



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

Элементы математического моделирования
по дисциплине

«Математическое моделиро- вание»

Авторы
Баранов И.В.,
Гусева И.А.

Ростов-на-Дону, 2025

Аннотация

Пособие написано по итогам чтения курса «Принципы построения математических моделей», который был прочитан магистрам первого года обучения ДГТУ. По мнению авторов, пособие может быть полезным и для студентов направлений 01.03.04 «Прикладная математика», 01.04.04 «Прикладная математика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.04 «Программная инженерия», так или иначе сталкивающихся с вопросами построения, исследования и анализа различных математических моделей функционирования реальных объектов или процессов.

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры «Прикладная математика»
Яценко О.В.

Авторы

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры «Прикладная математика»
Баранов И.В.

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры «Прикладная математика»
Гусева И.А.

Оглавление

Общие замечания	4
Задача о кошке	12
Математический маятник	12
Задача об остывании кофе	14
Метод наименьших квадратов	25
Задача интерполяции	32
Генератор на туннельном диоде	39
Задача о движении в вязкой среде.....	46
Задача о парашютисте.....	47
Модели роста народонаселения	48
Модель противоборства двух армий (Арнольд В.И.).....	54
Оптимизация, как путь к катастрофе (Арнольд В.И.)	56
Опасность многоступенчатого управления (Арнольд В.И.)	60
Заключение	61
Перечень использованных информационных ресурсов ...	62

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Моделирование – замещение реального физического объекта или реальной системы другим, упрощенным объектом (моделью), отражающим его существенные свойства, а также проведение экспериментов с моделью с целью получения информации об исходном объекте путем исследования свойств модели.

Моделирование применяют в случаях, когда прямой эксперимент с реальным объектом

- невозможен
- экономически невыгоден
- опасен

Различают натурное (физическое, материальное) и идеальное (абстрактное, нематериальное) моделирование.

При натурном моделировании исходный объект заменяют другим, более простым физическим объектом, и изучают его поведение например, при краш-тесте автомобиля, за руль сажают манекен, и смотрят, какие повреждения он получает при, скажем, лобовом столкновении (рис. 1).



Рис.1. Натурное моделирование.

При идеальном моделировании не создают упрощенную физическую копию объекта, а описывают его в терминах некоторой теории. Как правило, это какие-либо соотношения, уравнения, описывающие существенные свойства объекта.

Выбор модели зависит от целей моделирования. Например, для портного, моделью человека является манекен, отражающий пространственные (геометрические) свойства фигуры человека, однако, для фармаколога, который разрабатывает новое лекарство, моделью человека будет являться мышь, на которой проводят испытания нового препарата.

Вероятно, исторически, одними из первых, можно считать модели устройства Мира (модель Земли на трёх китах, плавающих в океане, в Индии – на трех слонах, стоящих на черепахе, плавающей в океане, затем – модель Птолемея – Земля в центре Мира, позже – модель Коперника – Солнце в центре Мира) (рис.2)

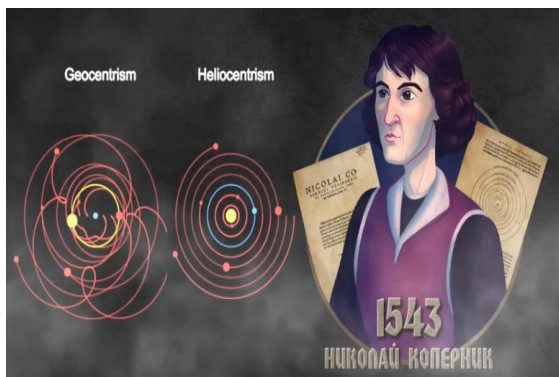


Рис. 2. Модели устройства Мира.

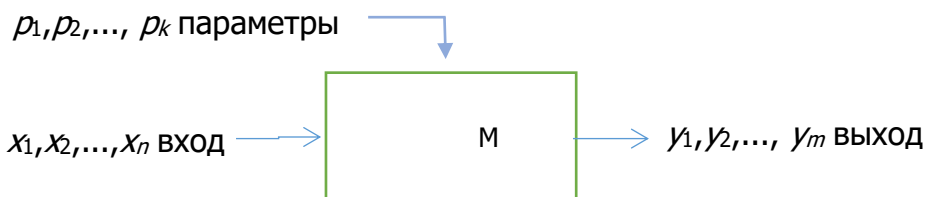
Модель трех китов, однако, во-первых, объясняла далеко не все, а лишь часть явлений окружающего мира, а во-вторых – была лишь качественной, т.е. объясняла, как устроен мир, но не могла давать *проверяемые количественные предсказания*. Она не могла, к примеру, предсказывать солнечные и лунные затмения, а также положения планет. Появившиеся позже модели Птолемея (около 140 г.) и Коперника (1543 г.) были уже не только качественными, но и *количественными*, и обладали *предсказательной силой*, т.е. могли предсказывать *проверяемые в наблюдениях* положения тел на небесной сфере. Они были уже математическими, т.е. представляли собой математические выражения, позволявшие *вычислять* положения планет, Луны и Солнца.

Здесь, вероятно, стоит отметить, что одной из первых математических моделей пространственной реальности была геометрия Евклида, описанная в его работе "Начала", как считают историки, в III веке до н.э. и которой мы пользуемся до сих пор.

Математическая модель – это идеальная модель, которая с помощью математических соотношений количественно описывает основные свойства объекта, и позволяет предсказывать его поведение.

Начиная с работы Ньютона (1642-1727) "Математические начала натуральной философии" (1687), математические модели получили бурное развитие. Ньютон создал совершенно новый язык описания процессов, происходящих во времени – язык дифференциального и интегрального исчисления. С помощью этого языка он сумел вывести из своей модели известные на тот момент из астрономических наблюдений законы Кеплера – законы движения планет, а также объяснить движения Луны и комет. Следует отметить, что аппарат дифференциального исчисления (анализа бесконечно малых) был в это же время создан (независимо от Ньютона) немецким математиком Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646-1716). Язык дифференциального и интегрального исчислений является и в наше время одним из самых используемых для построения математических моделей.

С формальной точки зрения мат. модель – это функциональная зависимость M , связывающая выходные значения y_1, y_2, \dots, y_m (отклик модели) с входными переменными x_1, x_2, \dots, x_n , и зависящая от параметров модели p_1, p_2, \dots, p_k .



Отдельная, крайне важная, и часто встречающаяся задача – идентификация параметров модели. Требуется по результатам реального эксперимента так подобрать параметры модели, чтобы ошибка модели была минимальной.

Математические модели классифицируют по различным признакам [1, 3]:

- дискретные и непрерывные
- стационарные и нестационарные
- детерминированные и стохастические
- линейные и нелинейные
- аналитические и имитационные (компьютерные)

Дискретные модели – это модели с дискретным временем или дискретными параметрами (конечно-разностные уравнения, рекуррентные соотношения, цепи Маркова, фракталы, модели клеточного роста, модели на решетках, например модель Изинга).

Непрерывные модели – модели с непрерывным временем или непрерывными параметрами (обычно это дифференциальные уравнения или системы уравнений, в том числе, в частных производных). Простой пример такой модели: второй закон механики Ньютона с соответствующими начальными условиями.

Стационарные модели – это модели не зависящие от времени. Описывают установившиеся (при бесконечных прошедших временах) состояния системы.

Нестационарные модели – время явно участвует в уравнениях модели. (Описывают процессы, зависящие от времени, например переходные процессы).

Детерминированные модели – последующие состояния объекта однозначно определены его предыдущими состояниями.

Стохастические (вероятностные) модели – описывают объект с помощью языка теории вероятности или математической статистики.

Линейные модели – модели, в которых поведение (отклик) объекта линейно зависит от изменения входных параметров. Линейные модели обладают замечательным свойством суперпозиции: если Y_1 есть решение (отклик) модели при значении входного параметра X_1 , а Y_2 – решение при X_2 , то $Y=Y_1+Y_2$ будет решением при $X=X_1+X_2$. Линейные модели наиболее просты для анализа. Методы их исследования весьма развиты, и они очень широко применяются. Таковыми, например, являются уравнения механики Ньютона, уравнение Шрёдингера (квантовая механика).

Нелинейные модели – в таких моделях неизвестные величины входят в уравнения нелинейно, либо же поведение (отклик) модели сложным, нелинейным образом зависит от изменения входных параметров. Такие модели гораздо сложнее для исследования чем линейные. Однако, они способны описывать сложные явления, такие, например, как солитоны (уединённые волны) или хаос.

Аналитические модели – представляют собой аналитические соотношения, описывающие объект. Обычно это уравнения или системы уравнений. В простых случаях такие уравнения удастся решить аналитически (получить решения в виде формул) с помощью теоретических методов. Однако, часто это сделать не удастся. Тогда для решения уравнений используют численные методы либо прибегают к компьютерному (имитационному) моделированию и вычислительному эксперименту с помощью компьютерной модели.

Компьютерная (имитационная) модель – программа или комплекс программ, который при помощи вычислений воспроизводит поведение реального объекта. Такие вычисления называют компьютерной симуляцией. Существует огромное число специализированных пакетов для таких симуляций. Вот лишь некоторые из них: пакет FlexPDE – пакет для численного решения уравнений в частных производных. Содержит большое число примеров моделирования различных физических процессов механики, гидродинамики, теплопроводности, электростатики и т.п. Пакеты ANSYS и ACELAN

предназначены для симуляции и численного решения задач механики, расчетов и прогнозирования поведения различных конструкций. Пакеты MicroCap, CircuitMaker и тому подобные – для моделирования работы электрических и электронных схем.

С большим числом примеров построения и исследования математических (и компьютерных) моделей можно ознакомиться в [7, 15, 3, 14, 18].

Вычислительный эксперимент – получил широкое распространение в связи с бурным развитием возможностей вычислительной техники. Вычислительный эксперимент представляет собой эксперимент, проводимый над моделью с помощью вычислительных процедур, имитирующих поведение реальных объектов. В наше время, обычно, это компьютерная программа.

Невозможно перечислить все области, где применяется вычислительный эксперимент. Вот лишь малая часть из них: с помощью вычислений французский математик Урбен Леверье открыл планету Нептун (1846 г.). В 40-х – 50-х годах XX века вычислительный эксперимент был использован при реализации атомного проекта – расчете процессов, происходящих в атомной бомбе (об этом упоминает всемирно известный физик, лауреат Нобелевской премии по физике Ричард Фейнман в своей автобиографической книге “Вы наверняка шутите, мистер Фейнман”). В наше время это и проектирование различных ответственных строительных и авиационных конструкций, моделирование транспортных потоков, симуляция и прогнозирование поведения экологических систем, компьютерная томография в медицине, искусственные нейронные сети, прогноз погоды (есть замечательная книжка – Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды [6]), моделирование эволюции Вселенной, а также всевозможные разнообразные приложения в технике, технологии и иных областях, которые здесь перечислить просто невозможно – ввиду их огромного и необозримого количества.

При построении моделей опираются на законы, описывающие наблюдаемую реальность – законы природы: законы сохранения энергии, материи, импульса, вариационные принципы, феноменологические закономерности и т.п. (см. [18]).

На диаграмме 1 изображены основные этапы разработки математической модели изучаемого явления (объекта).

Математическое моделирование

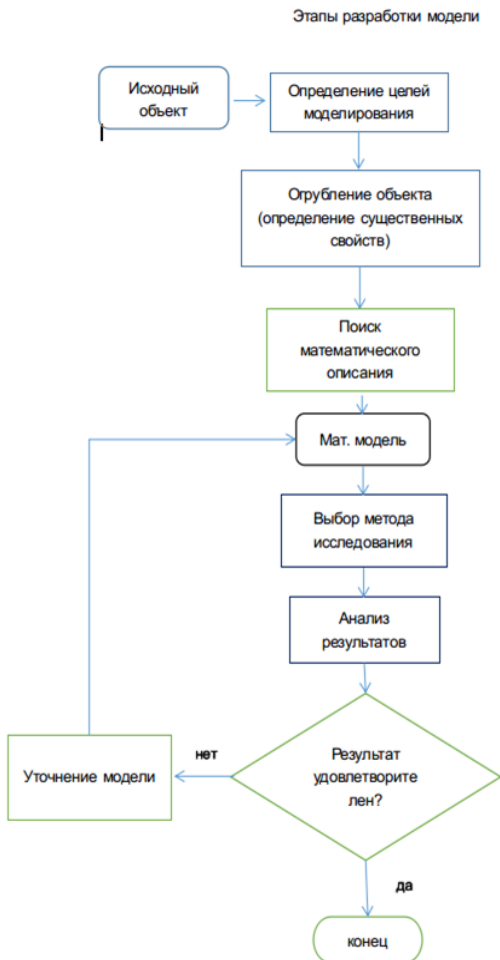


Диаграмма 1 – этапы разработки математической модели.

Требования, предъявляемые к математическим моделям:

- адекватность (точность)
- предсказательная сила и верифицируемость модели.
- простота
- эффективность

Математическая модель не является точной копией объекта или явления, а является некоторой идеализацией. При построении

модели учитывают существенные факторы, и отбрасывают несущественные. При этом модель должна обеспечивать требование адекватности, т.е. с достаточной точностью описывать интересующие нас свойства объекта.

Модель должна обладать предсказательной силой и быть верифицируемой. Это означает, что модель должна быть способна дать ответ на вопрос о поведении изучаемого объекта в различных условиях, и правильно предсказывать его поведение. Эти предсказания модели должны быть проверяемы в эксперименте, т.е. модель должна быть верифицируема.

Модель должна быть по возможности простой. Учет второстепенных факторов, усложнение модели, конечно, позволяет более точно описать изучаемый объект, однако имеет и оборотную сторону – чрезмерное усложнение приводит к тому, что уравнения модели становятся трудно решаемыми, требуют больше вычислительных ресурсов, времени, или вообще принципиально нового метода решения. Неоправданное усложнение может привести к таким техническим трудностям, что уравнения станут практически неразрешимы, или их решение потребует неоправданной затраты средств. С простотой (или сложностью) модели тесно связано требование эффективности.

