}$,имеем:

$\begin{cases} 2 = C_1 \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - 1 + C_2 + C_3 \\ -\frac{1}{3} = C_1 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + C_2 \\ -3 = C_1 - 1 - 2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = -2 + 2 + \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12} \end{cases};$

Итак, $y = -\frac{1}{12}x^4 - x^2 + 2x + \frac{13}{12}$ -частное решение ДУ.

III) $y'' = f(y; y')$- не содержит явно независимой переменной x.

ДУ такого вида решают, с помощью замены $y' = p$, где $p = p(y)$ –новая искомая функция, где $y = y(x)$, тогда $y'' = p' \cdot p = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

После подстановки $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ уравнение $y'' = f(y; y')$-

принимает вид $\frac{dp}{dy}\cdot p = f(y;p)$.

Пусть $p=\varphi(y;C_1)$-общее решение полученного ДУ. Заменяя $y'=p=p(y)$, получаем ДУ вида $y'=\varphi(y;C_1)$ –уравнение с разделяющимися переменными, решая его, получим:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y;C_1),$$

$$\frac{dy}{\varphi(y;C_1)}=dx,$$

$\int\frac{dy}{\varphi(y;C_1)}=x+C_2$ – общий интеграл уравнения $y''=f(y;y')$.

Пример 4.3. Решить ДУ: **а)**$y\,y''=y'^2$; **б)** $\frac{y''}{y'}-1=0$;

в)$y''(2y+3)-2(y')^2=0$;**г)** $y''\,tg\,y=2(y')^2, y(1)=\frac{\pi}{4}$,

$y'(1)=-2$.

Решение.

а) $y\,y''=y'^2$ – уравнение не содержит x,в нашем случае $n=2$,поэтому понижаем его порядок при помощи замены $y'=p, y''=p'\cdot p$,где $p=p(y)$,

$p'=\frac{dp}{dy}$, исходное уравнение принимает вид:

$$y\,p'p=p^2,$$

$$ypp'=p^2\,\Big|\cdot\frac{1}{yp}, y\neq 0, p\neq 0,$$

$p'=\frac{p}{y}$ - уравнение с разделяющимися переменными относительно p,$p'=f_1(y)f_2(p)$,где $f_1(y)=\frac{1}{y}, f_2(p)=p$;

$$\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y}\Big|\cdot\frac{dy}{p},$$

$$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y},$$

$ln|p| = ln|y| + lnC_1, C_1 > 0$

$ln|p| = lnC_1|y|,$

$p = C_1 y,$

$y' = C_1 y$-уравнение с разделяющимися переменными, разделяя переменные имеем:

$\frac{dy}{dx} = C_1 y,$

$\int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx,$

$ln|y| = C_1 x + C_2,$

$y = e^{C_1 x + C_2} = C_2 e^{C_1 x}$-общее решение ДУ.

б) Уравнение не содержит явно переменной x, $n = 2$,поэтому понижаем его порядок при помощи подстановки $y' = p = p(y), y'' = p'p$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$\frac{p'p}{p} - 1 = 0,$

$p' = 1,$

$$p = \int dy = y + C_1,$$

$y' = y + C_1,$

$\frac{dy}{dx} = y + C_1,$

$\int \frac{dy}{y+C_1} = \int dx \,,$

$\int \frac{d(y+C_1)}{y+C_1} = \int dx \,,$

$ln|y + C_1| = x + C_2,$

$y + C_1 = e^{x+C_2},$

$y = C_2 e^x - C_1.$

в)$y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$- не содержит x,понижаем порядок при помощи подстановки $y' = p,\ \ y'' = p' \cdot p$,

$$pp'(2y+3) - 2p^2 = 0,$$

$$pp'(2y+3) = 2p^2 \quad |\cdot \frac{1}{p(2y+3)}, p \neq 0, p \neq -\frac{3}{2},$$

$p' = \frac{2p}{2y+3}$-уравнение с разделяющимися переменными относительно p;

$$\frac{dp}{dy} = \frac{2p}{2y+3} \bigg| \cdot \frac{dy}{p},$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{2y+3},$$

$$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{2y+3},$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{d(2y+3)}{2y+3},$$

$ln|p| = ln|2y+3| + C$,пусть $C = lnC_1, C_1 > 0$,

$$ln|p| = ln|2y+3| + lnC_1,$$

$$ln|p| = lnC_1|2y+3|,$$

$$p = C_1(2y+3),$$

$$y' = C_1(2y+3),$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(2y+3) \bigg| \cdot \frac{dx}{2y+3},$$

$$\frac{dy}{2y+3} = C_1 dx,$$

$$\int \frac{dy}{2y+3} = C_1 \int dx,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+3)}{2y+3} = C_1 \int dx,$$

$$\frac{1}{2} ln|2y+3| = C_1 x + C_2 \ |\cdot 2,$$

$$ln|2y+3| = 2(C_1 x + C_2),$$

$$log_e |2y+3| = 2(C_1 x + C_2),$$

$$2y + 3 = e^{2(C_1 x + C_2)},$$

$$2y = e^{2(C_1x+C_2)} - 3 \,\Big|\cdot \tfrac{1}{2},$$

$y = \frac{1}{2}\left(e^{2(C_1x+C_2)} - 3\right)$-общее решение ДУ.

г) $y''\,tg\,y = 2(y')^2$ не содержит x, делаем подстановку

$y' = p = p(y),\;\; y'' = p'\cdot p,$

$p'p\,tg\,y = 2p^2 \,\Big|\cdot \dfrac{1}{p\,tg\,y},$

$p' = \frac{2p}{tg\,y},$

$\frac{dp}{dy} = \frac{2p}{tg\,y},$

$\int \frac{dp}{P} = \int \frac{2\cos y}{\sin y}dy,$

$\int \frac{dp}{P} = 2\int \frac{d(\sin y)}{\sin y},$

$ln|p| = 2ln|\sin y| + lnC_1, C_1 > 0,$

$ln|p| = ln|\sin^2 y| + lnC_1,$

$ln|p| = lnC_1|\sin^2 y|,$

$p = C_1\sin^2 y,$

$y' = C_1\sin^2 y,$

$\dfrac{dy}{dx} = C_1\sin^2 y,$

$\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int C_1\,dx,$

$-\,ctg\,y = C_1x + C_2,\; ctg\,y = -(C_1x + C_2)$ –общий интеграл.

Найдём частное решение, подставим начальные условия $x = 1,\; y = \frac{\pi}{4},\; y' = -2$ в систему $\begin{cases} ctg\,y = -(C_1x + C_2) \\ y' = C_1\sin^2 y \end{cases}$,имеем:

$\begin{cases} ctg\,\frac{\pi}{4} = -(C_1 + C_2) \\ -2 = C_1\sin^2\frac{\pi}{4} \end{cases}, \begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ C_1 = -4 \end{cases}, \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 3 \end{cases}$, следовательно,

$ctg\, y = -(-4x+3)$, $ctg\, y = 4x-3$, $y = arcctg(4x-3)$-частное решение ДУ.

Замечание: частным случаем уравнения $y'' = f(y; y')$ является уравнение $y'' = f(y)$ и $y'' = f(y')$ решается аналогично, то есть при помощи подстановки $y' = p = p(y)$.

Пример 4.4. Решить ДУ:**а)** $y'' - y = 0$;**б)**$y'' + y' = 0$.

Решение.

а) $y'' - y = 0$ –уравнение вида$y'' = f(y)$, частный случай уравнения$y'' = f(y, y')$, поэтому порядок ДУ понижаем при помощи замены$y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$,исходное уравнение принимает вид:

$\frac{dp}{dy} \cdot p - y = 0$,

$\frac{dp}{dy} \cdot p = y \,|\cdot dy$,

$pdp = ydy$,

$\int pdp = \int ydy$,

$\frac{p^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \,|\cdot 2$,

$p^2 = -y^2 + 2C_1$,

$p = \pm\sqrt{-y^2 + 2C_1}$, $y' = p$,

$y' = \pm\sqrt{-y^2 + 2C_1}$-уравнение с разделяющимися переменными относительно y,

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2C_1 - y^2}$,

$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\sqrt{2C_1}\right)^2 - y^2}} = \pm\int dx$,

$arcsin\frac{y}{\sqrt{2C_1}} = \pm x + C_2$-общий интеграл;

б) $y'' + y' = 0$ –уравнение имеет вид $y'' = f(y')$,поэтому его можно решить, применяя подстановку $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$;

Понижаем порядок ДУ при помощи замены

$y' = p, y'' = p' \cdot p$,где $p = p(y), p' = \frac{dp}{dy}$, исходное уравнение принимает вид:

$\frac{dp}{dy} \cdot p + p = 0$,

$\frac{dp}{dy} \cdot p = -p \; \Big| \cdot \frac{dy}{p}$,

$\int dp = -\int dy$,

$p = -y + C_1$,

$y' = -y + C_1$,

$\frac{dy}{dx} = C_1 - y$,

$\int \frac{dy}{C_1 - y} = \int dx$,

$-\int \frac{d(C_1 - y)}{C_1 - y} = x$,

$-ln|C_1 - y| = x + C_2$,

$ln|C_1 - y| = -(x + C_2)$,

$C_1 - y = e^{-(x+C_2)}$,

$y = C_1 - e^{-(x+C_2)}$-общее решение ДУ.

Задания для самостоятельного решения.

19. Решить дифференциальные уравнения допускающие понижения порядка:

1	$y^{IV} = cos^2 x$	**11**	$y''(x^2 + 1) = 2xy'$
2	$y'' + y'tgx = sin2x$	**12**	$3y'y'' = 2y, y(0) = 1,$ $y'(0) = 1$

3	$y''=xlnx, y(1)=1,$ $y'(1)=0$	13	$y''-y'ctgx=2xsinx$
4	$4y''\sqrt{y}=1, y(0)=1,$ $y'(0)=-1$	14	$xy''=y'ln\frac{y'}{x}$
5	$y''\cdot y+1=(y')^2$	15	$y''=y'+x$
6	$y'''=x^2+sin2x$	16	$xy''+y'+x=0$
7	$y''=2x+cos\frac{x}{2}-1,$ $y(0)=1, y'(0)=1$	17	$y''tgx-y'-1=0$
8	$y''+\frac{y'}{x}=0$	18	$y''y^3=-1, y(1)=-1,$ $y'(1)=-1$
9	$y''=\frac{1}{1+x^2}+x-sinx$ $y(0)=1, y'(0)=1$	19	$2xy'y''=(y')^2+1$
10	$y''=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+2cosx$	20	$(x+1)y''=y'-1, y(1)=0,$ $y'(1)=1$

Ответы:

19.1. $y=\frac{x^4}{48}+\frac{1}{32}cos2x+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4;$

19.2. $y=x-\frac{1}{2}sin2x+C_1sinx+C_2;$

19.3. $y=\frac{x^3}{6}lnx-\frac{5x^3}{36}+\frac{x}{4}+\frac{8}{9};$ **19.4.** $y=\left(\frac{3}{4}x+1\right)^{\frac{4}{3}};$

19.5. $ln\left|C_1y+\sqrt{(C_1y)^2+1}\right|=\pm x+C_2;$

19.6. $y=\frac{x^5}{60}+\frac{1}{8}cos2x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3;$

19.7. $y=\frac{x^3}{3}-4cos\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+x+5;$ **19.8.** $y=C_1ln|x|+C_2;$

19.9. $y=xarctgx+\frac{1}{2}ln(x^2+1)+\frac{x^3}{6}+sinx+1;$

19.10. $y=xlnx-x+3lnx-2cosx+C_1x+C_2;$

19.11. $y=C_1\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+C_2;$ **19.12.** $y=\left(\frac{x}{3}+1\right)^3;$

19.13. $y = 2xsinx - x^2cosx + 2cosx - C_1cosx + C_2$;

19.14. $\frac{1}{C_1} x\, e^{C_1x+1} - \frac{1}{{C_1}^2} e^{C_1x+1} + C_2$;**19.15.** $y = -\frac{x^2}{2} - x + C_1x + C_2$;

19.16. $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 lnx + C_2$;**19.17.** $y = -C_1cosx - x + C_2$;

19.18. $y = -\sqrt{2x-1}$;**19.19.** $y = \pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3} + C_2$;

19.20. $y = x - 1$.

4.2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям вида

$$\boldsymbol{a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = g(x)} \quad (\mathbf{4.11})$$

называемым **линейным ДУ порядка** $\boldsymbol{n}$.

Здесь $y = y(x)$ –искомая функция, $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots,$ –её производные, $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ –непрерывные функции на отрезке $[a; b]$,называемые **коэффициентами** уравнения (4.11), а функция $g(x)$ называется **свободным членом** уравнения (4.11).

Если $g(x) = 0$, то получим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ);

Если $g(x) \neq 0$, то имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ);

Разделив уравнение (4.11) на $a_0(x) \neq 0$, получим

$y^{(n)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y^{(n-1)} + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y = \frac{g(x)}{a_0(x)}$, обозначив

$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = p_1(x), \frac{a_2(x)}{a_0(x)} = p_2(x), \ldots, \frac{a_n(x)}{a_0(x)} = p_n(x), \frac{g(x)}{a_0(x)} = f(x)$,запишем

уравнение (4.11) в приведённом виде (4.12):

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \quad \textbf{(4.12)}$$

При $n = 2$,получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим, как определяются и решаются такие уравнения.

4.2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка $n = 2$:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad \textbf{(4.13)}$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема 4.2. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$,то решением этого уравнения является также функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad \textbf{(4.14)},$$

где C_1и C_2- произвольные постоянные.

Доказательство.

Подставим функцию $y = C_1y_1 + C_2y_2$ в левую часть уравнения (4.14):

$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p_1(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + p_2(x)(C_1y_1 + C_2y_2) =$

$= C_1y_1'' + C_2y_2'' + p_1(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + C_1y_1p_2(x) +$

$+C_2y_2\,p_2(x) = C_1(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) +$

$+C_2(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$, заметим, что

$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0,\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0,$

так как функции y_1, y_2 являются решениями уравнения (4.14).

Итак, функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ также является решением уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$. Выясним может ли она являться общим решением данного уравнения?

Для ответа на вопрос введем понятие линейной зависимости и линейной независимости функций.

Линейная зависимость и независимость функций.

Фундаментальной системой решений (**ФСР**)называется всякая система линейно независимых решений, содержащая столько функций, каков порядок дифференциального уравнения.

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются **линейно независимыми** на отрезке$[a;b]$, если из равенства линейной комбинации нулю $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$,следует, что все коэффициенты равны нулю $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Функции $y_1,\ y_2$ **линейно зависимы**, если из равенства линейной комбинации нулю $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел $\alpha_i \neq 0, i = 1,2$.

Очевидно, что функцииy_1и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, то есть для всех $x \in [a;b]$, выполняется равенство $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$,покажем это:

пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$,

$\alpha_1 y_1 = -\alpha_2 y_2 | : \alpha_1$,

$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \lambda = const$,

$y_1 = \lambda y_2$.

В противном случае функцииy_1и y_2 линейно независимы.

Пример 4.5. Являются ли функции y_1, y_2 линейно зависимы, независимыми: **а)** $y_1 = 2e^{-x}, y_2 = e^{-x}$;**б)** $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$.

Решение.

а) Составим отношение $\frac{y_1}{y_2} = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}} = 2 = \lambda = const$, следовательно функции $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = e^{-x}$ линейно зависимы,

б) Поступая, аналогично имеем:

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^{3x}} = e^{-x} \neq const$, тогда функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$- линейно независимы.

Средством изучения линейной зависимости системы функций является так называемый **определитель Вронского**.

Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ определитель Вронского(вронскиан) имеет вид

$$\boldsymbol{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad \textbf{(4.15)}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.3. Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$линейно зависимы на отрезке $[a;b]$, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Доказательство

Так как функции y_1,y_2линейно зависимы, то в равенстве

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$,или $\alpha_1 \neq 0$,или $\alpha_2 \neq 0$, или $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$,тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \alpha_1 y_1 = -\alpha_2 y_2,$

$y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$, поэтому для любого $x \epsilon [a;b]$имеем:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 y_2' - \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' y_2\right) = 0.$$

Теорема 4.4. Если дифференцируемые функции y_1 и y_2линейно независимые решения уравнения$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ на отрезке $[a;b]$, то определитель Вронского, составленный из этих функций отличен от нуля во всех точках отрезка $[a;b]$.

Примем без доказательств.

Приведём пример использования определителя Вронского для выяснения вопроса о линейной зависимости или независимости функции на некотором промежутке.

Пример 4.6. Показать, что система функций $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$,где $k_1 \neq k_2$ линейно независима на любом промежутке.

Решение.

Найдём определитель Вронского для данной системы

функций: $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x}, \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} =$

$= e^{k_1 x} \cdot k_2 e^{k_2 x} - e^{k_2 x} \cdot k_1 e^{k_1 x} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$.

Очевидно, что полученный определитель при условии $k_1 \neq k_2$ отличен от нуля при любых значениях x, следовательно, система функций $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$линейно независима на любом промежутке.

Аналогично можно показать, что линейно независимой

на любом промежутке является и система n функций $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$,где все $k_i, i = 1,2, \dots, n$ различны.

Пример 4.7. Показать, что система функций $y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x$, где $\beta \neq 0$ линейно независима на любом промежутке.

Решение.

Для этого для начала найдём $y_1{}', y_2{}'$:

$y_1{}' = (e^{\alpha x} cos\beta x)' = \alpha e^{\alpha x} cos\beta x - \beta e^{\alpha x} sin\beta x =$

$= e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x - \beta sin\beta x)$;

$y_2{}' = (e^{\alpha x} sin\beta x)' = \alpha e^{\alpha x} sin\beta x + \beta e^{\alpha x} cos\beta x =$

$= e^{\alpha x}(\alpha sin\beta x + \beta cos\beta x)$.

Найдём определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}$ для данной системы функций:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos\beta x & e^{\alpha x}sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x - \beta sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha sin\beta x + \beta cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha x}cos\beta x e^{\alpha x}(\alpha sin\beta x + \beta cos\beta x) - e^{\alpha x}sin\beta x e^{\alpha x}(\alpha cos\beta x - \beta sin\beta x) =$$

$$= e^{2\alpha x}(\alpha cos\beta x sin\beta x + \beta cos^2\beta x - \alpha cos\beta x sin\beta x + \beta sin^2\beta x) = \beta e^{2\alpha x}.$$

Очевидно, что полученный определитель при условии, что $\beta \neq 0$, отличен от нуля при любых значениях x, следовательно, система функций y_1, y_2 линейно независима на любом промежутке.

Пример 4.8. Показать, что функции $y_1 = cos\beta x$ и $y_2 = sin\beta x$, где $\beta \neq 0$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + \beta^2 y = 0$.

Решение.

Убедимся, что функции $y_1 = cos\beta x$ и $y_2 = sin\beta x$ линейно независимы, для этого вычислим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\beta x & sin\beta x \\ -\beta sin\beta x & \beta cos\beta x \end{vmatrix} = \beta cos^2\beta x + \beta sin^2\beta x = \beta \neq 0,$$

следовательно функции y_1, y_2 линейно независимы всюду на множестве всех действительных чисел R. Кроме того, нетрудно проверить, что каждая из этих функций является решением уравнения $y'' + \beta^2 y = 0$ на R.

Для этого найдём y_1'': $y_1' = -\beta sin\beta x, y_1'' = -\beta^2 cos\beta x$ и подставим y_1, y_1'' в уравнение $y'' + \beta^2 y = 0$:

$$y_1'' + \beta^2 y_1 = -\beta^2 cos\beta x + \beta^2 cos\beta x = 0;$$

Аналогично для y_2:

$$y_2' = \beta cos\beta x, y_2'' = -\beta^2 sin\beta x,$$

$$y_2'' + \beta^2 y_2 = -\beta^2 sin\beta x + \beta^2 sin\beta x = 0.$$

Это и означает, что указанные функции образуют фундаментальную систему решений данного уравнения.

Теорема 4.5. (о существования фундаментальной системы решений). Для любого ЛОДУ (4.13) с непрерывными коэффициентами существует фундаментальная система решений.

Доказательство.

Пусть $x_0 \epsilon [a;b]$ — произвольно фиксированная точка. Построим $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения ДУ, удовлетворяющих следующим условиям:

$$y_1(x):\ y_1(x_0) = 1, y_1{}'(x_0) = 0;$$
$$y_2(x):\ y_2(x_0) = 0, y_2{}'(x_0) = 1.$$

Это возможно в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ДУ второго порядка.

Очевидно, что в точке x_0 определитель Вронского

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ следовательно

функции $y_1(x),\ y_2(x)$ линейно независимы на $[a;b]$, и значит, образуют фундаментальную систему решений ДУ (4.13).

Теорема 4.6. (о структуре общего решения линейного однородного ДУ второго порядка). Если $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальная система решений ОДУ (4.13), то общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x).$$

Примем без доказательств.

4.2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородные ДУ n-го порядка, в которых коэффициентами $p_i(x)$ являются постоянные числа p_i . Такие уравнения имеют вид:

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0} \quad \textbf{(4.16)}$$

При $n = 2,$ получим линейное однородное дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка (4.17):

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (4.17)$$

Метод Эйлера, решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Для простоты восприятия рассмотрим метод Эйлера (метод решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами) на примере ДУ второго порядка, то есть при $n = 2$. Аналогично, решаются уравнения вида (4.17) при $n > 2$.

Как известно, общим решением уравнения (4.17) является функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$– фундаментальная система решений уравнения (4.17), C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Эйлер предложил искать частные решение $y_1(x)$, $y_2(x)$уравнения (4.17), в виде $y(x) = e^{kx}$, где $k = const$ –неизвестная константа, подлежащая определению, а число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Если принять $y(x) = e^{kx}$частным решением линейного однородного дифференциального уравнения (4.17), то при подстановке этого решения в уравнение мы должны получить тождество.

Учитывая, что $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$ и подставляя эти значения в уравнение (4.17), получим:

$y'' + py' + qy = 0,$

$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$

$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 | : e^{kx},$

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) называется **характеристическим,** а его корни k_1, k_2называют **характеристическими числами**.

Рассмотрим следующие три различных случая, которые могут возникнуть при решении характеристического уравнения:

1. Корни уравнения (4.18) действительны и различны, то есть $\boldsymbol{k_1, k_2 \epsilon R}$,

$$\boldsymbol{k_1 \neq k_2 \,, (D = p^2 - 4q > 0|: 4, \frac{p^2}{4} - q > 0).}$$

В этом случае частными решениями уравнения (4.17) являются функции$y_1 = e^{k_1 x}$ и$y_2 = e^{k_2 x}$.Они образуют ФСР (линейно независимы), так как составленный из них определитель Вронского отличен от нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Тогда, согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ, общее решение ДУ (4.17) запишется в виде $y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ или $\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$;

2. Уравнение (4.18) имеет комплексно- сопряжённые корни вида, то есть

$\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \ \ , (D = p^2 - 4q < 0, \frac{p^2}{4} - q < 0)}$, которым будут соответствовать решения $y_{1,2} = e^{(\alpha \pm i\beta)x}$.

Используя формулу Эйлера $e^{i\beta} = cos\beta + isin\beta$ получим:

$y_{1,2} = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}(cos\beta x \pm isin\beta x)$,то есть

$y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x + ie^{\alpha x} sin\beta x,$

$y_2 = e^{\alpha x} cos\beta x - ie^{\alpha x} sin\beta x.$

Найдём два действительных частных решения уравнения (4.18).

Далее, построим линейные комбинации этих решений следующего вида:

$\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \overline{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i}$:

$$\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{\alpha x} cos\beta x + ie^{\alpha x} sin\beta x + e^{\alpha x} cos\beta x - ie^{\alpha x} sin\beta x}{2} =$$

$$=\frac{2e^{\alpha x}cos\beta x}{2}=e^{\alpha x}cos\beta x,$$

$$\overline{y_2}=\frac{y_1-y_2}{2i}=\frac{e^{\alpha x}cos\beta x+ie^{\alpha x}sin\beta x-e^{\alpha x}cos\beta x+ie^{\alpha x}sin\beta x}{2i}=$$

$$=\frac{2ie^{\alpha x}sin\beta x}{2i}=e^{\alpha x}sin\beta x.$$

Покажем, что функции $\overline{y_{1,2}}$ -являются решениями уравнения (4.18):

$$W(x)=\begin{vmatrix}\overline{y_1} & \overline{y_2}\\ \overline{y_1}' & \overline{y_2}'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{\alpha x}cos\beta x & e^{\alpha x}sin\beta x\\ \alpha e^{\alpha x}cos\beta x-\beta e^{\alpha x}sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}sin\beta x+\beta e^{\alpha x}cos\beta x\end{vmatrix}=$$

$$=\beta e^{\alpha x}\neq 0;$$

Так как $W(x)\neq 0$,то решения $\overline{y_1}=e^{\alpha x}cos\beta x$, $\overline{y_2}=e^{\alpha x}sin\beta x$ являются линейно независимыми, и для уравнения второго порядка образуют фундаментальную систему решений.