Эффективность означает, что решение (отклик модели) должно быть получено за разумное вычислительное время. Особенно важно это требование в системах, использующих математические модели, работающие в реальном времени – в реальных технических и технологических процессах. Например, при сварке металлических деталей необходимо в реальном времени следить за качеством сварного шва. Это можно сделать, используя известный из физики закон Джоуля-Ленца, который гласит: количество теплоты, выделяемое в единицу времени на рассматриваемом участке электрической цепи, пропорционально произведению квадрата силы тока на этом участке и сопротивления участка. Построив соответствующую математическую модель, и измеряя силу тока в цепи сварочного аппарата в реальном времени, можно вычислить количество теплоты, выделившееся на сварочном шве, а значит, и оценить качество сварки деталей.

Ниже будут рассмотрены примеры построения и исследования различных математических моделей. На этих примерах проиллюстрированы изложенные выше общие соображения и принципы.

ЗАДАЧА О КОШКЕ

Начнем с одной весьма поучительной модели, выводы которой сильно расходятся с обычной физической интуицией.

Идеальную сферу радиусом 6 400 000 метров (примерный радиус Земли) обматывают по экватору тонкой, невесомой, нерастяжимой нитью, плотно, без зазора. Затем нить разрезают, и вставляют кусочек длиной в 1 метр. Теперь нить неплотно прилегает к сфере. Получившийся зазор равномерно распределяют по всему экватору. Пролезет ли в образовавшийся зазор обыкновенная домашняя кошка? Нить поднимать нельзя.

Это – задача о величине образовавшегося зазора. Зависит ли величина зазора от радиуса сферы?

Физическая интуиция говорит, что увеличение длины экватора $2\pi R \approx 6,28 \cdot 6400 \approx 40192$ километров (т.е. около 40 тысяч километров) на 1 метр составляет примерно $\frac{1}{40192000} * 100\% \approx 0,0000025\%$, т.е. ничтожные доли процента. Значит, зазор получится такой, что кошка в него не пролезет. Однако, простые геометрические вычисления (проверьте!) показывают, что величина образовавшегося зазора равна $1/(2\pi)$ метров, т.е. примерно 16 см. Причем, результат (что противоречит интуиции!) **не зависит** от радиуса объекта. С тем же успехом можно обмотать Солнце, радиус которого равен примерно 696340 километров, т.е. около 109 радиусов Земли, а длина солнечного «экватора» составляет примерно 4 400 000 километров (почти четыре с половиной миллиона километров!), а затем увеличить длину нити всего на 1 метр, и получить зазор той же (!) величины, т.е. приблизительно 16 см. Так, **верные** предсказания модели могут **противоречить** интуиции!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Рассмотрим небольшой груз, подвешенный на тонкой невесомой нерастяжимой нити. Пренебрежём размерами груза, и будем считать, что вся его масса сосредоточена в одной точке, т.е. считаем его материальной точкой (точкой, не имеющей размеров, но имеющей массу). Такую модель, в которой пренебрегают размерами груза и свойствами нити, называют математическим маятником.

Пусть маятник массы m свободно висит под действием силы тяжести mg на нити длины l ($g=9,8$ м/с² ускорение свободного падения на Земле). Поскольку маятник находится в равновесии, то на него действуют две взаимно уравновешивающие силы:

$P=mg$ вес маятника и сила упругости со стороны нити $F_{упр}$ (рис 3).

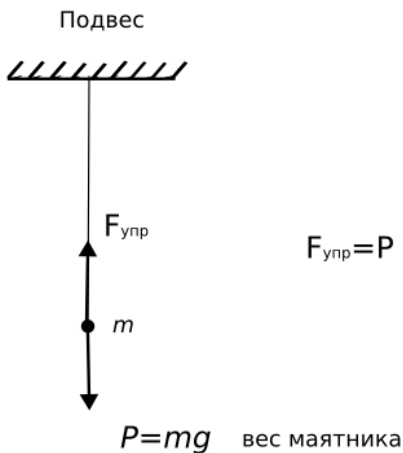


Рис 3. Математический маятник.

Отклоним маятник на небольшой угол φ от положения равновесия (рис. 4).

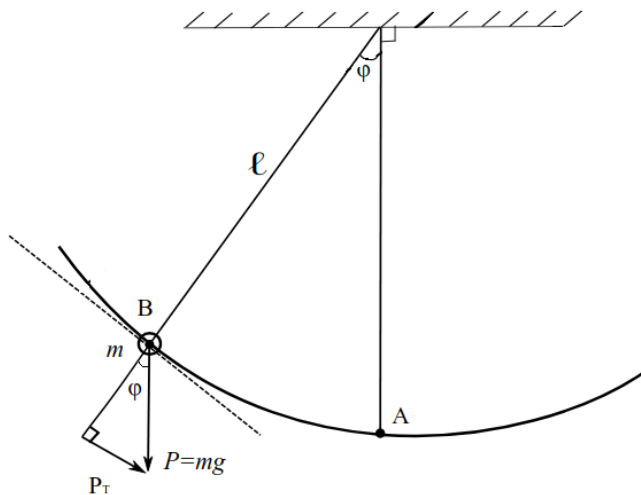


Рис. 4. Отклонение маятника от положения равновесия.

Тогда величина силы P_T , направленной по касательной к траектории, и возвращающей маятник в положение равновесия, равна $P_T = -mgsin\varphi$.

Величина дуги $AB=S$, которую прошел маятник есть $S = \varphi l$.

Согласно второму закону механики Ньютона: $m \frac{d^2 S}{dt^2} = P$, то есть $m \frac{d^2(\varphi l)}{dt^2} = -mgsin\varphi$.

Или $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\varphi = 0$.

Если угол φ отклонения маятника от вертикали мал, то $sin\varphi \approx \varphi$. В этом предположении получаем уравнение колебаний математического маятника:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \text{где обозначено } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Эта модель позволяет предсказывать величину угла отклонения маятника от вертикали при условии, что этот угол не слишком большой, а также, например, частоту колебаний маятника $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

ЗАДАЧА ОБ ОСТЫВАНИИ КОФЕ

В начальный момент времени кофе имел температуру 90°C . Спустя 10 минут температура была 80°C . Какую температуру будет иметь кофе спустя 30 минут?

Рассмотрим более общую задачу: имеется чашка горячего кофе, которая остывает. Требуется выяснить закон, по которому меняется температура кофе со временем, а также проверить адекватность (точность предсказаний модели).

Будем опираться на следующий экспериментальный факт, установленный Ньютоном (закон излучения Ньютона): "Скорость остывания тела прямо пропорциональна разности температур между телом и окружающей средой".

Введем обозначения:

$x(t)$ – температура кофе (в градусах Цельсия) в момент времени t (в минутах).

$T_{\text{окр}}$ – температура окружающей среды. В рамках данной модели будем считать её неизменной, или меняющейся столь медленно, что этим можно пренебречь.

Тогда, в этих обозначениях, dx/dt есть скорость остывания кофе. Согласно закону излучения $\frac{dx}{dt} \sim x(t) - T_{\text{окр}}$, или $\frac{dx}{dt} =$

$k(x(t) - T_{окр})$, где k – некоторый коэффициент пропорциональности. Физический смысл этого коэффициента состоит в том, что он учитывает все детали процесса переноса тепла от кофе в окружающую среду (теплоемкость кофе и среды, теплопроводность чашки, геометрию задачи, детали переноса и т.п.). Этот параметр определяется экспериментально.

Итак, опираясь на экспериментальный закон излучения, мы построили простейшую математическую модель остывания кофе – дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = k(x(t) - T_{окр})$$

Исследуем эту модель. Разделяя в этом уравнении переменные, и интегрируя по времени, получим

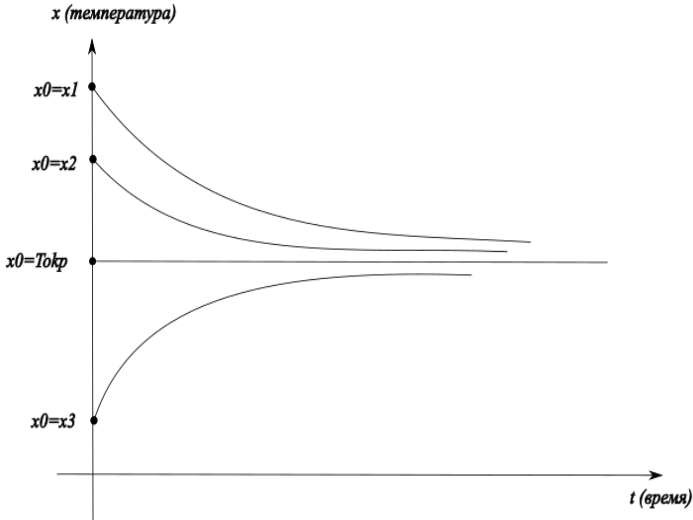
$$x(t) = T_{окр} + C \exp(kt)$$

В этой простой модели решение удалось получить аналитически. При этом видим, что модель имеет бесконечное множество решений – семейство законов описывающих как меняется температура кофе с течением времени (при каждом значении C свой закон).

Выясним смысл произвольной константы интегрирования C . Пусть в момент времени $t=0$ кофе имел температуру x_0 , т.е. $x(0)=x_0$. Тогда $x(0)=T_{окр} + C$, или $C=x_0 - T_{окр}$. Константа C – это разность начальной температуры кофе и окружающей среды. Закон изменения температуры

$$x(t) = T_{окр} + (x_0 - T_{окр}) \exp(kt).$$

На рисунке ниже (рис. 5) показано, как меняется со временем температура кофе для различных значений начальной температуры x_0 :


 Рис.5 Графики зависимости $x(t)$.

Наша модель позволяет делать проверяемые предсказания, а именно, вычислять температуру в заданный момент времени. Кроме того, модель предсказывает, что, например, при начальной температуре кофе $x_0 = T_{окр}$ температура с течением времени останется постоянной, а при начальной температуре кофе ниже окружающей среды $x_0 = x_3$ кофе будет постепенно нагреваться до температуры окружающей среды.

Проверим адекватность модели. Для этого выполним реальный эксперимент (вместо кофе использована вода) и сравним с предсказаниями модели (предлагаем читателю провести эксперимент самостоятельно, и **проверить** всё, изложенное здесь!). Измерим температуру окружающей среды $T_{окр} = 22,8 \text{ C}^\circ$ (рис. 6). Далее, измерим температуру чашки при $t=0$ (рис. 7) и при $t=10$ (рис. 8).

Математическое моделирование



Рис. 6 $T_{\text{окр}}=22,8$

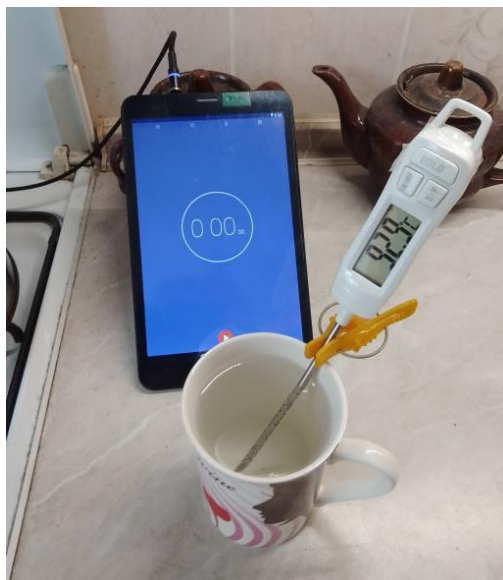


Рис. 7 – начальная температура
 $x_0=92,9$

Математическое моделирование

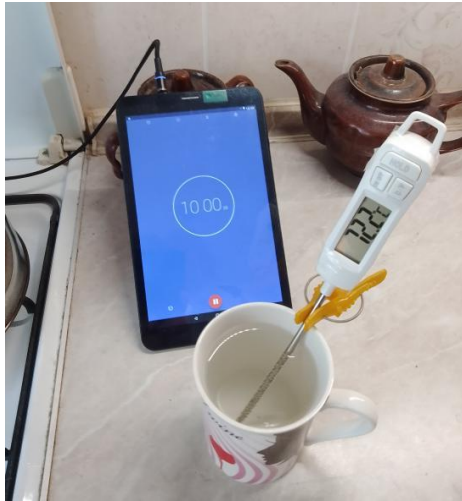


Рис. 8 $x(10)=72,2$ $t=10$ минут

Параметр k в законе изменения температуры $x(t)=x_0+(x_0-T_{окр}) \cdot \exp(kt)$ найдем из условия, что при $t=10$ температура $x=72,2$: $72,2 = 22,8 + (92,9-22,8) \cdot \exp(10k)$

Решая это уравнение находим $k= - 0.03499723698$. Итак, имеем следующую модель:

$$x(t)=22,8+70,1 \cdot \exp(- 0.03499723698 t).$$

Сравним предсказания модели и реальную температуру при $t=30$ минут.

Предсказание модели:

$x(30)=22,8+70,1 \cdot \exp(- 0.03499723698 \cdot 30) = 47,3$ С°. Результат эксперимента на рис. 9, температура равна 52,3 С°.

Математическое моделирование



Рис. 9. $\chi(30)=52,3\text{ C}^\circ$

Абсолютная ошибка модели составляет 5 C° на промежутке в 20 минут. Относительная ошибка $5/52,3 \cdot 100 = 9,6$ т.е. примерно 10%.

На фото (рис. 10 и 11) показаны результаты измерений при $t=60$ и $t=120$ минут.