Таким образом, общее решение уравнения (4.18) запишется в виде: $y=C_1\overline{y_1}(x)+C_2\overline{y_2}(x)=C_1e^{\alpha x}cos\beta x+C_2e^{\alpha x}sin\beta x$ или

$$\boldsymbol{y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)};$$

3. Корни уравнения (4.18) действительные, но среди них есть кратные, то есть $k_1,k_2\epsilon R,\ k_1=k_2\left(D=p^2-4q=0,\frac{p^2}{4}-q=0\,,k_1,k_2=-\frac{p}{2}\right)$.В этом случае имеется лишь одно частное решение $y_1=e^{k_1x}$.

Покажем, что наряду с $y_1=e^{k_1x}$, решением уравнения (4.18) будет и решение $y_2=xe^{k_1x}$.

Действительно, подставив $y'_2=e^{k_1x}+k_1xe^{k_1x}$ и

$$y''_2=k_1e^{k_1x}+k_1e^{k_1x}+k_1{}^2xe^{k_1x}=2k_1e^{k_1x}+k_1{}^2xe^{k_1x},$$ в

уравнение (4.18) имеем:

$$y''_2+py'_2+qy_2=2k_1e^{k_1x}+k_1{}^2xe^{k_1x}+p(e^{k_1x}+k_1xe^{k_1x})+$$

$$+qxe^{k_1x}=e^{k_1x}\left(2k_1+k_1{}^2x+p+pk_1x+qx\right)=$$

$= e^{k_1 x}\left(x\left({k_1}^2 + pk_1 + q\right) + (p + 2k_1)\right)$, но $\quad {k_1}^2 + pk_1 + q = 0$,так как k_1 корень уравнения (4.18), $p + 2k_1 = 0$,так как по условию $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Следовательно, $y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$, то есть функция $y_2 = xe^{k_1 x}$является решением уравнения (4.18).

Они образуют ФСР (линейно независимы), так как составленный из них определитель Вронского отличен от нуля:

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & xe^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & 2k_1 e^{k_1 x} + {k_1}^2 xe^{k_1 x} \end{vmatrix} \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (4.18) запишется в виде $y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ или $\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}}$.

Алгоритм решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (метод Эйлера).

1)Подставляя $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$ в уравнение$y'' + py' + qy = 0$,составляем характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$;

2)Находим корни $k_{1,2}$характеристического уравнения и в зависимости от значений корней характеристического уравнения записываем общее решение:

а) Если $k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,то общее решение уравнения (4.18) имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

б) Если $k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$,то $\quad y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$;

в) Если $k_{1,2} \in C, k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$-комплексно- сопряжённые корни, то $y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$.

Пример 4.9. Найти решение ДУ:

а)$y'' - 3y' + 2y = 0$;**б)** $y'' + 4y' + 4y = 0$; **в)** $y'' - 6y' + 13y = 0$;
г) $y'' + 4y = 0, \ \ y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение.

а) Уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$ является линейным однородным дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка

$y'' + py' + qy = 0$, где $p = -3, q = 2$,тогда заменяя y'', y'и y соответственно на $k^2e^{kx}, ke^{kx}, e^{kx}$получим характеристическое уравнение: $k^2e^{kx} - 3ke^{kx} + 2e^{kx} = 0|:e^{kx}$;$k^2 - 3k + 2 = 0$,находим его корни $k_1 = 2, k_2 = 1$,$k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,следовательно общее решение данного уравнения имеет вид:$y = C_1e^{2x} + C_2e^x$.

б) $y'' + 4y' + 4y = 0$, заменяем $y'' = k^2e^{kx}, y' = ke^{kx}, y = e^{kx}$:

$k^2e^{kx} + 4ke^{kx} + 4e^{kx} = 0|:e^{kx}$,

$k^2 + 4k + 4 = 0$,

$(k + 2)^2 = 0$,

$k_{1,2} = -2, k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$, тогда

$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$ –общее решение.

в) $y'' - 6y' + 13y = 0$,

$k^2 - 6k + 13 = 0$,

$k_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{16i^2}}{2} = 3 \pm 2i$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$,

$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, k_1, k_2 \in C$, тогда

$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

г) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$,

$k^2 + 4 = 0$,

$k^2 = -4, k^2 = 4i^2$,

$k_{1,2} = \pm 2i$ $(\alpha = 0, \beta = 2)$,

$y = e^{ox}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$-общее решение исходного уравнения, найдём частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 2$, то есть $x = 0, y = 1, y' = 2$,для этого вычислим y',

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$,тогда

$\begin{cases} y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \\ y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x \end{cases}$,подставляя в полученную систему $x = 0, y = 1, y' = 2$ имеем:

$\begin{cases} 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ 2 = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 1 = C_1 \\ 2 = 2C_2, \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$, таким образом, частное решение имеет вид $y = \cos 2x + \sin 2x$.

Пример 4.10. Найти решение ДУ:

а)$y^{V} - 6y^{IV} + 9y^{III} = 0$;**б)**$y''' - y'' - y' + y = 0$;

в) $y^{IV} + 2y^{II} + y = 0$;**г)** $y^{IV} - y = 0$.

Решение.

а) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$, составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$k^5 - 6k^4 + 9k^3 = 0$,

$k^3(k^2 - 6k + 9) = 0$,

$k^3 = 0$, $\qquad k^2 - 6k + 9 = 0$,

$k_{1,2,3} = 0$, $\qquad (k - 3)^2 = 0$,

$r = 3$, $\qquad k_{4,5} = 3, r = 2$,

Имеются действительные корни $k_{1,2,3} = 0$ (кратности $r = 3$-число совпадений корней) и корни $k_{4,5} = 3$ (кратности $r = 2$),что соответствует третьему случаю в методе Эйлера. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{ox} + C_2 x e^{ox} + C_3 x^2 e^{ox} + C_4 e^{3x} + C_5 x e^{3x} =$$
$$= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 x e^{3x}.$$

б) $y''' - y'' - y' + y = 0$,

$k^3 - k^2 - k + 1 = 0,$

$k^2(k-1) - (k-1) = 0,$

$(k^2-1)(k-1) = 0,$

$k_{1,2} = \pm 1,\ k_3 = 1,$ так как $k_{1,3} = 1,(\ r = 2)$ решение имеет вид: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}.$

в)$y^{IV} + 2y'' + y = 0,$

$k^4 + 2k^2 + 1 = 0,$

$(k^2+1)^2 = 0, r = 2$

$k^2 + 1 = 0,$

$k^2 = -1,$

$k^2 = i^2,$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{i^2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1$ –уравнение имеет комплексно - сопряжённые корни кратности 2, то есть $k_{1,2,3,4} = \pm i.$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$y = e^{ox}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{ox}x(C_3 \cos x + C_4 \sin x) =$

$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$.

г) $y^{IV} - y = 0,$

$k^4 - 1 = 0,$

$(k^2)^2 - 1^2 = 0,$

$(k^2-1)(k^2+1) = 0,$

$k_{1,2} = \pm 1,$

$k^2 = -1, k^2 = i^2, k_{3,4} = \pm\sqrt{i^2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1,$

Уравнение имеет два различных действительных корня $k_{1,2} = \pm 1$ и комплексно-сопряжённые корни $k_{3,4} = \pm i$,следовательно, общее решение ДУ имеет вид: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{0x}(C_1 cosx + C_2 sinx) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} +$
$+ C_1 cosx + C_2 sinx.$

4.2.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ).

Линейным неоднородным дифференциальным уравнение (ЛНДУ) второго порядка называется уравнением вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \textbf{(4.19)},$$

где $p(x), q(x), f(x)$- заданные, непрерывные функции на отрезке $[a; b]$.

Функция $f(x)$называется правой частью уравнения (4.19).

Теорема 4.7: (о структуре общего решения ЛНДУ)

Если $y_0 = y_0(x)$ -общее решение однородного ДУ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, а $y_{чн} = y_{чн}(x)$какое-либо, произвольное, частное решение неоднородного ДУ (4.19), то общее решение соответствующего неоднородного ДУ (4.20) запишется в виде: $y = y_{0.0.} + y_{чн}$ (4.20)

Примем без доказательства.

Следствие. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ фундаментальная система решений ДУ (4.19), то общее решение ДУ (4.19) имеет вид:

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + y_{чн}(x) \quad (4.21)$$

4.2.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим неоднородные ДУ (4.19), в которых коэффициентами $p(x) = p, q(x) = q$,являются постоянные числа p, q.

Такие уравнения имеют вид:

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad \textbf{(4.22)}$$

Из теоремы 4.7 следует, что для решения этого уравнения достаточно найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_0 и какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения$y_{чн}$.

Как находится общее решение однородного уравнения мы уже знаем (см. алгоритм решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера).

Рассмотрим, как отыскать частное решение если правая часть $f(x)$ уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ имеет так называемый «специальный вид»– $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$:

1)Если $f(x)$ имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}} \quad \textbf{(4.23)},$$

где $\alpha\epsilon R, P_n(x) -$ многочлен степени n с определёнными коэффициентами, то уравнение (4.22) запишется в виде $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$ и его частное решение $y_{чн}$,в этом случае, ищем в виде: $\boldsymbol{y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}}$ **(4.24),** где r -число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$, а $Q_n(x)$- многочлен степени n, с неопределенными коэффициентами $A_i, i = 0,1,2, \dots, n$,

$Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$.

Неизвестные коэффициенты A_i многочлена $Q_n(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов. Суть метода, называемого методом неопределенных коэффициентов, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (4.22) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют его в исходное уравнение (4.22) и из полученного тождества находят значения коэффициентовA_i;

2) Если правая часть уравнения (4.22) имеет вид:

$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)}$ **(4.25)**, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$-многочлены от x степеней n и m соответственно с известными коэффициентами и $\alpha, \beta\epsilon R$,то уравнение (4.22) запишется в виде

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$$

и его частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$$\boldsymbol{y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)} \quad \textbf{(4.26)},$$

где r – число, показывающее, сколько раз $\alpha + i\beta$ является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Если же число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то будем считать $r = 0$.При этом $K_s(x)$, $L_s(x)$ многочлены от переменной x степени $S = max\{n, m\}$ с некоторыми, пока неизвестными, коэффициентами. Неизвестные коэффициенты многочленов $K_s(x)$, $L_s(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов. Поясним суть этого метода на примерах, но перед этим составим алгоритм решения таких уравнений.

Алгоритм решения ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ будем искать в виде $y = y_0 + y_{чн}$, где $y_0 = y_0(x)$-общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, а $y_{чн}$ какое-либо, произвольное, частное решение неоднородного ДУ $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$,таким образом необходимо:

1) Найти общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$;

$y'' + py' + qy = 0$, для этого достаточно заменить y'', y' и y соответственно на k^2e^{kx}, ke^{kx}, e^{kx},то есть составить характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, найти его корни $k_{1,2}$ и составить общее решение однородного ДУ, учитывая следующее:

а) Если $k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,то общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{0.0.} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$;

б) Если $k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$,то $y_{0.0.} = C_1e^{k_1x} + C_1xe^{k_1x}$;

в) Если $k_{1,2} \in C, k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$-комплексно-сопряжённые корни, то

$$y_{0.0.} = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x);$$

2)Найти частное решение$y_{чн}$ неоднородного уравнения$y'' + py' + qy = f(x)$ решения, по виду правой части $f(x)$:

а) Если $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$,то $y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$,где r -число корней характеристического уравнения, совпадающих с α, а $Q_n(x)$- многочлен степени n с неопределенными коэффициентами $A_i = 1,2, \dots, n$, $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$;

б) Если $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$,то частное решение $y_{чн}$следует искать в виде $y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)$,где r –число корней характеристического уравнения, совпадающих с $\alpha + i\beta$, а $K_s(x), L_s(x)$ многочлены от переменной x степени $S = max\{n, m\}$;

3)Выписать общее решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$, сложив y_0 и $y_{чн}$,то есть составив сумму $y = y_0 + y_{чн}$.

Пример 4.11. Построить в общем виде частное решение ЛНДУ:

а) $y'' - 14y' + 49y = 9xe^{7x}$; **б)** $y'' + 9y = 3x^2 - x$;

в)$y'' - 8y' = (3x - 2)cos5x + (x^2 + 2x)sin5x$;

г) $y'' - 2y' + 4y = (x + 5)e^x cos3x$.

Решение.

а)$y'' - 14y' + 49y = 9xe^{7x}$,найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' - 14y' + 49y = 0,$

$k^2 - 14k + 49 = 0,$

$(k-7)^2 = 0,$

$k_1 = k_2 = 7, k_{1,2} \in R, k_1 = k_2$,следовательно общее решение однородного уравнения имеет вид:

$y_{0.0.} = C_1 e^{7x} + C_2 x e^{7x};$

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = 9xe^{7x}$,сравнивая её с видом $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, определим параметры частного решения,

$\alpha = 7 = k_1 = k_2$, следовательно $r = 2;\ P_1(x) = 9x, n = 1$,

тогда $Q_1(x) = Ax + B$. Подставляя полученные параметры в выражение $y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получим:

$y_{чн} = x^2(Ax + B)e^{7x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{7x}$-общий вид частного решения исходного ДУ.

б) $y'' + 9y = 3x^2 - x$,найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' + 9y = 0,$

$k^2 + 9 = 0,$

$k^2 = -9,$

$k^2 = (3i)^2,$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{(3i)^2},$

$k_{1,2} = \pm 3i, k_{1,2} \in C$-комплексно-сопряжённые корни, $\alpha = 0, \beta = 3$, следовательно общее решение однородного уравнения имеет вид:

$y_{0.0.} = e^{0x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$

Найдём частное решение соответствующего неоднородного уравнения, для этого рассмотрим правую часть исходного уравнения $f(x) = 3x^2 - x = (3x^2 - x)e^{0x}$, сравнивая её с видом $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, определим параметры частного решения, замечаем $\alpha = 0 \neq k_1, k_2$, следовательно $r = 0$;

$$P_2(x) = 3x^2 - x, n = 2, \text{ тогда } Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя полученные параметры в выражение

$y_{\text{чн}} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получим:

$y_{\text{чн}} = x^0(Ax^2 + Bx + C)e^{0x} = Ax^2 + Bx + C$-общий вид частного решения исходного ДУ;

в) Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' - 8y' = 0$,

$k^2 - 8k = 0$,

$k(k - 8) = 0$,

$k_1 = 0,\ \ k_2 = 8$,

$y_{0.0.} = C_1 e^{0x} + C_2e^{8x} = C_1 + C_2e^{8x}$;

Определим параметры частного решения,

сравнивая $f(x) = (3x - 2)cos5x + (x^2 + 2x)sin5x =$

$$= e^{ox}\left((3x - 2)cos5x + (x^2 + 2x)sin5x\right) \text{ с}$$

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x), \text{ имеем:}$$

$$\alpha = 0, \beta = 5, \alpha + \beta i = 5i \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0,$$

$$n = 1, P_1(x) = 3x - 2, m = 2, Q_2(x) = x^2 + 2x, \text{то}$$

$S = max\{1,2\} = 2$, значит порядок искомых многочленов K, L равен 2, то есть $K_2(x) = Ax^2 + Bx + C, L_2(x) = Dx^2 + Fx + G$, где A, B, C, D, F, G – некоторые неизвестные коэффициенты, подставляем полученные значения в выражение $y_{\text{чн}} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)$ имеем:

$$y_{\text{чн}} = x^0 \cdot e^{0x}((Ax^2 + Bx + C)\, cos5\,x + (Dx^2 + Fx + G)\, sin\, 5x);$$

Итак, $y_{чн} = (Ax^2 + Bx + C)\cos 5x + (Dx^2 + Fx + G)\sin 5x$;

г) $y'' - 2y' + 4y = (x+5)e^x \cos 3x$,

$y'' - 2y' + 4y = 0$,

$k^2 - 2k + 4 = 0$,

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2},$$

$\alpha = 1, \beta = \sqrt{2}$, следовательно, $y_{0.0.} = e^x\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}\,x\right)$;

Определим параметры частного решения, сравнивая

$f(x) = (x+5)e^x \cos 3x = e^x\left((x+5)\cos 3x + 0 \sin 3\,x\right)$ с

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, имеем

$\alpha = 1, \beta = 3, \alpha + \beta i = 1 + 3i \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0, n = 1, m = 0,$

$S = max\{1,0\} = 1$ значит, порядок многочленов K, L равен 1, то есть $K_1(x) = Ax + B, L_2(x) = Cx + D$, где A, B, C, D – некоторые неизвестные пока коэффициенты, подставляем наши параметры в уравнение $y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x}(K_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x)$, имеем:

$$y_{чн} = x^0 e^x((Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x) =$$
$$= e^x((Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x).$$

Пример 4.12. Найти общее решение уравнения:

а) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$; **б)** $y'' - 2y' + y = (6x+1)e^x$;

в) $y'' - 9y' = x^2 - x + 1$; **г)** $y'' + y = 4\sin x$.

Решение.

а) Уравнение $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$ является линейным неоднородным дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$, где $p = -3, q = 2, f(x) = 10e^{-x}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного

ДУ: $y'' - 3y' + 2y = 0,$

$k^2 - 3k + 2 = 0,$

$k_1 = 2, k_2 = 1, k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2$,следовательно общее решение ОДУ имеет вид:$y_{0.0.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$;

2)Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = 10e^{-x}$,сравнивая её с видом $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ определим параметры частного решения, $\alpha = -1 \neq k_1 \neq k_2$,следовательно $r = 0, n = 0,$

$P_0(x) = 10,$ тогда $Q_0(x) = A$.

Подставляя полученные параметры в выражение $y_{чн} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получаем:

$y_{чн} = x^0 \cdot Q_0(x) \cdot e^{-x} = Ae^{-x}$;

Коэффициент A определим из условия, что функция $y_{чн}$,должна быть решением уравнения$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$, поэтому должна ему удовлетворять.

Для этого найдем, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$: $y'_{чн} = -Ae^{-x}$, $y''_{чн} = Ae^{-x}$ и подставим в исходное уравнение:

$Ae^{-x} + 3Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 10e^{-x},$

$6Ae^{-x} = 10e^{-x}| : e^{-x},$

$6A = 10, A = \frac{5}{3}$, следовательно, $y_{чн} = \frac{5}{3}e^{-x}$.

3)Таким образом, общее решение исходного неоднородного ДУ имеет вид:

$$y = y_{0.0.} + y_{чн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{5}{3}e^{-x}.$$

б) $y'' - 2y' + y = (6x + 1)e^x$-ЛНДУ уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка.

1)Находимy_0:

$y'' - 2y' + y = 0,$

$k^2 - 2k + 1 = 0,$

$(k-1)^2 = 0,$

$k_{1,2} = 1$, следовательно, $y_{0.0.} = C_1 e^x + C_2 x e^x;$

2)Находим $y_{чн}$:

$f(x) = (6x+1)e^x = P_1(x)\cdot e^{1\cdot x}, \alpha = 1 = k_1 = k_2,$следовательно,

$r = 2,\ \ n = 1,\ \ P_1(x) = 6x + 1,$тогда $Q_1(x) = Ax + B,$

$y_{чн} = x^2(Ax+B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x,$

$y'_{чн} = (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x = (Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx)e^x;$

$y''_{чн} = (3Ax^2 + 6Ax + 2Bx + 2B)e^x + (Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx)e^x =$

$= (Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B)e^x;$

Подставим в исходное уравнение $y_{чн}, y'_{чн},\ y''_{чн}$:

$(Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B)e^x - 2(Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx)e^x +$

$+(Ax^3 + Bx^2)e^x = (6x+1)e^x;$

Поделив обе части уравнения на e^x и упрощая выражение, получим:

$Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B - 2Ax^3 -$

$-6Ax^2 - 2Bx^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2 = 6x + 1,$

$6Ax + 2B = 6x + 1,$

$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} 6A = 6 \\ 2B = 1 \end{cases};\ \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases},$ следовательно, $y_{чн} = \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x.$

3)Таким образом, $y = C_1 e^x + C_2 e^x x + \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$.

в)$y'' - 9y' = x^2 - x + 1$ –ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами;

1)Находим y_0:

$y'' - 9y' = 0,$

$k^2 - 9k = 0,$

$k(k-9)=0,$

$k_1=0, k_2=9, k_{1,2}\in R, k_1\neq k_2,$

$y_{0.0.}=C_1e^{0x}+C_2e^{9x}=C_1+C_2e^{9x};$

2)Находим $y_{чн}$:

$f(x)=x^2-x+1=(x^2-x+1)e^{ox},$

$\alpha=0=k_1\neq k_2\Rightarrow r=1,$

$P_2(x)=x^2-x+1\Rightarrow Q_2(x)=Ax^2+Bx+C,$ тогда

$y_{чн}=x^r\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$имеет вид:

$y_{чн}=x^1\cdot(Ax^2+Bx+C)e^{ox}=Ax^3+Bx^2+Cx,$

$y'_{чн}=3Ax^2+2Bx+C, y''_{чн}=6Ax+2B.$

Находим коэффициентыA, B, C,подставляя $y'_{чн}, y''_{чн}$ в исходное уравнение :

$6Ax+2B-9(3Ax^2+2Bx+C)=x^2-x+1,$

$-27Ax^2+6Ax-18Bx+2B-9C=x^2-x+1,$

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} -27A=1 \\ 6A-18B=-1 \\ 2B-9C=1 \end{cases}; \begin{cases} A=-\dfrac{1}{27} \\ 6\left(-\dfrac{1}{27}\right)-18B=-1 \\ 2B-9C=1 \end{cases}; \begin{cases} A=-\dfrac{1}{27} \\ B=\dfrac{7}{162} \\ 2\cdot\dfrac{7}{162}-9C=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{27} \\ B=\frac{7}{162} \\ C=-\frac{74}{729} \end{cases}$$, следовательно $y_{чн}=-\frac{1}{27}x^3+\frac{7}{162}x^2-\frac{74}{729}x;$

3) Таким образом,$y=C_1+C_2e^{9x}-\frac{1}{27}x^3+\frac{7}{162}x^2-\frac{74}{729}x.$

г)$y''+y=4\sin x$ –ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами;

1)Находим $y_{0.0.}$:

$y'' + y = 0,$

$k^2 + 1 = 0,$

$k^2 = -1,$

$k^2 = i^2,$

$k_{1,2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1,$

$y_{0.0.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$

2)Находим $y_{чн}$:

Сравнивая $f(x) = 4 \sin x = e^{ox}(0cosx + 4 \sin x)$ с

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)$, имеем

$\alpha = 0, \beta = 1, \alpha + \beta i = i = k_1 \Rightarrow r = 1, n, m = 0,$

$S = max\{0{,}0\} = 0$ значит, степень многочленов K, L равна 0, то есть $K_0 = A, L_0 = B$, подставляем наши параметры в равенство

$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}(K_s(x)cos\beta x + L_s(x)sin\beta x)$ имеем:

$y_{чн} = xe^{0x}(A \cos x + B \sin x) = x(A \cos x + B \sin x),$

$y'_{чн} = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x),$

$y''_{чн} = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x +$

$+x(-A \cos x - B \sin x) = -2Asinx + 2Bcosx -$

$-Axcosx - Bxsinx;$

Подставляя в исходное уравнение $y_{чн}$, $y''_{чн}$ находимA, B, C:

$-2A \sin x + 2B \cos x - Axcosx - Bxsinx + x(A \cos x + B \sin x) = 4 \sin x,$

$2B \cos x - 2A \sin x = 4 \sin x,$

$\cos x: 2B = 0, B = 0,$

$sinx: -2A = 4, A = -2;$

Следовательно,$y_{чн} = -2x \cos x;$

3)$y = y_{0.0.} + y_{чн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x.$

Теорема 4.8. (о наложении решении). Если правая часть уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ представляет собой сумму двух функций, то есть $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, а $y_{чн1}, y_{чн2}$- частные решения уравнений $y''+p_1(x)y'+q_1(x)y=f_1(x)$ и $y''+p_2(x)y'+q_2(x)y=f_2(x)$ соответственно, то функция $y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}$ является решением данного уравнения.

Примем без доказательства.

Пример 4.13. Найти общее решение линейного неоднородного ДУ: **а)** $y''-2y'+y=sinx+e^{-x}$;**б)**$y''-y'=3x^2-1+5e^{-4x}$.

Решение.

а) 1) Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ, то есть $y_{0.0.}$:

$y''-2y'+y=0$, характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$, $(k-1)^2=0$ имеет один двухкратный корень $k=1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{0.0.}=C_1e^x+C_2xe^x$;

2)Найдём $y_{ч.н.}$:

Так как правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$специального вида, $f_1(x)=sinx, f_2(x)=e^{-x}$, частное решение ищем в виде$y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}$, где $y_{чн1}$— частное решение уравнения $y''-2y'+y=sinx$, $y_{чн2}$— частное решение уравнения $y''-2y'+y=e^{-x}$.

Найдем$y_{чн1}$:так как $f_1(x)=sinx=e^{0x}(0\cdot cosx+1\cdot sinx)$,

$\alpha=0, \beta=1, \alpha+\beta i=i\neq k_{1,2}$, следовательно,

$r=0$,поэтому$y_{чн1}=Acosx+Bsinx$.