Рис.10 $\chi(60)=39,3\text{ C}^\circ$

Математическое моделирование

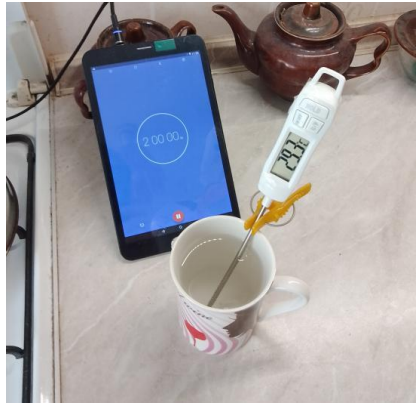


Рис 11. $\chi(120)=29,3\text{ C}^\circ$

Сравнение модели с экспериментом на больших временах показывает, что со временем ошибка модели сначала растёт, а затем начинает уменьшаться (рис. 12). Так, при $t=60$ минут относительная ошибка составляет примерно 20%, а при $t=120$ минут примерно 18%.

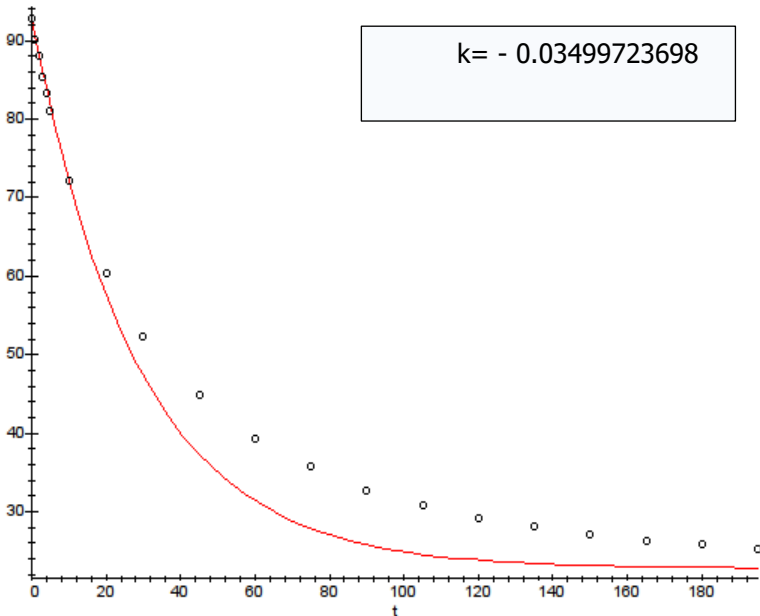


Рис. 12. Сплошная линия – предсказания модели, точки результаты эксперимента.

По вертикали – температура в градусах С°, по горизонтали – время в минутах.

Заметим, что модель занижает температуру. Выяснение причин этого эффекта отдельная задача, которая требует обстоятельного обсуждения и отдельных экспериментов.

Одна из возможных гипотез состоит в том, что в начальный момент времени в силу неустановившихся (переходных) процессов, поток тепла во внешнюю среду больше, чем в последующие моменты времени. Коэффициент k определяется именно по этим начальным данным, пока переходные процессы не завершились, и, следовательно, является неточным. Кроме того, наша модель не учитывает нагрев стола под чашкой и испарение с ее поверхности.

Здесь, естественным образом, возникает широко встречающаяся задача *идентификации параметров* модели: как выбрать значение параметра k , таким образом, чтобы модель наиболее точно описывала результаты эксперимента? Для уточнения значения k понадобятся дополнительные результаты измерений, которые приведены в таблице 1, где использована лишь часть данных эксперимента (все данные можно увидеть в таблице 2).

Таблица 1. Часть данных эксперимента для идентификации параметра k .

Время (минуты)	0	5	10	30	60	90	120
Измеренная температура °С	92,9	81,1	72,2	52,3	39,3	32,8	29,3

Естественно допустить, что теоретическая кривая на рисунке 12 должна быть такой, чтобы отклонение экспериментальных точек от неё было минимальным. В нашем случае дело упрощается тем обстоятельством, что параметр k модели всего один.

Составим функционал $F(k) = \sum_i \frac{|x(t_i) - x_i|}{x_i}$, который представляет собой суммарную относительную ошибку модели. Здесь $x(t)$ – предсказание модели в момент t , x_i – результат измерений в этот момент времени. Типичный вид функционала $F(k)$ в нашем случае приведен на рисунке 13.

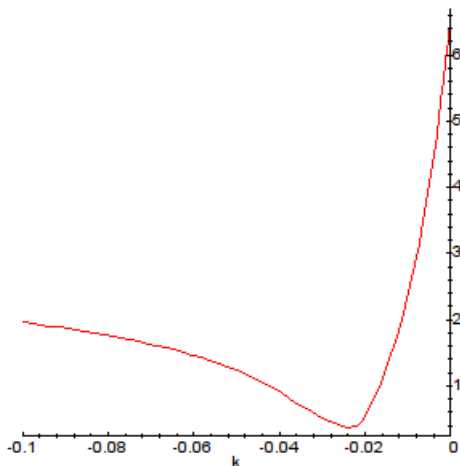


Рис. 13. Типичный вид функционала $F(k)$

Для минимизации этого функционала по k можно использовать самый простой метод поиска – поиск минимума значения функционала с равномерным шагом:

Движемся с начальным шагом h по параметру k до тех пор пока значения функционала в следующей точке меньше, чем в предыдущей. Иначе, меняем шаг h на шаг $-h/2$. Останавливаемся, когда необходимая точность достигнута. Вычисления дают значение $k = -0,02410937347$.

Посмотрим, какова теперь *точность* нашей модели, как она способна *интерполировать* (описывать) и *экстраполировать* (прогнозировать) температуру чашки. Полные данные эксперимента и предсказания модели для этого значения k представлены на рис. 14 и в таблице 2, некоторые значения (для удобства) округлены.

Таблица 2.

Время (минуты)	Эксперимент, температура °C	Модель, температура °C	Абсолютная ошибка, °C	Относительная ошибка, %
0	92,9	92,9	0	0
1	90,2	91,2	-1	1
2	88,1	89,6	-1,5	2
3	85,3	88,0	-3	3
4	83,2	86,4	-3	4
5	81,1	84,9	-4	5
10	72,2	77,9	-6	8
20	60,3	66,1	-6	10
30	52,3	56,8	-4,5	9
45	44,8	46,5	-1,7	4
60	39,3	39,3	$<10^{-7}$	0
75	35,8	34,3	1,5	4
90	32,8	30,8	2	6
105	30,8	28,4	2,4	8
120	29,3	26,7	2,6	9
135	28,1	25,5	2,6	9
150	27,1	24,7	2,4	9
165	26,3	24,1	2,2	8
180	25,8	23,7	2,1	8
195	25,2	23,4	2	7

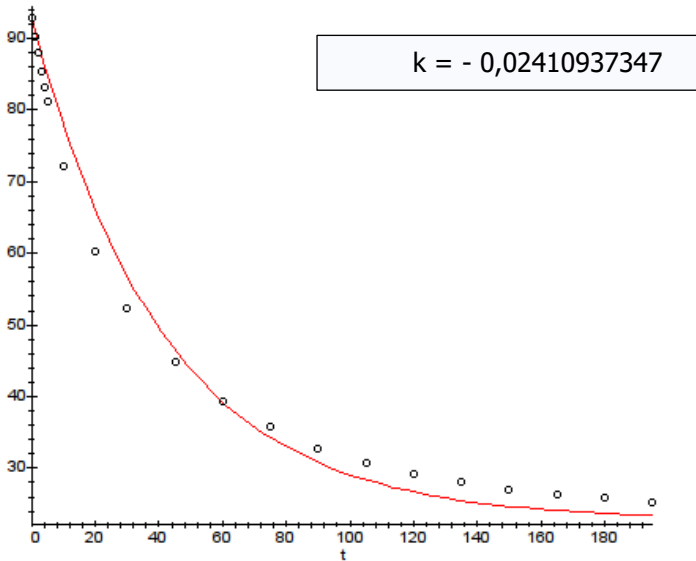


Рис. 14. Эксперимент (точки) и предсказания модели (кривая), $k = -0,02410937347$.

Средняя относительная ошибка модели составляет теперь 5,7%.

Заметим, что модель была построена на данных из промежутка $0 \leq t \leq 120$, и на этом промежутке её предсказания имеют относительную ошибку порядка 5%. За границами этого промежутка ($t > 120$) ошибка модели порядка 8%. Весьма неплохой результат для столь простой модели.

Указанный выше способ идентификации параметра k , конечно же, не единственный. Можно поступить иначе. Прологарифмировав уравнение модели $x(t) - x_0 = (x_0 - T_{\text{окр}}) * \exp(kt)$, и вводя переменную $y = \ln(x(t) - x_0)$ получим $y(t) = \ln(x_0 - T_{\text{окр}}) + kt$. В переменных (t, y) теоретическая зависимость $y(t)$ будет иметь вид прямой с угловым коэффициентом k . Введем в рассмотрение величины $y_i = \ln(x_i - x_0)$.

Прологарифмируем данные из таблицы 1. Получим следующие пары точек $[t, y]$:

$[0, 4.249922794]$, $[5, 4.065602093]$, $[10, 3.899950424]$, $[30, 3.384390263]$, $[60, 2.803360381]$, $[90, 2.302585093]$, $[120, 1.871802177]$.

Требуется найти уравнение прямой $y=kt+b$, для которой отклонение точек от этой прямой будет наименьшим (сплошная линия на рисунке 15). В нашей задаче, нам понадобится угловой коэффициент k этой прямой.

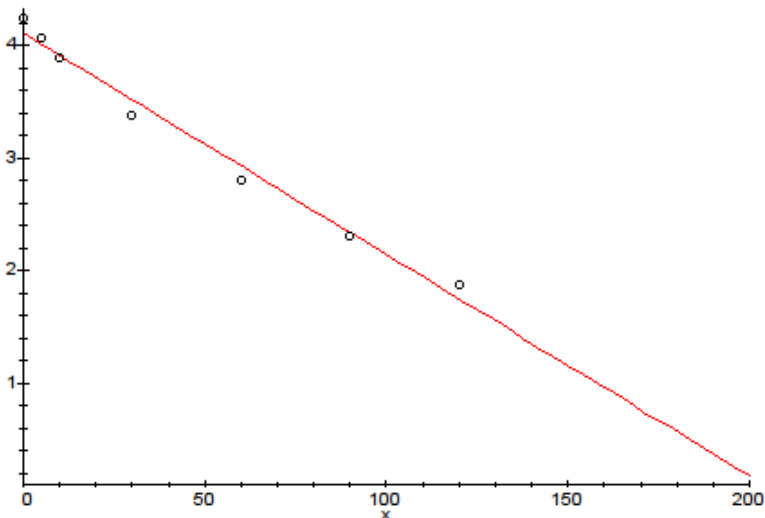


Рис.15. Прологарифмированные данные эксперимента y_i (точки) и прямая $y=kt+b$.

Для нахождения уравнения такой прямой применяют так называемый метод наименьших квадратов.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Чтобы пояснить идею метода начнем с хорошо известного из евклидовой геометрии факта: через две точки можно провести единственную прямую. А как обстоят дела с тремя точками? Через них можно провести единственную прямую только в том случае, если эти точки расположены специальным образом. В случае произвольного расположения точек сделать это невозможно. Тем не менее, в этом случае, можно провести прямую так, чтобы точки отклонялись от нее "наименьшим" образом (рис. 16).

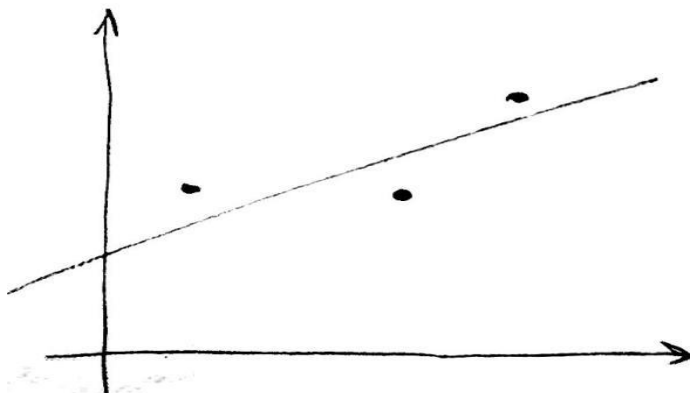


Рис. 16. Как провести прямую через три произвольные точки.

Эту идею можно обобщить на большее число точек (рис. 17) и на более сложные зависимости, чем линейная (рис. 18).

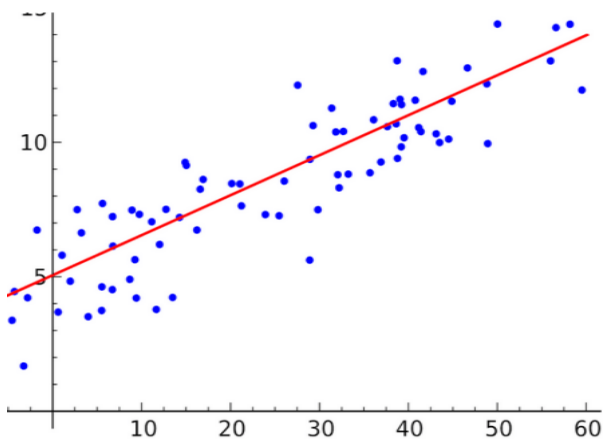


Рис 17. Линейная зависимость.

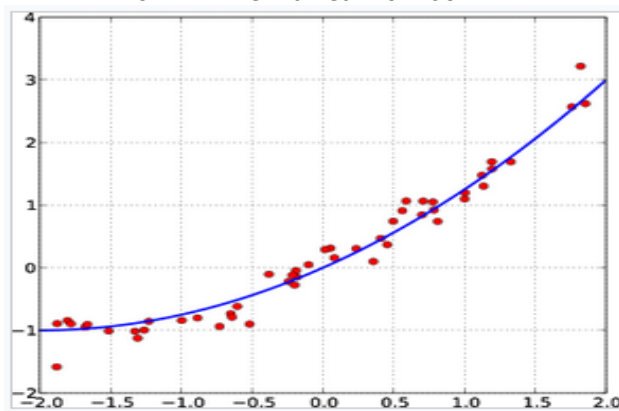


Рис 18. Нелинейная зависимость.