Подставляя $y_{чн1}=Acosx+Bsinx, y_{чн1}'=-Asinx+Bcosx$, $y_{чн1}''=-Acosx-Bsinx$ в уравнение $y''-2y'+y=sinx$ и сравнивая коэффициенты при $cosx$ и$sinx$ в правой и левой частях тождества, находим A, B:

$$-Acosx - Bsinx + 2Asinx - 2Bcosx + Acosx + Bsinx = sinx,$$

$$2Asinx - 2Bcosx = sinx$$

$$cos\,x: -2B = 0, B = 0;$$

$$sinx: 2A = 1, A = \frac{1}{2}.$$

Итак,$B = 0, A = \frac{1}{2}$,следовательно$y_{чн1} = \frac{1}{2}cosx$.

Размышляя аналогично, находим частное решение $y_{чн2}$ для уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-x}$, а именно,$f_2(x) = e^{-x}$, $\alpha = -1 \neq k_{1,2}$, следовательно, $r = 0$, тогда $y_{чн2} = Ce^{-x}$, $y'_{чн2} = -Ce^{-x}$, $y''_{чн2} = Ce^{-x}$,подставляя эти значения в уравнение $y'' - 2y' + y = e^{-x}$имеем:

$Ce^{-x} + 2Ce^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}, 4Ce^{-x} = e^{-x}, 4C = 1, C = \frac{1}{4}$,

следовательно, $y_{чн2} = \frac{1}{4}e^{-x}$.

Итак, $y_{чн} = y_{ч.н.1} + y_{ч.н.2} = \frac{1}{2}cosx + \frac{1}{4}e^{-x}$.

3)Таким образом,

$y = y_{0.0.} + y_{ч.н.} = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}cosx + \frac{1}{4}e^{-x}$-общее решение исходного уравнения.

б)$y'' - y' = 3x^2 - 1 + 5e^{-4x}$.

1)Найдём общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y'' - y' = 0,$

$k^2 - k = 0,$

$k(k-1) = 0,$

$k_1 = 0, k_2 = 1, k_{1,2} \in R, k_1 \neq k_2,$

$y_{0.0.} = C_1e^{0x} + C_2e^{1x} = C_1 + C_2e^x;$

2)Правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций, то есть $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,где $f_1(x)=3x^2-1=e^{ox}(3x^2-1), f_2(x)=5e^{-4x}$, таким образом, частное решение имеет вид $y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}$;

Найдем $y_{чн1}$:

$f_1(x)=3x^2-1=e^{ox}(3x^2-1), \alpha=0=k_1\neq k_2\Rightarrow r=1,$

$P_2(x)=3x^2-1,$

$Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$,следовательно,

$y_{чн1}=x^1\cdot(Ax^2+Bx+C)e^{ox}=Ax^3+Bx^2+Cx,$

$y'_{чн1}=3Ax^2+2Bx+C,$

$y''_{чн1}=6Ax+2B$, подставляя $y''_{чн1}$, $y'_{чн1}$в уравнение

$y''-y'=3x^2-1$ имеем:

$6Ax+2B-3Ax^2-2Bx-C=3x^2-1,$

$$\begin{matrix}x^2:\\x^1:\\x^0:\end{matrix}\begin{cases}-3A=3\\6A-2B=0\\2B-C=-1\end{cases},\begin{cases}A=-1\\6(-1)-2B=0,\\2B-C=-1\end{cases}\begin{cases}A=-1\\B=-3,\\C=-5\end{cases}$$

следовательно, $\Rightarrow$ $y_{чн1}=-x^3-3x^2-5x.$

Найдём частное решение неоднородного уравнения $y''-y'=5e^{-4x}$,то есть $y_{чн2}$,правая часть уравнения имеет вид $f_2(x)=5e^{-4x}$,сравнивая её с видом $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$имеем:

$\alpha=-4\neq k_1\neq k_2$, следовательно $r=0, P_0(x)=5,\ Q_0(x)=D.$

Подставляя полученные параметры в выражение$y_{чн}=x^r\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, получаем: $y_{чн2}=x^0De^{-4x}=De^{-4x}$;

Коэффициент D определим из условия, что функция $y_{чн2}$,должна быть решением уравнения $y''-y'=5e^{-4x}$и поэтому должна ему удовлетворять.

Найдем, $y'_{чн2}$, $y''_{чн2}$:

$y'_{чн2}=-4De^{-4x}$, $y''_{чн2}=16De^{-4x}.$

Подставляя $y'_{чн2}$, $y''_{чн2}$в уравнение$y'' - y' = 5e^{-4x}$, имеем:

$16De^{-4x} + 4De^{-4x} = 5e^{-4x}$,

$20De^{-4x} = 5e^{-4x} | : 20e^{-4x}$,

$D = \frac{1}{4}$, следовательно, $y_{чн2} = \frac{1}{4}e^{-4x}$.

3)Таким образом,

$y = C_1 + C_2e^x - x^3 - 3x^2 - 5x + \frac{1}{4}e^{-4x}$ –общее решение исходного ДУ.

Задания для самостоятельного решения.

20.Найти решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами методом Эйлера**:**

1	$y'' + 10y' + 25y = 0$	**11**	$y'' + 4y' + 3y = 0$
2	$y''' - 100y' = 0$	**12**	$y'' + 2y' + 10y = 0$
3	$y'' - 7y' + 12y = 0$	**13**	$y''' - 27y = 0$
4	$y''' + 64y' = 0$	**14**	$y'' - 8y' + 20y = 0$
5	$y'' - 2y' + 2y = 0$	**15**	$y'' - 6y' + 9y = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 7$
6	$y^{IV} + 2y''' - 2y'' - y = 0$	**16**	$4y'' - 4y' + y = 0$
7	$3y'' - 2y' - 8y = 0$	**17**	$y'' + 2y' + 5y = 0$
8	$4y'' - 20y' + 25y = 0$	**18**	$y''' - y'' - y' + y = 0$
9	$y'' + y' - 2y = 0$	**19**	$y'' + \pi^2 y = 0,$ $y(0) = 0, y'(1) = -\pi^2$
10	$y'' - 4y' + 5y = 0$	**20**	$y'' - 3y' + 2y = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = -1$

Ответы:

20.1. $y = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x}$; **20.2.** $y = C_1 + C_2e^{10x} + C_3e^{-10x}$;

20.3. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$; **20.4.** $y = C_1e^{-5x} + C_2cos8x + C_3sin8x$;

20.5. $y = e^x(C_1cosx + C_2sinx)$; **20.6.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + C_4x^2e^{-x}$;

20.7. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{4}{3}x}$; **20.8.** $y = (C_1 + C_2x)e^{\frac{5x}{2}}$;

20.9. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$; **20.10.** $y = e^{2x}(C_1cosx + C_2sinx)$;

20.11. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$; **20.12.** $y = e^{-x}(C_1cos3x + C_2sin3x)$;

20.13. $y = C_1e^{3x} + e^{-\frac{3x}{2}}\left(C_2cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x + C_3sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)$;

20.14. $y = e^{-5x}(C_1cos2x + C_2sin2x)$; **20.15.** $y = e^{3x} + 4xe^{3x}$;

20.16. $y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$; **20.17.** $y = e^{-x}(C_1cos2x + C_2sin2x)$;

20.18. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x}$; **20.19.** $y = \pi sin\pi x$; **20.20** $y = 3e^x - 2e^{2x}$.

21. Найти общие решения линейных неоднородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, с правой частью специального вида:

1	$y'' - 2y' + 5y = e^x cos2x$	**11**	$y'' + 4y = 4sin2x$
2	$y'' - 6y' + 25y = 2sinx + 3cosx$	**12**	$y'' - 2y' - 3y = 4xe^x$, $y(0) = 2, y'(0) = -1$
3	$y'' - 4y = e^{2x}sin2x$	**13**	$y'' - 2y' + y = 8e^{3x}$, $y(0) = 3, y'(0) = 6$
4	$y'' - y = 2sinx - 4cosx$	**14**	$y'' - 5y' = sin5x$
5	$y'' - 2y' + y = 6e^x$	**15**	$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$
6	$y'' - y = x^2 - x + 1$	**16**	$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
7	$y'' + 6y' + 9y = (x - 2)e^{-3x}$	**17**	$y'' - 4y = 8x^2$
8	$y'' - 9y = e^{3x}cosx$	**18**	$y'' + y = -8cosx$

9	$y'' - 5y' + 6y = 12sin3x$	**19**	$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$
10	$y'' - 7y' + 6y = sinx$	**20**	$y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

Ответы:

21.1. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{2}{5}(3sin2x + cos2x)$;

21.2. $y = (C_1cos4x + C_2sin4x)e^{3x} + \frac{1}{102}(5sinx + 14cosx)$;

21.3. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(sin2x + 2cos2x)$;

21.4. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - sinx + 2cosx$;**21.5.** $y = C_1e^x + C_2xe^x + 3x^2e^x$;

21.6. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 + x - 3$;**21.7.** $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2\right)e^{-3x}$;

21.8. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37}sin2x - \frac{1}{37}cosx\right)$;

21.9. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} - \frac{2}{13}sinx + \frac{10}{13}cosx$;

21.10 $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + \frac{7}{74}cosx + \frac{5}{74}sinx$;

21.11. $y = C_1cos2x + C_2sin2x - xcos2x$;

21.12. $y = \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} - xe^x$; **21.13.** $y = e^x - xe^x + 2e^{3x}$;

21.14. $y = C_1 + C_2e^{5x} + \frac{1}{50}cos5x - \frac{1}{50}sin5x$;

21.15. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}$; **21.16.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x}$;

21.17. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^2 - 1$;**21.18.** $y = C_1\cos x + C_2sinx + cos3x$;

21.19. $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^4}{12}e^x$;**21.20.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 + x - 3$.

4.2.7. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) для решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ЛНДУ $y'' + py' + qy = f(x)$ как известно общим решением такого уравнения является функция $y = y_{о.о.} + y_{чн}$,зададимся вопросом, как иначе найти общее решение данного уравнения, то есть если правая часть $f(x)$ уравнения не имеет так называемый «специальный вид», например, если $f(x)=\frac{1}{cosx}$,такие уравнения можно решить методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа), который заключается в следующем:

1)Находимy_0: общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения

$y''+py'+qy=0$, как было показано ранее, можно представить в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений, то есть в виде

$y_0=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$;

2) Находим$y_{чн}$: заменяя в решении $y_0=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$постоянные C_1 и C_2неизвестными функциями $C_1(x), C_2(x)$будем искать частное решение неоднородного уравнения$y''+py'+qy=f(x)$ в виде:

$y_{чн}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$,

где коэффициенты$C_1(x), C_2(x)$ при частных решениях$y_1(x), y_2(x)$, есть некоторые неизвестные функции, то есть вместо постоянных величин будем рассматривать переменные.

Определим их, подставляя функцию $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$

в исходное уравнение$y''+py'+qy=f(x)$.

Для этого вычислим $y'_{чн}$, $y''_{чн}$:

$y_{чн}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$,

$y'_{чн}=C_1{}'(x)\cdot y_1(x)+C_1(x)\cdot y_1{}'(x)+C_2{}'(x)\cdot y_2(x)+C_2(x)\cdot y_2{}'(x)$.

Подберём функции $C_1(x), C_2(x)$ так, чтобы

$C_1{}'(x)y_1(x)+C_2{}'(x)y_2(x)=0$, тогда

$y'_{чн}=C_1(x)\cdot y_1{}'(x)+C_2(x)\cdot y_2{}'(x)$.

Вычислим вторую производную:

$y''_{чн}=C_1{}'(x)\cdot y_1{}'(x)+C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2{}'(x)\cdot y_2{}'(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)$.

Подставляя выражения для $y_{чн}, y'_{чн}$, $y''_{чн}$ в уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$ имеем:

$$C_1{}'(x)\cdot y_1{}'(x) + C_1(x)\cdot y_1''(x) + C_2{}'(x)\cdot y_2{}'(x) + C_2(x)\cdot y_2''(x) +$$
$$+p\left(C_1(x)\cdot y_1{}'(x) + C_2(x)\cdot y_2{}'(x)\right) + q(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = f(x)$$

или

$$C_1(x)[\,y_1''(x) + py_1{}'(x) + qy_1(x)] + C_2(x)[\,y_2''(x) + py_2{}'(x) + qy_2(x)] +$$
$$+C_1{}'(x)\cdot y_1{}'(x) + C_2{}'(x)\cdot y_2{}'(x) = f(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$- решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то выражения в квадратных скобках равны нулю, отсюда

$C_1{}'(x)y_1{}'(x) + C_2{}'(x)y_2{}'(x) = f(x)$.