При экспериментальном изучении зависимости величины y от величины x производят ряд измерений y при разных значениях x . Результаты измерений можно представить в виде таблицы:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Возникает следующая задача: найти вид функциональной зависимости $y=f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$, "наилучшим" образом описывающей эти данные.

На первом этапе выбирают вид функции f наилучшим образом описывающую результаты эксперимента, изобразив на графике точки таблицы, причем в качестве $f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$ берут некоторую, обычно дифференцируемую функцию. На втором этапе подбором параметров a_1, a_2, \dots, a_k обеспечивают минимум величины

$$F(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n (f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k) - y_i)^2 \quad (1)$$

которая называется квадратичным функционалом невязки, и представляет собой сумму квадратов отклонений точек из таблицы от выбранной кривой $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$ [8].

Карл Фридрих Гаусс впервые (1795 г.) применил такой метод, когда производил геодезическую съемку Ганновера, а Лежандр независимо открыл и опубликовал его (1805 г.) под современным

названием “Метод наименьших квадратов” (фр. Méthode des moindres quarrés).

Необходимое условие экстремума функционала F состоит в равенстве 0 его частных производных по параметрам a_1, a_2, \dots, a_k . Из полученной таким образом системы уравнений определяют значения параметров a_1, a_2, \dots, a_k , доставляющие минимум функционала (1).

В самом простом случае, с которого мы начали, в качестве такой зависимости f используют линейную зависимость $f(x, a, b) = ax + b$. Для этой зависимости метод наименьших квадратов (МНК) называют линейной регрессией. Функционал имеет вид

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Необходимым (а для линейной зависимости и достаточным) условием экстремума является равенство нулю частных производных по параметрам a и b :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0$$

После упрощения получим систему линейных уравнений относительно параметров a и b :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Обозначим коэффициенты этой системы

$$k_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad k_{12} = k_{21} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad k_{22} = n, \quad \gamma_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \gamma_2 = \sum_{i=1}^n y_i$$

Решая систему

$$\begin{cases} k_{11}a + k_{12}b = \gamma_1 \\ k_{21}a + k_{22}b = \gamma_2 \end{cases}$$

найдем значения a и b , которые обеспечивают минимум функционала $F(x, a, b)$.

Применение МНК к прологарифмированным данным из таблицы 1 (модель строится по части данных эксперимента) даёт прямую $y=kt+b$ с коэффициентами

$$k := - 0.0196975158, \quad b := 4.111761528$$

Эта прямая изображена на рис.19. На этом же рисунке точками изображены все прологарифмированные данные эксперимента (МНК применялся только к данным из таблицы 1, т.е. на промежутке $t=0...120$). Таблица 3 позволяет оценить ошибку модели, а на рис. 20 данные из таблицы 3 изображены на графике.

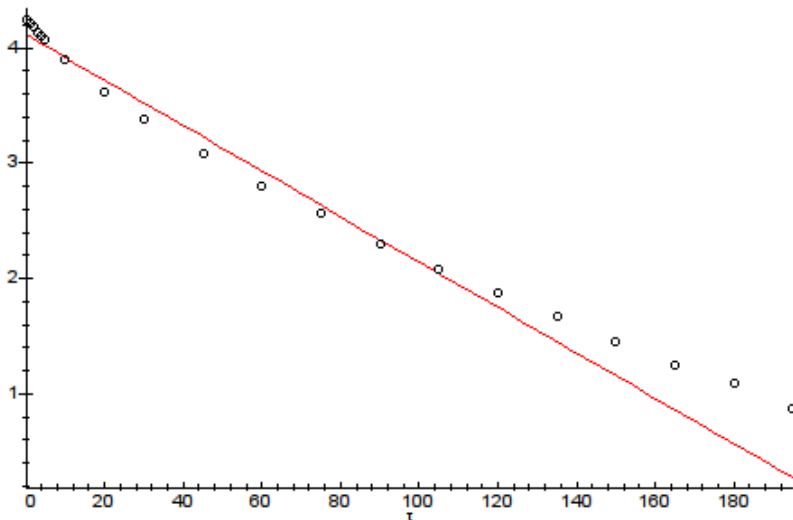


Рис. 19. Прямая $y=kt+b$ и величины $y=\ln(x_t-x_0)$

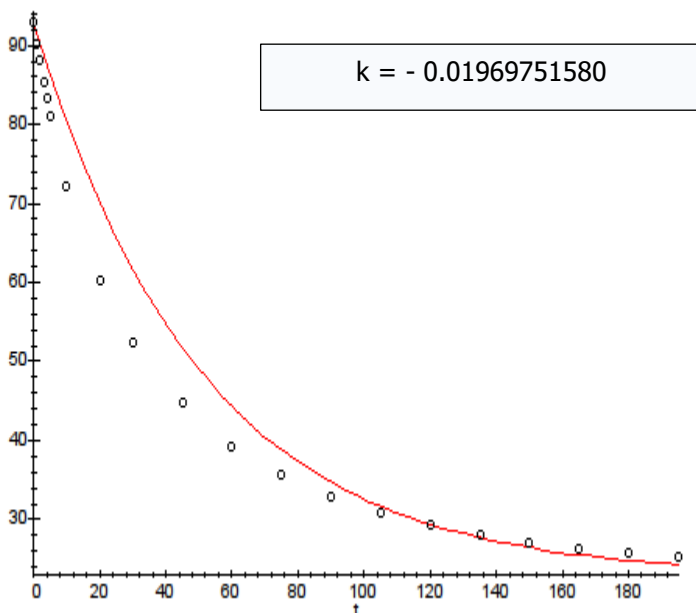


Рис. 20. Модель при $k = -0.01969751580$. По горизонтали – время t , по вертикали – температура $x(t)$.

Точки – эксперимент, сплошная кривая – модель.

Таблица 3.

Время (минуты)	Эксперимент, температура °C	Модель, температура °C	Абсолютная ошибка, °C	Относительная ошибка, %
0	92,9	92,9	0	0
1	90,2	91,5	-1,3	1,5
2	88,1	90,2	-2,1	2,4
3	85,3	88,9	-3,6	4,2
4	83,2	87,6	-4,4	5,3
5	81,1	86,3	-5,2	6,4
10	72,2	80,4	-8,2	11,3
20	60,3	70,1	-9,8	16,2
30	52,3	61,6	-9,3	17,8
45	44,8	51,7	-6,9	15,4

60	39,3	44,3	-5	12,7
75	35,8	38,8	-3	8,4
90	32,8	34,7	-1,9	5,8
105	30,8	31,7	-0,9	2,8
120	29,3	29,4	-0,1	0,3
135	28,1	27,7	0,4	1,4
150	27,1	26,5	0,6	2,4
165	26,3	25,5	0,8	3
180	25,8	24,8	1	3,8
195	25,2	24,3	0,9	3,5

На промежутке $0 < t < 75$ относительная погрешность модели довольно велика ($\sim 15\%$), однако, весьма мала при $t > 75$ ($\sim 3\%$). Средняя относительная ошибка такой модели составляет $6,2\%$.

Если нас не очень интересуют малые времена (пока переходные процессы не завершились), и мы хотим прогнозировать температуру через достаточно долгое время, то можно строить модель начиная с некоторого момента времени t_0 . В этом случае модель будет иметь вид: $\chi(t) = T_{\text{окр}} - (\chi(t_0) - T_{\text{окр}}) * \exp(k(t-t_0))$.

Результат такого моделирования изображен на рис. 21.

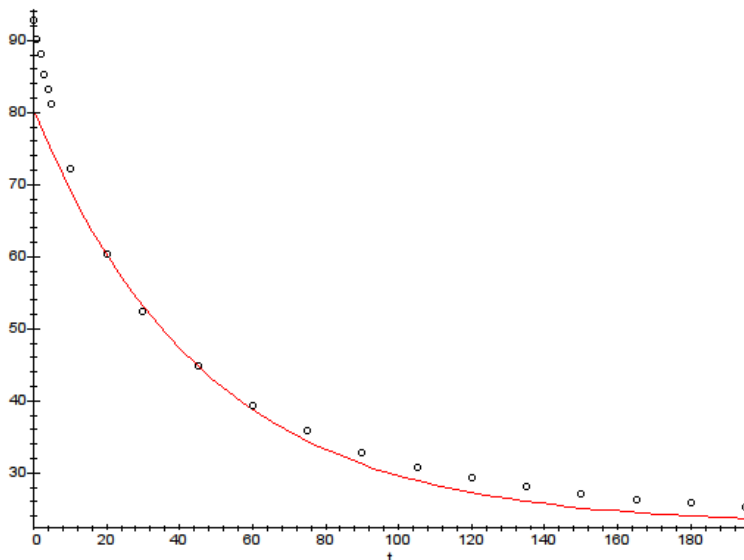


Рис.21. Модель для $t_0=20$.

Как видим, способ построения модели существенно зависит от тех вопросов, на которые мы желаем получить ответ.

Рассмотрим еще один подход к построению математической модели рассматриваемого процесса (в данном случае - остывания чашки с кофе). Если нас интересуют только значения внутри некоторого промежутка времени, для которого можно получить данные эксперимента, то можно вообще не интересоваться никакими феноменологическими закономерностями (такими, как закон излучения), а использовать так называемую интерполяцию данных эксперимента.

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть имеется набор точек (x_i, y_i) , которые называют узлами. Требуется построить функцию $f(x)$, такую, что $f(x_i) = y_i$. Такая задача называется задачей интерполяции. [4]. Функцию $f(x)$ называют интерполирующей функцией. Задачу можно решить, если имеется n точек и искомая функция $f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ содержит n параметров a_1, a_2, \dots, a_n , которыми можно распорядиться.

На рис. 22 приведен пример интерполяции по трем узлам: $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(5, 8)$ функцией $f(x, a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 * \exp(a_3 * x)$.

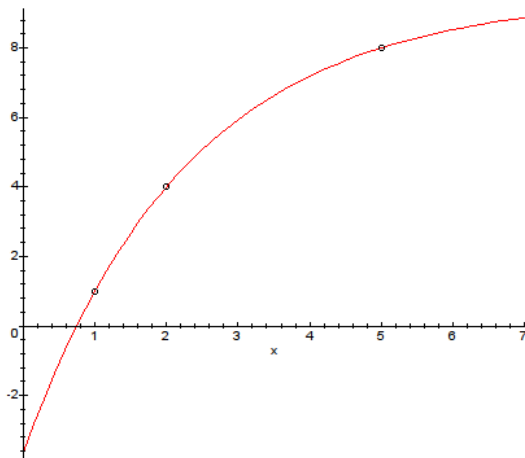


Рис. 22. Интерполяция по трем узлам функцией $f(x) = a_1 + a_2 * \exp(a_3 * x)$, Значения параметров $a_1 = 9.477489731$, $a_2 = -13.12057816$, $a_3 = -0.4367674660$.

Здесь, поскольку параметр a_3 входит нелинейно, возникают трудности, связанные с тем, что условия $f(x_i) = y_i$, из которых определяются параметры a_1, a_2, a_3 , приводят к нелинейной системе трех уравнений (выпишите ее!), решение которой представляет собой достаточно трудную задачу.

Поэтому, в качестве интерполирующей функции f обычно берут такую, в которую параметры входят линейно:

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x) \quad (2)$$

где $\varphi_i(x)$ – заданные функции, линейно независимые на отрезке интерполяции,

a_i – коэффициенты, которые можно найти из условия $f(x_i) = y_i$.

В этом случае, для определения коэффициентов a_i получается система линейных алгебраических уравнений, которую легко решить. Функцию (2) называют интерполяционным многочленом по системе функций $\varphi_i(x)$.

В самом простом случае в качестве $\varphi_i(x)$ удобно взять $\varphi_i(x) = x^{i-1}$. Тогда получаем интерполяционный полином по степеням x : $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}$.

Например, для двух узлов это будет прямая $f(x) = a_2x + a_1$, а случае трех точек – парабола $f(x) = a_3x^2 + a_2x + a_1$.

Задача вычисления коэффициентов a_i – это задача решения системы линейных алгебраических уравнений: $\sum_{i=1}^n a_i x_k^{i-1} = y_k$. В случае, когда все узлы x_k различны, эта система линейных уравнений имеет единственное решение. Коэффициенты a_i можно вычислить, непосредственно решая данную систему, например, методом Гаусса, Крамера, или же иным способом. Однако, непосредственное вычисление коэффициентов a_i уже при $n \geq 20$ связано с большой вычислительной погрешностью.

Можно, однако, сразу получить явное выражение для интерполяционного многочлена $f(x)$, (т.е. найти его коэффициенты) что избавляет от необходимости решать такую систему линейных уравнений. Задача определения коэффициентов a_i будет решена, если удастся построить набор многочленов $\Phi_i(x)$, степени не выше $n - 1$, таких, что $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$ символ Кронекера.

Тогда многочлен $f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \Phi_i(x)$ будет искомым интерполяционным многочленом, т.к.

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n y_i \Phi_i(x_j) = \sum_{i=1}^n y_i \delta_{ij} = y_j.$$

Т.к. числа x_j – это корни многочленов $\Phi_i(x)$, то $\Phi_i(x_j) = 0$, (при $i \neq j$), поэтому

$\Phi_i(x) = C \prod_{i \neq j}^n (x - x_j)$. Используя условия $\Phi_i(x_i) = 1$, имеем, что $\Phi_i(x) = \prod_{i \neq j}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Тогда, интерполяционный многочлен принимает вид: $f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{i \neq j}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Обозначим через $\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, тогда

$$f(x) = \omega(x) \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$$

есть искомый интерполяционный многочлен (его называют многочленом в форме Лагранжа).

Интерполяционный многочлен третьей степени, построенный по данным эксперимента (по четырем узлам $t=10, 30, 90$ и 120 минут) приведен на рис. 23. Видно, что модель (сплошная) плохо описывает эксперимент при малых и больших временах ($t < 10$ или $t > 120$).