Таким образом, функция $y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет частным решением уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, если функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1{}'(x)y_1{}'(x) + C_2{}'(x)y_2{}'(x) = f(x) \end{cases};$$

Определитель основной матрицы системы $W = W(y_1;\, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) \end{vmatrix}$ является определителем Вронского для функций y_1, y_2.

Так как функции y_1, y_2, линейно независимы, определитель Вронского не равен нулю $W \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение $C_1(x), C_2(x)$, которое можно получить, например, методом Крамера, затем по формуле $y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ составляем частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$.

Находим y :отметим, что общее решение неоднородного уравнения, то есть y представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного- $y = y_0 + y_{чн}$.

Запишем краткий алгоритм метода Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных).

Алгоритм (метод вариации произвольных постоянных):

1. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения y_0: $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$;

2. Находим частное решение соответствующего неоднородного уравнения $y_{чн}$: ищем частное решение $y_{чн}$ в виде $y_{чн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$, где функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$;

3. Записываем общее решение соответствующего неоднородного уравнения y: $y = y_0 + y_{чн}$.

Пример 4.14. Решить ДУ методом вариаций произвольной постоянной: **а)** $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

б) $y'' - 2y' = 4xe^{-2x}$; **в)** $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

Решение.

а) 1) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения, то есть y_0:

$$y'' + y = 0,$$

$$k^2 + 1 = 0,$$

$$k^2 = -1,$$

$$k^2 = i^2,$$

$k_{1,2} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1$, следовательно,

$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$.

2) Находим частное решение соответствующего неоднородного уравнения $y_{чн}$:

$$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x,$$

составляем систему уравнений $\begin{cases} C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1{}'(x)y_1{}'(x) + C_2{}'(x)y_2{}'(x) = f(x) \end{cases}$

для определения функций $C_1(x), C_2(x)$, в нашем случае система имеет вид:

$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$, решаем полученную систему относительно $C_1{}'(x)$,$C_2{}'(x)$ методом Крамера, то есть по формулам $C_i'(x) = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2$:

$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0,$ следовательно, система имеет единственное решение;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\cos x} = 1,$$ следовательно,

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-tgx}{1} = -tgx, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1;$$

Находим $C_1(x), C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int tgx dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x|,$$

$$C_2(x) = \int dx = x.$$

Записываем частное решение $y_{чн}$, подставляя найденные функции $C_1(x) = \ln|\cos x|, C_2(x) = x$ в равенство $y_{чн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

Итак, $y_{чн} = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$

3)Записываем общее решение ЛНДУ:

$y = y_0 + y_{чн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\ |\cos x| + x \sin x.$

Найдём частное решение, для этого вычислим

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \ln\ |\cos x| +$

$+\cos x \frac{(-\sin x)}{\cos x} + \sin x + x\cos x$ или

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \ln|\cos x| + x\cos x.$

Получим систему:

$\begin{cases} y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \ln|\cos x| + x\cos x \\ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\ |\cos x| + x \sin x \end{cases};$

При $y = 1, y' = 0, x = 0$ имеем:

$\begin{cases} -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 - \sin 0 \ln\ |\cos 0| + 0\cos 0 = 0 \\ C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \cos 0 \ln\ |\cos 0| + 0 \sin 0 = 1 \end{cases},$

$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$, следовательно, частное решение имеет вид

$y = \cos x + \cos x \ln\ |\cos x| + x \sin x\,;$

б) 1) Находим y_0: $y'' + 2y' = 0$,

$k^2 + 2k = 0,$

$k_1 = 0, k_2 = -2,$

$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$, где $y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{-2x}$;

2)Находим $y_{чн}$:

$y_{чн} = C_1(x) + C_2(x) e^{-2x}$, составляем систему уравнений для определения функций $C_1(x), C_2(x)$:

$\begin{cases} C_1{}'(x) y_1(x) + C_2{}'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1{}'(x) \cdot y_1{}'(x) + C_2{}'(x) \cdot y_2{}'(x) = f(x) \end{cases}$, так как $y_1{}'(x) = 0$,

$y_2{}'(x) = -2e^{-2x}, f(x) = 4xe^{-2x}$, получим:

$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 - 2\, C_2'(x) e^{-2x} = 4xe^{-2x} \end{cases}; \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x) e^{-2x} \\ C_2'(x) = -2x \end{cases}.$

Решаем эту систему относительно $C_1{}'(x)$,$C_2{}'(x)$ методом подстановки, подставляя $C_2'(x) = -2x$ в первое уравнение системы, вычислим $C_1'(x) = 2xe^{-2x}$.

Находим $C_1(x), C_2(x)$:

$$C_1(x) = 2\int xe^{-2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dV = e^{-2x}dx, V = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right) = -xe^{-2x} + \int e^{-2x}dx =$$

$$= -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x};$$

$$C_2(x) = -2\int xdx = -x^2.$$

Записываем частное решение $y_{чн}$:

$$y_{чн} = C_1(x) + C_2(x)e^{-2x} = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - x^2e^{-2x} =$$

$$= -e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right);$$

3)Находим общее решение исходного уравнения y:

$y = y_0 + y_{чн} = C_1 + C_2e^{-2x} - xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - x^2e^{-2x}$ или

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} - e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right);$$

в) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

1)Находим y_0:

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

$$k_1 = -1, k_2 = -2,$$

$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$, где $y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{-2x}$.

2)Находим $y_{чн}$:

$y_{чн} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$, получим следующую систему для определения $C_1(x), C_2(x)$:

$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases}$, решаем эту систему относительно $C_1{}'(x)$,$C_2{}'(x)$подстановкой, выразим из первого уравнения $C_1'(x)$,имеем $C_1'(x)e^{-x} = -C_2'(x)e^{-2x}, C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x}$.

Подставляя полученное значение для $C_1'(x)$ во второе уравнение системы имеем:

$C_2'(x)e^{-2x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1}$,

$-C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1}$,

$C_2'(x) = \frac{-1}{(e^x+1)e^{-2x}} = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$.

Тогда,

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\int \frac{((e^x+1)-1)e^x}{e^x+1}dx =$$

$$-\int(e^x - \frac{e^x}{e^x+1})dx = -e^x + \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -e^x + ln(e^x+1);$$

Учитывая, что $C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x}$ найдём $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = -\left(-\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)e^{-x} = \frac{e^x}{e^x+1};$$

$$C_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = ln(e^x+1);$$

Находим $y_{чн}$:

$$y_{чн} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x} = e^{-x}ln(e^x+1) + \left(-e^x + ln(e^x+1)\right)e^{-2x};$$

3)Записываем общее решение y:

$$y = y_0 + y_{чн} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + e^{-x}ln(e^x+1) +$$
$$+\left(-e^x + ln(e^x+1)\right)e^{-2x}.$$

Задания для самостоятельного решения.

22. Найти решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами методом Эйлера**:**

1	$y'' + 10y' + 25y = 0$	**11**	$y'' + 4y' + 3y = 0$
2	$y''' - 100y' = 0$	**12**	$y'' + 2y' + 10y = 0$
3	$y'' - 7y' + 12y = 0$	**13**	$y''' - 27y = 0$
4	$y''' + 64y' = 0$	**14**	$y'' - 8y' + 20y = 0$
5	$y'' - 2y' + 2y = 0$	**15**	$y'' - 6y' + 9y = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 7$
6	$y^{IV} + 2y''' - 2y'' - y = 0$	**16**	$4y'' - 4y' + y = 0$
7	$3y'' - 2y' - 8y = 0$	**17**	$y'' + 2y' + 5y = 0$
8	$4y'' - 20y' + 25y = 0$	**18**	$y''' - y'' - y' + y = 0$
9	$y'' + y' - 2y = 0$	**19**	$y'' + \pi^2 y = 0,$ $y(0) = 0, y'(1) = -\pi^2$
10	$y'' - 4y' + 5y = 0$	**20**	$y'' - 3y' + 2y = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = -1$

Ответы:

22.1. $y = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x}$; **22.2.** $y = C_1 + C_2e^{10x} + C_3e^{-10x}$;

22.3. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$; **22.4.** $y = C_1e^{-5x} + C_2cos8x + C_3sin8x$;

22.5. $y = e^x(C_1cosx + C_2sinx)$;**22.6.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + C_4x^2e^{-x}$;

22.7. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{4}{3}x}$;**22.8.** $y = (C_1 + C_2x)e^{\frac{5x}{2}}$;

22.9. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$; **22.10.** $y = e^{2x}(C_1cosx + C_2sinx)$;

22.11. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$;**22.12.** $y = e^{-x}(C_1cos3x + C_2sin3x)$;

22.13. $y = C_1 e^{3x} + e^{-\frac{3x}{2}}\left(C_2 cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x + C_3 sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)$;

22.14. $y = e^{-5x}(C_1 cos2x + C_2 sin2x)$; **22.15.** $y = e^{3x} + 4xe^{3x}$;

22.16. $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 xe^{-\frac{1}{2}x}$; **22.17.** $y = e^{-x}(C_1 cos2x + C_2 sin2x)$;

22.18. $y = C_1 e^{x} + C_2 xe^{x} + C_3 e^{-x}$; **22.19.** $y = \pi sin\pi x$;

22.20. $y = 3e^{x} - 2e^{2x}$.

23. Найти общие решения линейных неоднородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, с правой частью специального вида:

1	$y'' - 2y' + 5y = e^{x}cos2x$	**11**	$y'' + 4y = 4sin2x$
2	$y'' - 6y' + 25y = 2sinx + 3cosx$	**12**	$y'' - 2y' - 3y = 4xe^{x}$, $y(0) = 2, y'(0) = -1$
3	$y'' - 4y = e^{2x}sin2x$	**13**	$y'' - 2y' + y = 8e^{3x}$, $y(0) = 3, y'(0) = 6$
4	$y'' - y = 2sinx - 4cosx$	**14**	$y'' - 5y' = sin5x$
5	$y'' - 2y' + y = 6e^{x}$	**15**	$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$
6	$y'' - y = x^2 - x + 1$	**16**	$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
7	$y'' + 6y' + 9y = (x - 2)e^{-3x}$	**17**	$y'' - 4y = 8x^2$
8	$y'' - 9y = e^{3x}cosx$	**18**	$y'' + y = -8cosx$
9	$y'' - 5y' + 6y = 12sin3x$	**19**	$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^{x}$
10	$y'' - 7y' + 6y = sinx$	**20**	$y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

Ответы:

23.1. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3sin2x + cos2x)$;

23.2. $y = (C_1 cos4x + C_2 sin4x)e^{3x} + \frac{1}{102}(5sinx + 14cosx)$;

23.3. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(sin2x + 2cos2x)$;

23.4. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - sinx + 2cosx;$

23.5. $y = C_1e^x + C_2xe^x + 3x^2e^x;$

23.6. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 + x - 3;$

23.7. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2\right)e^{-3x};$

23.8. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37}sin2x - \frac{1}{37}cosx\right);$

23.9. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} - \frac{2}{13}sinx + \frac{10}{13}cosx;$

23.10 $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + \frac{7}{74}cosx + \frac{5}{74}sinx;$

23.11. $y = C_1cos2x + C_2sin2x - xcos2x;$

23.12. $y = \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} - xe^x;$

23.13. $y = e^x - xe^x + 2e^{3x};$

23.14. $y = C_1 + C_2e^{5x} + \frac{1}{50}cos5x - \frac{1}{50}sin5x;$

23.15. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x};$

23.16. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x};$

23.17. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^2 - 1;$

23.18. $y = C_1\cos x + C_2sinx + cos3x;$

23.19. $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^4}{12}e^x;$

23.20. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 + x - 3$.

ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Системы дифференциальных уравнений, основные понятия.

Для решения многих задач математики, физики, техники нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные. Система дифференциальных уравнений первого порядка, содержащая независимую переменную x, n искомых функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ и их производные $y_1'; y_2'; \dots; y_n'$ в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; \dots; y_n; y_1'; y_2'; \dots; y_n') = 0 \\ F_2(x; y_1; y_2; \dots; y_n; y_1'; y_2'; \dots; y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x; y_1; y_2; \dots; y_n; y_1'; y_2'; \dots; y_n') = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Система ДУ (5.1) может быть разрешена относительно старших производных (5.2), то есть записана в виде:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x; y_1; y_2; \dots; y_n) \\ y_2' = f_2(x; y_1; y_2; \dots; y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x; y_1; y_2; \dots; y_n) \end{cases} \quad \mathbf{(5.2)}$$

Система вида (5.2) называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**, в нормальной системе число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$).

Число уравнений, входящих в систему (5.2), называют **порядком** системы ДУ.

Поскольку система (5.2) содержит n уравнений, то имеет порядок

n.В основном мы будем рассматривать нормальные система ли-

нейных уравнений с постоянными коэффициентами, которые делятся на однородные и неоднородные.

Неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами, записываются в виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x)} \\ \boldsymbol{y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn} + f_n(x)} \end{cases} \textbf{(5.3)}$$

или кратко в матричной форме (5.4):

$\boldsymbol{Y'(x) = AY(x) + F(x)}$ **(5.4)**, где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\dots & a_{3n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

,здесь $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$-неизвестные

функции, $a_{ij} (i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, n)$ –заданные постоянные коэффициенты (могут быть как действительными, так и комплексными), которые составляют собой основную матрицу системы A, $f_i(x)$ –заданные функции переменной x,непрерывны на интервале $(a; b)$ действительной числовой оси Ox.

Если в системе (5.4)$f_i(x) = 0$,то система называется **однородной** и имеет вид (5.5):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad \textbf{(5.5)}$$

Замечание: по сравнению с однородной системой (5.5) в неоднородной (5.4) в каждом уравнении дополнительно добавляется некоторая функция, зависящей в основном от переменной x или от какой-либо другой переменной, например t. Функции $f_1(x), f_2(x)$ могут быть константами (причем, по крайне мере одна из них не равна нулю), экспонентами, синусами, косинусами и так далее. Например, система уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$ - однородная, так как $f_{1,2}(t) = 0$,а система $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$ - неоднородная, так как в первом уравнении системы $f(t) = e^{-2t} \neq 0$.

Для лучшего восприятия материала, общую теорию систем дифференциальных уравнений и методы их интегрирования рассмотрим на примере систем второго порядка (системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций). Для удобства дальнейшей интерпретации такой системы независимую переменную обозначим x, а искомые функции- $y_1(x), y_2(x)$.В этом случае система дифференциальных уравнений имеет вид (5.6):

$$\begin{cases} \boldsymbol{F_1\big(x; y_1(x); y_2(x); y_1{}'(x); y_2{}'(x)\big) = 0} \\ \boldsymbol{F_2\big(x; y_1(x); y_2(x); y_1{}'(x); y_2{}'(x)\big) = 0} \end{cases} \quad \textbf{(5.6)}$$

Если в системе (5.6) каждое из уравнений разрешено относительно старшей производной одной из неизвестных функций, то получим систему (5.7):

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1{}'(x) = f_1(x, y_1, y_2)} \\ \boldsymbol{y_2{}'(x) = f_2(x, y_1, y_2)} \end{cases} \quad \textbf{(5.7)}$$

Очевидно, что система дифференциальных уравнений (5.7) записана в нормальной форме.

Решением системы дифференциальных уравнений (5.7) называется любая пара непрерывно дифференцируемых на интервале(a, b) функций$y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, которые при подстановке в систему обращают оба ее уравнения в тождества при всех$x \epsilon (a, b)$.

Пусть$y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – решение системы дифференциальных уравнений (5.7).

График решения, то есть совокупность точек$\big(x; y_1(x); y_2(x)\big)$, трехмерного пространства R^3 , называется **интегральной кривой** этой системы.

Задачей Коши для системы дифференциальных уравнений (5.7) называется задача отыскания решения системы, удовлетворяющего начальным условиям (5.8):

$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0$**(5.8),** где x_0, y_1^0, y_2^0 – заданные числа.

Геометрически – это задача отыскания интегральной кривой системы (5.7), проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0)$ пространства R^3 .

Теорема 5.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальной системы). Если в системе (5.7) все функции $f_i(x)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными по y_i в некоторой области D (трехмерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0)$ этой области существует единственное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям (5.8).

Общим решением системы ДУ (5.7) называется совокупность функций $\begin{cases} y_1 = y_1(x, C_1, C_2) \\ y_2 = y_2(x, C_1, C_2) \end{cases}$, зависящих от переменной x и произвольных постоянных C_1, C_2 и удовлетворяющих условиям:

1) функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ определены в области изменения переменной x и имеют непрерывные частные производные по x;

2) функции $y_1 = y_1(x),\, y_2 = y_2(x)$ должны являться решением системы (5.7) при любых значениях C_1, C_2.

Частным решением системы (5.7) называют решение, полученное из общего при некоторых частных значениях постоянных C_1, C_2.

5.2. Методы решения систем линейных дифференциальные уравнений, с постоянными коэффициентами.

Существует два основных способа решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: **1) метод исключения**; **2) метод Эйлера**. Рассмотрим каждый метод в отдельности.

Метод исключения.

Суть метода исключений заключается в приведение системы n ДУ порядка n к одному ДУ n -го порядка.

Для простоты восприятия данного метода ограничимся рассмотрением однородной системой двух уравнений с постоянными коэффициентами, то есть системой $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}, n = 2.$

Аналогично решаются системы ДУ при $n > 2$.

Пусть дана нормальная система $\begin{cases} y_1{}' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2{}' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$ продифференцируем по переменной x любое, например, первое уравнение в системе:

$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2'$;

Подставим в полученное равенство значения производной y_2' из второго уравнения системы:

$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2)$,

$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{12}a_{22}y_2$;

В полученное уравнение, подставляем $a_{12}y_2 = y_1' - a_{11}y_1$,выраженное из первого уравнения исходной системы, таким образом исключая из него y_2 :

$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}(y_1' - a_{11}y_1)$,

$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}a_{21}y_1 + a_{22}y_1' - a_{11}a_{22}y_1$,

$y_1'' - a_{11}y_1' - a_{12}a_{21}y_1 - a_{22}y_1' + a_{11}a_{22}y_1 = 0$, получим

$y_1'' + (-a_{11} - a_{22})y_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = 0$ -

–линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, решаем его (как мы это делали ранее) и находим искомую функциюy_1.Зная y_1 находимy_2.

Пример 5.1. Решить систему $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$ методом исключения.

Решение

Для удобства дальнейших вычислений перепишем систему в виде$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$. В данной системе$y_1, y_2$ –неизвестные функции, а x –независимая переменная(аргумент).

Продифференцируем первое уравнение:

$y_1'' = 2y_1' + y_2'$;

Подставляем $y_2' = 3y_1 + 4y_2$ в полученное равенство:

$y_1'' = 2y_1' + 3y_1 + 4y_2$или $y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_2$;

Составляем СУ:

$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_2 \end{cases}$, из первого уравнения выражаем y_2 через y_1', y_1: $y_2 = y_1' - 2y_1$;

$\begin{cases} y_2 = y_1' - 2y_1 \\ y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_2 \end{cases}$, подставляя значение y_2 во второе уравнение последней системы, имеем:

$y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4(y_1' - 2y_1)$,

$y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 4y_1' - 8y_1$,

$y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$-ЛОДУ второго порядка, с постоянными коэффициентами.

Решаем его:

$k^2 - 6k + 5 = 0$,

$k_1 = 5,\ \ k_2 = 1$,

$y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^x$-общее решение уравнения $y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$.

Находим функцию y_2, для этого вычислим $y_1' = 5C_1e^{5x} + C_2e^x$, и подставим значения для y_1, y_1' в выражение $y_2 = y_1' - 2y_1$;

$$y_2 = 5C_1e^{5x} + C_2e^x - 2C_1e^{5x} - 2C_2e^x = 3C_1e^{5x} - C_2e^x.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид: $\begin{cases} y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^x \\ y_2 = 3C_1e^{5x} - C_2e^x \end{cases}$.

Метод Эйлера (матричный метод решения систем ДУ).

Составляем матрицу данной системы $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$, по коэффициентам, находящимся в правой части равенства:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

Находим собственные числа $k_{1,2}$ матрицы A, для этого составляем характеристическое уравнение системы$|A-kE|=0$:

$$|A-kE|=0,$$

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0,$$

$(a_{11}-k)(a_{22}-k)-a_{21}a_{12}=0,$ решая уравнение относительно k,находим $k_{1,2}$ –собственные числа матрицы A.

Решая однородную систему уравнений $(A-kE)\alpha=0$ для каждого собственного числа, находим собственные векторы $\alpha_{1,2}$ матрицы A:

$\alpha_1=\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{pmatrix}$ – собственный вектор матрицы A,соответствующий собственному числуk_1;

$\alpha_2=\begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{pmatrix}$ – собственный вектор матрицы A,соответствующий собственному числу k_2.

Решение системы $\begin{cases} y_1{}'=a_{11}y_1+a_{12}y_2 \\ y_2{}'=a_{21}y_1+a_{22}y_2 \end{cases}$ имеет вид:

$Y=e^{k_1x}\alpha_1+e^{k_2x}\alpha_2$ или $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=e^{k_1x}\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{pmatrix}+e^{k_2x}\begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{pmatrix}$,то

есть $\begin{cases} y_1=e^{k_1x}\alpha_1^{(1)}+e^{k_2x}\alpha_1^{(2)} \\ y_2=e^{k_1x}\alpha_2^{(1)}+e^{k_2x}\alpha_2^{(2)}. \end{cases}$

Пример 5.2. Решить систему ДУ методом Эйлера: $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-2x+4y \\ \frac{dy}{dt}=-x+3y \end{cases}.$

Решение.

Для удобства дальнейшего вычислений, учитывая, что

$\frac{dx}{dt}=x'(t)=x'$, $\frac{dy}{dt}=y'(t)=y'$перепишем систему в виде:

$\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -x + 3y \end{cases};$

Находим собственные числа$k_{1,2}$ матрицы A,для этого составляем характеристическое уравнение системы$|A - kE| = 0$:

$$|A - kE| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2-k & 4 \\ -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-2-k)(3-k) - 4(-1) = 0,$$

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

$k_1 = 2, k_2 = -1$ – собственные числа матрицы A.

Решая однородную систему уравнений $(A - kE)\alpha = 0$, где $A - kE = \begin{pmatrix} -2-k & 4 \\ -1 & 3-k \end{pmatrix}$ для каждого собственного числа$k_{1,2}$, находим собственные векторы $\alpha_{1,2}$матрицы A:

$$k_1 = 2, \begin{pmatrix} -2-2 & 4 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{c_1}{(-4)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} c_2 \overset{\sim}{+} c_1$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} \alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_2^{(1)} - \text{св. н.} \end{cases} \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} - \text{св. н} \end{cases}, \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = C_1 \\ \alpha_2^{(1)} = C_1 \end{cases}$,следовательно, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ – собственные вектор, соответствующий собственному числу k_1;

$$k_2 = -1, \begin{pmatrix} -2-(-1) & 4 \\ -1 & 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} c_2 \overset{\sim}{-} c_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} -\alpha_1^{(2)} + 4\alpha_2^{(2)} = 0 \\ \alpha_2^{(2)} - \text{св. н.} \end{cases} \begin{cases} \alpha_1^{(2)} = 4\alpha_2^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} - \text{св. н.} \end{cases}, \begin{cases} \alpha_1^{(2)} = 4C_2 \\ y_2^{(2)} = C_2 \end{cases},$$

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 4C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – собственные вектор, соответствующий собственному числу k_2.

Решение системы имеет вид:

$$\binom{x}{y} = C_1 e^{2t}\binom{1}{1} + C_2 e^{-t}\binom{4}{1}$$,то есть $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-4t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}. \end{cases}$

Пример 5.3. Привести систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x - y = 0 \\ \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 4x + 5y = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 1$ к нормальному виду и найти её решение методом исключения.

Решение.

$\begin{cases} x' + y' - 2x - y = 0\ (1) \\ x' - 2y' + 4x + 5y = 0\ (2) \end{cases}$,приведём систему к нормальной форме исключив x' из первого уравнения и y' из второго уравнения.

Исключим x' из первого уравнения, для этого вычтем из первого уравнения системы второе уравнение

$3y' - 6x - 6y = 0|:3,$

$\underline{y' - 2x - 2y = 0;}$

Исключим y' из первого уравнения, для этого умножим первое уравнения системы на два и прибавим второе уравнение, тогда $3x' + 3y = 0|:3,$

$\underline{x' + y = 0;}$

В совокупности получим нормальную СУ:

$\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$, где x, y –неизвестные функции, а t –независимая переменная.

Решим её методом исключения:

$y = -x',$

$y' = -x''.$

Подставим y, y' в уравнение $y' = 2x + 2y$:

$-x'' = 2x + 2(-x')$,

$x'' - 2x' + 2x = 0$,

$k^2 - 2k + 2 = 0$,

$k_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot2}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\pm2i}{2} = 1 \pm i$,следовательно

$x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$,

$x' = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^t(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$,

$x' = e^t((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t)$.