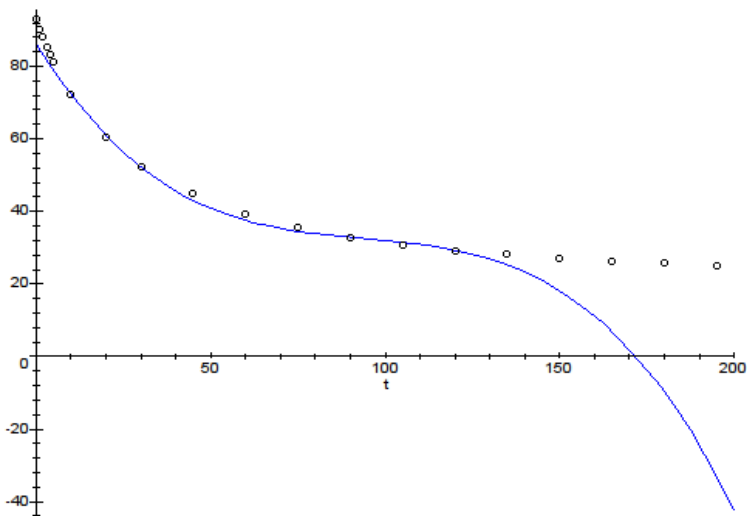


Рис. 23. Интерполяция данных эксперимента многочленом третьей степени по измерениям при $t=10, 30, 90$ и 120 минут.

Попытка увеличить число узлов интерполяции приводит к катастрофическим осцилляциям интерполяционного многочлена (рис. 24). Это – общая проблема полиномиальной интерполяции.

По этой причине полиномы выше третьей или четвертой степени используются редко.

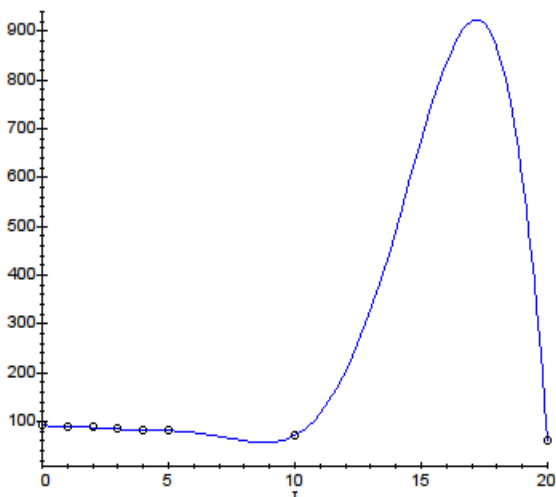


Рис. 24. Сильные осцилляции при попытке интерполяции многочленом высокой степени.

Имеется метод, позволяющий избежать подобных осцилляций. Для этого, "сшивают" (состыковывают по небольшому числу смежных узлов) соответствующие интерполяционные полиномы невысокой (обычно не выше третьей) степени. Таким образом можно получить удовлетворительный результат. В этом состоит идея так называемой сплайн-интерполяции (сплайн – гибкая линейка) [5, 10]. На рис. 25 – сплайн-интерполяция по 15 узлам полиномами 3-й степени на промежутке времени 0–120).

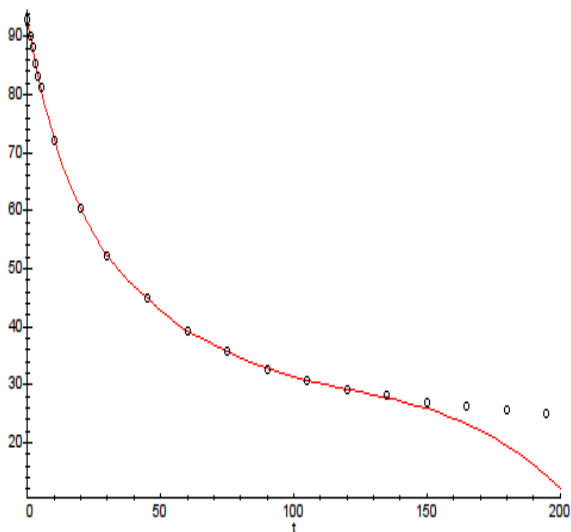


Рис. 25. Сплайн – интерполяция полиномами третьей степени. Модель – сплошная линия, точки – эксперимент. Предсказания модели для $t > 150$ имеют неприемлемо большую погрешность.

Из изложенного выше видно, что интерполяционные модели дают удовлетворительную точность внутри промежутка на котором они строятся, однако, при экстраполяции (за пределами этого промежутка) имеют большую погрешность.

В заключение этого раздела приведем результат интерполирования по трем, четырем и пяти узлам данных эксперимента (рисунки 26–28) функциями, в которые часть параметров входят нелинейно. Отметим, что в последнем случае (рис. 28) пришлось решать нелинейную систему пяти уравнений.

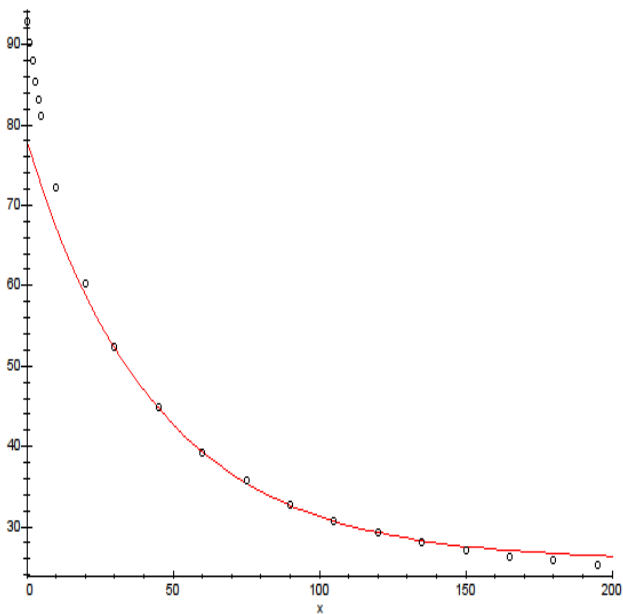


Рис. 26. Интерполяция данных эксперимента функцией $f(x, a1, a2, a3) = a1 + a2 * \exp(a3 * x)$ по трем узлам при $t = 30, 60, 120$. $a3 = -0.2247296130e-1$, $a2 = 52.01905503$, $a1 = 25.79267114$. Модель плохо описывает эксперимент при малых временах.

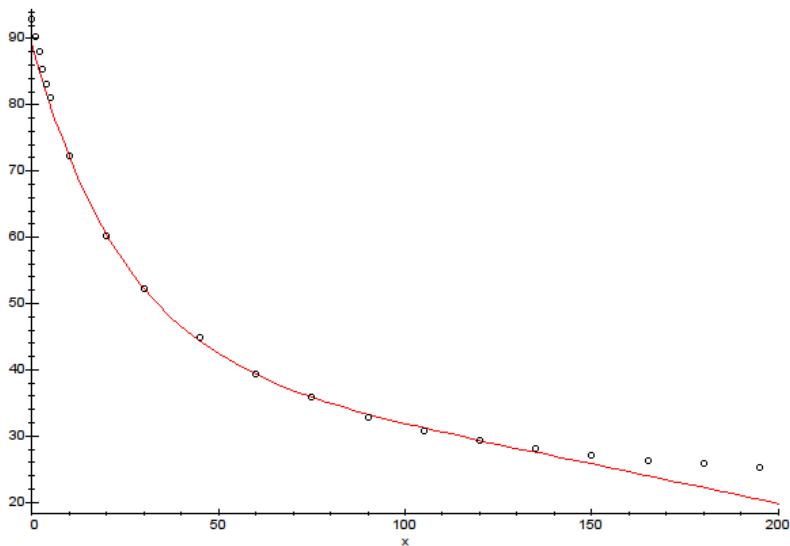


Рис. 27. Интерполяция эксперимента функцией $f(x, a1, a2, a3, a4) = a1 + a2 * (\exp(a3 * x) - \exp(a4 * x))$ по четырем узлам при $t=10, 30, 60, 120$. Коэффициенты $a3 = -0.4056476031e-1$, $a2 = 48.88504115$, $a1 = 89.37367570$, $a4 = 0.1769491153e-2$. Модель плохо описывает эксперимент при больших временах.

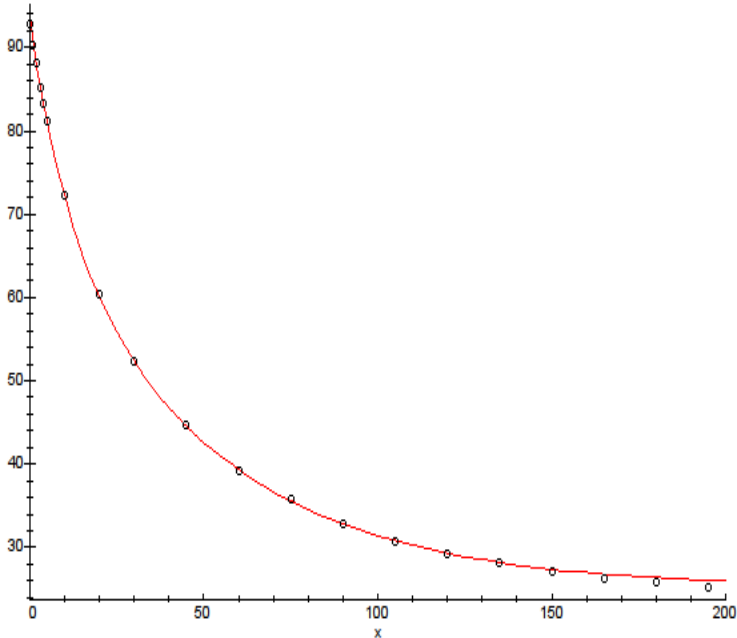


Рис. 28. Описание эксперимента функцией $f(x, a1, a2, a3, a4, a5) = a1 + a2 * \exp(a3 * x) - a4 * \exp(a5 * x)$ по пяти узлам при $t = 10, 30, 60, 90, 120$. Коэффициенты модели: $a[1] = 25.13447054$, $a[5] = -0.09385472996$, $a[4] = -20.85900602$, $a[2] = 47.66803637$, $a[3] = -0.02031235008$.

Модель хорошо описывает эксперимент (интерполирует), а также удовлетворительно экстраполирует экспериментальные данные при $t > 120$.

ГЕНЕРАТОР НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

Туннельный диод – полупроводниковый элемент, двухполюсник, имеющий *N*-образную вольт-амперную характеристику (рис. 29), на которой имеется участок (B) с отрицательным сопротивлением (увеличение напряжения U приводит к уменьшению тока i через диод).

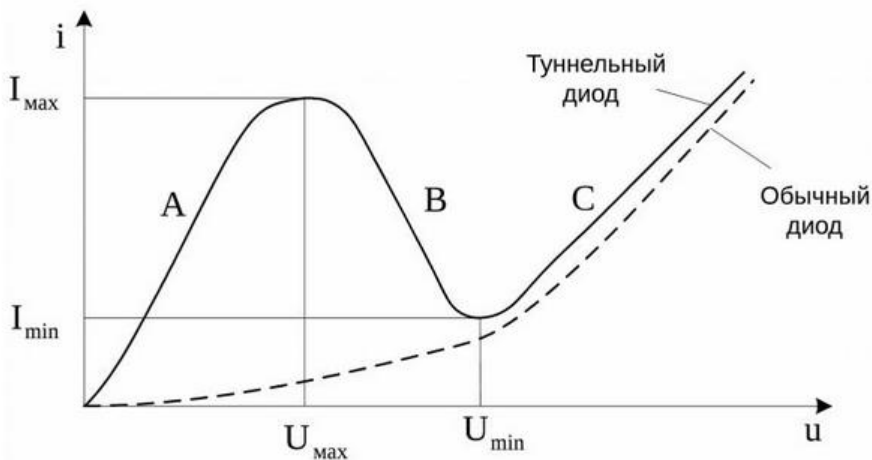


Рис. 29. Вольт-амперная характеристика туннельного диода. По горизонтали отложено напряжение u , приложенное к диоду, по вертикали – ток i , протекающий через диод.

На рис. 30 приведены вольт-амперные характеристики реального диода ЗИ202(Ж,И) при температурах 20, 60 и 85 градусах $^{\circ}\text{C}$.

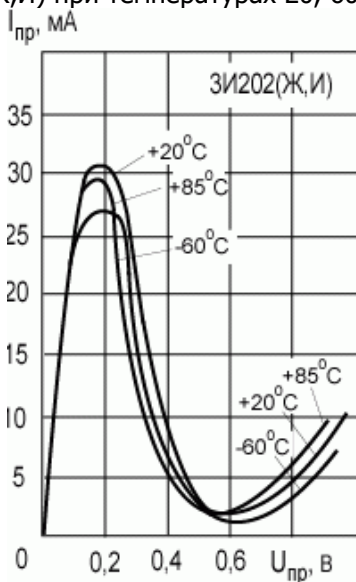


Рис. 30. Вольт-амперные характеристики диода ЗИ202(Ж,И).

В таблице 4 приведены данные для диода 3И202К:

Таблица 4.

U(вольт)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
I(мА)	0	52	23	2	4	13

На основе туннельного диода можно построить простой генератор электрических колебаний по схеме [9], приведенной на рис. 31.

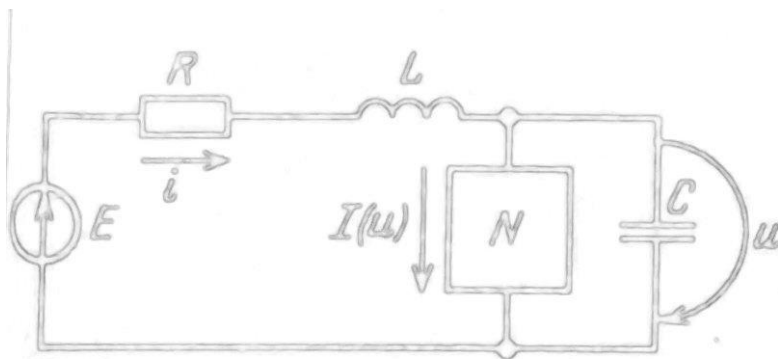


Рис. 31. Схема генератора: E – величина Э.Д.С. источника тока, R – сопротивление, L – индуктивность, C – емкость, N – туннельный диод.

Работа этой электрической схемы описывается системой двух дифференциальных уравнений:

$$E = iR + L \frac{di}{dt} + u$$

$$i = I(u) + C \frac{du}{dt}$$

Первое уравнение выражает тот простой факт, что сумма падений напряжений на последовательных участках цепи равна ЭДС источника. Второе – что суммарный ток i , текущий по цепи равен сумме токов протекающих через двухполюсник (диод) N и конденсатор C . Систему можно переписать в виде:

$$L \frac{di}{dt} = E - i(t)R - u(t)$$

$$C \frac{du}{dt} = i(t) - I(u)$$

где $I(u)$ – зависимость тока через диод от напряжения на нём.

Для моделирования работы этой схемы требуется, во-первых, построить аналитическую зависимость $I(u)$. Здесь можно воспользоваться методом интерполирования, описанным выше. Во-вторых, нужно решить данную систему дифференциальных уравнений. Для этого можно использовать хорошо известный численный метод Рунге-Кутта-Фельберга [8].

Построим интерполяционный полином $P_5(x)$ степени 5 по данным таблицы 4:

$$P_5(x) = 5734,375000 * x^5 - 3420,833333 * x^4 + 1119,791667 * x^3 - 4166,666667 * x^2 + 746,333333 * x$$

На рисунке 32 изображен график этого полинома (сплошная кривая) и данные из таблицы 4 (точки):

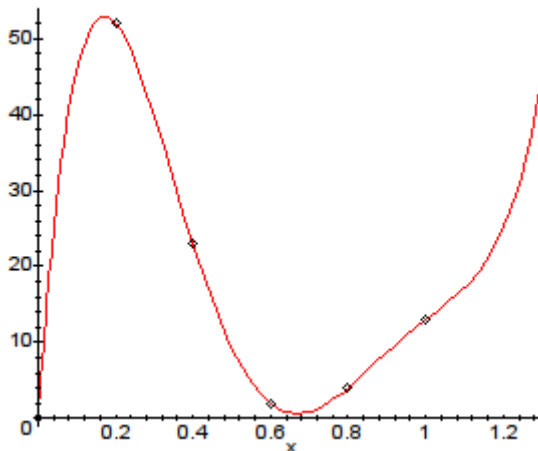


Рис. 32. Интерполяционный полином степени 5 по данным из таблицы 3. По горизонтали напряжение (вольты), по вертикали ток (миллиамперы).

Выберем следующие значения параметров модели: Э.Д.С. источника тока $E=0,5$ Вольт, сопротивление $R=5$ Ом, емкость $C=10^{-8}$ Фарад, индуктивность $L=5 \cdot 10^{-5}$ Генри.

Для решения системы дифференциальных уравнений используем метод Рунге-Кутты-Фельберга 4-го порядка точности. При вычислениях следует учесть, что значения интерполяционного полинома $P_n(u)$ выражен в миллиамперах, поэтому $I(u) = P_n(u)/1000$. Результаты моделирования представлены на рисунках ниже.

Зависимость тока $i(t)$ (в амперах) от времени (в секундах) представлена на рис. 33:

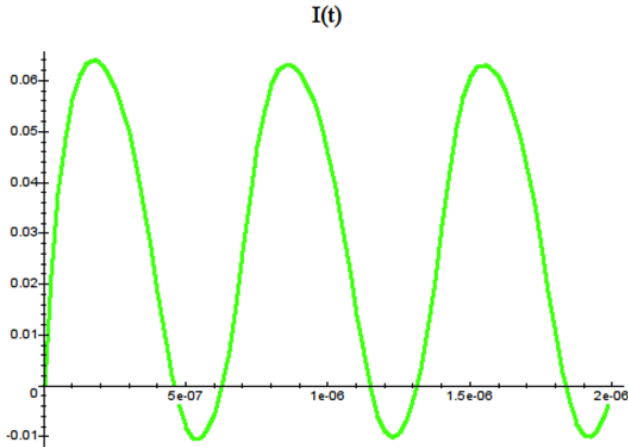


Рис.33. Зависимость $i(t)$

Зависимость напряжения $u(t)$ (в вольтах) от времени (в секундах) показана на рис. 34:

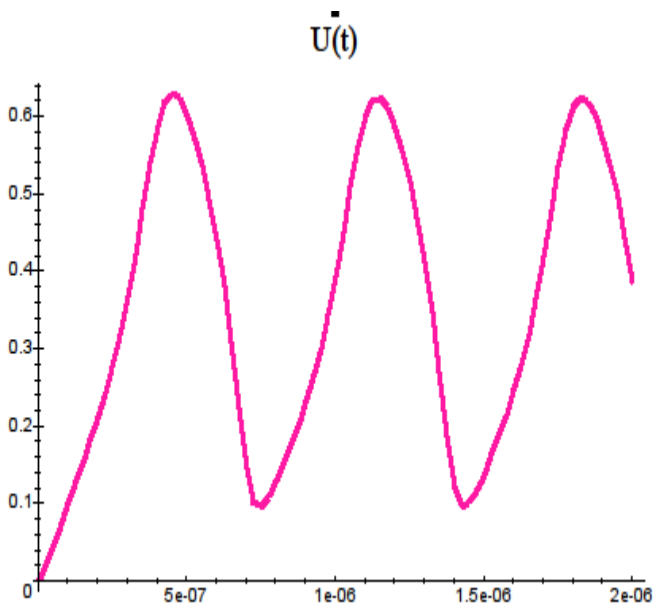


Рис. 34. Зависимость $u(t)$.

На рис. 35 приведены графики интерполяционного полинома и зависимость тока миллиамперы (mA) от напряжения (вольты). Видно, что решение $\dot{u}(t)$ системы дифференциальных уравнений образует предельный цикл автоколебаний.

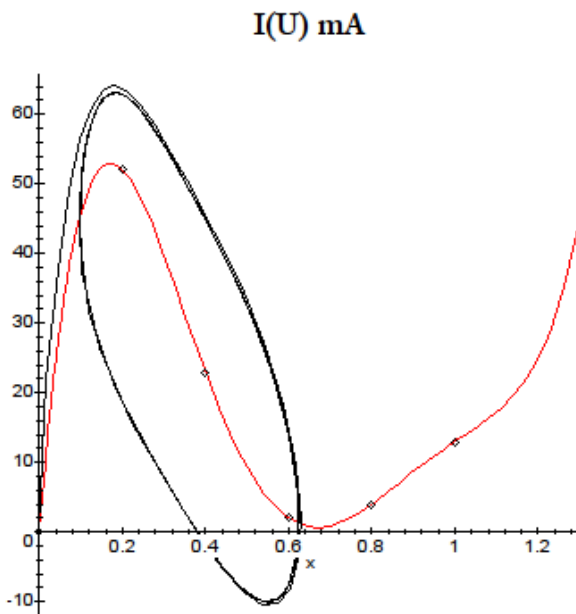


Рис.35. Зависимость тока от напряжения.

Частота этих автоколебаний, вычисленная по результатам моделирования составляет примерно $1,4 \cdot 10^{13}$ Гц.

На рис. 36. показано сравнение идеального генератора, формирующего гармонический сигнал такой же частоты, и сигнал генератора на туннельном диоде.

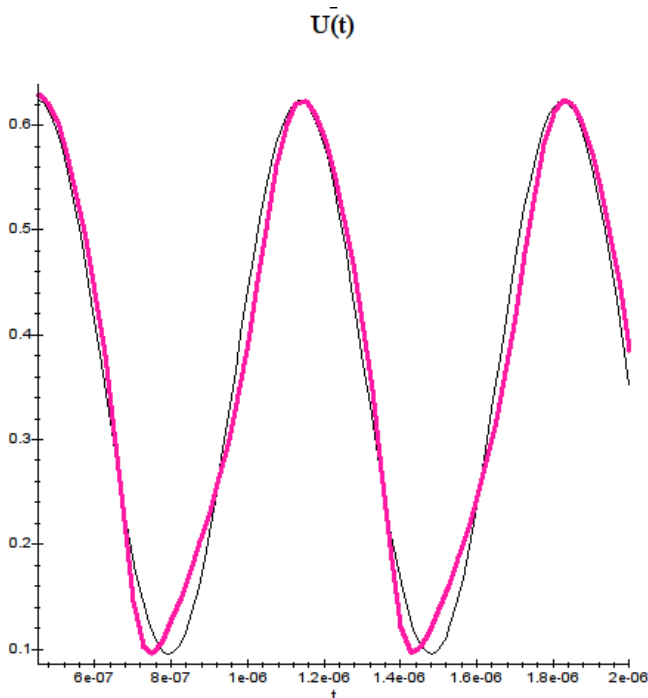


Рис.36. Сравнение сигнала идеального генератора (тонкая черная кривая) с генератором на диоде (жирная пурпурная кривая).

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Тело массы m падает вертикально вниз с некоторой высоты. Сила $F_{\text{тр}}$ вязкого трения, действующая на него пропорциональна величине его скорости v (механика Аристотеля): $F_{\text{тр}} = -kv$. Найти зависимость скорости $v(t)$ от времени t .

Решение: Обозначим через $v(t)$ скорость тела в момент времени t . На тело действуют две силы: сила тяжести mg , направленная вертикально вниз, и сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = -kv$, направленная противоположно (на что указывает знак минус), и равная силе тяжести по абсолютному значению. Тогда, согласно второму закону механики Ньютона ускорение тела определяется суммой всех внешних сил:

$$ma = F_{\text{тр}} + mg$$

Здесь a – ускорение тела. g – ускорение свободного падения. Т.к. ускорение есть производная скорости, то $m \frac{dv}{dt} = -kv + mg$. Тогда $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$. Обозначив $\gamma = -\frac{k}{m}$ имеем $\frac{dv}{g + \gamma v} = dt$. Интегрируя обе части этого равенства получим

$$\frac{1}{\gamma} \ln|g + \gamma v| = t + C$$

Отсюда $g + \gamma v = Ce^{\gamma t}$, или $v(t) = \frac{g}{\gamma} + C_1 e^{\gamma t}$. Тогда закон изменения скорости $v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$.

Если тело начинает движение с нулевой скоростью $v(0) = 0$, то $C = -\frac{mg}{k} e^{\frac{k}{m}t}$ и, закон изменения скорости имеет вид: $v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

Видно, что скорость с течением времени, возрастая, асимптотически стремится к значению $\frac{mg}{k}$.

ЗАДАЧА О ПАРАШЮТИСТЕ

В первом приближении можно считать, что падение парашютиста близко к движению тела в вязкой среде. Однако, это очень грубое приближение. Более точной является модель, которая учитывает площадь сечения падающего тела, а так же тот факт, что воздух является достаточно разреженной средой. В этих предположениях сила F сопротивления воздуха движению парашютиста пропорциональна квадрату его скорости v и площади поперечного сечения S , перпендикулярного к направлению движения: $F = kSv^2$

Требуется найти:

- 1) Зависимость $v(t)$
- 2) Радиус парашюта, чтобы при весе парашютиста в 100 кг наибольшая скорость падения не превышала 5 м/с. (Полагать, что $k=0,083$)

Решение: 1) Построим модель согласно законам механики Ньютона:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kSv^2$$

Разделяя переменные, и обозначив $a = \frac{kS}{m}$ получим, что

$$\frac{dv}{g - av^2} = dt$$

Интегрируя обе части находим, что $t = \frac{1}{2\sqrt{ag}} \ln \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{a}}{\sqrt{g} - v\sqrt{a}} + C$

Используя начальное условие $v(0) = 0$ находим, что $C=0$. Теперь выразим $v(t)$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{a} \frac{e^{2t\sqrt{ag}} - 1}{e^{2t\sqrt{ag}} + 1}} = \sqrt{\frac{g}{a}} \left(1 - \frac{2}{e^{2t\sqrt{ag}} + 1}\right).$$

Т.е. при $t \rightarrow \infty$ скорость $v \rightarrow \sqrt{\frac{g}{a}}$. На практике такая скорость достигается через несколько секунд.

2) Для вычисления радиуса парашюта воспользуемся тем, что $v \approx \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{mg}{kS}}$. Имеем $5 \approx \sqrt{\frac{100}{0,083\pi R^2}}$, отсюда $R \approx \frac{1}{5} \sqrt{\frac{100}{0,083\pi}} \approx 3,92$ м. Таким образом, радиус парашюта должен быть равен примерно 3 метра 92 сантиметра.

МОДЕЛИ РОСТА НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ

На следующем достаточно ярком примере рассмотрим задачу идентификации параметров модели. Простейшая модель роста народонаселения планеты Земля предложена Томасом Робертом Мальтусом (1766-1834) английским священником и экономистом. В этой модели скорость $\dot{x}(t)$ роста населения пропорциональна имеющемуся количеству $x(t)$:

$$\dot{x} = kx$$

где k – коэффициент пропорциональности, равный средней относительной скорости роста. Эта модель не реалистична, поскольку ее решение $x(t) = x_0 \exp(k(t-t_0))$, предсказывает экспоненциальный рост населения с течением времени t , что явно противоречит ограниченности пищевых и иных ресурсов планеты (x_0 – численность населения в момент времени t_0).

Более реалистична модель бельгийского математика Ферхюльста (1804-1849), учитывающая ограниченность ресурсов:

$$\frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

где λ – максимально возможная численность населения.

Решение этого уравнения :

$x(t) = \frac{\lambda x_0 e^{kt}}{\lambda + x_0 (e^{kt} - 1)}$, называют логистической кривой. В этой модели два положения равновесия: неустойчивое $x=0$ и устойчивое $x= \lambda$, к которому стремятся с течением времени все ненулевые решения.

Биолог Раймонд Пирл провел ряд экспериментов над популяциями плодовой мухи дрозофилы, и выяснил, что в лабораторных условиях численность колонии мух растет по логистическому закону.