Для того, чтобы найти y подставим

$x' = e^t((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t)$ в $y = -x'$,то есть

$y = -e^t((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t)$.

Таким образом,

$\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = -e^t((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t) \end{cases}$-общее решение исходной ДУ.

Найдём частное решение $x = 1, y = 1, t = 0$,

$\begin{cases} 1 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \\ 1 = -e^0((C_1 + C_2) \cos 0 + (C_2 - C_1) \sin 0) \end{cases}$;

$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -(C_1 + C_2) \end{cases}$, $\begin{cases} C_2 = -2 \\ C_1 = 1 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = e^t \cos t - 2e^t \sin t \\ y = e^t(\cos t + 3 \sin t) \end{cases}$-частное решение систем.

Пример 5.4. Решить систему ДУ $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z \end{cases}$ двумя способами методом Эйлера и методом исключения.

Решение.

В данной системе $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ z' = 2y - 3z \end{cases}$, y, z –неизвестные функции, а x –независимая переменная.

1 способ: (метод исключений)

Продифференцируем первое уравнение системы, тогда

$y'' = 4y' - 3z'$;

Подставляя $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство, имеем:

$y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$,

$y'' - 4y' + 6y = 9z$;

Составляем систему уравнений $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ y'' - 4y' + 6y = 9z \end{cases}$;

Из второго уравнения исключаем z, для этого выражаем z через y и y' из первого уравнения полученной системы

$z = \frac{4y-y'}{3}$, $\begin{cases} z = \frac{4y-y'}{3} \\ y'' - 4y' + 6y = 9z \end{cases}$ и подставляем во второе:

$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y-y')}{3}$;

$y'' - 4y' + 6y = 12y - 3y'$;

$y'' - y' - 6y = 0$- ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, решаем его:

$k^2 - k - 6 = 0$,

$k_1 = -2, k_2 = 3$,

$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$,

$y' = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x}$,

находим $z = \frac{4y-y'}{3}$,подставляя y, y'имеем:

$$z = \frac{4C_1e^{-2x} + 4C_2e^{3x} + 2C_1e^{-2x} - 3C_2e^{3x}}{3} =$$

$$= \frac{6C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}}{3} = 2C_1e^{-2x} + \frac{1}{3}C_2e^{3x};$$

Таким образом, общее решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} \\ z = 2C_1e^{-2x} + \frac{1}{3}C_2e^{3x} \end{cases};$$

2способ: (матричный метод)

Составляем характеристическое уравнение$|A - kE| = 0$ системы $\begin{cases} y' = 4y - 3z \\ z' = 2y - 3z \end{cases}$ и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -3 \\ 2 & -3-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(4-k)(3+k) - 2(-3) = 0,$$

$$k^2 - k - 6 = 0,$$

$k_1 = -2, k_2 = 3$ – собственные числа матрицы A.

Решая однородную систему уравнений $(A - kE)Y = 0$, где $A - kE = \begin{pmatrix} 4-k & -3 \\ 2 & -3-k \end{pmatrix}$ для каждого собственного числа$k_{1,2}$, находим собственные векторы $\alpha_{1,2}$матрицы A:

$$k_1 = -2, \begin{pmatrix} 4-(-2) & -3 \\ 2 & -3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{c_1}{3} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} c_2 \overset{\sim}{-} c_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} 2\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} - \text{св. н.} \end{cases}; \begin{cases} \alpha_2^{(1)} = 2\alpha_1^{(1)} \\ \alpha_1^{(1)} - \text{св. н.} \end{cases}, \begin{cases} \alpha_2^{(1)} = 2C_1 \\ \alpha_1^{(1)} = C_1 \end{cases}$$,следо-

вательно, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_1 \end{pmatrix}$ – собственные вектор, соответствующий собственному числу k_1;

$$k_2 = 3, \begin{pmatrix} 4-3 & -3 \\ 2 & -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \frac{c_1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} c_2 \overset{\sim}{-} c_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} \alpha_1^{(2)} = 3y_2^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} - \text{св. н.} \end{cases}, \begin{cases} \alpha_1^{(2)} = 3C_2 \\ \alpha_2^{(2)} = C_2 \end{cases},$$

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – собственные вектор, соответствующий собственному числу k_2.

Решение системы имеет вид:

$$\binom{y}{z} = e^{-2x}\binom{C_1}{2C_1} + e^{3x}\binom{3C_2}{C_2}, \text{то есть } \begin{cases} y = C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x} \\ z = 2C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}. \end{cases}$$

Замечание: для решения неоднородных систем ДУ удобнее применять метод исключения.

Пример 5.5. Решить систему ДУ: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$.

Решение.

Для удобства дальнейшего вычислений, учитывая, что

$\frac{dx}{dt} = x'(t) = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'(t) = y'$ перепишем исходную систему в виде: $\begin{cases} x' = x + 2y + e^{-2t} \\ y' = 4x - y \end{cases}$ – неоднородная СУ, так как

$f_1(t) = e^{-2t} \neq 0$,решаем её методом исключения, аналогично тому, как мы решали однородные системы.

Продифференцируем первое уравнение по переменной t:

$x'' = x' + 2y' - 2e^{-2t}$,подставляя второе уравнение $y' = 4x - y$ в полученное равенство имеем:

$x'' = x' + 2(4x - y) - 2e^{-2t}$,

$x'' = x' + 8x - 2y - 2e^{-2t}$,

учитывая, что $2y = x' - x - e^{-2t}$(из первого уравнения) имеем:

$$\begin{cases} 2y = x' - x - e^{-2t} \\ x'' = x' + 8x - 2y - 2e^{-2t}, \end{cases}$$

$x'' = x' + 8x - x' + x + e^{-2t} - 2e^{-2t}$ или

$x'' - 9x = -e^{-2t}$ - линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, решаем его и находим искомую функцию $x = x(t)$,которую определяем как сумму общего решения однородного уравнения $x''-9x=0$ и частного решения неоднородного уравнения $x''-9x=-e^{-2t}$, то есть

$$x(t)=x_0(t)+x_{чн}(t).$$

Для начала найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $x_0(t)$:

$x''-9x=0,$

$k^2-9=0,$

$k_{1,2}=\pm 3,$

$x_0(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t};$

Подберём частное решение $x_{чн}(t)$,учитывая вид неоднородной части $f(t)=-e^{-2t}, \alpha=-2\neq k_{1,2}, r=0$ имеем:

$$x_{чн}(t)=Ae^{-2t},\ x'_{чн}(t)=-2Ae^{-2t}, x''_{чн}(t)=4Ae^{-2t},$$

подставляя значения $x_{чн}(t)=Ae^{-2t}$, $x''_{чн}(t)=4Ae^{-2t}$ в неоднородное уравнение $x''-9x=-e^{-2t}$, определяем неизвестный коэффициент A:

$$4Ae^{-2t}-9Ae^{-2t}=-e^{-2t},$$

$$-5Ae^{-2t}=-e^{-2t}|:(-e^{-2t}),$$

$$5A=1,$$

$$A=\frac{1}{5},$$

следовательно, частное решение $x_{чн}(t)$ выражается формулой: $x_{чн}(t)=\frac{1}{5}e^{-2t}$;

Соответственно, общее решение уравнение $x''-9x=-e^{-2t}$ записывается так $x(t)=x_0(t)+x_{чн}(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{-2t}$, то есть $x=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{-2t}$.

Остается найти функцию $y = y(t)$,для этого вычислим производную $x' = 3C_1e^{3t} - 3C_2e^{-3t} - \frac{2}{5}e^{-2t}$ и подставим её в уравнение $x' = x + 2y + e^{-2t}$:

$$3C_1e^{3t} - 3C_2e^{-3t} - \frac{2}{5}e^{-2t} = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + 2y + e^{-2t},$$

$$2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t} - \frac{8}{5}e^{-2t} = 2y|:2,$$

$$y = C_1e^{3t} - 2C_2e^{-3t} - \frac{4}{5}e^{-2t}.$$

Итак, общее решение системы имеет вид: $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} \\ y = C_1e^{3t} - 2C_2e^{-3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} \end{cases}.$

Задания для самостоятельного решения

24.Решить систему ДУ:

1	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 3x_2 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + 8z \\ \frac{dz}{dt} = y + z \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 0$	**14**	$\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = 3y - x \end{cases}$

5	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-5y+3\\ \frac{dy}{dt}=5x-6y+1,\end{cases}$ $x(0)=6, y(0)=5$	**15**	$\begin{cases}x'=-3x-y\\ y'=x-y,\end{cases}$ $x(0)=1, y(0)=-1$
6	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-5y\\ \frac{dy}{dt}=-7x-3y\end{cases}$	**16**	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-1\\ \frac{dy}{dt}=x+2y-3\end{cases}$
7	$\begin{cases}x'=3x-y\\ y'=4x-y,\end{cases}$ $x(0)=5, y(0)=8$	**17**	$\begin{cases}y_1'=-7y_1+y_2\\ y_2'=-2y_1-5y_2\end{cases}$
8	$\begin{cases}y'=5y+4z\\ z'=4y+5z\end{cases}$	**18**	$\begin{cases}x'=6x+2y\\ y'=2x+9y\end{cases}$
9	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y\\ \frac{dy}{dt}=3x+4y\end{cases}$	**19**	$\begin{cases}y_1'=y_1+5y_2\\ y_2'=-y_1-3y_2\end{cases}$
10	$\begin{cases}y'=-7y+z\\ z'=-2y-5z\end{cases}$	**20**	$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=2y_1+3y_2\\ \frac{dy_2}{dx}=6y_1-y_2\end{cases}$

Ответы:

24.1. $\begin{cases}y_2=3C_1e^{5x}-C_2e^{x}\\ y_1=C_1e^{5x}+C_2e^{x}\end{cases}$; **24.2.** $\begin{cases}x_1=2C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\\ x_2=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\end{cases}$;

24.3. $\begin{cases}x=C_1e^{t}+C_2e^{-t}-1\\ y=C_1e^{t}-C_2e^{-t}-1\end{cases}$; **24.4.** $\begin{cases}x=4e^{-t}-e^{2t}\\ y=e^{-t}-e^{2t}\end{cases}$;

24.5. $\begin{cases}x=5e^{-2t}\cos 3t+1\\ y=e^{-2t}(4\cos 3t+3\sin 3t)+1\end{cases}$; **24.6.** $\begin{cases}x=5C_1e^{-8t}+C_2e^{4t}\\ y=7C_1e^{-8t}-\frac{1}{2}C_2e^{4t}\end{cases}$;

24.7. $\begin{cases}x=(5+2t)e^{t}\\ y=(8+4t)e^{t}\end{cases}$; **24.8.** $\begin{cases}y=C_1e^{x}+C_2e^{9x}\\ z=-C_1e^{x}+C_2e^{9x}\end{cases}$;

24.9. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t} \end{cases}$; **24.10.** $\begin{cases} y = e^{-6x}(C_1cosx + C_2sinx) \\ y = \left((C_1 + C_2)cosx + (C_2 - C_1)sinx\right)e^{-6x} \end{cases}$;

24.11. $\begin{cases} x = C_1e^tcost + C_2e^tsint \\ y = C_1e^t\text{sint} - C_2e^tcost \end{cases}$; **24.12** $\begin{cases} x = e^{4t}(C_1cos3t + C_2sin3t) \\ y = e^{4t}(-C_1sin3t + C_2cos3t) \end{cases}$;

24.13. $\begin{cases} y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} \\ z = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t} \end{cases}$; **24.14.** $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ y = \frac{1}{4}C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \end{cases}$;

24.15. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = -e^{-2t} \end{cases}$; **24.16.** $\begin{cases} x = -C_1e^t + 1 \\ y = C_1e^t + C_2e^{2t} + 1 \end{cases}$;

24.17. $\begin{cases} y_1 = C_1e^{-6x}(cosx - sinx) + C_2e^{-6x}(cosx + sinx) \\ y_2 = e^{-6x}(C_1cosx + C_2sinx) \end{cases}$;

24.18. $\begin{cases} x = C_1e^{10t} - 2C_2e^{5t} \\ y = 2C_1e^{10t} + C_2e^{5t} \end{cases}$; **24.19.** $\begin{cases} y_1 = e^{-t}(C_1cost + C_2sint) \\ y_2 = \frac{1}{5}e^{-t}\left((C_2 - 2C_1)cost - (2C_2 + C_1)sint\right) \end{cases}$;

24.20. $\begin{cases} y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^{-4x} \\ y_2 = C_1e^{5x} - 2C_2e^{-4x} \end{cases}$.

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.
2. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. Издательство «Феникс» — Ростов н/Д, 2004. — 415 с.
3. Письменный Д.Т., Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айриспресс», 2014.
4. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.