Существует множество экспериментальных данных, показывающих, что для многих биологических систем в опытах реализуются траектории изменения их численности, соответствующие модели Ферхюльста-Пирла.

Уравнение Ферхюльста можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$$

Слагаемое $-bx^2$ учитывает ограниченность ресурсов («давление») окружающей среды.

На сайте [20] имеются данные о населении планеты с 1951 по 2024 год, они приведены в таблице 5.

Таблица 5. Данные о населении Земли с 1951 по 2024 год.

год	Население	Год	Население	год	Население	год	Население
1951	2 560 406 604	1971	3 739 627 183	1991	5 372 958 607	2011	7 001 071 861
1952	2 607 553 997	1972	3 815 162 572	1992	5 458 709 589	2012	7 085 473 969
1953	2 654 405 334	1973	3 891 308 177	1993	5 542 505 600	2013	7 170 293 122
1954	2 701 399 657	1974	3 967 410 338	1994	5 624 649 220	2014	7 255 029 148
1955	2 749 108 690	1975	4 043 288 795	1995	5 705 987 737	2015	7 339 619 737
1956	2 797 843 787	1976	4 118 650 244	1996	5 786 776 201	2016	7 423 834 158
1957	2 848 060 613	1977	4 193 794 699	1997	5 867 328 462	2017	7 507 990 494
1958	2 899 688 319	1978	4 268 758 390	1998	5 947 157 474	2018	7 591 515 998
1959	2 952 829 301	1979	4 344 292 968	1999	6 026 548 295	2019	7 674 314 922
1960	3 008 337 351	1980	4 420 957 100	2000	6 105 725 477	2020	7 756 041 003
1961	3 064 572 222	1981	4 499 346 118	2001	6 185 028 231	2021	7 851 163 856
1962	3 122 342 316	1982	4 579 073 550	2002	6 264 168 230	2022	7 948 118 521
1963	3 181 956 882	1983	4 660 399 347	2003	6 343 448 736	2023	8 046 949 318
1964	3 243 686 348	1984	4 743 637 344	2004	6 423 033 915	2024	8 147 701 969
1965	3 308 102 778	1985	4 829 473 423	2005	6 503 507 778		
1966	3 375 113 774	1986	4 917 794 826	2006	6 584 702 481		
1967	3 444 745 982	1987	5 008 635 951	2007	6 666 737 393		
1968	3 516 519 814	1988	5 100 973 495	2008	6 749 422 837		
1969	3 590 108 316	1989	5 193 588 212	2009	6 832 961 603		
1970	3 664 557 571	1990	5 284 512 394	2010	6 916 843 009		

Идентификация параметров модели Ферхюльста-Пирла по данным 1951-2010 годов таблицы 5 методом минимизации квадратичного функционала невязки даёт значения: $a=0.2467434446E-1$, $b=0.1676574863E-2$. Минимизация функционала выполнялась с помощью генетического алгоритма [16], методом дифференциальной эволюции [19], поскольку его рельеф имеет ярко выраженный овражный характер.

Используем построенную модель для прогноза на 2011 – 2024 годы, и сравним результаты с реальными данными.

На рис. 37 (а) приведены предсказания модели (сплошная кривая) и реальные данные (отмечены крестиками). Максимальная относительная ошибка модели на промежутке 2011 – 2024 годов не превосходит 2%. На 2024 год модель предсказывает численность населения 8 250 104 954 человек. Относительная ошибка модели составляет примерно 1,3%.

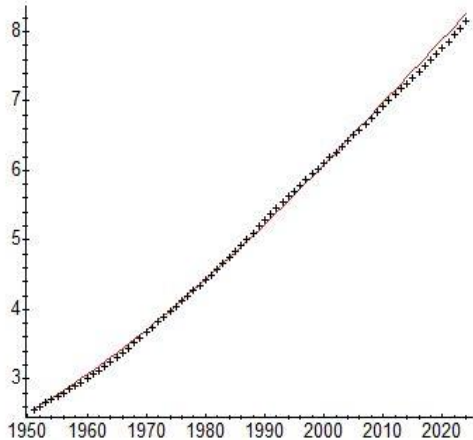


Рис. 37 (а)

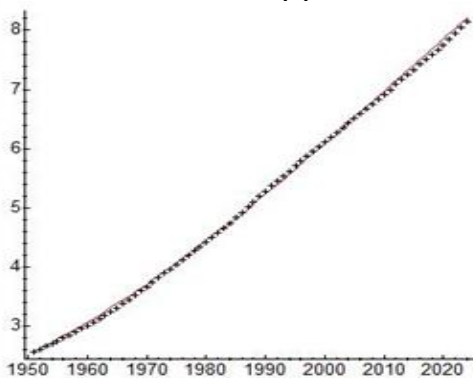


Рис. 37 (б)

Рис 37. Предсказания модели – сплошная линия. Крестиками отмечены реальные данные. По горизонтали – годы, по вертикали численность в миллиардах человек. (а) – модель Ферхюльста. (б) – обобщенная модель Ферхюльста.

На промежутке времени 1951 – 2200 годов модель предсказывает стабилизацию численности населения на уровне 13-14 млрд. человек к 2200 году (рис. 38).

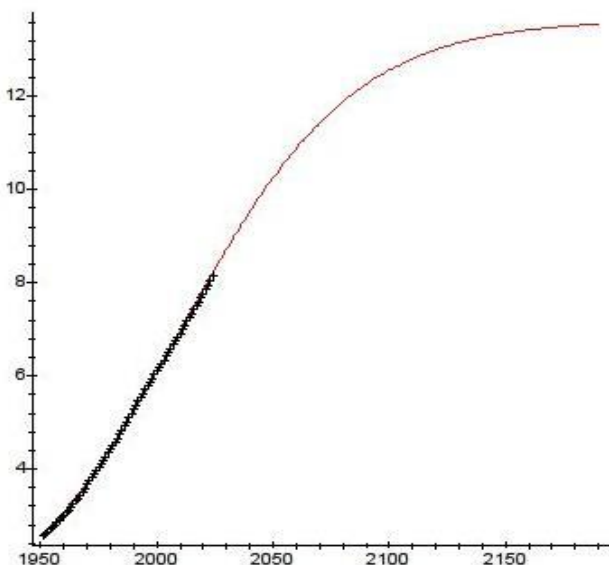


Рис 38. Предсказания модели до 2200 года. По горизонтали – время, по вертикали – численность населения Земли в миллиардах человек. Модель построена по данным за 1951-2024 годы.

Однако, закон, учитывающий ограниченность ресурсов планеты может быть иным, например $-bx^{2+\varepsilon}$. В этом случае приходим к обобщенной логистической модели Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^{2+\varepsilon}$$

Идентификация параметров этой модели методом наименьших квадратов минимизации квадратичного функционала невязки генетическим алгоритмом дает значения $a=0.2392478740e-1$, $b=0.1227119833e-2$, $\varepsilon=0.1360824684$. Сравнение предсказаний обобщенной модели с реальными данными на 2011 – 2024 год приведено на рис. 37 (б). Максимальная относительная ошибка обобщенной модели на промежутке 2011 – 2024 годов не превосходит 1,4%. На 2024 год модель предсказывает 8 207 668 775 человек, что соответствует относительной ошибке примерно 0,7%. Таким образом, обобщенная модель позволяет делать несколько более точные предсказания, на небольших временах экстраполяции, од-

нако, при этом, следует иметь ввиду, что если решение классической модели Ферхюльста может быть получено аналитически, то в обобщенной модели возникают дополнительные сложности – решение дифференциального уравнения приходится строить численным методом (в данном случае решение вычислялось методом Рунге-Кутты-Фальберга 4-го порядка точности [8, 4, 9]).

Следует заметить, что модели роста народонаселения планеты кроме Мальтуса и Ферхюльста изучались различными авторами [13, 11, 12, 17] и др. Так, по заданию так называемого «Римского клуба» в 1972 г. группой Медоуз Д. и др. (как сообщается в соответствующей публикации) было выполнено исследование и опубликован доклад «Пределы роста. Доклад по проекту Римского клуба: сложное положение человечества» [13], описывающий возможные сценарии развития человечества. К сожалению, в данной, широко известной популярной версии доклада содержатся лишь результаты моделирования, но при этом, не описаны методы и способы построения самой модели, что не даёт возможности её верификации. В некоторых из этих моделей имеется момент времени, в котором численность населения превышает возможности, которые может обеспечить планета. Этот момент называют сингулярностью. В качестве мер, препятствующих коллапсу цивилизации в рамках капиталистического способа производства, и вытекающих из анализа таких моделей являются: сокращение роста промышленного производства, контроль рождаемости (сокращение населения), тотальный контроль над поведением каждого индивидуума (в рамках общества, имеющего дешевую техническую возможность свободного обмена информацией). Известный просветитель науки Сергей Петрович Капица в работах [11, 12], также изучает этот вопрос. Им предложена модель, описывающая так называемый демографический переход, исключая сингулярность, и прогнозирующая стабилизацию численности населения планеты на уровне 10-12 млрд. человек. Кроме того, возможны сценарии вне рамок капиталистической модели развития, т.е. модели, в которых целевой функцией не является функция максимизации прибыли. Заметим, что в рамках некапиталистического пути развития человечества можно снизить нагрузку на окружающую среду по самым скромным оценкам (выбросы, отходы и потребление природных ресурсов) минимум на 2 – 4 порядка, т. е. от 100 до 10 000 раз, поскольку в современные продукты производства *сознательно* закладывается фактор ненадежности (*запланированное устаревание*), обеспечивающий выход продукта из строя по завершении гарантированного срока эксплуатации. В рамках некапиталистической парадигмы

планета может обеспечить ресурсами значительно большее количество народонаселения.

Далее, следуя работам В.И. Арнольда [2] рассмотрим несколько жестких и мягких математических моделей. Под *жесткой* моделью понимают модель, коэффициенты которой являются константами. Под *мягкой* моделью понимают модель, коэффициенты которой являются функциями, обычно обеспечивающими отрицательную обратную связь.

МОДЕЛЬ ПРОТИВОБОРСТВА ДВУХ АРМИЙ (АРНОЛЬД В.И.)

Простейшая модель противоборства двух армий может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -ax \end{cases}$$

Здесь $x(t) \geq 0$ и $y(t) \geq 0$ численности противостоящих армий в момент времени t , коэффициент a – эффективность оружия армии x , коэффициент b – эффективность оружия армии y (эффективность оружия означает, что каждый солдат армии x убивает в единицу времени a солдат армии y , и, аналогично для коэффициента b). Точкой обозначена производная соответствующей функции по времени (т.е. скорость ее изменения). Поделив первое уравнение на второе и, проделав простые вычисления, получим точное решение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax} \quad \Rightarrow \quad axdx = bydy \quad \Rightarrow \quad ax^2 = by^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad ax^2 - by^2 = C_1$$

Эволюция численности армий происходит вдоль ветви гиперболы $x^2 - by^2 = C_1$ при некотором значении константы C_1 . Это семейство гипербол на плоскости xOy разделено прямыми $\pm\sqrt{ax} = \sqrt{by}$.

Если начальная точка – это точка (2) на рис. 39, то выигрывает армия x . Если начальная точка – это точка (1), то выигрывает армия y . Если же начальная точка (3) лежит на разделяющей прямой, то обе армии взаимно истребляют друг друга – к их обоюдному удовлетворению (их численности с течением времени стремятся к нулю). Правда, для этого потребуется бесконечно большое время:

вычисление показывает, что динамика точки (3) описывается уравнениями:

$$x(t) = C_1 e^{-t\sqrt{ab}}, \quad y(t) = C_1 \sqrt{\frac{a}{b}} e^{-t\sqrt{ab}}, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \sqrt{\frac{b}{a}} y_0 \right),$$

 (x_0, y_0) – начальные координаты точки (3) на разделяющей прямой.

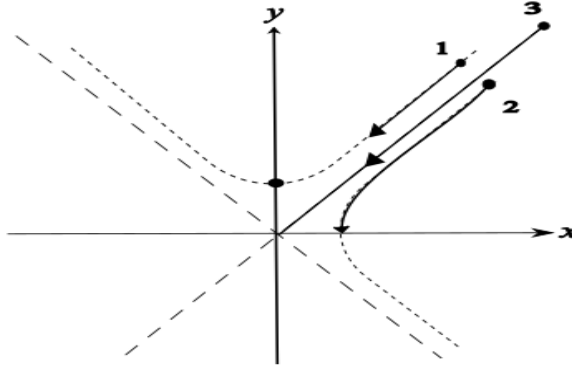


Рис. 39. Динамика системы на плоскости xOy .

Вывод модели состоит в следующем: для победы над вдвое многочисленным противником требуется оружие в 4 раза эффективнее. (на это указывает $\sqrt{\quad}$). Ясно, что такая модель сильно идеализирована. В более сложном случае коэффициенты a и b могут быть, вообще говоря, функциями, например $a(x, y)$ и $b(x, y)$. Как в этом случае изменятся выводы модели? В этом случае мы имеем так называемую «мягкую» модель – модель, коэффициенты которой подвержены изменениям (в отличие от предыдущей «жесткой» модели, коэффициенты которой a и b были постоянными числами). Аккуратное исследование покажет, что в этом случае качественно рисунок 39 не изменится. Траектории (1), (2) и (3) лишь немного искривятся (рис. 40).

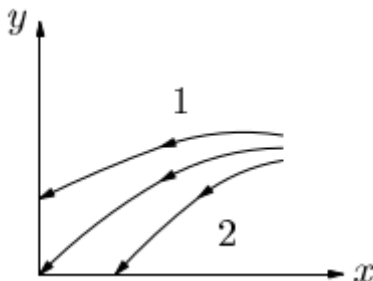


Рис. 40. Структурная устойчивость.

Математики скажут, что картина на рис. 40 структурно устойчива (изменится количественно, но качественно не разрушится).

ОПТИМИЗАЦИЯ, КАК ПУТЬ К КАТАСТРОФЕ (АРНОЛЬД В.И.)

Обозначим через $x(t)$ количество некоторой промысловой рыбы в водоеме (скажем, горбуши) в момент времени t . В случае, когда имеется неограниченное количество пищи для питания, ее прирост (скорость воспроизводства) будет расти пропорционально (с коэффициентом k) имеющемуся количеству:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Это – известная модель Томаса Роберта Мальтуса, упомянутая выше. Его модель описывает, в частности, рост количества народонаселения Земли (в нашей задаче – количества рыбы), в условиях неограниченных ресурсов и пространства. Эта модель предсказывает экспоненциальный рост $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$. В реальности, же это не так. Когда $x(t)$ становится слишком большим, в дело вступают факторы, ограничивающие рост $x(t)$, например, ограниченность пищевых ресурсов. Жесткая модель Мальтуса (с постоянным k) заменяется на мягкую модель с переменным коэффициентом $k(x) = a - bx$, что приводит к хорошо известной «логистической модели» Ферхюльста:

$$\dot{x} = ax - bx^2$$

В этой модели слагаемое $-bx^2$ учитывает факторы, ограничивающие рост $x(t)$. Выбором единиц измерения можно положить, что $a = 1$, $b = 1$. Тогда

$$\dot{x} = x - x^2$$

Логистическая модель демонстрирует при $x > \frac{1}{2}$ резкое отличие от модели Мальтуса (рис. 41 (с)). Вместо экспоненциального роста её решения с течением времени выходят на стационарный режим ($B=1$).

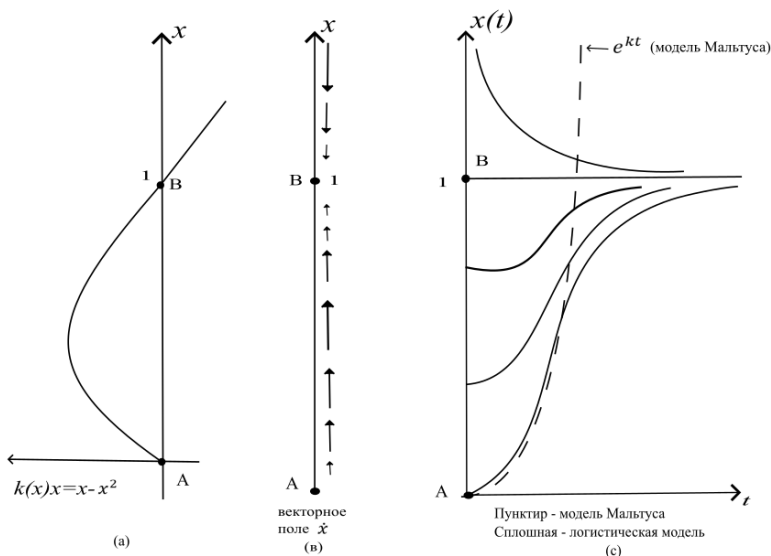


Рис. 41. Динамика логистической модели.

Значения $x=0$ и $x=1$ (точки A и B на рис. 41) в логистической модели являются особыми. Они называются положениями равновесия, т.к. при этих значениях x остается постоянным с течением времени. Причем, равновесие (A) $x=0$ является неустойчивым, т.к. сколь угодно малое положительное отклонение от $x=0$ приведет к тому, что $x(t)$ начнет с течением времени возрастать, стремясь к 1, а равновесие (B) $x=1$, является устойчивым, т.к. любые малые отклонения от этого значения приведут к тому, что $x(t)$ с течением времени будет стремиться к 1.

Если ведется отлов рыбы со скоростью отлова (интенсивностью) c (количество рыбы отлавливаемой в единицу времени), то модель следует заменить на

$$\dot{x} = x - x^2 - c$$

Поведение такой модели существенно зависит от значения c , и качественно меняется при критическом значении $c = 1/4$. (рис. 42)

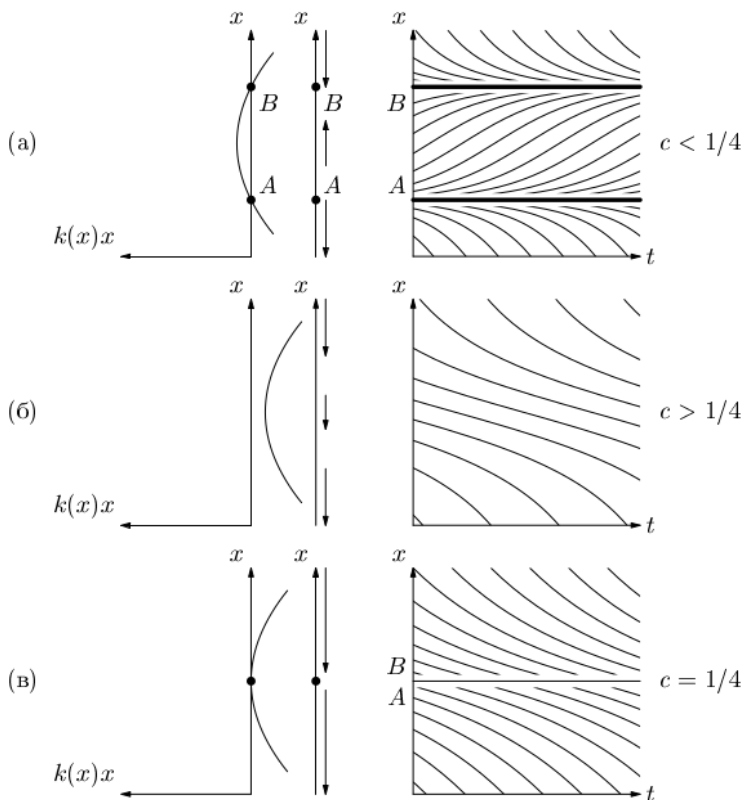


Рис. 42. Модель с отловом при разных значениях параметра c .

При $c > 1/4$ (рис. 42 б) популяция рыбы вымирает при любом начальном ее количестве $x(0)$. Это – ситуация перелома, когда слишком интенсивный отлов ведет к полному исчезновению рыбы.

При $c < 1/4$ (рис. 42 а) (недолов) имеются два положения равновесия (А) и (В), при которых значение численности рыбы неизменно с течением времени. Однако равновесие (А) неустойчиво: если по каким-либо случайным причинам количество рыбы окажется меньше значения А, популяция полностью вымрет за конечное время. Если же количество рыбы окажется чуть больше А,

то численность рыбы начнёт расти, приближаясь к значению B . Равновесие (B) устойчиво: если по каким-либо причинам численность рыб отклонится от этого значения, ничего страшного не произойдет – с течением времени её численность снова будет приближаться к значению B .

Наибольшая интенсивность отлова достигается при $c = 1/4$. (рис.42 в) Это оптимальное (наибольшее значение) при котором ещё можно вести отлов так, чтобы популяция рыбы не погибла. Однако, при отлове с такой интенсивностью рано или поздно произойдет катастрофа – популяция погибнет. Дело в том, что при любом количестве рыбы $x(t) > 1/4$ с течением времени её количество будет уменьшаться, приближаясь к критическому значению $1/4$. Если по какой-либо случайной причине (а такие причины в реальности всегда есть) количество рыбы изменится на небольшую величину (малая случайная флуктуация) и станет меньше $1/4$, популяция неизбежно вымрет. Таким образом, оптимизация отлова при наличии случайных флуктуаций неизбежно ведет к гибели популяции.

Одно из возможных решений проблемы состоит в том, чтобы согласовать значение $c < 1/4$ с величиной случайных флуктуаций таким образом, чтобы ширина зоны (AB) на рис. 42 а) была заведомо больше амплитуды любой флуктуации.

Другое решение состоит в замене «жесткого» постоянного значения c , «мягким» на значение, зависящее от имеющегося количества $x(t)$ рыбы, например $c = \beta x$. Это – введение отрицательной обратной связи в систему. Тогда модель принимает вид:

$$\dot{x} = x - x^2 - \beta x$$

При $\beta < 1$ с течением времени устанавливается состояние B , которое устойчиво (рис. 43).

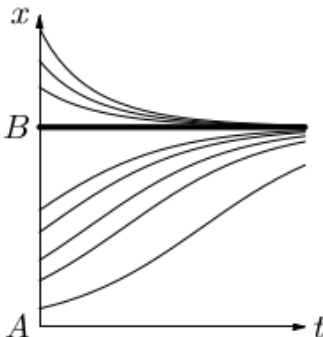


Рис. 43. Модель с отрицательной обратной связью.

В этой модели оптимальное значение $\beta = 1/2$. Более того, отклонение β от $1/2$ не приводит к самоуничтожению популяции, а лишь к небольшому уменьшению «дохода» (интенсивности отлова), который восстанавливается с течением времени. Таким образом, *во-первых, оптимизация не всегда ведет к улучшению, более того, может приводить к катастрофе. Во-вторых, введение отрицательной обратной связи стабилизирует систему, делая её устойчивой к случайным флуктуациям, и которая самоуничтожилась бы при введении жестких оптимальных параметров.*

ОПАСНОСТЬ МНОГОСТУПЕНЧАТОГО УПРАВЛЕНИЯ (АРНОЛЬД В.И.)

Пусть производится некоторый продукт. Его количество в момент времени t обозначим $x(t)$. Пусть решение о скорости его производства $\dot{x} = y$ принимается руководителем первого ранга. В свою очередь, поведение руководителя y о скорости производства управляется руководителем z второго ранга $\dot{y} = z$, и так далее. Генеральный руководитель реализует обратную связь: его решение основывается не на решениях руководителей вышестоящего ранга, а на интересах дела. Например, он желает достичь значения X для величины $x(t)$. Тогда он будет давать распоряжения увеличить $x(t)$ предыдущему руководителю, если уровень X не достигнут, и уменьшить $x(t)$ предыдущему руководителю, если уровень X превзойден. Простейшая модель имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -k(x - X) \end{cases}, \quad k > 0$$

Эту систему дифференциальных уравнений можно привести к одному дифференциальному уравнению третьего порядка (в общем случае к уравнению порядка n):

$$x^{(n)} = -k(x - X)$$

В нашем случае $n = 3$. Это уравнение может быть решено аналитически. Его решения определяются тем, отрицательны ли вещественные части характеристического уравнения

$$\lambda^n = -k$$

Корни этого уравнения – комплексные числа, лежащие в вершинах правильного n -угольника на комплексной плоскости. При $n \geq 3$ некоторые корни *обязательно* лежат в правой полуплоскости (рис.44). Это означает, что управление при $n \geq 3$ объективно неустойчиво.

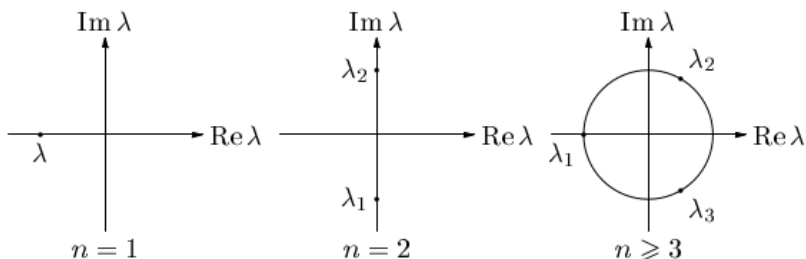


Рис. 44. Корни характеристического уравнения.

Вывод модели: многоступенчатое управление при $n \geq 3$ объективно неустойчиво. Двухступенчатое управление (при $n = 2$) приводит к периодическим колебаниям, но не вызывает их катастрофического нарастания. Настоящую *устойчивость* обеспечивает *только одноступенчатое* управление, когда управляющее лицо полностью отвечает за результаты своего управления.

Резюме: введение дополнительных контуров (промежуточных звеньев) в систему управления *объективно* приводит к неустойчивости системы в целом (независимо от исполнителей).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует заметить, что построение и исследование математических моделей составляет основу, фундамент, можно сказать – «сердце» современной прикладной математики. Безусловно, иные подходы к построению математических моделей реальных процессов и объектов далеко выходят за рамки данного пособия и не рассмотрены здесь. Авторы не стремились «объять необъятное». Задача авторов была скромнее: на примерах некоторых *самых простых* моделей дать начальное представление об этой крайне интересной и полезной области знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. Учеб. пособие – СПб, 2009.
2. Арнольд В.И. Жесткие и мягкие математические модели. – М.: МПНМО, 2008.
3. Ашихмин В.Н., Гитман М.Б. Введение в математическое моделирование. Учеб. пособие под ред. П.В. Трусова – М.: Университетская книга, Логос, 2007.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 1987.
5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб.- М.: Высш. шк., 2002.
6. Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1991 г.
7. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. (в 2-х томах), М: Мир, 1990.
8. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. 3-е изд. Наука, 1967.
9. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. М: Наука, 1989.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
11. Капица С.П. Математическая модель роста народонаселения мира, Матем. моделирование, 1992, том 4, номер 6, с.65–79.
12. Капица С.П. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле: Очерк теории роста человечества. Москва, 1999.

13. Медоуз Д. и др. Пределы роста. Пер. с англ.; предисл. Г. А. Ягодина. М.: Изд-во МГУ, 1991.
14. Мохрачева Л.П. Типовые математические схемы моделирования. Примеры и задачи. Учеб. пособие – Екатеринбург, 2018.
15. Поршневу С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. М.: Горячая линия – Телеком. 2003.
16. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. Пер. с польского И.Д. Рудинского. М.: : Горячая линия – Телеком. 2006.
17. Садовничий В.А., Акаев А.А., Коротаев А.В., Малков С.Ю. Моделирование и прогнозирование мировой динамики / Научный совет по Программе фонд. исслед. Президиума Российской академии наук «Экономика и социология знания». – М.:ИСПИ РАН, 2012.
18. Самарский А.А. Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.–2-е изд., испр. – М: Физматлит, 2005.
19. *K. Price, R. Storn, J. Lampinen.* Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization. Springer, 2005.
20. https://countrymeters.info/ru/World#historical_population